

Ars Conjectandi

Jakob Bernoulli 1713 \rightarrow bases de combinatoria y probabilidad

~~El peligro de sercha:~~
No deseches conserva las afirmaciones falsas demasiado rápido

Algunas ecuaciones diofánticas

$$6x^2 = 1 + 2012y^2 \rightarrow \text{no tiene sol (2)}$$

$$x^3 + y^3 = z^3 + 5 \rightarrow \text{" " " (9)}$$

obs tanta: $A=B \Leftrightarrow A \equiv B \pmod{n} \forall n > 1$ $\mathbb{Z} = \lim \mathbb{Z}_n$
 $\Leftrightarrow A \equiv B \pmod{p^k} \forall \text{ potencia de primo}$

Conj \exists Solución en enteros $\Leftrightarrow \exists$ Solución módulo p^k ~~Ver~~

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 8 = 0$$

$$(x-2y+3)^2 + z^2 = -1$$

FALSA

Conj \exists sol en enteros $\Leftrightarrow \exists$ sol en \mathbb{R} y módulo cualquier p^k

Hasse-Minkowski: Cierto para $P(\vec{x})=0 \quad \vec{x} \neq \vec{0} \quad P = \text{pol homogéneo de } 2^\circ \text{ grado}$

Pol homogéneo de 3° grado y 3 variables \Leftrightarrow grupo \mathbb{W}
curvas elípticas

$$2x^2 = 1 + 219y^2$$

sol en \mathbb{R} (trivial)

sol módulo p^k (no fácil)

no hay sol entera (difícil)

No temas soñar

$$J_2(N) = \{p \leq N \cdot p+2 \text{ es primo}\}$$

Conj primos gemelos $\lim_{N \rightarrow \infty} J_2(N) = \infty$

$$x-y=2 \quad x, y \text{ primos} \\ 1 \leq y \leq N$$

sol enteras = N $\text{Prob}(\{n \in [1, N] \text{ primo}\}) \sim \frac{N/\log N}{N} = \frac{1}{\log N}$

Conj $J_2(N) \sim \# \text{ sol enteras} \cdot P(x \text{ primo}) \cdot P(y \text{ primo}) \sim \frac{N}{\log^2 N}$

Lo mismo serviría para Goldbach $r_G(N) = \#\{p_1+p_2=N\}$

Conj. Goldbach $r_G(N) > 0$ si N par > 2

Conj: $r_G(N) \sim \frac{N}{\log^2 N}$

Un poco más difícil es hacer una conj para $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3 = N$ (Waring)

Prob de ser un cubo $\frac{N^{1/3}}{N} = N^{-2/3} \rightarrow N^5 \cdot (N^{-2/3})^6 = N$

El ordenado es tu amigo no luches contra él

$J_2(N) / \frac{N}{\log^2 N}$ no parece tender a 1. (ver tabla) **FALSA**

$r_G(N) / \frac{N}{\log^2 N}$ no parece tener límite (ver gráfica)

p primo $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \rightarrow p+2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p+2 \text{ no es primo.}$

Para la mitad de las elecciones de p la prob de que $p+2$ sea primo es 0.

$$J_2(N) = N \cdot P(\overbrace{n \text{ primo}}^A \cap \overbrace{n+2 \text{ primo}}^B)$$

$$P(A) \sim P(B) \sim \frac{1}{\log N}$$

$$= N P(A \cap B) = N \underbrace{P(A) P(B)}_{\sim \frac{N}{\log^2 N}} \cdot \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(A) P(B)}}_C$$

$C =$ factor de corrección

$$C = \prod_p C_p$$

$$C_p = \frac{P(A_p \cap B_p)}{P(A_p) P(B_p)}$$

$A_p = \{n \text{ no div por } p\}$

$B_p = \{n+2 \text{ " " "}\}$

$$C_p = \frac{1 - \frac{2}{p}}{(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{p})} = \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$$

$$C_2 = \frac{1/2}{1/2 \cdot 1/2} = 2$$

Conj $J_2(N) \sim 2 \underbrace{\prod_{p>3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}}_{1.3203...} \cdot \frac{N}{\log^2 N}$

