



por tanto se obtiene una expresión para  $\mathcal{N}_{IJ}$  en términos de sumas de Kloosterman

$$\mathcal{N}_{IJ} = \sum_{a=1}^c \chi_I(a) \chi_J(\bar{a}) = \sum_n \sum_m \alpha_n \beta_m \sum_{a=1}^c e\left(\frac{ma + n\bar{a}}{c}\right).$$

Curiosamente las sumas de Kloosterman no aparecieron históricamente en relación directa con ningún problema sobre la distribución de los inversos. Kloosterman las introdujo en 1926 al crear una versión del método del círculo que permitiera aproximar el número de representaciones por formas cuadráticas de cuatro variables tales como  $x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 7t^2$ .

Antes de seguir recordaremos que en el método del círculo para aproximar la cantidad

$$\#\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n : N = a_1 + \dots + a_n\}$$

se emplea la representación integral

$$\int_0^1 S^n(x) e(-Nx) dx \quad \text{con} \quad S(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} e(ax).$$

Si  $x$  está cerca de un racional con denominador pequeño (arcos mayores) entonces se espera aproximar bien  $S(x)$  a través del conocimiento de la distribución de  $\mathcal{A}$  en progresiones aritméticas, mientras que en otro caso (arcos menores) se espera que los métodos de sumas trigonométricas prueben que hay muchas interferencias en  $S(x)$  que dan lugar a cancelación.

Para los problemas llamados binarios, como el de Goldbach que corresponde a  $n = 2$  y  $\mathcal{A} = \{\text{primos} \leq N\}$ , en que la integral debería ser como  $|\mathcal{A}|$  el método del círculo no funciona porque una indeterminación de  $C|\mathcal{A}|^{1/2+\epsilon}$  en  $S(x)$  es lo mejor que podríamos soñar en general.

Kloosterman logró superar este obstáculo teórico en un problema binario relacionado con formas cuadráticas. Su método consistió en obtener cancelación entre diferentes arcos a través de sumas de Kloosterman.

La clave está en que si creamos los arcos respetando estrictamente la división de Farey, entonces las longitudes y las posiciones están relacionados mediante una fórmula que involucra el inverso, como se muestra en el siguiente esquema:

$\left( \begin{array}{c} \xleftarrow{r} \\ a/c \quad b/d \quad A/C \\ \hline \end{array} \right)$

$b = a + A$   
 $d = c + C$

$cA - Ca = 1$   
 $\Downarrow$   
 $r = 1/c\bar{d}, a = -\bar{d}$

$\int_0^r f\left(\frac{a}{c} + x\right) dx = \int_0^{1/c\bar{d}} f\left(-\frac{\bar{d}}{c} + x\right)$

Mantener fijo  $c$  y mover  $d$  corresponde a cambiar de arco y las sumas de Kloosterman se relacionan con la cancelación entre ellos. Por ejemplo, para  $f$  real, par y 1-periódica se tendría la siguiente curiosa manera de integrar:

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \sum_{c \leq N} \sum_{d \leq c+N}^* \int_0^{1/cd} f\left(-\frac{\bar{d}}{c} + x\right)$$

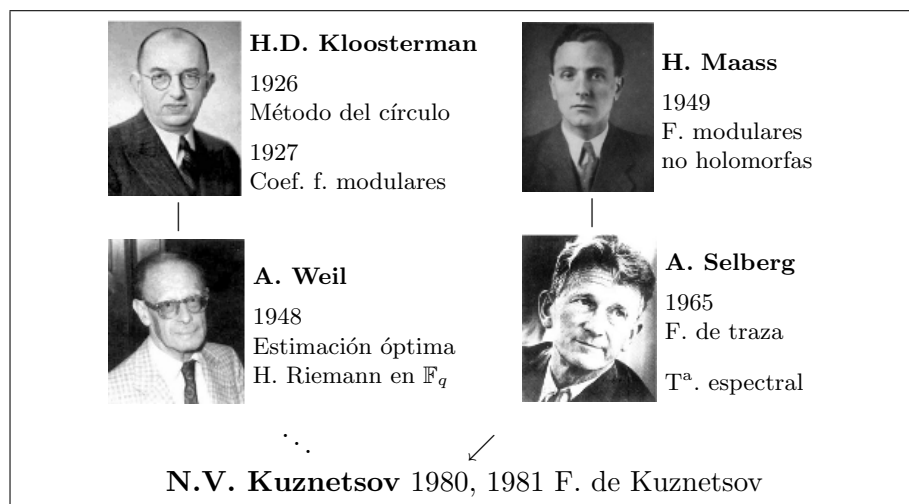
y al desrollar por Fourier  $f$ , el término de error se expresa en términos de sumas de Kloosterman.

