Cuando tu ordenador te engaña

Fernando Chamizo

Actualización en Análisis Matemático

26 de abril de 2012

http://www.uam.es/fernando.chamizo

Índice

¿Análisis con el ordenador

Análisis

Límites, incrementos continuos, cantidades que se hacen infinitamente grandes o infinitamente pequeñas. . .

Ordenador

Cantidades discretas, capacidad de almacenamiento limitada, funcionamiento internamente digital. . .

No obstante, muchos de los modelos computacionales empleados en ingeniería están basados en el análisis.

Gráficas caprichosas

La derivada "de verdad"

Es la velocidad instantánea o la pendiente de la recta tangente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La derivada "aproximada"

Es la velocidad media en tiempos pequeños o la pendiente de una recta secante en puntos muy próximos:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

con $h = \Delta x$ pequeño.

Gráficas caprichosas

Cuanto menor sea h, mejor es la aproximación.

Ejemplo: Con $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

$$f'\big(\frac{1}{6}\big) = \pi\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}720699\ldots, \qquad \frac{f\left(\frac{1}{6}+10^{-4}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)}{10^{-4}} = 2{,}720452\ldots$$

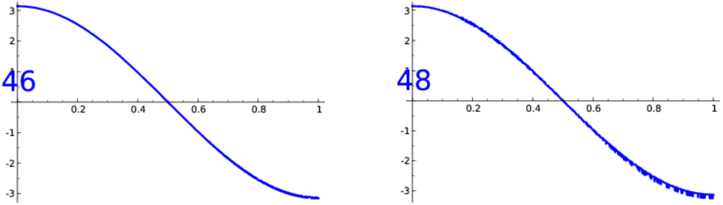
$$\frac{f\left(\frac{1}{6}+10^{-5}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)}{10^{-5}} = 2{,}720674\ldots$$

Aparentemente, con $h = 10^{-n}$ conseguimos una aproximación del orden de n cifras correctas.

Pero si tomamos h muy pequeño, alrededor de 10^{-15}, empiezan a suceder cosas raras.

Derivada aproximada de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[0,1]$:

Gráficas con Sage

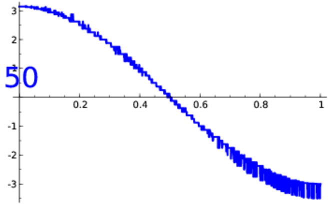


$h = 2^{-46} = 1{,}42 \cdot 10^{-14}$ $\quad$ $h = 2^{-48} = 3{,}55 \cdot 10^{-15}$

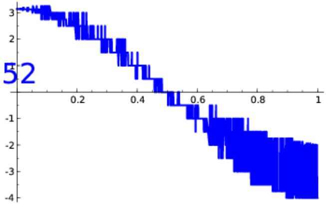
Gráficas caprichosas

Derivada aproximada de $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ **en** $[0, 1]$**:**

Gráficas con Sage



$h = 2^{-50} = 8{,}88 \cdot 10^{-16}$

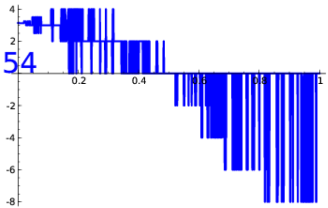


$h = 2^{-52} = 2{,}22 \cdot 10^{-16}$

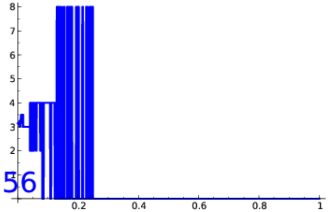
Gráficas caprichosas

Derivada aproximada de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[0, 1]$:

Gráficas con Sage



$h = 2^{-54} = 5{,}55 \cdot 10^{-17}$



$h = 2^{-56} = 1{,}38 \cdot 10^{-17}$

Con otras funciones, ocurre algo similar. Incluso el tamaño de h en que las cosas empiezan a ir mal parece ser universal.

Gráficas caprichosas

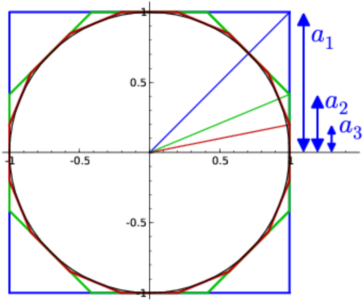
La pregunta del alumno listillo (I)

¿Por qué las gráficas de la derivada aproximada se vuelven locas?

Racionalización irracional

Calcular π

Un algoritmo para aproximar π que proviene de Arquímedes, consiste en aproximar la circunferencia unidad por polígonos.



