# Ramanujan, más allá del mito

**Fernando Chamizo** (UAM-ICMAT)

Universidad Autónoma de Madrid

Universidad Complutense de Madrid

17 de noviembre de 2021

G.H. Hardy al comienzo de su libro "Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work":

> [Ramanujan is] the most romantic figure in the recent history of mathematics; a man whose career seems full of paradoxes and contradictions, who defies almost all canons [...] all of us will probably agree in one judgment only, that he was in some sense a very great mathematician.

Es un mito considerar a Ramanujan como ejemplo de lo que habitualmente se denomina *genio incomprendido*.

- Llamó la atención de prácticamente todos los matemáticos con los que trabó contacto.
- Recibió algunos honores en vida e inmediatamente tras su muerte inusitados para alguien de su procedencia y formación.
- Publicó en vida más de 30 artículos en revistas internacionales.
- Sus "Collected papers" se publicaron en una editorial prestigiosa siete años después de su fallecimiento.

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (
  s

Casa natal de Ramanujan en Erode

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

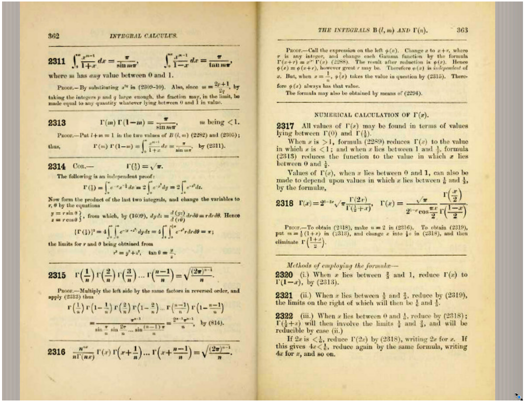

Casa de Ramanujan en Kumbakonam

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (
  s
- ( a de
  e



362 *INTEGRAL CALCULUS.*

**2311** $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin m\pi}$, $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1-x}\,dx = \frac{\pi}{\tan m\pi}$,

where $m$ has *any* value between 0 and 1.

PROOF.—By substituting $x^{2q}$ in (2309–10). Also, since $m = \frac{2p+1}{2q}$, by taking the integers $p$ and $q$ large enough, the fraction may, in the limit, be made equal to any quantity whatever lying between 0 and 1 in value.

**2313** $\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$, $m$ being $<1$.

PROOF.—Put $l+m=1$ in the two values of $B(l,m)$ (2282) and (2305); thus, $\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin m\pi}$, by (2311).

**2314** COR.— $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

The following is an independent proof:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz.$$

Now form the product of the last two integrals, and change the variables to $r, \theta$ by the equations $\left.\begin{array}{l} y = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$, from which, by (1609), $dy\,dz = \frac{d(yz)}{d(r\theta)}\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$. Hence

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)}\,dy\,dz = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \pi;$$

the limits for $r$ and $\theta$ being obtained from

$$r^2 = y^2+z^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{z}.$$

**2315** $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}$.

PROOF.—Multiply the left side by the same factors in reversed order, and apply (2313) thus

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}, \text{ by (814).}$$

**2316** $\frac{n^{nx}}{n\Gamma(nx)}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}$.

*THE INTEGRALS* $\mathrm{B}(l,m)$ *AND* $\Gamma(n)$. 363

PROOF.—Call the expression on the left $\phi(x)$. Change $x$ to $x+r$, where $r$ is any integer, and change each Gamma function by the formula $\Gamma(x+r) = x^{|r}\,\Gamma(x)$ (2288). The result after reduction is $\phi(x)$. Hence $\phi(x) = \phi(x+r)$, however great $r$ may be. Therefore $\phi(x)$ is *independent* of $x$. But, when $x = \frac{1}{n}$, $\phi(x)$ takes the value in question by (2315). Therefore $\phi(x)$ always has that value.

The formula may also be obtained by means of (2294).

NUMERICAL CALCULATION OF $\Gamma(x)$.