El uso de las sumas de Kloosterman en teoría de números llegó a tener tanta importancia que se acuñó el nombre *Kloostermanía*. Las siguientes citas se refieren al origen de este término:

Kuznetsov's paper sparked a tremendous flurry of work, principally by Kuznetsov and Iwaniec, and their co-authors. A multitude of different kinds of averages of Kloosterman sums were investigated, and a host of applications were produced. This activity was nicknamed 'Kloostermania', which reflected the excitement generated in the field at large. *D.R. Heath-Brown* [1].

The word Kloostermania of the title was invented by M. Huxley in the 80's to highlight a series of striking developments that took place at that time in analytic number theory and which build further of (*sic*) on the modular nature of Kloosterman sums. *P. Michel* [6].

En el siguiente cuadro se indica someramente la "genealogía" de la Kloostermanía:

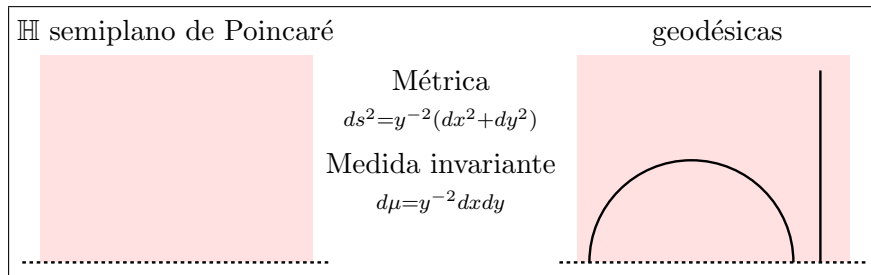


## 2. Elementos básicos

La motivación básica (*a posteriori*) de las aplicaciones de las sumas de Kloosterman en teoría analítica de números es que el análisis armónico en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es efectivo para estudiar la distribución módulo 1. Mientras que para tratar problemas más difíciles relacionados con la distribución de los inversos o el algoritmo de Euclides quizá deberíamos hacer análisis armónico en el espacio base  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  y con  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  como subgrupo discreto donde

$$\mathrm{SL}_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in K \right\}.$$

En cierto sentido  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  es muy similar al semiplano de Poincaré  $\mathbb{H}$ , más familiar geométricamente y que ya aparece en las formas modulares clásicas.



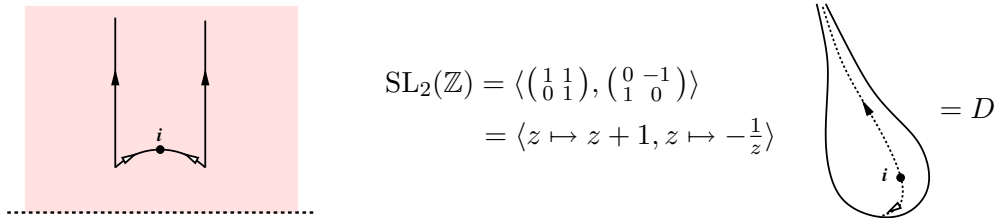
Dado  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  y  $z \in \mathbb{H}$  se define  $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$ . Con esta acción  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  son las isometrías directas de  $\mathbb{H}$ .

A partir de  $\gamma i$  es posible recuperar  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  excepto por la matriz de un giro (euclídeo), de este modo  $\mathbb{H}$  es como  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  olvidándose de las rotaciones.

