Ars Conjectandi

Jakob Bernoulli 1713 $\rightarrow$ bases de combinatoria y probabilidad

~~El peligro de recha.~~

No deseches ~~Conserva~~ las afirmaciones falsas demasiado rápido

Algunas ecuaciones diofánticas

$6x^2 = 1+2012y^2 \rightarrow$ no tiene sol (2)

$x^3+y^3 = z^3+5 \rightarrow$ " " " (9)

obs tonta: $A=B \iff A \equiv B \ (n) \quad \forall n>1$ $\qquad \hat{\mathbb{Z}} = \lim \mathbb{Z}_n$

$\iff A \equiv B \ (p^k)$ $\forall$ potencia de primo

Conj $\exists$ Solución en enteros $\iff \exists$ solución módulo p^k $\forall p$

FALSA

$x^2+4y^2+z^2-4xy+6x-12y+8=0$

$(x-2y+3)^2+z^2=-1$

Conj $\exists$ sol en enteros $\iff \exists$ sol en $\mathbb{R}$ y módulo cualquier p^k

Hasse-Minkowski Cierto para $P(\vec{x})=0$ $\vec{x}\neq\vec{0}$ $P=$ pol homogéneo de 2º grado

Pol homogéneo de 3er grado y 3 variables $\longleftrightarrow$ grupo Ш curvas elípticas

$2x^2 = 1+219y^2$ Sol en $\mathbb{R}$ (trivial)

Sol módulo p^k (no fácil)

no hay sol entera (difícil)

No temas soñar

$\pi_2(N) = \{p \le N : p+2 \text{ es primo}\}$

Conj primos gemelos $\lim_{N\to\infty} \pi_2(N) = \infty$

$x - y = 2$ x, y primos
$1 \le y \le N$

$\#$ sol enteras $= N$ $\quad$ $\text{Prob}(\{n \in [1,N] \text{ primo}\}) \sim \dfrac{N/\log N}{N} = \dfrac{1}{\log N}$

Conj $\pi_2(N) \sim \#\text{sol. enteras} \cdot P(x \text{ primo}) \cdot P(y \text{ primo}) \sim \dfrac{N}{\log^2 N}$

Lo mismo serviría para Goldbach $r_G(N) = \#\{(p_1,p_2) \text{ primos}: p_1+p_2 = N\}$

conj. Goldbach $r_G(N) > 0$ si N par > 2

Conj: $r_G(N) \sim \dfrac{N}{\log^2 N}$

Un poco más difícil es hacer una conj para $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_6^3 = N$ (Waring)

prob de ser un cubo $\dfrac{N^{1/3}}{N} = N^{-2/3} \longrightarrow N^5 \cdot (N^{-2/3})^6 = N$

El ordenador es tu amigo no luches contra él.

$\pi_2(N) \Big/ \dfrac{N}{\log N}$ no parece tender a 1. (ver tabla) FALSA

$r_G(N) \Big/ \dfrac{N}{\log N}$ no parece tener límite (ver gráfica)

p primo $(p>2)$ $\begin{cases} p \equiv 1 \ (3) \longrightarrow p+2 \equiv 0 \ (3) \Rightarrow p+2 \text{ no es primo.} \\ p \equiv 2 \ (3) \end{cases}$

Para la mitad de las elecciones de p la prob de que $p+2$ sea primo ...

$$\pi_2(N) = N \cdot P(\overbrace{n \text{ primo}}^{A} \cap \overbrace{n+2 \text{ primo}}^{B}) \qquad P(A) \sim P(B) \sim \frac{1}{\log N}$$

$$= N\, P(A\cap B) = \underbrace{N\, P(A)\, P(B)}_{\sim \frac{N}{\log^2 N}} \frac{P(A\cap B)}{P(A)\, P(B)}$$

C = factor de corrección

$$C = \prod_p C_p \qquad C_p = \frac{P(A_p \cap B_p)}{P(A_p) . P(B_p)}$$

$A_p = \{n \text{ no div por } p\}$

$B_p = \{n+2 \quad '' \quad ''\}$

$$C_p = \frac{1-\frac{2}{p}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \qquad C_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 2$$

$$\boxed{\underline{\text{Conj}} \qquad \pi_2(N) \sim 2 \underbrace{\prod_{p\geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}}_{1.3203\ldots} \cdot \frac{N}{\log^2 N}}$$

Goldbach

$$r_G(N) = N\, P(\overbrace{n \text{ primo}}^{A} \cap \overbrace{N-n \text{ primo}}^{B})$$

$$\cancel{r_G(N) \sim \frac{N}{\log^2 N}} \qquad C_p = \frac{P(A_p \cap B_p)}{P(A_p)\, P(B_p)}$$

$A_p = \{n : p \nmid n\}$

$B_p = \{n : p \nmid N-n\}$

Si $p \mid N$ $\quad P(A_p \cap B_p) = 1 - \frac{1}{p}$

Si $p \nmid N$ $\quad P(A_p \cap B_p) = 1 - \frac{2}{p}$

$$\boxed{\underline{\text{Conj}} \qquad r_G(N) \sim \frac{N}{\log^2 N} \prod_{p \mid N} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p \nmid N} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}}$$

(ver gráficas)