**2317** All values of $\Gamma(x)$ may be found in terms of values lying between $\Gamma(0)$ and $\Gamma(\frac{1}{2})$.

When $x$ is $>1$, formula (2289) reduces $\Gamma(x)$ to the value in which $x$ is $<1$; and when $x$ lies between 1 and $\frac{1}{2}$, formula (2313) reduces the function to the value in which $x$ lies between 0 and $\frac{1}{2}$.

Values of $\Gamma(x)$, when $x$ lies between 0 and 1, can also be made to depend upon values in which $x$ lies between $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{3}$, by the formulæ,

**2318** $\Gamma(x) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}$, $\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}$.

PROOF.—To obtain (2318), make $n=2$ in (2316). To obtain (2319), put $m = \frac{1}{2}(1+x)$ in (2313), and change $x$ into $\frac{1}{2}x$ in (2318), and then eliminate $\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)$.

*Methods of employing the formulæ*—

**2320** (i.) When $x$ lies between $\frac{2}{3}$ and 1, reduce $\Gamma(x)$ to $\Gamma(1-x)$, by (2313).

**2321** (ii.) When $x$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$, reduce by (2319), the limits on the right of which will then be $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{3}$.

**2322** (iii.) When $x$ lies between 0 and $\frac{1}{6}$, reduce by (2318); $\Gamma(\frac{1}{2}+x)$ will then involve the limits $\frac{1}{2}$ and $\frac{2}{3}$, and will be reducible by case (ii.)

If $2x$ is $<\frac{1}{6}$, reduce $\Gamma(2x)$ by (2318), writing $2x$ for $x$. If this gives $4x<\frac{1}{6}$, reduce again by the same formula, writing $4x$ for $x$, and so on.

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (
- … de

2311 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin m\pi}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1-x}\,dx = \frac{\pi}{\tan m\pi},$

where $m$ has *any* value between 0 and 1.

PROOF.—By substituting $x^{2q}$ in (2309–10). Also, since $m = \frac{2p+1}{2q}$, by taking the integers $p$ and $q$ large enough, the fraction may, in the limit, be made equal to any quantity whatever lying between 0 and 1 in value.

---

2313 $\displaystyle\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi},$ $m$ being $<1$.

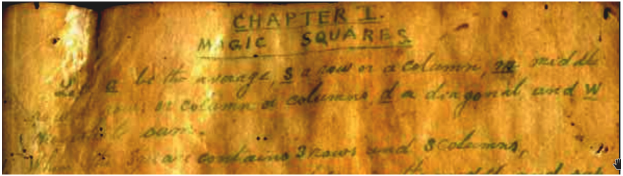
PROOF.—Put $l+m=1$ in the two values of $B(l, m)$ (2282) and (2305); thus, $\displaystyle\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin m\pi},$ by (2311).

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.
- (c. 1903) Comienza a recoger sus descubrimientos en cuadernos.

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (
  s
- ( … a de
  e
- (
  c




Primer capítulo del primer cuaderno

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.
- (c. 1903) Comienza a recoger sus descubrimientos en cuadernos.
- (1904) y (1906) Pierde la posibilidad de una educación superior por su dedicación en exclusiva a las matemáticas.

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- ( … s
- ( … a de e
- ( … c
- ( … s … s.

Government Arts College

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.
- (c. 1903) Comienza a recoger sus descubrimientos en cuadernos.
- (1904) y (1906) Pierde la posibilidad de una educación superior por su dedicación en exclusiva a las matemáticas.
- (1909) Se casa con una niña de 10 años.

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

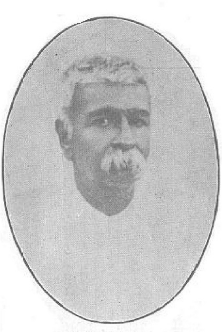
- ( s
- ( a de e
- ( c
- ( s .
- (

Janakiammal (1899–1994)

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.
- (c. 1903) Comienza a recoger sus descubrimientos en cuadernos.
- (1904) y (1906) Pierde la posibilidad de una educación superior por su dedicación en exclusiva a las matemáticas.
- (1909) Se casa con una niña de 10 años.
- (c. 1909) Ramachandra Rao, un matemático pudiente, le proporciona un sueldo mensual.