Al igual que en el análisis de Fourier el toro  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  aparece de hacer actuar las traslaciones enteras sobre  $\mathbb{R}$ , aquí el objeto natural es

$$D = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} = \text{pegar los puntos } z \text{ y } w \text{ si } z = \gamma w \text{ con } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

lo cual se puede “ver” geoméricamente



Las funciones en  $D$  son funciones automorfas en  $\mathbb{H}$ , es decir, verifican  $f(\gamma z) = f(z)$  para  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Un método básico para crear funciones automorfas es considerar  $F(z) = \sum f(\gamma z)$  con  $f$  una función en  $\mathbb{H}$ .

Desde el punto de vista complejo,  $D$  es una superficie de Riemann (variedad 1-dimensional sobre  $\mathbb{C}$ ). A diferencia del caso euclídeo,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , no es compacta lo cual causa ciertos problemas analíticos.

Antes de seguir mostraremos dos ejemplos de problemas aritméticos que dan lugar a sumas sobre  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

1. El momento de orden 4 de la función  $\zeta$  de Riemann en la línea crítica.

Los momentos  $\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt$  son cantidades naturales en relación con la *hipótesis de Lindelöf* ( $\zeta$  crece lo menos posible en la línea crítica, es una consecuencia de la Hipótesis de Riemann).

Empleando despreocupadamente la serie que define la función  $\zeta(s)$  en  $\Re(s) > 1$

$$\int |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2 dt = \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \int (m/n)^{it} dt, \quad m \approx n \rightarrow \text{término principal.}$$

En realidad estrictamente no converge pero se puede arreglar con la ecuación funcional aproximada.

Para el momento de orden 4 el punto de partida sería

$$\zeta^2(s) = \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{m^s} = \sum \frac{d(n)}{n^s}$$

que lleva a

$$\int |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 dt = \sum \frac{d(m)d(n)}{\sqrt{mn}} \int (m/n)^{it} dt, \quad m \approx n \rightarrow \text{término principal.}$$

Hay que estimar las cantidades

$$\sum d(n+k)d(n) = \sum_{ad=n+k} \sum_{bc=n} 1.$$

Si  $k = 1$  entonces  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  y si  $k > 1$  por medio de un elegante artificio (llamado operadores de Hecke) es posible relacionar el conjunto con varias copias de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 2 \right\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. La equidistribución de raíces de un polinomio cuadrático módulo  $p$  variable.

Sabemos que la ecuación  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  tiene solución si  $p = 4k + 1$  pero ¿cómo están distribuidas las raíces  $\pm r_p$  cuando el primo  $p$  varía?

$$\text{Distribución de } \frac{r_p}{p} \text{ en } [0, 1] \xleftrightarrow{\text{Fourier}} \text{Cancelación en } \sum_p e\left(\frac{nr_p}{p}\right).$$

Un tratamiento analítico de estas sumas se muestra difícil porque no parece posible parametrizar cantidades tan aritméticas como  $p$  (los primos) y  $r_p$ . Técnicas “de criba” permiten cambiar primos por enteros pero el problema con la dependencia en  $r_p$  persiste.

Un cálculo elemental prueba

$$\begin{aligned}\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \gamma\gamma^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + 1.\end{aligned}$$

Es bien conocido que  $x^2 \equiv -1 \pmod{m}$  tiene solución si y sólo si  $m = c^2 + d^2$  con  $c, d$  coprimos y según el cálculo anterior una solución es  $x = ac + bd$  con  $ad - bc = 1$ .

