

Matemáticas con experimentos

Fernando Chamizo (UAM-ICMAT)
Dulcinea Raboso

Universidad Autónoma de Madrid

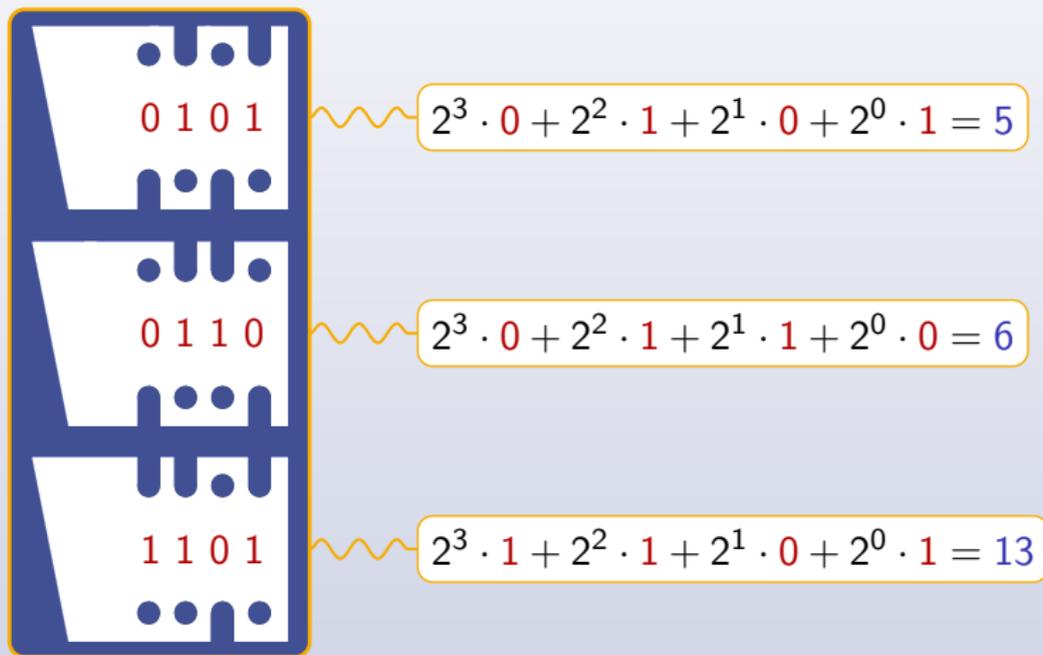
5 de julio de 2017

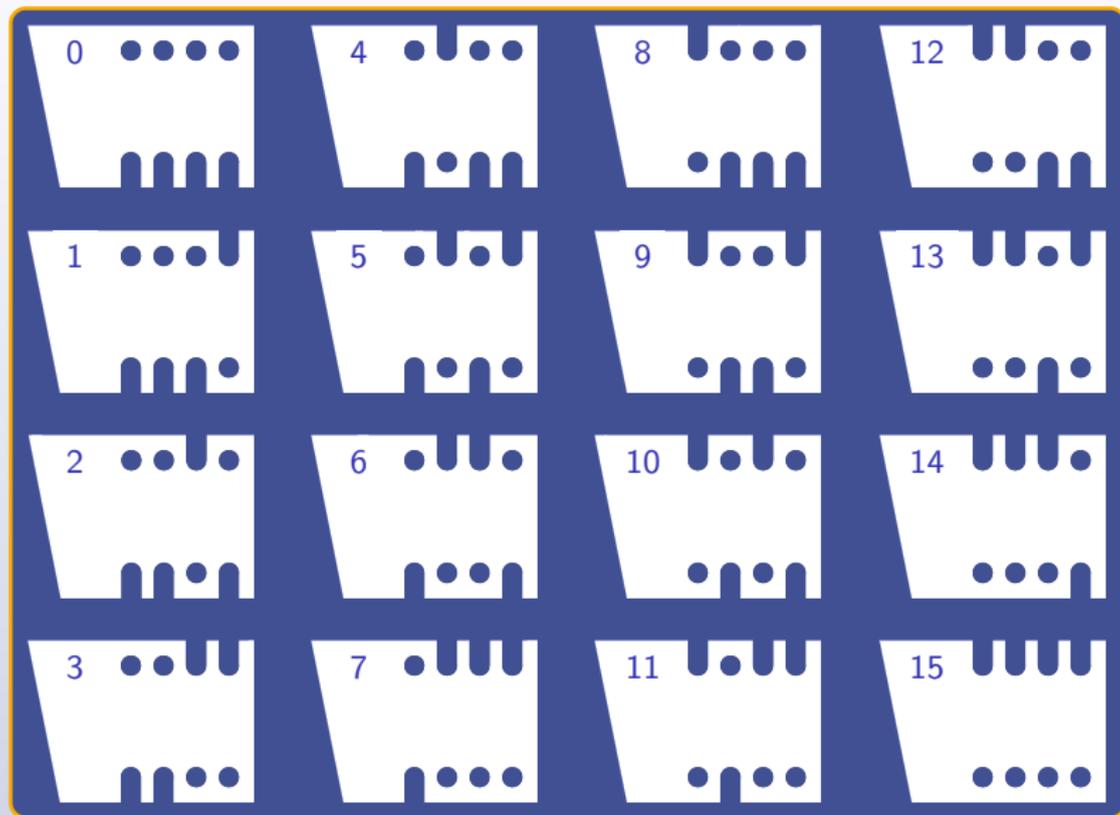
Tarjetas perforadas

La baraja del
mago matemático

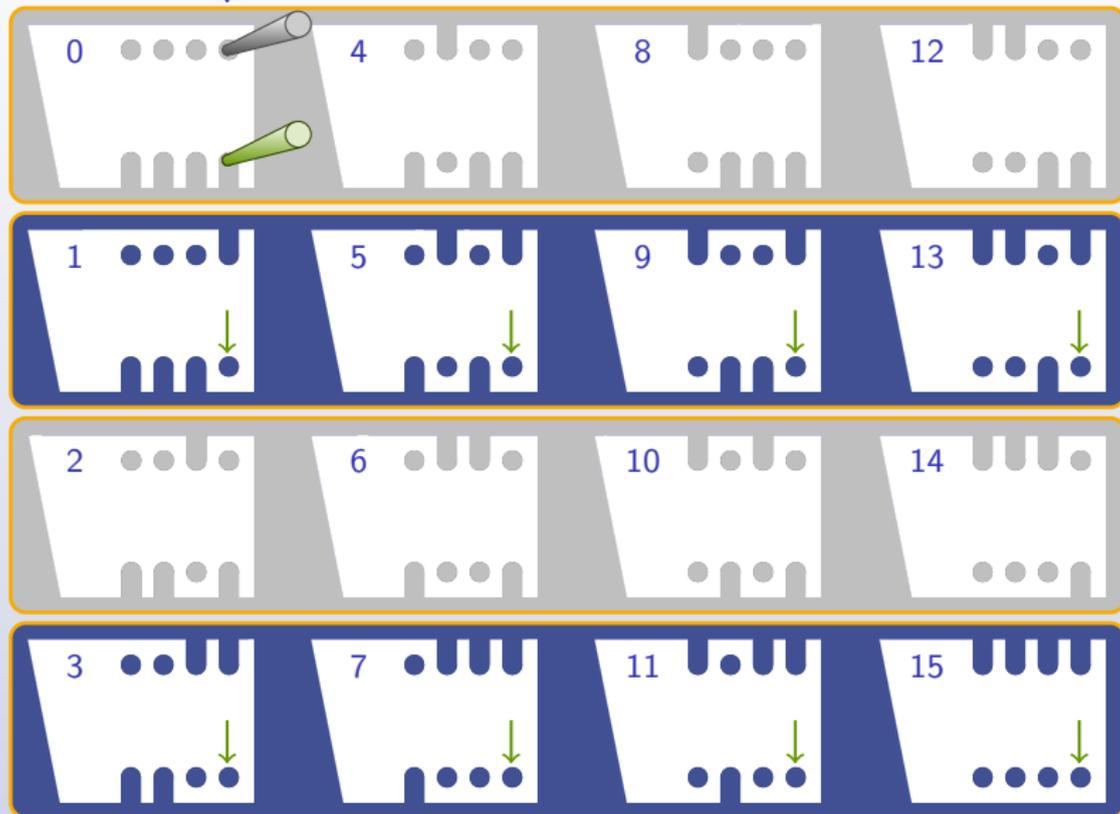
Sistema binario

Es un sistema de numeración en el que los números se representan utilizando solamente dos cifras, 0 y 1.

