Cuando tu ordenador te engaña (2)

Fernando Chamizo

Actualización en Análisis Matemático

26 de abril de 2012

http://www.uam.es/fernando.chamizo

Índice

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

ϵ-máquina

Es el máximo <u>error relativo</u> que el ordenador puede detectar.

En doble precisión en C/C++ es $2^{-53} \approx 10^{-16}$.

¿Cómo se almacena internamente $-1{,}3521606 \cdot 10^{30} = -\frac{16}{15} 2^{100}$?

Signo: $- \to 1$
Exponente: $100 \to 1100100$ en binario
Mantisa: $16/15 \to 1{,}010101\ldots$ en binario

$\boxed{1}$ — 1 bit: signo

$\boxed{0}\boxed{0}\ \ldots\ \ldots\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$ — 11 bits: exponente

$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\ \ldots\ \ldots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$ — 52 bits: mantisa

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

$\epsilon = \epsilon$-máquina $\qquad \boxed{1 + \epsilon = 1}$

Las sumas (y productos) computacionales no se pueden reordenar

$2.01+0.00003+0.00004+0.00004 \neq 0.00003+0.00004+0.00004+2.01$

Con $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$

$$\begin{array}{ll} & 2.01 \\ + & 0.00003 \\ = & 2.01 \\ + & 0.00004 \\ = & 2.01 \\ + & 0.00004 \\ = & \boxed{2.01} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 0.00003 \\ + & 0.00004 \\ = & 0.00007 \\ + & 0.00004 \\ = & 0.00011 \\ + & 2.01 \\ = & \boxed{2.0101} \end{array}$$

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

Un ejemplo

Queremos aproximar π^4 usando 100000 términos en

$$\pi^4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{90}{m^4}.$$

Suma directa:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{100000^4} \ \rightarrow \ \text{error} = 1.93 \cdot 10^{-11}$$

Suma inversa:

$$\frac{1}{100000^4} + \frac{1}{99999^4} + \cdots + \frac{1}{1^4} \ \rightarrow \ \text{error} = 4.26 \cdot 10^{-14}$$

Con el orden inverso al habitual, el error es 400 veces menor.

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

Ideas $\epsilon = 2^{-53} \approx 10^{-16}$

Sumar un número que tiene la coma 16 lugares más a la izquierda no tiene ningún efecto

$$x, \qquad y = \epsilon x, \qquad z = x(1+\epsilon) \;\Rightarrow\; x + y = x, \quad z - x = 0$$

Con el ordenador

- Es mejor sumar números de tamaños comparables
- Evitar restar números muy próximos (en tamaño relativo)

No se pueden hallar con seguridad incrementos de una cantidad que corresponden a un error relativo ϵ. En particular el cociente incremental deja de aproximar a la derivada a esa escala.

Más cuentas, menos precisión

Recordemos que teníamos dos algoritmos idénticos:

$$a_1 = 1 \qquad\qquad b_1 = 1$$

$$a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}} \qquad\qquad b_n = \frac{b_{n-1}}{\sqrt{1+b_{n-1}^2}+1}$$

Según la teoría, $2^{n+1}a_n$ y $2^{n+1}b_n$ tienden a π, pero numéricamente sólo ocurría con el segundo.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
22	3.14097079560249	3.14159265358994
23	3.13398329388536	3.14159265358983
24	3.11105678802532	3.14159265358980
25	3.05362474788830	3.14159265358980
26	2.61983729517922	3.14159265358979

Más cuentas, menos precisión

ϵ=ϵ-máquina $\Rightarrow (1+\epsilon)/\epsilon - 1/\epsilon = 0$ para el ordenador

$(1+\delta)/\delta - 1/\delta =$ indeterminado si δ es comparable a ϵ

Por ejemplo, $\delta \approx 2\epsilon \Rightarrow 1+\delta$ *y* $1+\delta \pm \delta/2$ *indistinguibles para el ordenador* $\Rightarrow$ *podría tenerse* $(1+\delta)/\delta - 1/\delta = 3/2$ *ó* $1/2$

$(1+\delta)/\delta + 1/\delta = 2/\delta$ si δ es comparable a ϵ

El error relativo es comparable a $\epsilon \Rightarrow$ inapreciable

Más cuentas, menos precisión

Primer algoritmo

$$\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1 \approx (1+\delta)-\delta \text{ con } \delta = a_{n-1}^2/2$$