En definitiva,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  parametriza las soluciones de  $x^2 \equiv -1 \pmod{m}$ . Por otro lado

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad \gamma i = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2}.$$

Entonces hay una relación estrecha entre

$$\sum_p e\left(\frac{nr_p}{p}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{\gamma} e(n\mathrm{Re}\gamma i).$$

para  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Mas allá de estos ejemplos, las sumas de Kloosterman son inherentes al tratamiento con análisis de Fourier de sumas sobre  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Para ilustrar este punto, consideremos

$$F(x, y) = \sum f(\gamma z, w) \quad \text{con } z = x + x_0 i, w = y + y_0 i$$

donde  $f$  es invariante por traslaciones, es decir,  $f(z + t, w + t) = f(z, w)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Veamos que el coeficiente de Fourier  $(m, -n)$  de  $F$  es de la forma

$$\sum_c S(m, n; c) \tilde{F}(c)$$

con  $\tilde{F}$  cierta transformada integral. Para probar esto, escribimos  $\gamma z = 1/c - c^{-2}(z + d/c)^{-1}$ . La contribución al coeficiente de Fourier buscado de cada  $c$  y  $d$  fijados es es

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\gamma z, w) e(-mx + ny) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + d/c)}, w\right) e(-mx + ny) dx dy$$

y con el cambio  $x \mapsto x - d/c, y \mapsto y + a/c$ ,

$$e\left(\frac{md + na}{c}\right) \int_0^1 \int_0^1 f\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z}, \frac{a}{c} + w\right) e(x, y) dx dy.$$

Al sumar sobre  $ad - bc = 1$  se llega a la fórmula deseada.

### 3. Teoría espectral

El operador elíptico autoadjunto natural respecto al producto escalar  $\langle f, g \rangle = \int_D \bar{f}g d\mu$  e invariante bajo  $SL_2(\mathbb{R})$  es el laplaciano hiperbólico

$$\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

La descomposición espectral en  $f \in L^2(D)$  es más complicada que la euclídea pues consta tanto de espectro discreto como de espectro continuo, siendo el primero menos conocido y a la vez más importante en las aplicaciones.

$$f(z) = \sum_j \langle f, u_j \rangle u_j(z) + \dots \text{(contribución del espectro continuo)}$$

Las funciones  $u_j(z)$  se llaman *formas de Maass* y son las autofunciones en  $L^2(D)$  del laplaciano hiperbólico

$$\Delta u_j = -\lambda_j u_j, \quad u_j \in L^2(D).$$

No hay una construcción “explícita” de ninguna forma de Maass (fuera de la constante) y hay muchos misterios relativos a la multiplicidad y tamaño de los autovalores. Por otro lado la construcción del espectro continuo conceptualmente es más simple: La función  $(\text{Im}(z))^s = y^s$  cumple  $\Delta y^s = -s(1-s)y^s$  y considerando una continuación analítica  $\sum (\text{Im}(\gamma z))^s$  se puede forzar a que sea una autofunción que vive en  $D$  pero no está en  $L^2(D)$ . Sólo las que tienen  $s = 1/2 + it$  (que corresponde a autovalores reales) participan en el espectro continuo.

Las formas de Maass son 1-periódicas  $u_j(z+1) = u_j(z)$ , por tanto admiten un desarrollo de Fourier

$$u_j(z) = \sum_n a_n(y) e(nx) \quad \text{donde } z = x + iy.$$

Como no son holomorfas no hay un desarrollo  $\sum c_n e(nz)$  pero la propiedad  $\Delta u_j = -\lambda_j u_j$  determina  $a_n(y)$  salvo una constante

$$u_j(z) = \sum_n \rho_j(n) \cdot \text{función de Bessel}(y) e(nx).$$

Una novedad con respecto a las apariciones típicas de las funciones de Bessel es que aquí el índice es imaginario en general y varía con el autovalor.

Los “coeficientes de Fourier”  $\rho_j(n)$  se ajustan, al igual que el caso holomorfo, a la teoría de Hecke, en particular son multiplicativos una vez normalizados, lo cual crea una interesante analogía con la teoría clásica de formas modulares.

Sería natural que las formas de Maass hubieran nacido en el seno del análisis armónico o las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo Maass las introdujo para resolver un problema relacionado con ideales en cuerpos cuadráticos  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ .