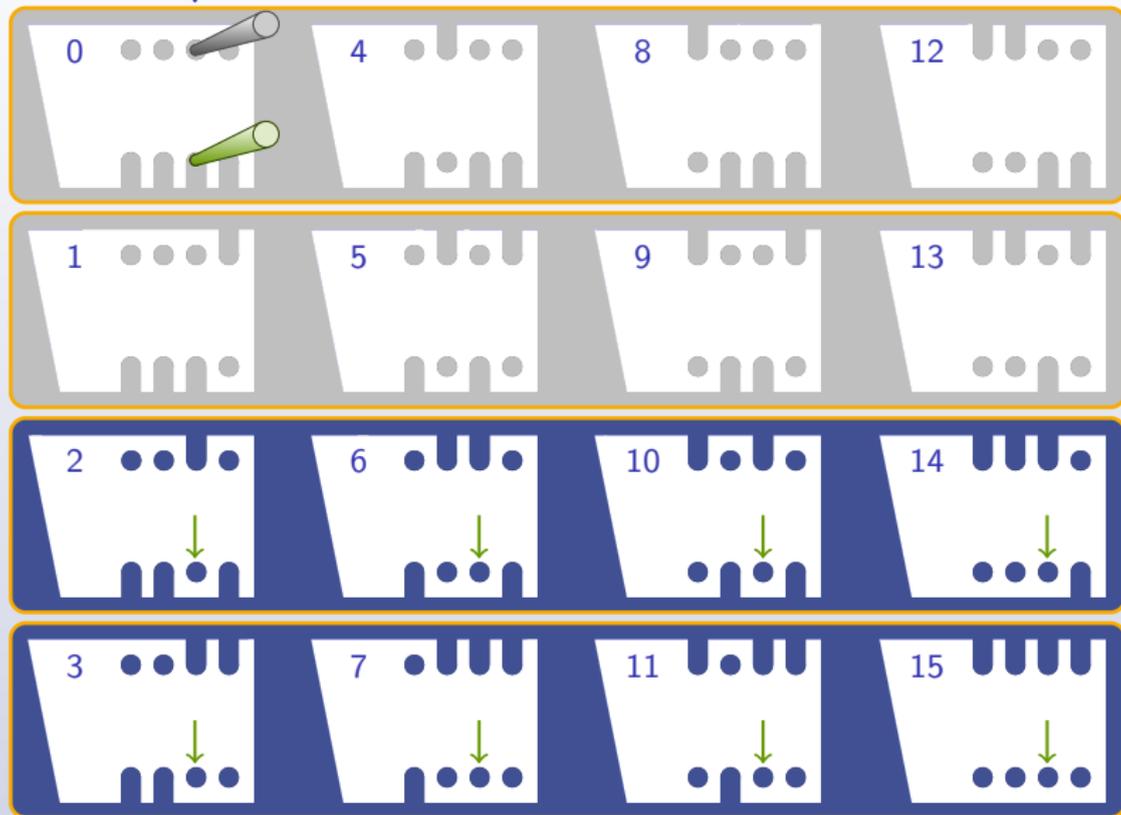




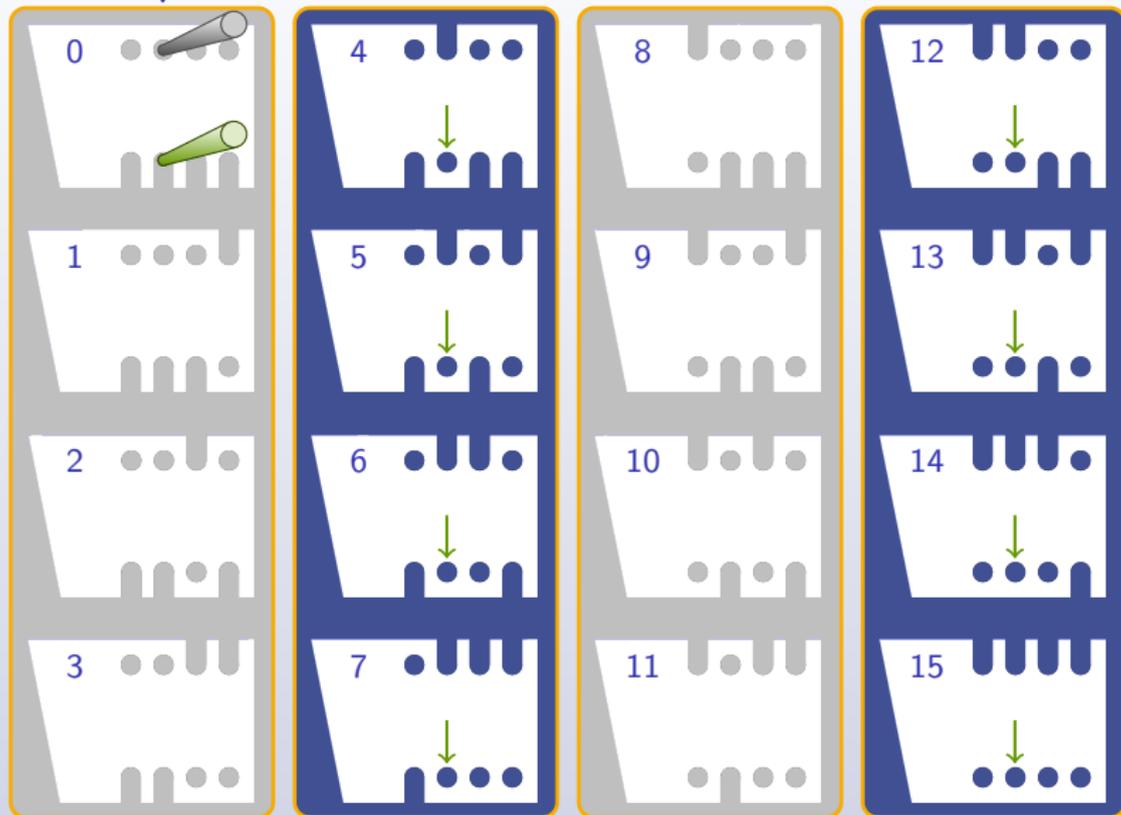
↓ 1.º movimiento



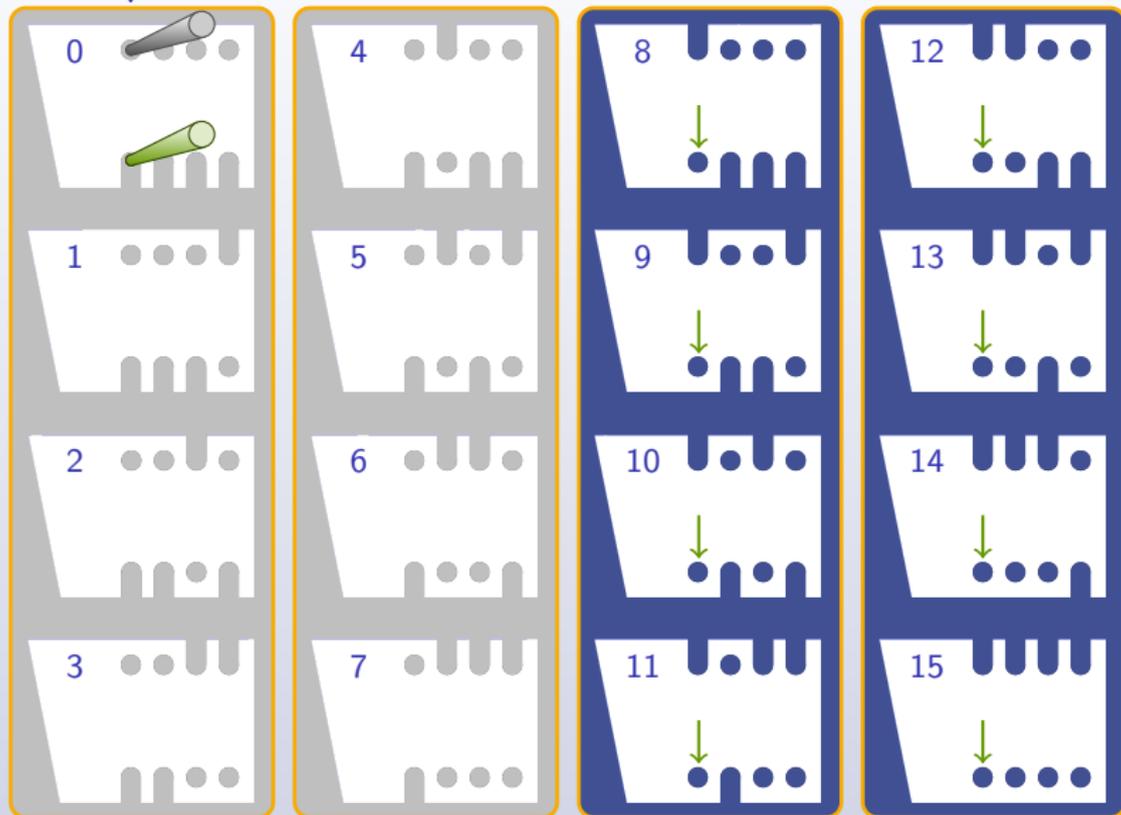
↓ 2.º movimiento



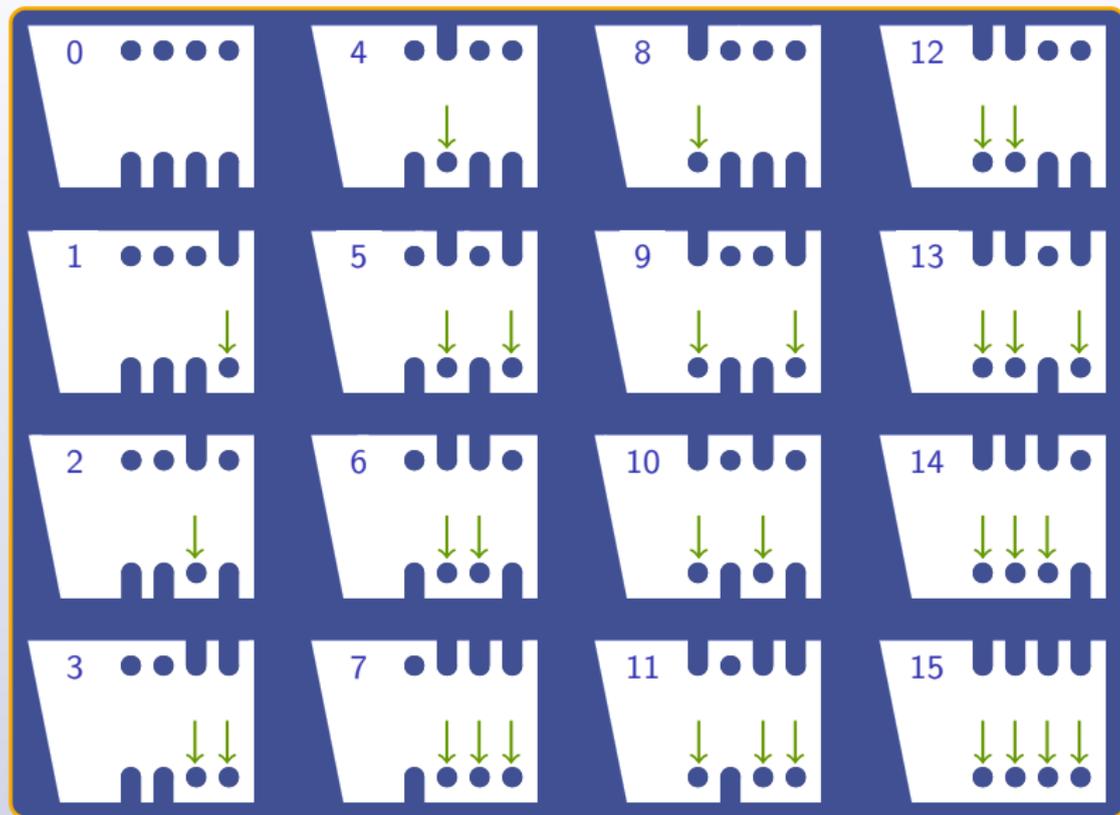
↓ 3.^{er} movimiento



↓ 4.º movimiento



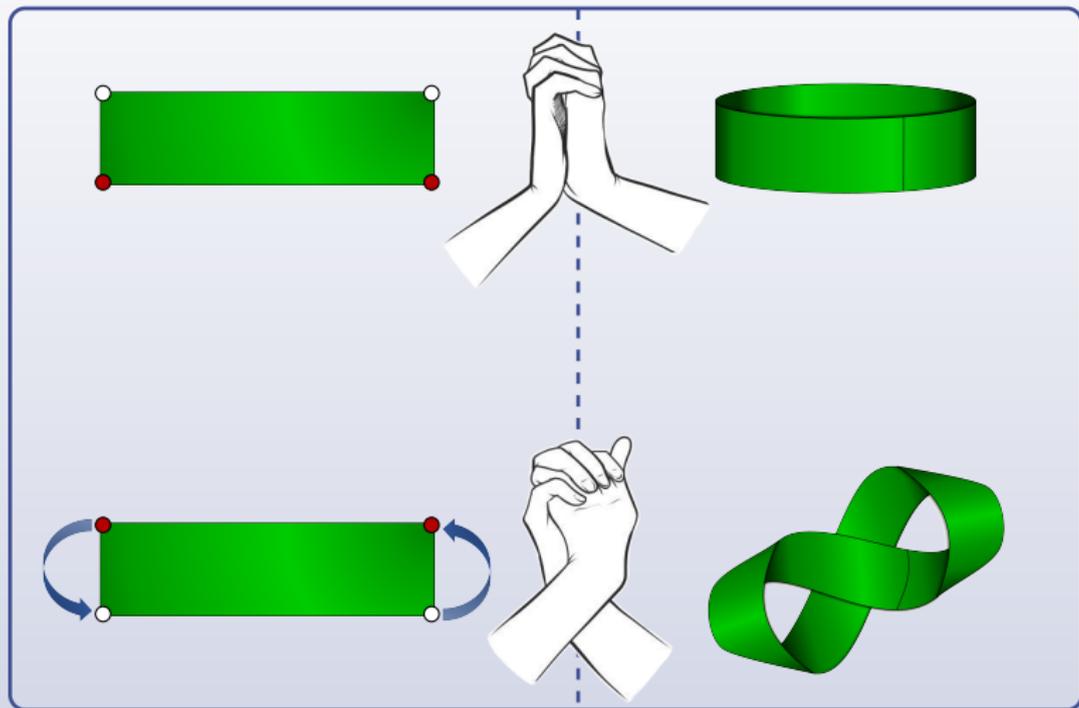
Movimientos



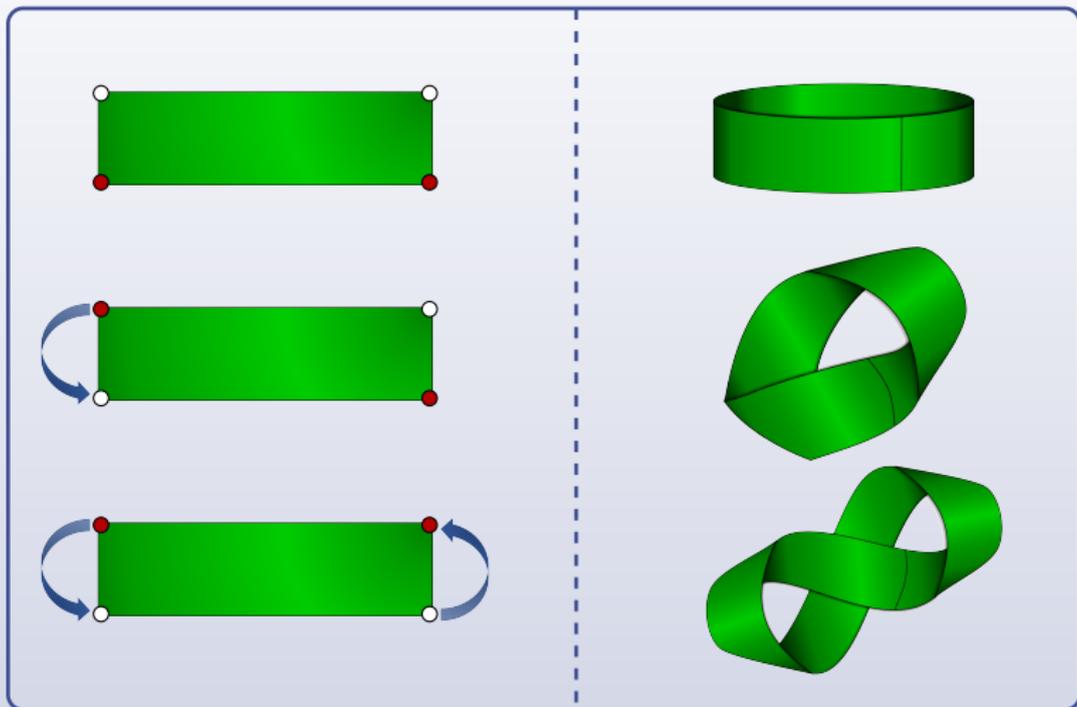
Topología

Un mundo
de plastilina

Deformaciones sin cortes

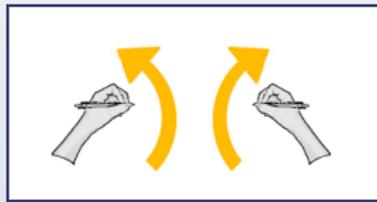


Deformaciones sin cortes

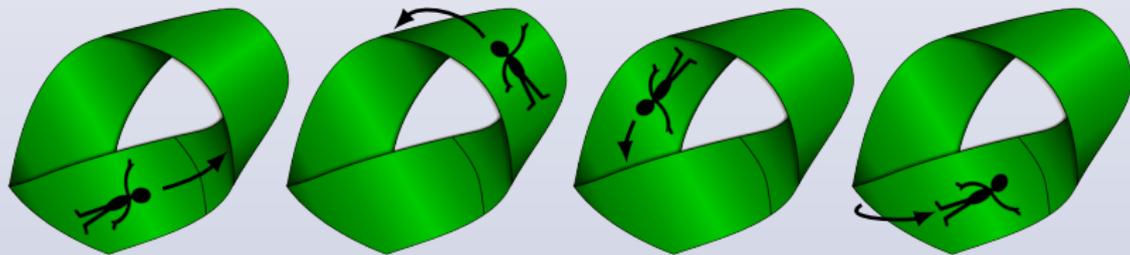


Banda de Möbius

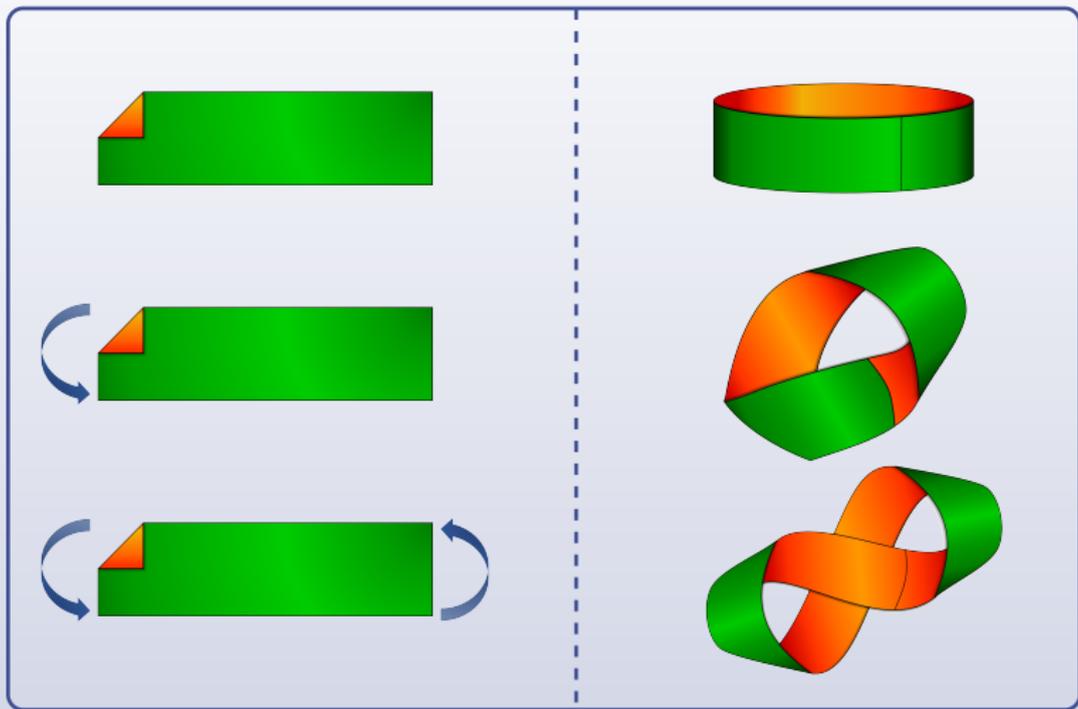
La **banda de Möbius** es una superficie con una sola cara y un solo borde que además es un objeto no orientable, es decir, invierte el sentido de los objetos que viajan sobre ella.