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan



Ramachandra Rao (1871–1936)

## Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- (1887) Nace en Erode en una familia pobre de la casta superior (brahmán).
- (1903) Saca de la biblioteca local un libro que es una lista de enunciados de 4417 teoremas.
- (c. 1903) Comienza a recoger sus descubrimientos en cuadernos.
- (1904) y (1906) Pierde la posibilidad de una educación superior por su dedicación en exclusiva a las matemáticas.
- (1909) Se casa con una niña de 10 años.
- (c. 1909) Ramachandra Rao, un matemático pudiente, le proporciona un sueldo mensual.
- (1912) Consigue un puesto de oficinista en Madrás (hoy Chennai).

# Momentos importantes en la vida de Ramanujan

- ( s
- ( a de e
- ( c
- ( s s.
- (
- ( I
- ( Chennai).

Ramanujan IT City

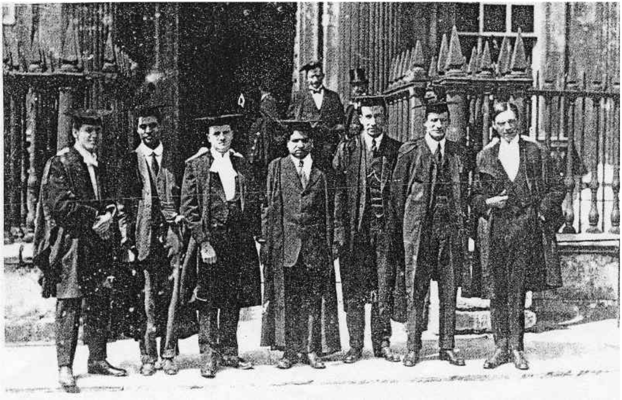
- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.

G.H. Hardy (1877–1947)

- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.
- (1914) Tras dudas ligadas a su casta, viaja a Cambridge.

21 Cromwell Road (Londres)

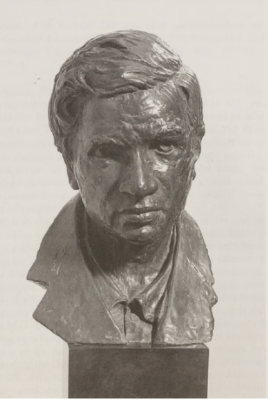
- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.
- (1914) Tras dudas ligadas a su casta, viaja a Cambridge.
- (1916) Se gradúa en Cambridge con la tesis “Números altamente compuestos”.



Con otros graduados

- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.
- (1914) Tras dudas ligadas a su casta, viaja a Cambridge.
- (1916) Se gradúa en Cambridge con la tesis "Números altamente compuestos".
- (1917) Cae gravemente enfermo (¿amebiasis?).

- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.
- (1914) Tras dudas ligadas a su casta, viaja a Cambridge.
- (1916) Se gradúa en Cambridge con la tesis “Números altamente compuestos”.
- (1917) Cae gravemente enfermo (¿amebiasis?).
- (1918) Es elegido *Fellow of the Royal Society*, el segundo indio en la historia de la sociedad.



Busto en la Royal Society

- (1913) Escribe la famosa carta al matemático G.H. Hardy quien queda impresionado y le invita.
- (1914) Tras dudas ligadas a su casta, viaja a Cambridge.
- (1916) Se gradúa en Cambridge con la tesis "Números altamente compuestos".
- (1917) Cae gravemente enfermo (¿amebiasis?).
- (1918) Es elegido *Fellow of the Royal Society*, el segundo indio en la historia de la sociedad.
- (1919) Vuelve a la India, todavía enfermo.
- (1920) Muere en Kumbakonam.