Goldbach

$$r_G(N) = N P(\overbrace{n \text{ primo}}^A \cap \overbrace{N-n \text{ primo}}^B)$$

$$r_G(N) \sim \frac{N}{\log^2 N}$$

$$C_p = \frac{P(A_p \cap B_p)}{P(A_p) P(B_p)}$$

$A_p = \{n \neq p \mid n \leq N\}$

$B_p = \{N-n \neq p \mid n \leq N\}$

Si $p \mid N$ $P(A_p \cap B_p) = 1 - \frac{1}{p}$
 Si $p \nmid N$ $P(A_p \cap B_p) = 1 - \frac{2}{p}$

Conj $r_G(N) \sim \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p \mid N} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \prod_{p \nmid N} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$ (ver grafico)

Sustituyendo $\frac{N}{\log^2 N}$ por $\int_2^N \frac{dt}{\log^2 t}$ la aprox es mejor

Para Goldbach ternario se sabe

$$r_{3C}(N) \sim \frac{1}{2} \frac{N^2}{\log^3 N} \underbrace{\prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right)}_{\prod \chi_p}$$

¿De donde sale el $\frac{1}{2}$? Es un término de volumen que depende de lo que ocurre en \mathbb{R}

$$F(\vec{x}) = 0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathbb{1}_{\{x \in \text{rango}; |F(x)| < \epsilon\}}}{2\epsilon} \rightarrow \text{término "principal"}$$

$$x_1^3 + \dots + x_6^3 = N \Rightarrow F(\vec{x}) = N - x_1^3 - x_2^3 - \dots - x_6^3$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{3})}{\Gamma(2)} N^{\frac{6}{3}-1} = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

$n=6 \quad h=3$

$$x_1^h + \dots + x_n^h = N \rightarrow \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{h})^n}{\Gamma(n/h)} N^{\frac{n}{h}-1}$$

Es hora de disponer ¡hoy! tenemos ahí fuerza?

1. CONJETURA DE LOS PRIMOS GEMELOS

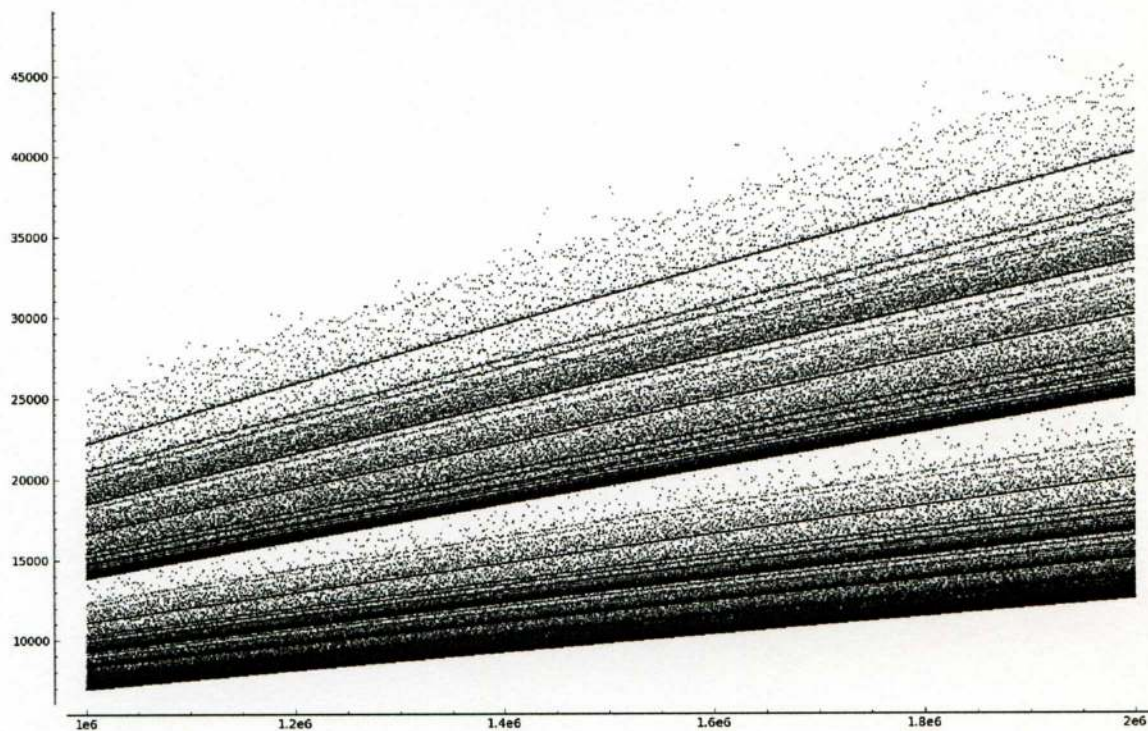
N	$\pi_2(N)/F_1(N)$
10^2	1.69660739535
10^3	1.67009790480
10^4	1.73902258023
10^5	1.62238082180
10^6	1.55920340392
10^7	1.53225915772