Si un habitante (bidimensional) de la banda de Möbius se cansara de ser diestro, no tendría más que dar un paseo por su mundo.

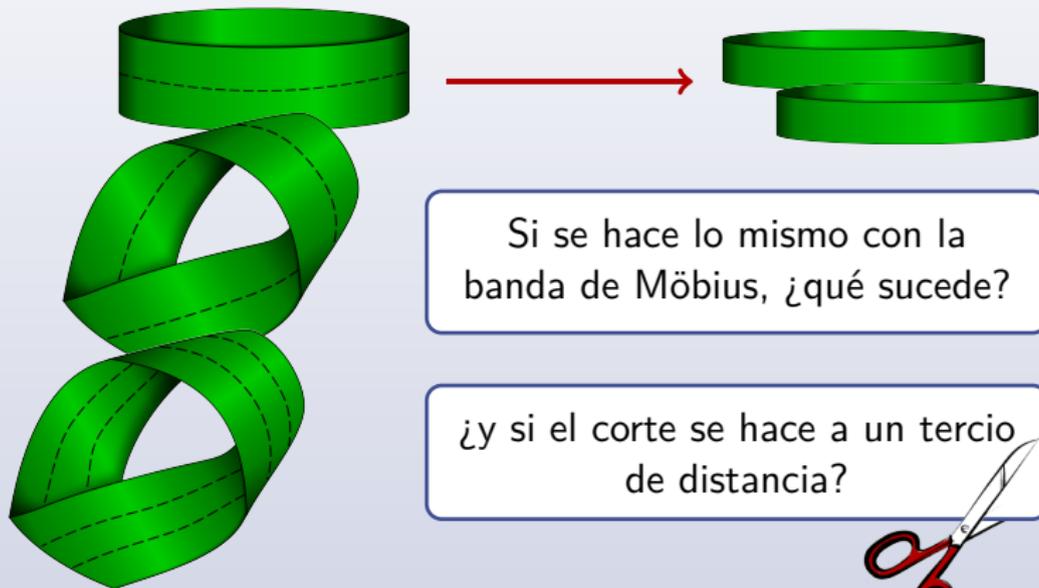


Extrañas propiedades



Extrañas propiedades

Al cortar por la mitad un cilindro de papel, se obtienen dos cilindros con el mismo radio y la mitad de altura que el original.

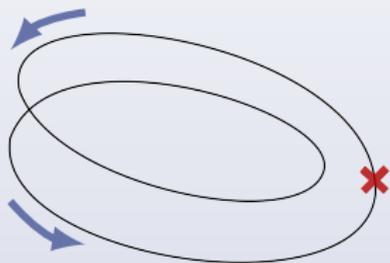


El problema del camarero



Si realizamos **dos** rotaciones de la mano mientras sostenemos en la palma un vaso de agua, terminamos en la posición inicial.