La famosa carta a Hardy está fechada el 16 de enero de 1913. Antes escribió cartas, que no se conservan, a otros dos profesores. Se conserva la respuesta de uno de ellos a través de una tercera persona. Le anima a leer más, a ordenar sus ideas y tratar de publicarlas. Parte de su respuesta es:

La famosa carta a Hardy está fechada el 16 de enero de 1913. Antes escribió cartas, que no se conservan, a otros dos profesores. Se conserva la respuesta de uno de ellos a través de una tercera persona. Le anima a leer más, a ordenar sus ideas y tratar de publicarlas. Parte de su respuesta es:

Mr. Ramanujan has fallen into the pitfalls of the very difficult subject of Divergent Series. Otherwise he could not have got the erroneous results you send me

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \infty = -\frac{1}{12}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \infty^2 = 0$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \infty^3 = \frac{1}{240}$$

**¿Qué habrías dicho tú?**

La carta consta de 11 secciones, dos de ellas perdidas.

**I.** (Distribución de los números primos).
**II.** (Distribución de primos en progresiones aritméticas).
**III.** (Otros resultados de teoría analítica de números).
**IV.** Teoremas sobre integrales.
**V.** Teoremas sobre sumación de series.
**VI.** Teoremas sobre transformación de series e integrales.
**VII.** Teoremas sobre aproximación de integrales y series.
[VIII].
**IX.** Teoremas sobre fracciones continuas.
[X].
**XI.** (Series divergentes).

En XI insiste en

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

y otras "igualdades" parecidas como

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

que formalmente es derivar $-(1+x)^{-1} = \sum(-1)^{n+1}x^n$ en $x = 1$.

Quizá escarmentado, lo pospone al final pero seguía muy orgulloso de su (poco interesante) teoría de series e integrales divergentes y empieza el cuerpo de su carta con una afirmación un poco ridícula sobre la función $\Gamma$ de Euler.

Es una suerte que Hardy pasara por alto toda la parte inicial porque **I**, **II** y **III** tienen poco que salvar («his argument is not merely "unrigorous" but in a more drastic sense "unsound"»).

**I.** Afirma que tiene una función (que no menciona) que aproxima $\#\{p < x\}$ con error menor que una constante. En una segunda carta da la función y no tiene tal propiedad.

**II.** Definiendo $D(x) = \#\{p < x,\ 4 \mid p+1\} - \#\{p < x,\ 4 \mid p-1\}$ Ramanujan dice que ha probado $\lim D(x) = +\infty$ pero se conocía (Littlewood) que $\liminf D(x) = -\infty$

**III.** Se enuncian varios resultados de forma imprecisa. El primero se reduce a que el número de puntos de $\mathbb{Z}^2$ en un triángulo grande se aproxima por el área y el último es un resultado de Landau.

Los teoremas vienen dados, en general, como simples fórmulas. Algunas de ellas son reconocibles. Otras son extrañas y sorprendentes.

[Enunciado adaptado] Si $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=-1}^{\infty}$ satisfacen $a_{n+1} = a_n + e^{-2\pi n} a_{n-1}$ bajo las condiciones $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$ y $a_{-1} = 0$, $a_0 = 1$, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{2\pi/5}.$$

$$1 - \frac{x^2 3!}{(1!2!)^3} + \frac{x^2 6!}{(2!4!)^3} - \frac{x^3 9!}{(3!6!)^3} + \cdots =$$
$$\left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right)\left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right)$$

# Publicaciones (recogidas en los "Collected papers")

| TEMA | N$^{\text{O}}$. |
|---|---|
| **Particiones** | 5 |
| **Formas modulares** | 3 |
| **Primos y divisores** | 7 |

| TEMA | N$^{\text{O}}$. |
|---|---|
| **Integrales** | 7 |
| **Series** | 9 |
| **Otros temas** | 6 |

Hoy en día pocas revistas de investigación publican artículos que consisten en evaluar integrales específicas.

En "On certain arithmetical functions" (1916) aparecen conjeturas sobre una forma modular decisivas en el desarrollo de la teoría.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n := x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24} = x - 24x^2 + 252x^3 + \dots .$$

$\tau(n)\tau(m) = \tau(nm)$ para coprimos y $|\tau(n)| \le d(n)n^{11/2}$.

## El gran misterio

Ramanujan recogió en dos cuadernos sus hallazgos antes de viajar a Inglaterra.