Para Goldbach ternario se sabe

$$r_{3G}(N) \sim \frac{1}{2}\frac{N^2}{\log^3 N} \underbrace{\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)}_{\prod \tau_p}$$

¿De donde sale el $1/2$? Es un término de volumen que depende de lo que ocurre en $\mathbb{R}$.

$$F(\vec{x})=0 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\{\vec{x}\in \text{rango};\ |F(\vec{x})|<\varepsilon\}|}{2\varepsilon} \to \text{término "principal"}$$

$$x_1^3+\dots+x_6^3=N \Rightarrow \qquad F(\vec{x})=N-x_1^3-x_2^3-\dots-x_6^3$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{3})^6}{\Gamma(2)} N^{\frac{6}{3}-1} = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

$n=6 \quad k=3$

$$x_1^k+\dots+x_n^k=N \to \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^n}{\Gamma(n/k)} N^{\frac{n}{k}-1}$$

1. Conjetura de los primos gemelos

N	$\pi_2(N)/F_1(N)$
10^2	1.69660739535
10^3	1.67009790480
10^4	1.73902258023
10^5	1.62238082180
10^6	1.55920340392
10^7	1.53225915772

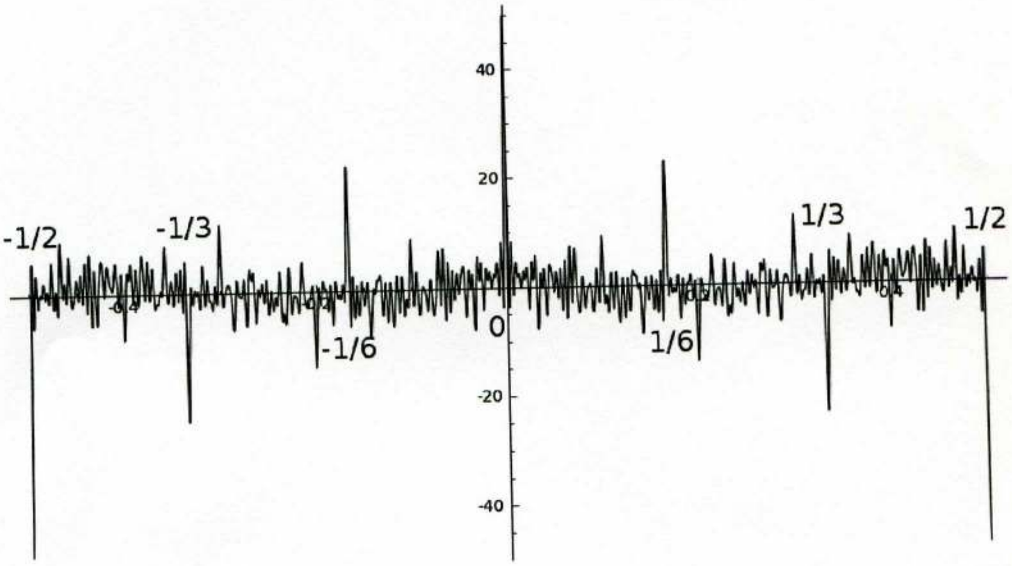
N	$\pi_2(N)/F_2(N)$
10^2	0.78036265826
10^3	1.00908007761
10^4	1.26355052039
10^5	1.29419782137
10^6	1.30767275979
10^7	1.32540645764

$$F_1(N) = \frac{N}{\log^2 N} \qquad F_2(N) = \int_1^N \frac{dt}{\log^2 t}$$

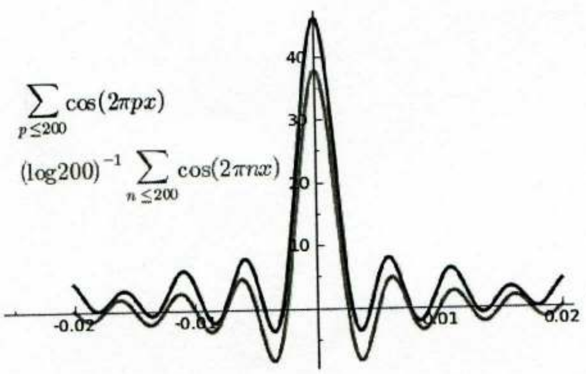
2. Conjetura de Goldbach

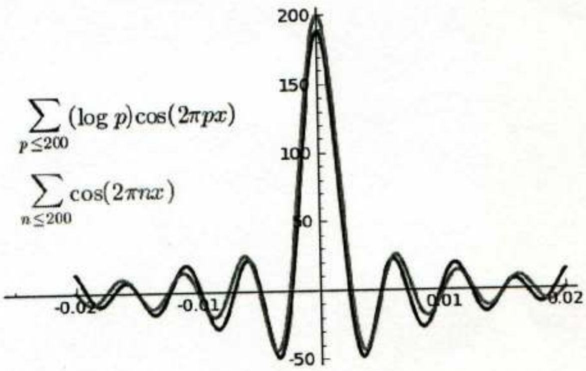
$r_G(N)$ para $10^6 \leq N < 2 \cdot 10^6$

3. $F(x) = \sum_{p\leq 50} \cos(2\pi p x)$



4. Arcos mayores





Los arcos menores son "ruido".

A veces el ruido tiene estructura

$$E(N) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^{3/2}}$$