La mano hace una rotación sobre su hombro, retorciendo el brazo, y luego otra rotación pasando por debajo, desenrollándolo.



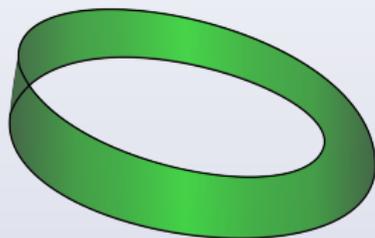
El problema está relacionado con el *espín* de los llamados *fermiones*, y “explica” por qué un electrón tiene que girar 720° para recuperar su “estado” original.

El problema del camarero



Si realizamos **dos** rotaciones de la mano mientras sostenemos en la palma un vaso de agua, terminamos en la posición inicial.

La mano hace una rotación sobre su hombro, retorciendo el brazo, y luego otra rotación pasando por debajo, desenrollándolo.

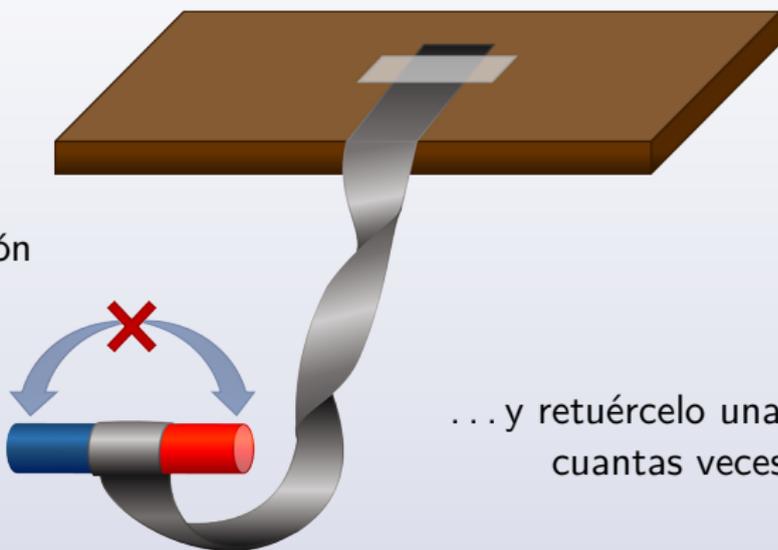


¡La trayectoria describe el borde de una banda de Möbius!