Esencialmente para discriminantes negativos  $d < 0$  hay una relación:

$$\boxed{\text{normas de ideales} \leftrightarrow \text{formas cuadráticas} \leftrightarrow \text{formas modulares} \leftrightarrow \text{ecuaciones funcionales}}$$

Por ejemplo en  $K = \mathbb{Q}(i)$  la  $\zeta$  de Dedekind es  $\zeta_K(s) = \sum N(I)^{-s} = \sum (a^2 + b^2)^{-s}$  y la función  $f(z) = \sum e((a^2 + b^2)z)$  es una forma modular porque la fórmula de sumación de Poisson permite relacionar  $f(z)$  con  $f(-1/4z)$ , lo que con ayuda de la transformada de Mellin da lugar a la ecuación funcional de  $\zeta_K$ . Con mayores complicaciones pero un esquema análogo se podría tratar el caso de las ecuaciones funciones de las funciones  $L$  de Hecke  $L(s) = \sum \chi(I)N(I)^{-s}$ .

La pregunta es qué ocurre en el caso de discriminantes positivos  $d > 0$ . Por ejemplo, en  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ , la norma  $N(a + b\sqrt{7}) = |a^2 - 7b^2|$  no es forma cuadrática y no se puede aplicar Poisson como antes.

Maass en 1949 consiguió salvar el esquema para el caso  $d > 0$  utilizando sustitutos no holomorfos para  $f(z)$ , las formas de Maass, que permitían probar las ecuaciones funcionales esperadas. Las funciones de Bessel de su desarrollo de Fourier se comportaban bien bajo transformadas de Mellin. En realidad las funciones de Maass eran invariantes por cierto subgrupo  $\Gamma$  de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Poco después la *Tesis de Tate* permitió aplicar directamente “sumación de Poisson sobre los adeles” a  $\zeta_K(s)$  y a otras funciones  $L$ .

## 4. La fórmula de traza de Selberg

El aspecto de la fórmula de traza de Selberg para  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  es

$$\sum_j h(t_j) = \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} th(t) \tanh(\pi t) dt + \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{\ell^*}{\sinh(\ell/2)} \widehat{h}\left(\frac{\ell}{2\pi}\right) + \dots$$

donde

$$h = \text{función par} \quad \widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e(-\xi t) dt$$

$$1/4 + t_j^2 = \text{autovalores } \lambda_j \text{ de } -\Delta$$

$\ell$  = Longitudes de las geodésicas cerradas

$\ell^*$  = Longitudes primitivas ( $\ell = k\ell^*$ , geodésicas recorridas una sola vez)

$\dots$  = contribución de algunos puntos especiales ( $z = i$ ,  $z = (1 + i\sqrt{3})/2$ )

La fórmula de traza es una fórmula esencialmente geométrica pero también admite interpretaciones aritméticas. Se puede probar que las longitudes  $\ell^*$  son de la forma  $2 \log \epsilon_d$  con  $\epsilon_d$



la solución “más pequeña” de la ecuación de Pell  $x^2 - dy^2 = 4$ . Además cada longitud aparece  $h(d)$  veces, el número de clases. Sarnak dedujo de la fórmula de traza

$$\sum_{\epsilon_d \leq x} h(d) = \text{li}(x^2) + O(x^{3/2} \log^2 x).$$

Por otro lado, la asintótica de  $\sum_{d \leq x} h(d)$  se desconoce.

Selberg probó que  $Z(s) = \prod_{\ell^*} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)\ell^*})$  tiene una continuación analítica y una ecuación funcional. Además ¡cumple la Hipótesis de Riemann porque  $\Delta$  es autoadjunto! lo cual recuerda al llamado *sueño de Pólya-Hilbert* de probar la Hipótesis de Riemann clásica usando algún operador autoadjunto. Gracias a las propiedades de  $Z$  y su analogía con  $\zeta$  se puede hacer una teoría de “geodésicas primas” en superficies de Riemann.