Si δ se acerca a ϵ hay problemas

n	$2^{n+1}a_n$	a_{n-1}	$a_{n-1}^2/2$
22	3.1409707956	7.4897889110e-7	2.8048468965e-13
23	3.1339832938	3.7443289704e-7	7.0099997194e-14
24	3.1110567880	1.8679996096e-7	1.7447112708e-14
25	3.0536247478	9.2716717363e-8	4.2981948392e-15
26	2.6198372951	4.5502554593e-8	1.0352412372e-15

Segundo algoritmo

No hay problema al sumar números comparables

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

J. Neper 1550-1617
Descripción de las leyes maravillosas de los logaritmos (1614)


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

6. Def. Logarithmus ergo cujusque sinus, est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea, dum sinus totius, linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio æquiveloce.

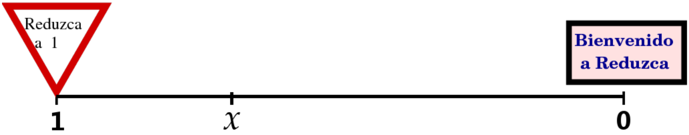
Por tanto, el Logaritmo de cualquier seno es el número que con aproximación define la línea que se *incrementa igualmente* al mismo tiempo que la línea para el *seno completo decrece proporcionalmente* en dicho seno, siendo ambos movimientos síncronos y con la misma velocidad inicial.

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

¿Qué significa esto?

Neper definió el logaritmo neperiano considerando el chiste de reduzca con infinitas señales, una en cada punto. Si la distancia inicial a Reduzca es 1 entonces el logaritmo neperiano de la distancia del coche a Reduzca es en valor absoluto igual al tiempo.

$$\ln x = -\text{tiempo que tarda el coche de 1 a } x$$



¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Notación original de Neper

- Tablas para con 7 cifras $\to$ distancia inicial $= 10^7$ (*seno completo*)
- Tablas astronómicas para navegación $\to$ logaritmos de razones trigonométricas
- Números positivos $\to$ cambio de signo

$\ln_{\text{orig}} x =$ logaritmo neperiano de Neper
$\ln_{\text{act}} x =$ logaritmo neperiano actual

$$\ln_{\text{orig}} x = -10^7 \ln_{\text{act}} \frac{x}{10^7}$$

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Notación original de Neper

- *incrementarse igualmente* = paso uniforme del tiempo, representado en una recta con divisiones equidistribuidas.
- *decrecer proporcionalmente* = seguir la trayectoria del coche, representado con divisiones que se van juntando por la disminución de la velocidad.

Dibujo original de Neper:

Posiciones al cronometrar un coche normal y el coche de Reduzca

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

¿Cuántas señales hay que poner para tardar más de dos días?

$N =$ número de señales, $\qquad T =$ tiempo empleado en llegar

1. Más señales $\Rightarrow$ más tiempo
2. Neper $\Rightarrow$ con infinitas señales se llega a $1/N$ (en cientos de kilómetros) en $-\ln(1/N)$ horas
3. El último tramo se recorre en una hora

$$T = 1 + T_u < 1 + \ln N \qquad \Longrightarrow \qquad N > e^{T-1}.$$

Si $T > 48$ entonces $N > 2{,}5 \cdot 10^{20}$ un número de operaciones inasequible para un ordenador.

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Una cota superior para N

$N =$ número de señales, $\quad T =$ tiempo empleado en llegar
Simplificando la fórmula original

$$T = \frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}.$$

Comparando sumas (superiores) con integrales

$$T > \int_1^{N+1} x^{-1} dx = \ln(N+1)$$

entonces $T > 48$ es válido cualquier N con $N > e^{48} - 1$.

Equilibrio inestable

Dos problemas con solución $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2}x(x^2+y^2-1) \\ y' = x + \frac{1}{2}y(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

bajo la condición inicial $\big(x(0), y(0)\big) = (1, 0)$.

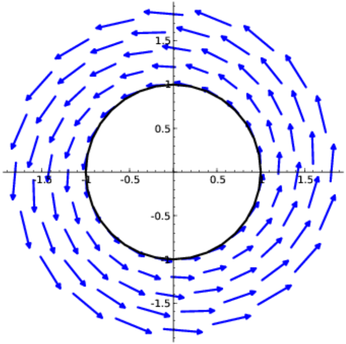
El primero se comporta bien con la aproximación

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \qquad y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

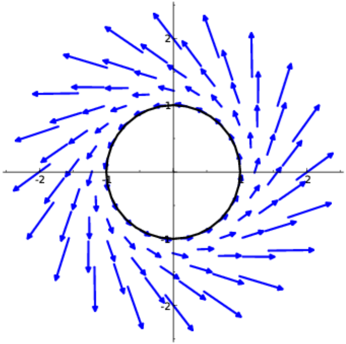
y el segundo no.