El problema está relacionado con el *espín* de los llamados *fermiones*, y “explica” por qué un electrón tiene que girar 720° para recuperar su “estado” original.

Cinturón de Dirac

Sujeta un cinturón
a una barra...



...y retuércelo unas
cuantas veces.

Si no permitimos girar la barra verticalmente,
¿se puede desenrollar?

Curvas misteriosas

Ruedas, reflejos
y cangrejos

El problema

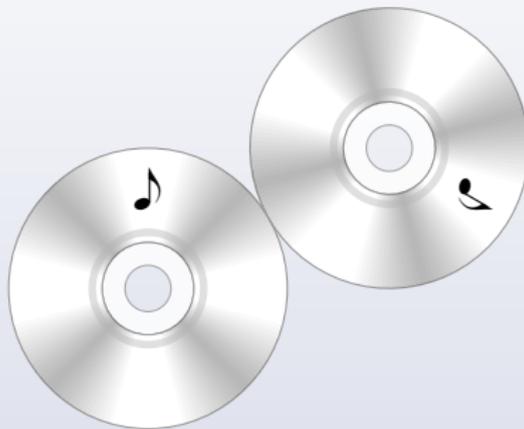
Si hacemos girar, sin deslizar, una moneda sobre otra
¿cuántos giros completos dará?





En la práctica, las monedas resbalan. Con CDs es más fácil verlo, usando el agujero central para ir desplazando el CD que gira.









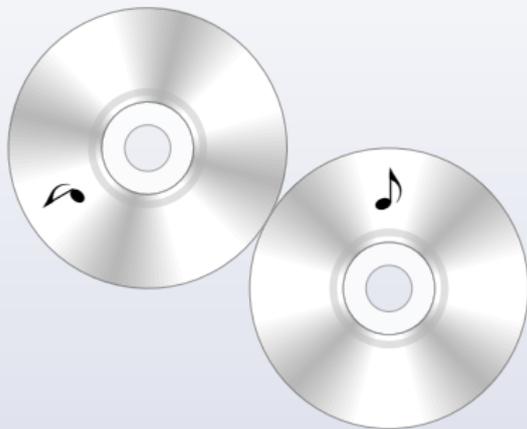




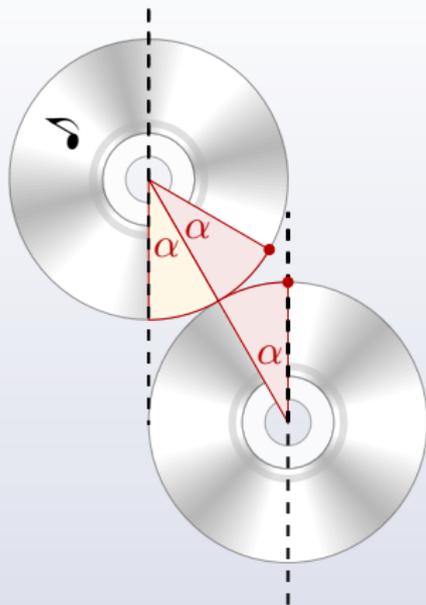








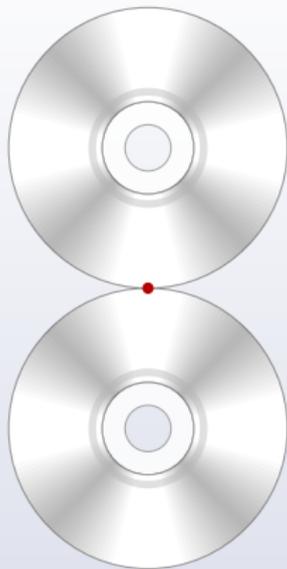


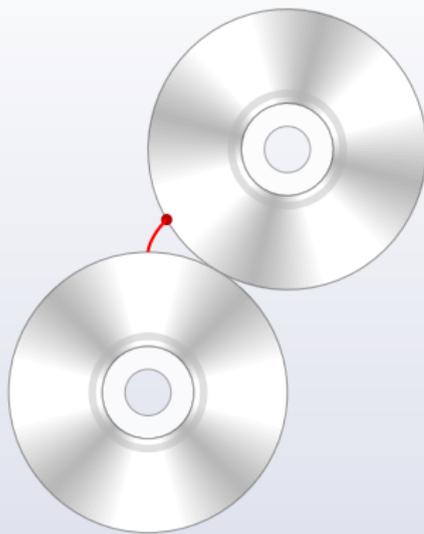


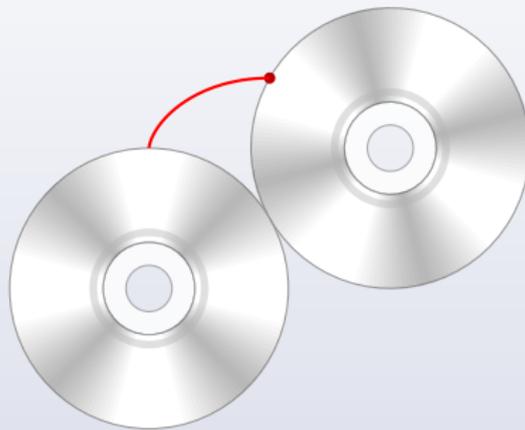
Respecto a la vertical

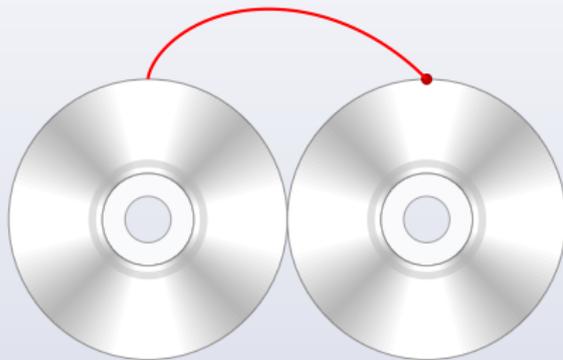
$$\alpha = \text{giro del centro}$$

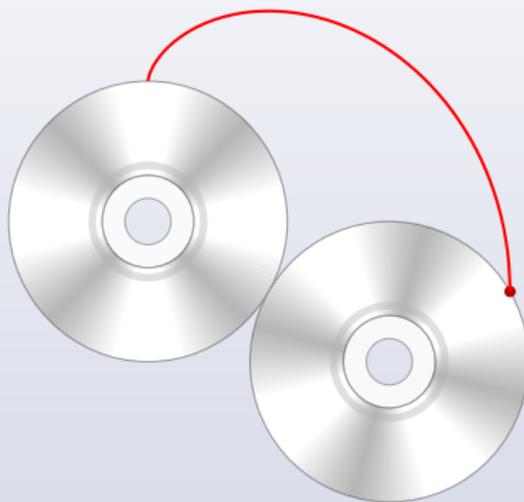
$$\alpha + \alpha = \text{giro del punto}$$