La demostración de la fórmula de traza de Selberg no es fácil sobre todo si uno quiere un enunciado general que sirva para grupos diferentes de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Sin embargo conceptualmente guarda paralelismo con la prueba de la fórmula de Poisson:

$$\sum_n f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \sum_{n \neq 0} \widehat{f}(n), \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x) dx$$

que es similar en su aspecto a la de Selberg

$$\sum_j f(t_j) = (\text{Término principal}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{\ell^*}{\sinh(\ell/2)} \widehat{f}\left(\frac{\ell}{2\pi}\right) + \dots$$

Nótese que en la fórmula de Poisson se puede suponer que  $f$  es par (porque para  $f$  impar es trivial). Para probarla se considera un “núcleo” invariante por traslaciones enteras

$$P(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(d(x+n, y)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(|n+x-y|), \quad 1\text{-periódico en } x \text{ e } y.$$

El análogo hiperbólico sería

$$S(z, w) = \sum_{\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})} f(d(\gamma z, w)), \quad \text{SL}_2(\mathbb{Z})\text{-periódico en } z \text{ y } w.$$

Donde  $d$  es la distancia hiperbólica.

En el caso euclídeo el paso siguiente es calcular el desarrollo de Fourier de  $P$

$$P(x, y) = \sum a_n e(nx) e(-ny), \quad a_n = \widehat{f}(n).$$

Mientras que  $S$  tiene un desarrollo espectral llamado *fórmula de pretraza*

$$S(z, w) = \sum a_j u_j(z) \overline{u_j(w)} + \dots \quad a_j = \widetilde{f}(t_j) = \text{cierta transformada integral.}$$

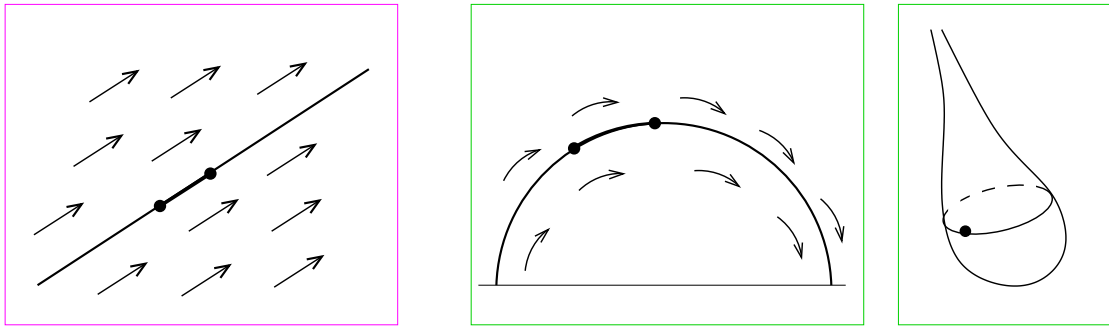
Hasta aquí todo es relativamente sencillo. La fórmula de Poisson se obtiene al calcular la traza  $\int_0^1 P(x, x) dx$  de dos maneras diferentes, con la expresión original y con el desarrollo de Fourier:

$$\int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(|n + x - x|) dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e(nx) e(-nx) dx$$

En principio todo debería ser similar con  $\int_D S(z, z) d\mu$

$$\sum_{\gamma} \int_D f(d(\gamma z, z)) d\mu = \int_D \sum \tilde{f}(t_j) |u_j(z)|^2 d\mu + \dots$$

y de hecho esto funciona y es fácil para los grupos llamados compactos, en los que no hay espectro continuo, pero para  $SL_2(\mathbb{Z})$  y en general, se tiene que  $\sum \dots = \infty$ , consecuentemente la suma sobre  $\gamma$  también diverge. Selberg aproximó  $D$  por dominios acotados y con un desarrollo asintótico de ambos miembros canceló los infinitos y obtuvo su resultado. Además, en esta tarea reinterpretó la suma en  $\gamma$  en términos geométricos, resultando que aquellas transformaciones  $\gamma$  que eran “parabólicas”, es decir, conjugadas de  $z \mapsto z + 1$ , daban lugar al infinito que había que cancelar. Excluyendo las transformaciones que dejan puntos fijos (llamadas “hiperbólicas”) el resto están asociadas a geodésicas cerradas, y se las conoce como “hiperbólicas”.