Equilibrio inestable

$(x(t), y(t))$ = posición de la partícula
$(x'(t), y'(t))$ = dirección en la que se mueve



Primer problema



Segundo problema

Equilibrio inestable

Cualquier leve error que saque a la partícula de la circunferencia unidad, hará que se dirija al infinito.

Solución analítica (problema I)

Con coordenadas polares, $x(t) = r(t)\cos\alpha(t)$, $y(t) = r(t)\operatorname{sen}\alpha(t)$

$$\begin{cases} r'\cos\alpha - r\alpha'\operatorname{sen}\alpha = -r\operatorname{sen}\alpha \\ r'\operatorname{sen}\alpha + r\alpha'\cos\alpha = r\cos\alpha \end{cases}$$

Multiplicando por $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ y sumando:

$$r' = 0 \;\Rightarrow\; r = \text{cte.}$$

Las trayectorias son siempre circunferencias.

Equilibrio inestable

Solución analítica (problema II)

$$\begin{cases} r' \cos\alpha - r\alpha' \operatorname{sen}\alpha = -r \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} r(r^2-1)\cos\alpha \\ r' \operatorname{sen}\alpha + r\alpha' \cos\alpha = r\cos\alpha + \frac{1}{2} r(r^2-1)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Multiplicando por $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ y sumando:

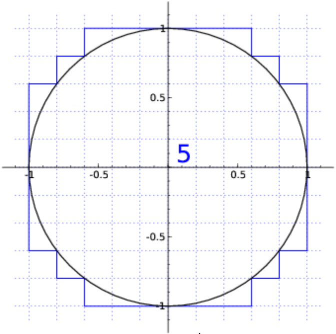
$$r' = \frac{1}{2} r(r^2-1) \xrightarrow{\text{cálculos}} r(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0 e^t}}$$

$r(0) = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 0 \Rightarrow r(t) = 1$
$r(0) = 1+\delta \Rightarrow \lambda_0 > 0 \Rightarrow r(t) \to \infty$ si $t \to \ln(1/\lambda_0)$

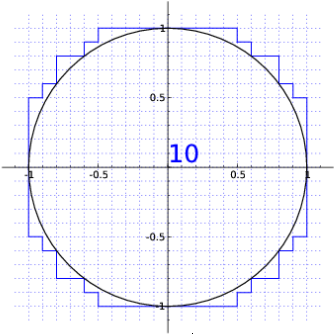
Ej: $r(0) = 1 + 10^{-6} \Rightarrow \lambda_0 \approx 2\cdot 10^{-6} \Rightarrow r(13{,}12\dots) = \infty$

¿Remedando a Arquímedes?

Simplificamos el método de Arquímedes para aproximar la longitud de la circunferencia unidad, 2π, considerando la línea poligonal con segmentos contenidos en $x = nh$, $y = nh$, $n \in \mathbb{Z}$, lo más próxima posible al exterior de la circunferencia.

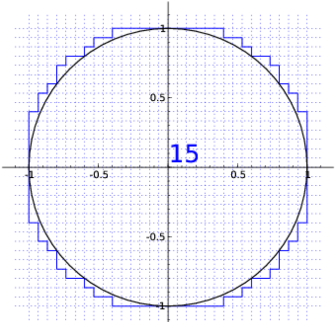


$h = 1/5$

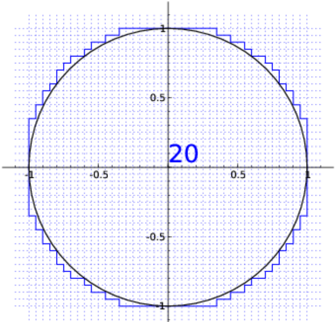


$h = 1/10$

¿Remedando a Arquímedes?



$h = 1/15$



$h = 1/20$

¿Remedando a Arquímedes?

Cuando $h \to 0^+$ la línea poligonal se acerca indefinidamente a la circunferencia.

Con un programa podemos comprobar que para $h = 1/100$ la longitud de la línea poligonal es 8, también lo es para $h = 1/1000$ y para una millonésima.

¿Debemos entonces concluir que $2\pi = 8$ y entonces

$$\boxed{\pi = 4}?$$