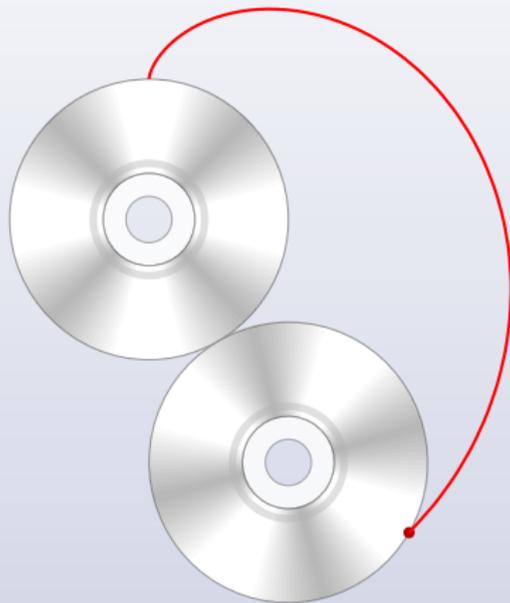




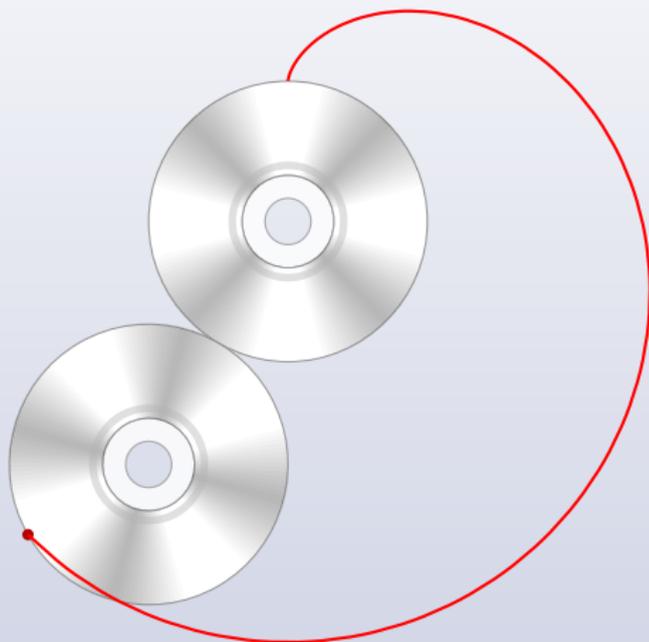


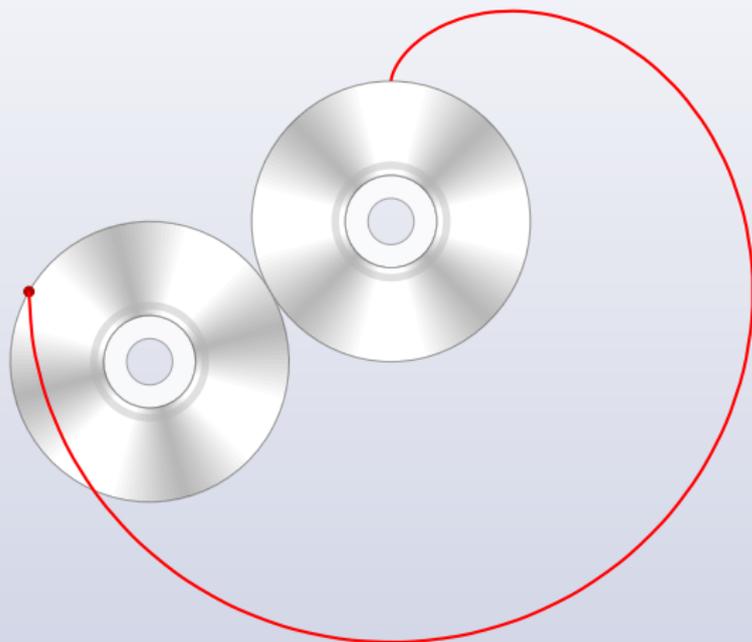


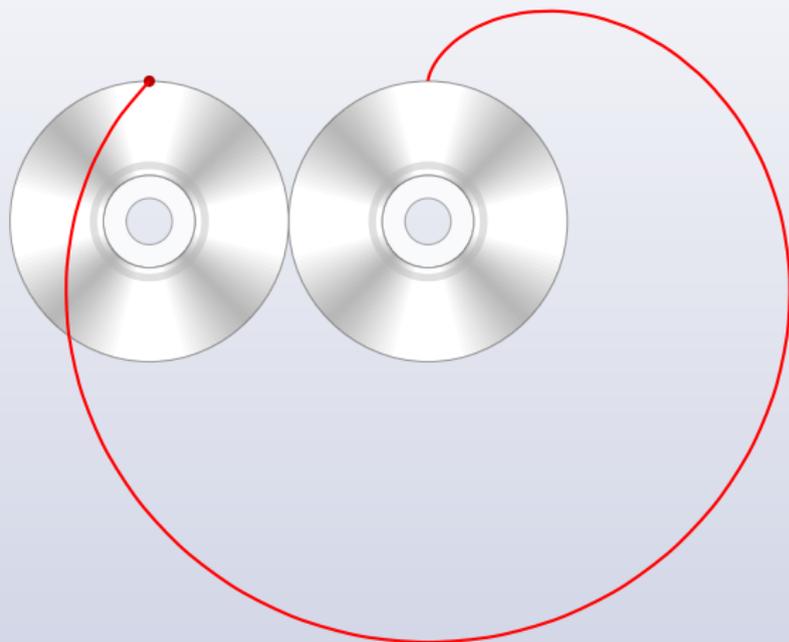


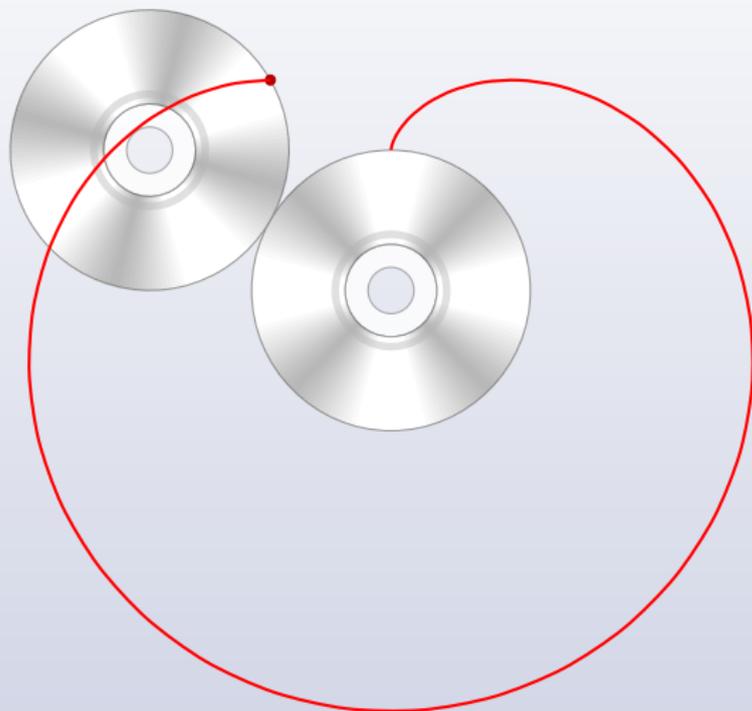


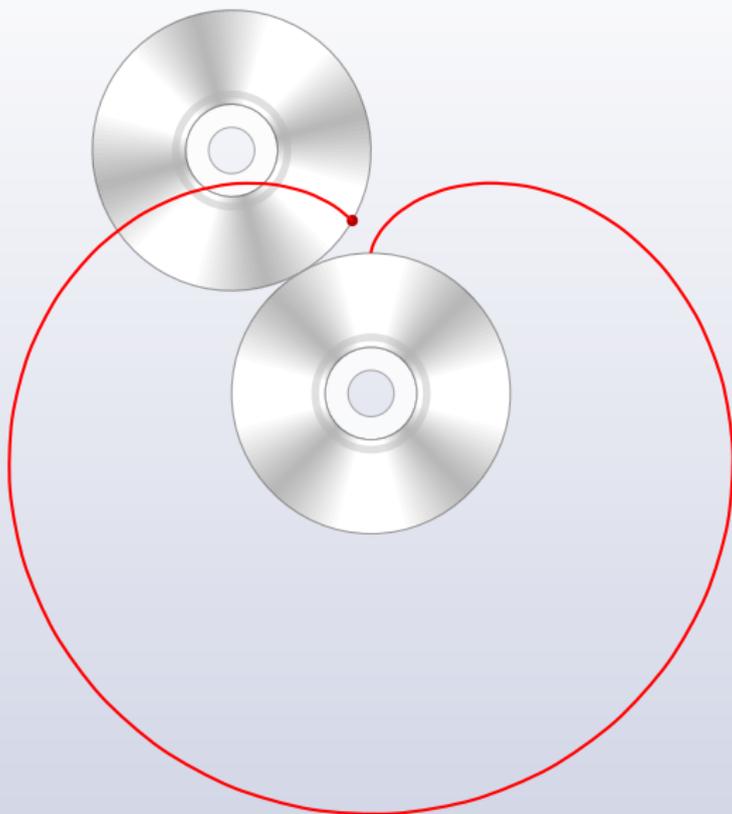


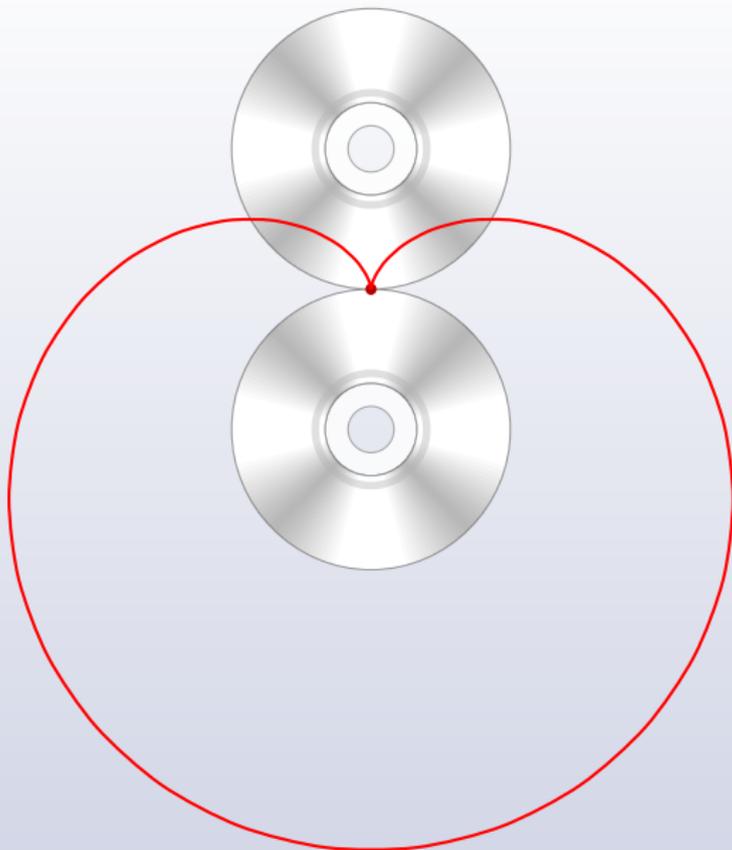






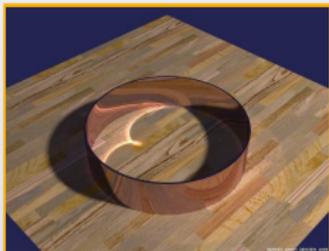






Curvas misteriosas

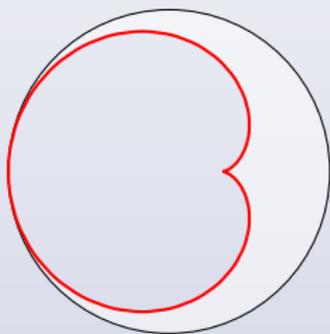
La curva que describe la trayectoria de cada punto del borde se llama **cardioide**. Ves algo parecido cuando pones un anillo o incluso una taza bajo una fuente de luz oblicua.



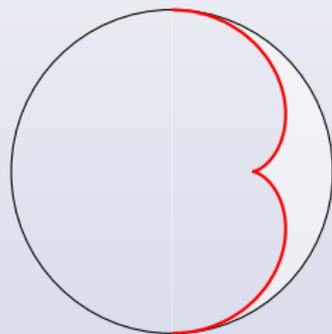
El efecto requiere que la fuente sea puntual. Es claro con una bombilla, una linterna o un foco halógeno pero no con un fluorescente. Es muy fácil verlo bajo estas condiciones.

Curvas misteriosas

Si acercamos la fuente de luz hasta el borde del anillo, el reflejo se encoge hasta formar una cardioide. La segunda curva, una vez duplicada, se llama **nefroide** y es lo que se obtendría si el CD que gira fuera un miniCD de radio la mitad.



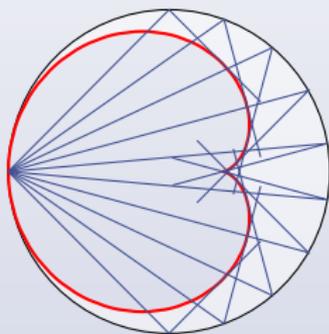
Luz en el borde



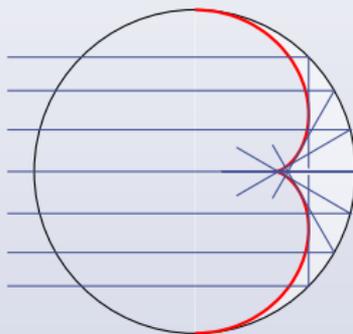
Luz lejana

¿Por qué se ven estas figuras?

Los rayos de luz se reflejan en el borde circular dando lugar a rayos reflejados que son tangentes a la curva. A lo largo de ella, se produce una acumulación e interferencia de rayos que muestra una zona especialmente iluminada.



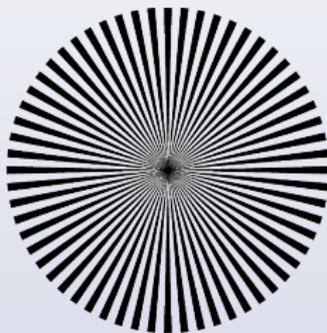
Luz en el borde



Luz lejana

Más curvas misteriosas. . .