Cuadrado:

$a_1 = 1$

$p_1 = 8$

Octógono:

$a_2 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

$p_1 = 16\sqrt{2} - 16 = 6{,}62\ldots$

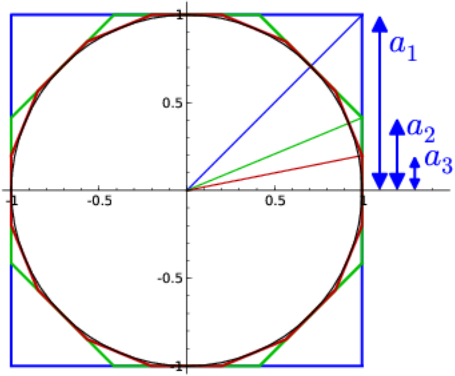
Long. circ. $= 2\pi = 6{,}28\ldots$

Racionalización irracional

a_n = mitad del lado del polígono de 2^{n+1} lados

$$\boxed{2^{n+1} a_n \to \pi}$$

$$a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$



Sólo tendrá sentido como algoritmo para aproximar π si tenemos una fórmula para a_n que no dependa de π.

Racionalización irracional

Una fórmula para a_n

Escribamos $\alpha = \pi/2^n$

$$\begin{aligned} a_n &= \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos\alpha}-1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}-1}{\tan\alpha} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$$

Esta fórmula permite calcular a_n de manera recurrente a partir de $a_1 = 1$.

Racionalización irracional

¿Dos? fórmulas

$$a_n = \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}} \qquad \Bigg| \qquad b_n = \frac{b_{n-1}}{\sqrt{1 + b_{n-1}^2} + 1}$$

Ambas fórmulas son idénticas escribiendo $a_n = b_n$ y racionalizando. Por tanto partiendo de $a_1 = b_1 = 1$ dan los mismos resultados.

Racionalización irracional

Haciendo un pequeño programa con Sage vemos que en el quinto término aparece una pequeña divergencia prácticamente inapreciable.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
1	4.00000000000000	4.00000000000000
2	3.31370849898476	3.31370849898476
3	3.18259787807453	3.18259787807453
4	3.15172490742926	3.15172490742926
5	3.14411838524587	3.14411838524590
6	3.14222362994234	3.14222362994246
7	3.14175036916970	3.14175036916897

Racionalización irracional

El problema es cómo va evolucionando.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
18	3.14159252378847	3.14159265362739
19	3.14160058362634	3.14159265359919
20	3.14159252378847	3.14159265359214
21	3.14144515887080	3.14159265359038
22	3.14097079560249	3.14159265358994
23	3.13398329388536	3.14159265358983
24	3.11105678802532	3.14159265358980
25	3.05362474788830	3.14159265358980
26	2.61983729517922	3.14159265358979

Racionalización irracional

Ni siquiera podemos continuar mucho más allá. Con `Sage` (con otro software o una calculadora pasaría algo similar) el ordenador se niega a calcular a_{29} alegando divisiones por cero.

Sin embargo b_n funciona bien y sigue dando π con las 14 cifras decimales correctas que muestra, sin que se vea ningún fallo según avanza n.

¿Por qué el primer método es malo y el segundo es bueno?

Racionalización irracional

La pregunta del alumno listillo (II)

¿Cómo es que ordenador da resultados bien distintos si las fórmulas son iguales?

El “chiste” de reduzca

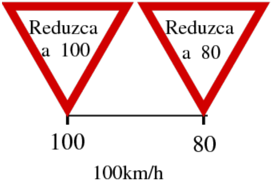
El “chiste”

Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”

El “chiste” de reduzca

El “chiste”

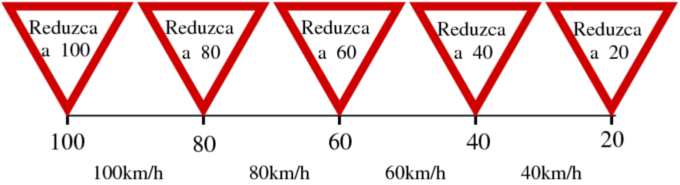
Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80”



El “chiste” de reduzca

El “chiste”

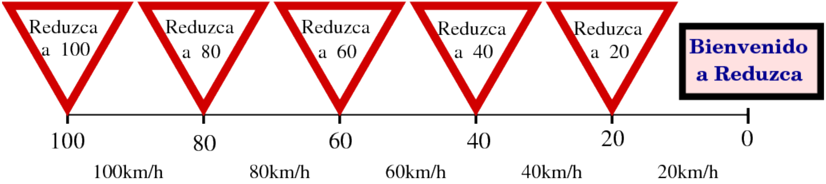
Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente



El “chiste” de reduzca

El “chiste”

Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica **Bienvenido a Reduzca**.

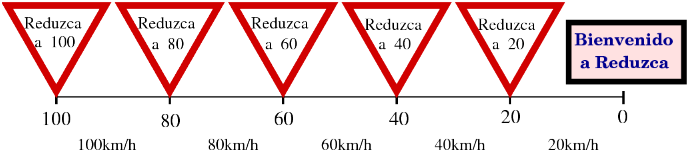


El "chiste" de reduzca

¿Cuánto tarda en llegar a Reduzca?