La relación entre transformaciones y geodésicas ya se da en el caso euclídeo. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$  las traslaciones corresponden a geodésicas y las traslaciones enteras corresponden a geodésicas cerradas en  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . De la misma forma los  $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$  “hiperbólicos” (por definición, conjugados a una dilatación) corresponden a geodésicas en  $\mathbb{H}$  y si  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  corresponden a geodésicas cerradas en  $D$ .

## 5. La fórmula de Kuznetsov

Sin entrar en detalles, la fórmula de Kuznetsov para  $SL_2(\mathbb{Z})$  tiene el siguiente aspecto:

$$\sum_c \frac{S(m, n; c)}{c} f\left(\frac{4\pi\sqrt{|mn|}}{c}\right) = \sum_j \tilde{f}(t_j) \bar{\rho}_j(m) \rho_j(n) + \dots$$

donde

- $f$  = función buena con  $f(0) = f(\infty) = 0$
- $\tilde{f}$  = transformada de Bessel complicada
- $1/4 + t_j^2$  = autovalores  $\lambda_j$  de  $-\Delta$
- $\rho_j(n)$  =  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de la forma de Maass  $u_j$
- $\dots$  = contribución del  $\infty$  y de formas modulares clásicas

A pesar de su aspecto, la demostración guarda de nuevo cierto paralelismo con la de la fórmula de sumación de Poisson. Recordemos que si permitimos el uso de deltas de Dirac, esta última fórmula admite una prueba rapidísima:

$$\delta_p = \delta \text{ de Dirac periódica,} \quad \delta_p(x) \stackrel{\text{Fourier}}{=} \sum e(nx) \xrightarrow{\int f(x)} \sum f(n) = \sum \hat{f}(n)$$

Para poner en rigor este argumento se puede recurrir a la función de Green

$$g(x) = \sum \frac{e(nx)}{4\pi^2 n^2 + r^2} \quad \text{que converge para } r \neq 0.$$

Formalmente  $L[g] = \delta_p$  con  $L[g] = -g'' + r^2g$ . Además en cierto modo es la superposición de las funciones de Green correspondientes a desenrollar  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , sobre  $\mathbb{R}$ . Concretamente,  $y(x) = e^{-r|x|}/2r$  es solución de  $-y'' + r^2y = \delta$  y se cumple

$$g(x) = \sum \frac{e(nx)}{4\pi^2 n^2 + r^2} = \frac{1}{2r} \sum e^{-r|x+n|}.$$

Calculando la convolución  $f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$  con las dos expresiones para  $g$  y aplicando  $L$  después, se recupera la fórmula de Poisson.

La prueba de la fórmula de Kuznetsov pasa por considerar la función de Green

$$G(z, w) = \sum_j \frac{u_j(z)\overline{u_j(w)}}{\lambda_j + r^2} + \dots \quad \text{que formalmente verifica } (-\Delta + r^2)G(\cdot, w) = \delta_D(\cdot - w).$$

Por otro lado, también está la función de Green  $f(\cdot, w)$  que resuelve  $-\Delta + r^2 = \delta$  en  $\mathbb{H}$  y al sumar sobre  $SL_2(\mathbb{Z})$  debieran coincidir, es decir

$$G(z, w) = \sum_j \frac{u_j(z)\overline{u_j(w)}}{\lambda_j + r^2} + \dots = \sum_\gamma f(\gamma z, w)$$

En realidad hay un problema de convergencia, pero si nos olvidamos de él, al calcular el coeficiente de Fourier  $(m, -n)$ , usando el desarrollo de Fourier de las formas de Maass  $u_j$  y que una suma sobre  $SL_2(\mathbb{Z})$  se desarrolla en términos de sumas de Kloosterman, se obtiene

$$\rho_j(m)\overline{\rho_j(n)} \cdot \text{función de Bessel} + \dots = \sum_c S(m, n; c) \cdot \text{función de Bessel}.$$

Para pasar funciones de Bessel a cualquier función se utilizan transformadas integrales relativamente complicadas.