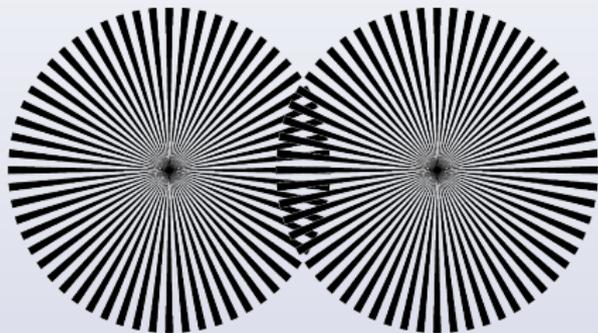
Imprimamos un montón de sectores muy finos de un círculo grande en un hoja transparente:



Ya en esta diapositiva se pueden ver unas curvas raras que no aparecen en la realidad.

Más curvas misteriosas. . .

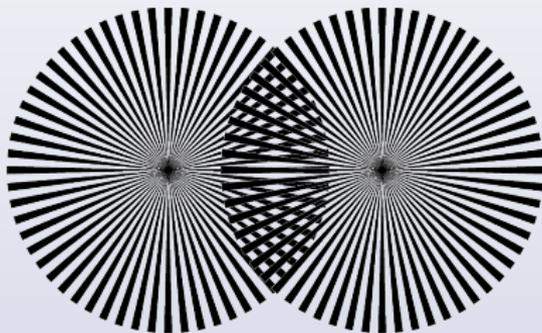
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

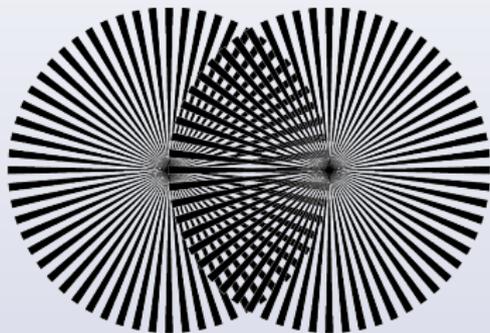
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

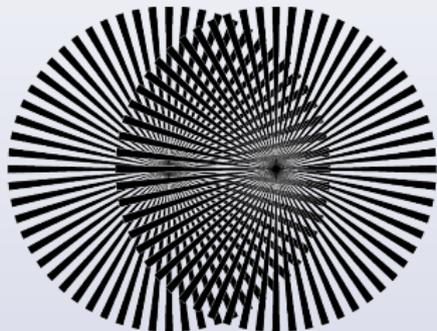
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

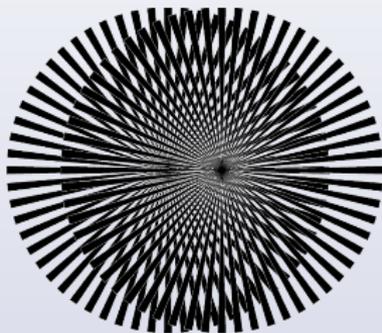
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

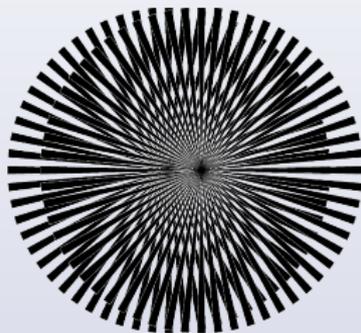
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

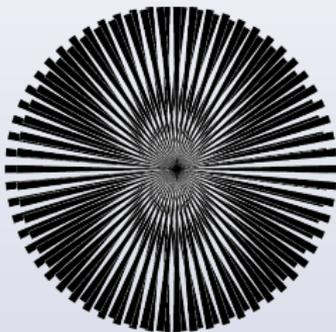
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Más curvas misteriosas. . .

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

El efecto moiré

✗ El efecto moiré es un efecto a evitar para la correcta visualización de imágenes estáticas, como las producidas por impresoras, o dinámicas, como las emitidas por televisión.

✓ También se utiliza en sentido positivo para efectuar mediciones ópticas con cierta precisión y alguna vez ha sido propuesto para dotar de medidas de seguridad a las tarjetas bancarias.

Las matemáticas que hay debajo tienen que ver con el análisis de Fourier que afirma que es posible escribir funciones como superposición de ondas. El efecto de moiré viene de una interferencia en ellas.

Serie armónica

¿Sostener media escalera
sin una pared?