¿Cómo pudo llegar alguien con poca formación a algunos resultados que para los profesionales requieren matemáticas profundas?

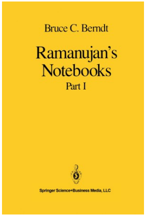
No está claro. Apenas se conservan pruebas de Ramanujan fuera de sus artículos publicados. Sus cuadernos contienen casi exclusivamente enunciados, las demostraciones son anecdóticas.

Ramanujan a R.K. Rao 1914 I have changed my plan of publishing my results. I am not going to publish any of the old results in my notebooks till the war is over. After coming here I have learned some of their methods so that I can easily publish these results without delay.

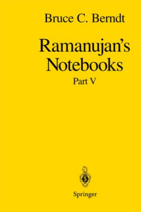
El matemático que más celo ha puesto en poner en orden el legado de Ramanujan es B. C. Berndt, dedicando más de 40 años a ello.

El profesor Berndt con una pizarra de Ramanujan

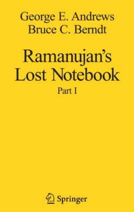
A él se debe la monumental tarea de editar los cuadernos de Ramanujan incluyendo las pruebas de todos los resultados. Sin contar el "cuaderno perdido", esta edición ha dado lugar a 5 tomos a lo largo de casi 15 años.



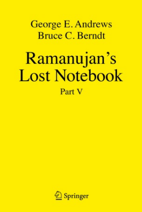

(1985)




(1998)




(2005)




(2018)

La edición del "cuaderno perdido" (de su último año de vida, encontrado en 1976) llevó un tiempo similar, esta vez en colaboración con G.E. Andrews.

Resultados en los cuadernos de Ramanujan según aparecen en los tomos de Berndt “Ramanujan’s notebooks”

| Tomo | Teoremas |
|---|---|
| I | 759 |
| II | 605 |
| III | 834 |
| IV | 491 |
| V | 565 |

Esto hacen 3254 teoremas.

## *Ramanujan's Master Theorem*

Una fórmula que Ramanujan usó a menudo para evaluar integrales:

$$\int_0^\infty x^{s-1}\Big(\varphi(0)-\frac{x}{1!}\varphi(1)+\frac{x^2}{2!}\varphi(2)-\dots\Big)\,dx=\Gamma(s)\varphi(-s).$$

con $\varphi(s)=\Gamma(s+1)\lambda(s)$

$$\int_0^\infty x^{s-1}\Big(\lambda(0)-\lambda(1)x+\lambda(2)x^2-\dots\Big)\,dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}\lambda(-s).$$

Ortodoxia: Inversión de la transformada de Mellin, teorema de los residuos, teorema de Carlson.

El razonamiento de Ramanujan fue esencialmente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(r^k)}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) r^{kn}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} e^{-xr^n}.$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}\Big( f(r^0) - \frac{x}{1!} f(r^1) + \frac{x^2}{2!} f(r^2) - \dots \Big)\, dx$$
$$= \Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^{-ns} = \Gamma(s) f(r^{-s}).$$

y basta definir $\varphi(s) = f(r^s)$.

4)

11. $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = \underline{|n}$ and hence

$$\int_0^\infty x^{n-1}\left\{\phi(0) - \frac{x}{\underline{|1}}\phi(1) + \frac{x^2}{\underline{|2}}\phi(2) - \&c\right\}dx = \underline{|n-1}\,\phi(-n)$$

sol. $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = e^{-x}\{x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \&c\}$

when $x=0$ $= \underline{|n}$ by IV 10 cor.

$$f(0)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = \underline{|n-1}\,f(0)$$

$$\frac{f'(0)}{\underline{|1}}\int_0^\infty e^{-rx}x^{n-1}\,dx = \frac{\underline{|n-1}}{r^n}\cdot\frac{f'(0)}{\underline{|1}}$$

$$\frac{f''(0)}{\underline{|2}}\int_0^\infty e^{-r^2x}x^{n-1}\,dx = \frac{\underline{|n-1}}{r^{2n}}\cdot\frac{f''(0)}{\underline{|2}}$$

and so on.

