CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. **HOJA 6.**

1) Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que resultan de dividir el polinomio

$$P(X) = 3X^5 + 2X^3 + X + 1 \text{ entre el } Q(X) = 3X^2 + 1 .$$

Hallarlos primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{Z}_5[X]$.

2) Sean $P,\ Q \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que P y Q son *coprimos* si y sólo si $P + Q$, $P \cdot Q$ también lo son.

3) Calcular el máximo común divisor $D(x)$ de los polinomios

$$P(X) = X^5 - 5X^3 + 4X \ , \ Q(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6.$$

Encontrar dos polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X) \cdot P(X) + B(X) \cdot Q(X) = D(X)$.

4) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que $A(X)(X^2 + 2X - 2) + B(X)(X^2 + X - 1) = 1$.

5) Hallar un polinomio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $X^2 + 1$ divida a $P(X)$, y $X^3 + 1$ divida a $P(X) - 1$, siendo el grado de P el mínimo posible.

6) (a) Hallar un polinomio $P(X)$, del grado mínimo posible, que cumpla las siguientes condiciones:

$$P(X + 1) - P(X) = X \quad \text{y} \quad P(0) = 1 .$$

(b) Probar que todo $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ cumple:

$$Q(X) = P(X + 1) - P(X) \text{ , para algún } P(X) \text{ de grado} = 1 + grado(Q) .$$

Indicación: los coeficientes de Q son **función lineal** *de los de P, y sólo es $Q = 0$ si $gr(P) = 0$.*

(c) ¿Qué relación tiene esto con las sumas $\sum_{k=0}^{n} p(k)$ de los valores de un polinomio $p(x)$ en los $k \in \mathbb{N}$? ¿Qué cambia si usamos cualquier $a \in \mathbb{Q}$ en $P(X + a) - P(x)$, en lugar del 1?

7) Hallar los ceros racionales de los polinomios:

$$20X^3 - 56X^2 + 33X + 9 \ , \ \ 12X^5 - 17X^4 + 7X^3 - 5X^2 - 22X - 5 .$$

8) Hallar todos los polinomios $P(X)$ de grado tres que cumplan: $P(0) = P(1) = P(2) = 1$.
Lo mismo si pedimos $P(0) = b_0$, $P(1) = b_1$, $P(2) = b_2$, para constantes dadas b_i .

9) Sea $P(X) = X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 27X - 54$.
Hallar todos los ceros de $P(X)$, con sus multiplicidades. Razonar y comprobar lo que esos ceros implican para el máximo común divisor de $P(X)$ y su derivada $P'(X)$.

10) Demostrar que $2 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ son, cada uno de ellos, cero de algún polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Hallar esos polinomios.

11) (a) Demostrar que para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, existen infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[X]$.
Sugerencia: recordar la prueba de Euclides de que hay en $\mathbb{Z}$ infinitos números primos.

(b) Deducir que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo con un número finito de elementos (por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ para p primo) habrá en $\mathbb{K}[X]$ polinomios irreducibles de grado arbitrariamente grande.

12) (a) Para un producto de polinomios $(a_0 + \cdots + a_k X^k)(b_0 + \cdots + b_j X^j) = c_0 + \cdots + c_n X^n$, con coeficientes $\in \mathbb{Z}$ y grados $j, k < n$, probar por inducción que

si para un primo dado $p \in \mathbb{N}$, $p \nmid b_0$, pero $\forall i \leq k$, $p \mid c_i$, entonces $\forall i$ se tiene $p \mid a_i$.

(b) Deducir de (a) el ***criterio de irreducibilidad de Eisenstein:***
Si para algún primo p se tiene $p \mid c_i$ *para* $i < n$, $p \nmid c_n$, $p^2 \nmid c_0$,
entonces el polinomio $c_0 + \cdots + c_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Deducir que $\forall\ n > 0$ existen infinitos polinomios de grado n que son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

13) Sea $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2$. Descomponer $P(X)$ en polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

14) ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 3$? Justificar la respuesta.

15) Determinar los polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}_2[X]$ de grados $1, 2, 3$ y 4.

16) Descomponer el polinomio $p(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ en sus factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{Z}_p[X]$, para $p = 2, 3, 5$ y 7.

17) (a) Probar que un polinomio $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ es irreducible si y solamente si es irreducible el polinomio $Q(X) = P(X + a)$ para cualquier $a \in \mathbb{K}$.

(b) Probar que $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ para cualquier primo p .

Indicación: aplicar el criterio de Eisenstein al $P(X + 1)$, recordando lo que es $P(X)(X - 1)$.

18) Estudiar la reducibilidad sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios: $1 + X + X^4$ y $1 - X + X^4$.

19) Un polinomio $P(X_1, \ldots, X_d)$ en las d *variables* X_j se llama:

homogéneo, si es una suma de monomios $X_1^{k_1} \cdots X_d^{k_d}$ de un mismo grado $k = \sum_{j=1}^{d} k_j$;
simétrico, si para cualquier permutación $i \to \sigma(i)$ de las variables se tiene:

$$P(X_1, \ldots, X_d) = P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(d)}) \ .$$

(a) Explicar si el polinomio $Q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ es homogéneo y si es simétrico.

(b) Hacer lo mismo para el polinomio $P(X_1, X_2, X_3) = (1 + X_1)(1 + X_2)(1 + X_3)$. Luego, descomponerlo en una suma de polinomios que tengan ambas propiedades.

(c) Los sumandos obtenidos, como en (b), al separar el producto $(1 + X_1) \cdots (1 + X_d)$ en suma de polinomios homogéneos simétricos, se llaman los ***polinomios simétricos elementales*** en las d variables X_j .

Llamando S_k al que es de grado k , expresar el polinomio Q del apartado (a) como un polinomio $g(S_1, S_2)$, en cuyas dos variables se "sustituyen" los polinomios $S_1(X_1, X_2, X_3), S_2(X_1, X_2, X_3)$.

(d) Se puede probar que la operación del apartado anterior es posible, en cualquier número d de variables, con cualquier polinomio simétrico $P(X_1, \ldots, X_d)$. Repetirla con los siguientes:

$$P_4(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 X_2 X_3 + X_2^2 X_3 X_1 + X_3^2 X_1 X_2 + 4 \ ,$$

$$P_5(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 X_2 X_3 + X_2^3 X_3 X_1 + X_3^3 X_1 X_2 + (X_2 X_3 + X_3 X_1 + X_1 X_2)^2 \ .$$

Esta vez habrá que usar polinomios $g(S_1, S_2, S_3)$.

En general, hay que usar algún $g(S_1, \ldots, S_d)$ para obtener cada polinomio simétrico en las variables $X_1, \ldots, X_d$.

20) Sea $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, de grado $n > 2$ y con $a_0 \neq 0$.

(a) Probar que $-a_1/a_0$ es la suma de *los inversos de las raíces* (en $\mathbb{C}$) de $P(X)$.

(b) Probar que $\dfrac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2}$ es la suma de *los inversos de los cuadrados de las raíces* de $P(X)$.

(c) En Cálculo se prueba que

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots \ ,$$

usando desarrollos de Taylor.

Suponiendo que (b) es válido para "polinomios infinitos", deducir una fórmula para $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

<u>Nota</u>: *La fórmula es correcta, pero la justificación de que* (b) *es aplicable, es muy complicada.*