Utilizando acotaciones básicas para  $\rho_j$  la fórmula de Kuznetsov prueba que hay una cancelación entre sumas de Kloosterman para diferentes módulos. Concretamente permite deducir

$$\sum_{c \leq x} \frac{S(m, n; c)}{\sqrt{c}} < Cx^{2/3} \log x.$$

Lo cual gana una potencia sobre la cota individual de Weil  $|S(m, n; c)| \leq d(c)\sqrt{c}$  con  $d(c)$  el número de divisores y  $(mn, n, c) = 1$ , que proviene de la geometría algebraica. Esta mejora se debe únicamente a la variación en los signos, pues se conoce que  $\sum_{c \leq x} |S(m, n; c)|/\sqrt{c} > Cx$ .

También se pueden deducir resultados de teoría espectral a partir de resultados de sumas de Kloosterman.

## 6. Kloostermanía hoy

Algunos logros destacable de la primera década de Kloostermanía son los siguientes:

- Acotaciones para la función  $\zeta$  de Riemann (Iwaniec 1980, más adelante Jutila consiguió el resultado sin teoría espectral).
- Mejora del teorema de Bombieri-Vinogradov (Bombieri, Fouvry, Friedlander, Iwaniec 1984, 1986, 1989).
- Relación local-global en el número de representaciones por formas cuadráticas ternarias (Duke, Schulze-Pillot 1988, 1990).

Los métodos de la Kloostermanía han participado también en importantes resultados posteriores en teoría analítica de números y además han establecido algunas relaciones inesperadas con la Física (*Arithmetic Quantum Chaos*, Sarnak 1992).

Actualmente Kloostermanía ha perdido su nombre y se ha incorporado a la atención que ha recibido el mundo automorfo en la teoría de números contemporánea (sobre todo después de la prueba del último teorema de Fermat).

La complicación analítica llevan a preguntarse si realmente la teoría espectral es un método artificial que no es intrínseco a la teoría analítica de números. A este respecto cabe notar un resultado de Y. Motohashi (1995) que afirma que la función

$$F(s) = \int_1^\infty |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 t^{-s} dt$$

tiene una extensión meromorfa en  $\mathbb{C}$  y sus polos en  $\text{Re}(s) \geq 1/2$  están exactamente en los  $s$  tales que  $(1-s)s$  es autovalor del laplaciano en  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ .

Por tanto hay una relación bastante directa entre la función  $\zeta$  y la resolución espectral del laplaciano hiperbólico.

## Algunas lecturas

- [1] D. R. Heath-Brown, *Arithmetic applications of Kloosterman sums*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 4, 380–384. MR MR1804616 (2002e:11109)
- [2] M. N. Huxley, *Introduction to Kloostermania*, Elementary and analytic theory of numbers (Warsaw, 1982), Banach Center Publ., vol. 17, PWN, Warsaw, 1985, pp. 217–306. MR MR840479 (87j:11046)
- [3] H. Iwaniec, *Promenade along modular forms and analytic number theory*, Topics in analytic number theory (Austin, Tex., 1982), Univ. Texas Press, Austin, TX, 1985, pp. 221–303. MR MR804249 (87i:11007)
- [4] ———, *Spectral methods of automorphic forms*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. MR MR1942691 (2003k:11085)
- [5] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. MR MR2061214 (2005h:11005)
- [6] P. Michel, *Some recent applications of Kloostermania*, Physics and number theory, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 10, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 225–251. MR MR2277760 (2007k:11126)
- [7] Y. Motohashi, *The Riemann zeta-function and the non-Euclidean Laplacian*, Sugaku Expositions **8** (1995), no. 1, 59–87, Sugaku Expositions. MR MR1335956
- [8] ———, *Spectral theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 127, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR MR1489236 (99f:11109)
- [9] P. Sarnak, *Kloosterman, quadratic forms and modular forms*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 4, 385–389. MR MR1804617 (2001k:11155)
- [10] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. I*, Springer-Verlag, New York, 1985. MR MR791406 (87f:22010)

---

*Ésta es una versión escrita de la charla impartida el 20 de enero de 2010 en el Seminario de Teoría de Números de la Universidad Autónoma de Madrid.*