Adding up all the results we have

$$\int_0^\infty x^{n-1}\left\{f(1) - \frac{x}{\underline{|1}}f(r) + \frac{x^2}{\underline{|2}}f(r^2) - \&c\right\}dx = \underline{|n-1}\,f\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

Let $f(r^n) = \phi(n)$ then $f\left(\frac{1}{r^n}\right) = \phi(-n)$.

Cor 1. $\int_0^\infty x^{n-1}\{\phi(0) - x\phi(1) + x^2\phi(2) - \&c\}\,dx = \frac{\pi\,\phi(-n)}{\sin \pi n}$

Cor 2. $\int_0^\infty x^{n-1}\left\{\phi(0) - \frac{x^2}{\underline{|2}}\phi(2) + \frac{x^4}{\underline{|4}}\phi(4) - \&c\right\}dx = \underline{|n-1}\,\phi(-n) \times \cos\frac{\pi n}{2}$

Cor 3. $\int_0^\infty \left\{\phi(0) - \frac{x}{\underline{|1}}\phi(1) + \frac{x^2}{\underline{|2}}\phi(2) - \&c\right\}\cos nx\,dx$

$$= \phi(-1) - n^2\phi(-3) + n^4\phi(-5) - \&c.$$

Cor 4. $\int_0^\infty \{\phi(0) - x^2\phi(2) + x^4\phi(4) - \&c\}\cos nx\,dx$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\phi(-1) - \frac{n}{\underline{|1}}\phi(-2) + \frac{n^2}{\underline{|2}}\phi(-3) - \frac{n^3}{\underline{|3}}\phi(-4) + \&c\right\}$$

Una de las fórmulas más emblemáticas de Ramanujan es la siguiente válida para $|x| < 1$:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n x)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} = K$$

donde

$$K = \frac{\pi^3}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4}\, dt\right)^{-4} = 1{,}435540\ldots$$

Llama la atención su simetría y lo inesperada que es.

Una de las fórmulas más emblemáticas de Ramanujan es la siguiente válida para $|x| < 1$:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi n x)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n x)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} = K$$

donde

$$K = \frac{\pi^3}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4}\, dt\right)^{-4} = 1{,}435540\ldots$$

Llama la atención su simetría y lo inesperada que es.

Dem. de Ramanujan $\rightarrow$ desconocida
Dem. ortodoxa $\rightarrow$ funciones elípticas y multiplicación compleja.

# Algo para llevarse a casa ...

La anterior fórmula de Ramanujan tiene relación indirecta con la siguiente evaluación de un producto infinito:

$$\prod_{m \text{ impar}} \tanh\left(\frac{\pi m}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Esto es,

$$\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} \cdot \frac{e^{3\pi/2} - e^{-3\pi/2}}{e^{3\pi/2} + e^{-3\pi/2}} \cdots = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

¿Existe una manera fácil de demostrar esto?

# Más información


- Berndt, B. C.; Rankin, R. A. *Ramanujan: Letters and commentary*. AMS 1995.
- Berndt, B. C. *Ramanujan's notebooks*. Springer-Verlag 1985, 1989, 1991, 1994, 1998.
- Hardy, G. H. *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Cambridge Univ. Press. 1941.
- `https://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/`
- `http://www.math.tifr.res.in/~publ/nsrBook1.pdf`

Hay una copia de las diapositivas en

---

https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

---

**¡Gracias por la atención!**

## Créditos de las fotos

Todas las fotos están tomadas de la wikipedia excepto:

- Libro de G.S. Carr
  `https://archive.org/details/synopsisofelemen00carrrich/`
- Esposa de Ramanujan
  `https://www.scienceteen.com/`
  `story-of-mathematical-genius-s-ramanujan/`
- Cuadernos originales
  `http://www.math.tifr.res.in/~publ/nsrBook1.pdf`
- Escudo del *Government Arts College*
  `https://gacakum.ac.in/`
- Foto de época de Cromwell Road
  `https://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/`
- Profesor B.C. Berndt
  `https://faculty.math.illinois.edu/~berndt/`