N	$\pi_2(N)/F_2(N)$
10^2	0.78036265826
10^3	1.00908007761
10^4	1.26355052039
10^5	1.29419782137
10^6	1.30767275979
10^7	1.32540645764

$$F_1(N) = \frac{N}{\log^2 N}$$

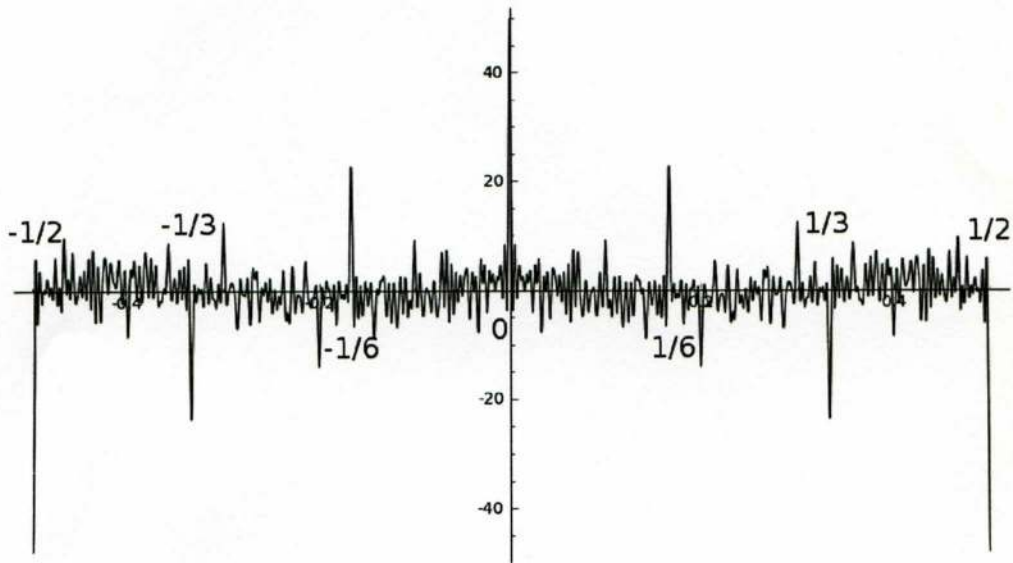
$$F_2(N) = \int_1^N \frac{dt}{\log^2 t}$$

2. CONJETURA DE GOLDBACH

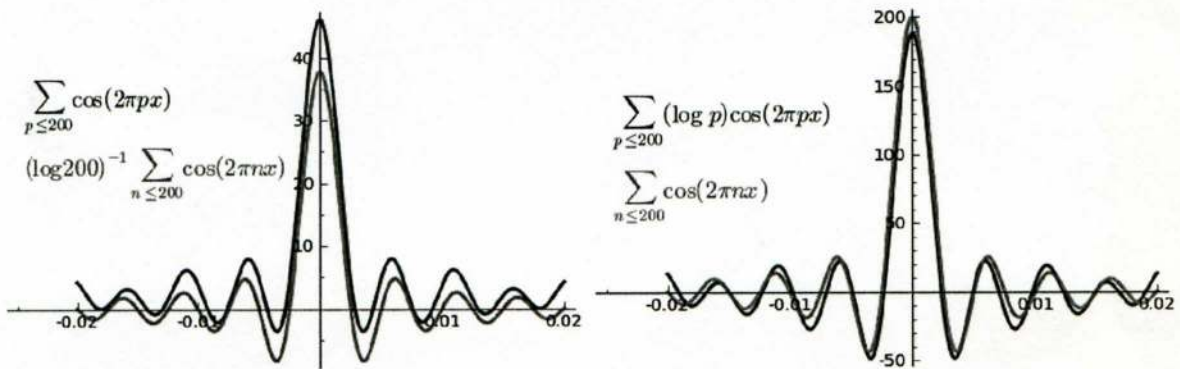


$r_G(N)$ para $10^6 \leq N < 2 \cdot 10^6$

$$3. \quad F(x) = \sum_{p \leq 50} \cos(2\pi px)$$



4. ARCOS MAYORES



Los arcos menores son "ruido".

A veces el ruido tiene estructura

$$E(N) = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n^{3/2}}$$