Hay 5 tramos de 20km. El primero se recorre a 100km/h, el segundo a 80km/h, hasta el último que se recorre a 20km/h.

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20}{100} + \frac{20}{80} + \frac{20}{60} + \frac{20}{40} + \frac{20}{20} = \frac{137}{60} = 2\text{h } 17\text{m}.$$



El "chiste" de reduzca

Poniendo más señales, se tardará más en llegar

¿Es posible tardar más de dos días en vez de más de dos horas?

Con N señales hay N tramos de $100/N$km. El primero se recorre a 100km/h, el segundo a $(100 - 100/N)$km/h, el tercero a $(100 - 2 \cdot 100/N)$km/h; hasta el último que se recorre a $\big(100 - (N-1)100/N\big)$km/h, esto es, $100/N$km/h.

$$\frac{100/N}{100} + \frac{100/N}{100 - 100/N} + \frac{100/N}{100 - 200/N} + \dots \frac{100/N}{100/N} > 48.$$

48h = días

El "chiste" de reduzca

¿Es posible tardar más de dos días?

Para N del orden de decenas de miles, el incremento se hace cada vez menor. ¿Quizá el tiempo converja a algún valor que no alcanza a 48?

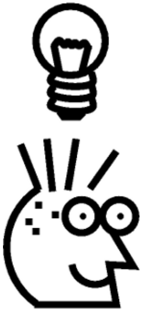
N	Suma	Δ
100000	12.0901	......
200000	12.7832	0.6931
300000	13.1887	0.4054
400000	13.4764	0.2876
500000	13.6995	0.2231

N	Suma	Δ
600000	13.8819	0.1823
700000	14.0360	0.1541
800000	14.1695	0.1335
900000	14.2873	0.1177
1000000	14.3927	0.1053

El “chiste” de reduzca

La pregunta del alumno listillo (III)

¿Está acotado el tiempo de llegada?



Circunferencias no circulares

Ecuaciones de la mecánica	$\leftrightarrow$	Relaciones entre funciones (posiciones y momentos) y sus derivadas

El ejemplo más famoso es el movimiento de los planetas (Newton)

Problema práctico:

Muchas veces estas ecuaciones no tienen soluciones explícitas.
¿Cómo se resuelven numéricamente con el ordenador?

Circunferencias no circulares

Un modelo sencillo

Consideramos el movimiento de una partícula $\big(x(t), y(t)\big)$ regido por:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \text{partiendo de} \qquad \big(x(0), y(0)\big) = (1, 0)$$

La solución es $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$.

Circunferencias no circulares

Un método sencillo (el *método de Euler*)

Usamos $x'(t) \approx \dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$, $y'(t) \approx \dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$.
Nuestro problema se convierte en las ecuaciones aproximadas

$$\begin{cases} x(t+h) = x(t) - hy(t) \\ y(t+h) = y(t) + hx(t) \end{cases}$$

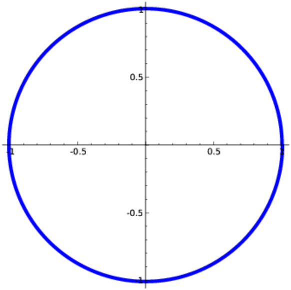
A partir de $\big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$ se aproxima $\big(x(h), y(h)\big)$ y después $\big(x(2h), y(2h)\big)$ y así sucesivamente. Uniendo los puntos, se tiene una aproximación de la solución.

$h \to 0 \Rightarrow$ solución exacta

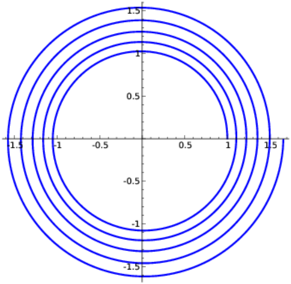
Circunferencias no circulares

Análisis del error

Taylor $\to$ error de orden h^2 en cada paso
$[0, T]$ requiere T/h pasos $\to$ error total de orden hT.



$h = 0{,}001,\ t \in [0, 10\pi]$

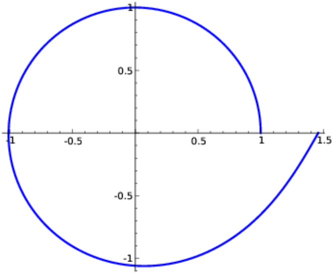


$h = 1/31,\ t \in [0, 10\pi]$

Circunferencias no circulares

Otro problema con solución $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$

$$\begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2}x(x^2+y^2-1) \\ y' = x + \frac{1}{2}y(x^2+y^2-1) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad (x(0), y(0)) = (1, 0)$$



$h = 0{,}001,\ t \in [0, 2\pi]$

$h = 0{,}001,\ t \in [0, 2\pi]$

$1/2 \leftrightarrow 0{,}5599$

Circunferencias no circulares

La pregunta del alumno listillo (IV)

¿Por qué el método funciona en unos problemas y no en otros?