CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2011-2012. **HOJA 1.**

1) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural n sea divisible por 6.

a) n es divisible por 3;
b) n es divisible por 12;
c) $n = 24$;
d) n^2 es divisible por 6;
e) n es par y divisible por 3;
f) n es par o divisible por 3.

2) Explica por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$, y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.

3) Sean A, B, C tres proposiciones para las que podemos probar que $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow C$ son verdaderas. Comprueba que también es verdadera $A \Rightarrow C$.
¿Podemos deducir algo sobre la verdad o falsedad de A, B ó C?

4) En las siguientes proposiciones, x, y son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.

a) $\forall x\, ((x > 0) \Rightarrow \exists y\, ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
b) $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
c) $\exists x\, (1 < x^2 < x)$
d) $\forall y\, \exists x\, ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$

5) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

6) Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.

a) $\forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x\, \forall y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$.
b) $\exists x\, \forall y,\ x < y < x + 2$ y $\forall x\, \exists y,\ x < y < x + 2$.

7) Sean m y n números naturales. Demuestra que si m y n son potencias de 3, entonces $m + n$ no es nunca una potencia de 3.

8) Demuestra por reducción al absurdo que $\log_3 1215$ es irracional.

9) Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma a^2 donde a es un número natural.
Demuestra que si un número natural $n > 0$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.

10) Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos: $1+2+\cdots+n$. Y otra para la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética: $a + kd$, $k = 0, 1, \ldots$

11) Halla la suma de las n primeras potencias de r: $r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$. Halla una fórmula general para la suma de las n primeros términos de una progresión geométrica cr^k, $k = 0, 1, \ldots$

12) Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.
Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman π **radianes.**

13) Dado el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, probar que el cambio de variable $x = y - b/2a$ lo convierte en una expresión de la forma $ay^2 + constante$; *(eso se llama* **completar el cuadrado**). Escribir esa "*constante*" (que será una expresión en los coeficientes a, b, c del polinomio) y deducir para qué valores de y se tendrá $p(y - b/2a) = 0$. Por fin, deducir de ahí la conocida fórmula para las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

14) Usando la regla de derivación del producto, demuestra por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, la derivada de x^n es nx^{n-1}.

15) Demostrar por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

16) a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$.

b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$.

c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.

d) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $b_n = 7^n - 4^n$ es divisible por 3.

17) Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

18) Demostrar que todo número natural mayor que uno, es producto de números primos.

19) Probar que hay infinitos primos. Es decir, que hay más de n primos distintos para todo $n \in \mathbb{N}$.

20) Demostrar que $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

21) Demostrar, para todo $q \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2}) \cdots (1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}} - 1}{q-1}.$$

22) Sea $P(n)$ la siguiente propiedad de un $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

a) Demostrar que $P(n)$ verdadera $\Longrightarrow P(n+1)$ verdadera.

b) ¿Es $P(n)$ verdadera para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

23) Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

24) Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios S, T, U y V. *(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).*

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$

b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$

c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$

d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$

e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

25) Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$.
Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

26) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

27) Sean A, B, C conjuntos dados tales que $B \subset A$. Describir en cada caso los conjuntos X que satisfacen las ecuaciones:

i) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, si sabemos que $A \subset C$. **ii)** $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$, si sabemos que $A \cap C = \emptyset$.