El problema

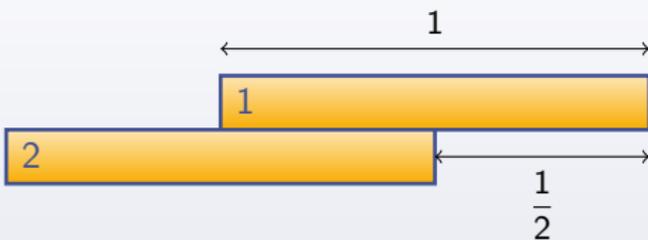
¿Cuánto se puede separar de la vertical una pila de libros?

¡Sin caerse!



Posición límite de equilibrio

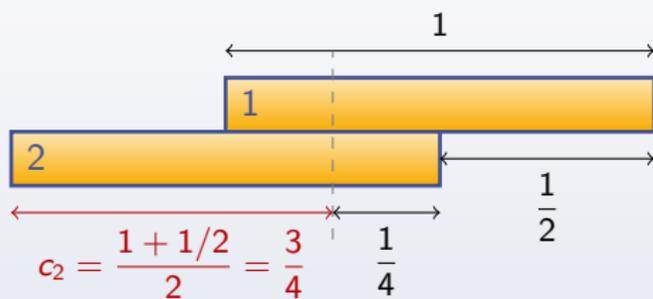
Con 2 libros:



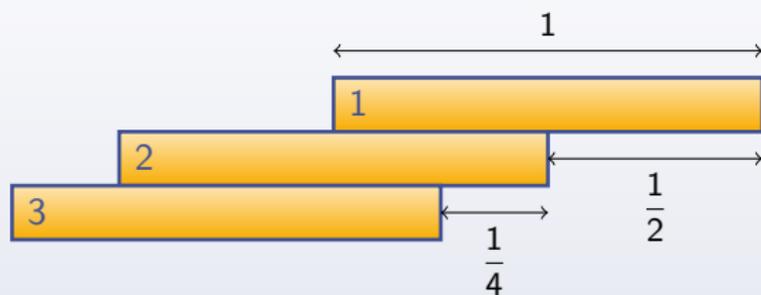
¿Por qué anchura máxima apostaríamos si disponemos de tantos libros como deseemos?

Parece claro que el último libro no puede estar más allá de la base de sustentación, ¿pero es verdad?

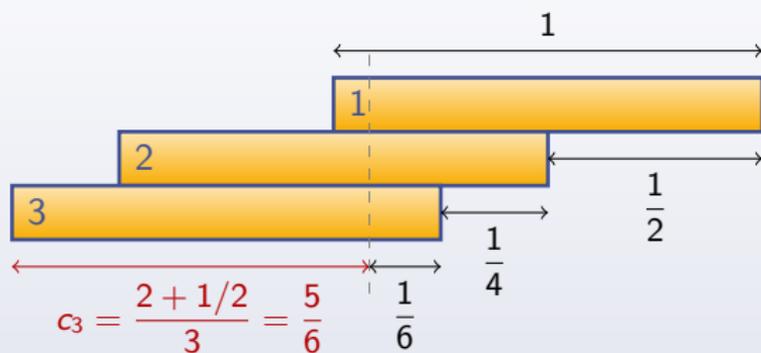
Posición límite de equilibrio



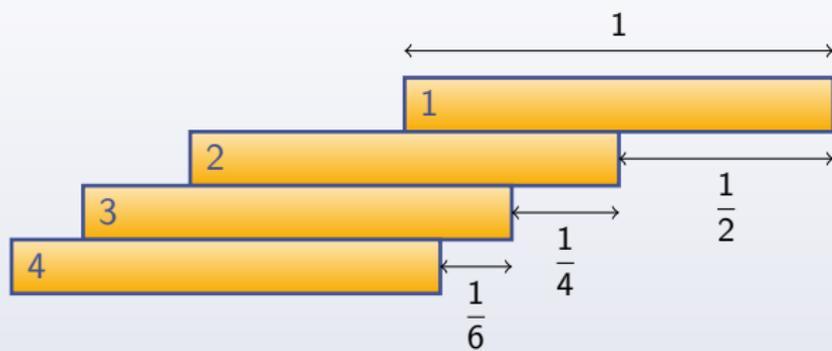
Posición límite de equilibrio



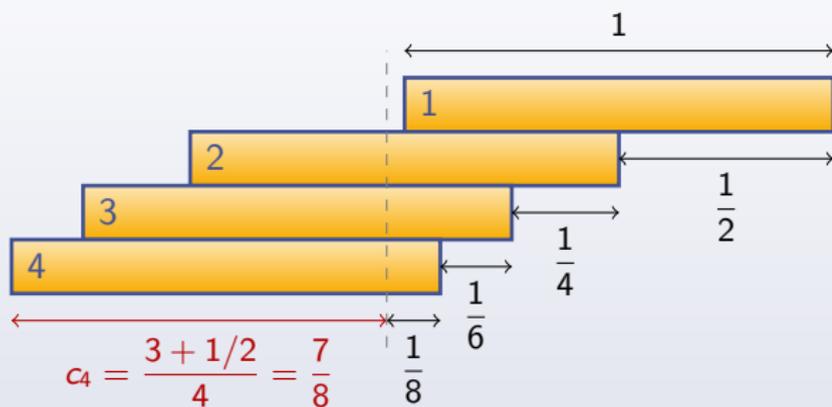
Posición límite de equilibrio



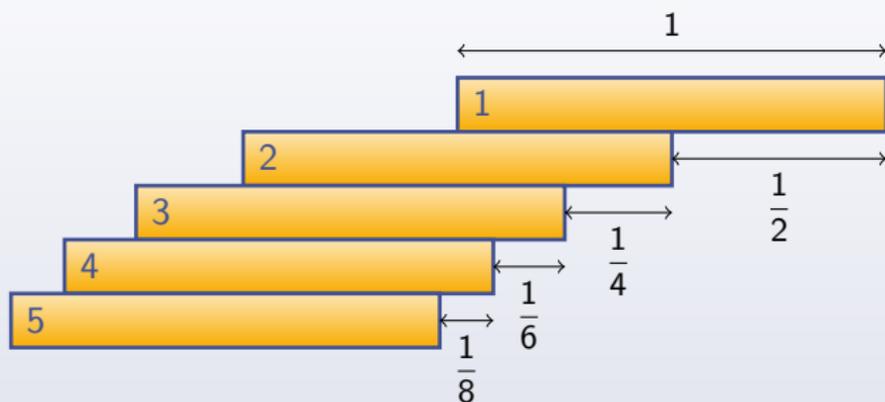
Posición límite de equilibrio



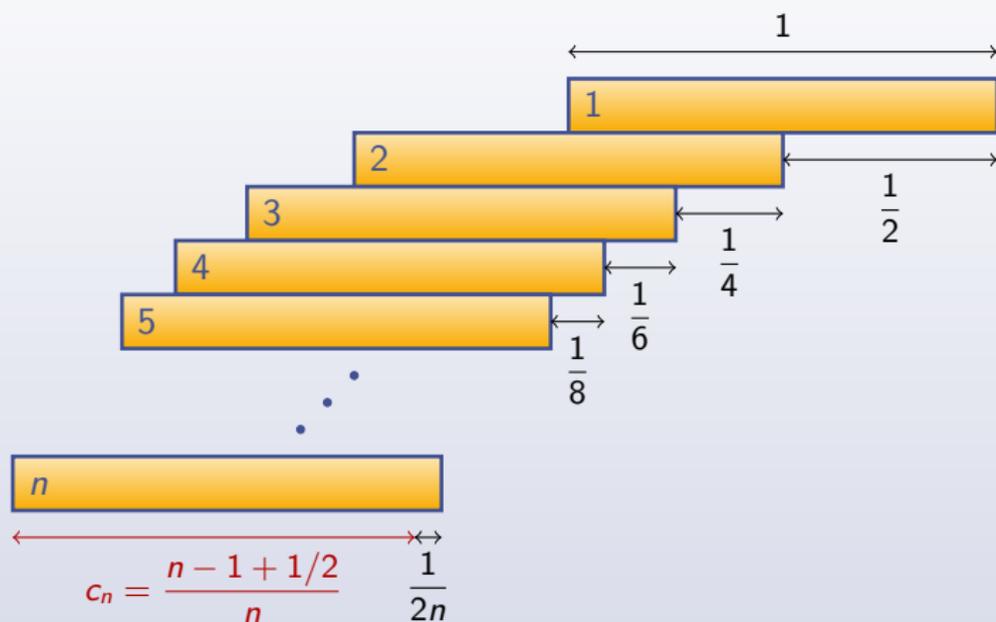
Posición límite de equilibrio



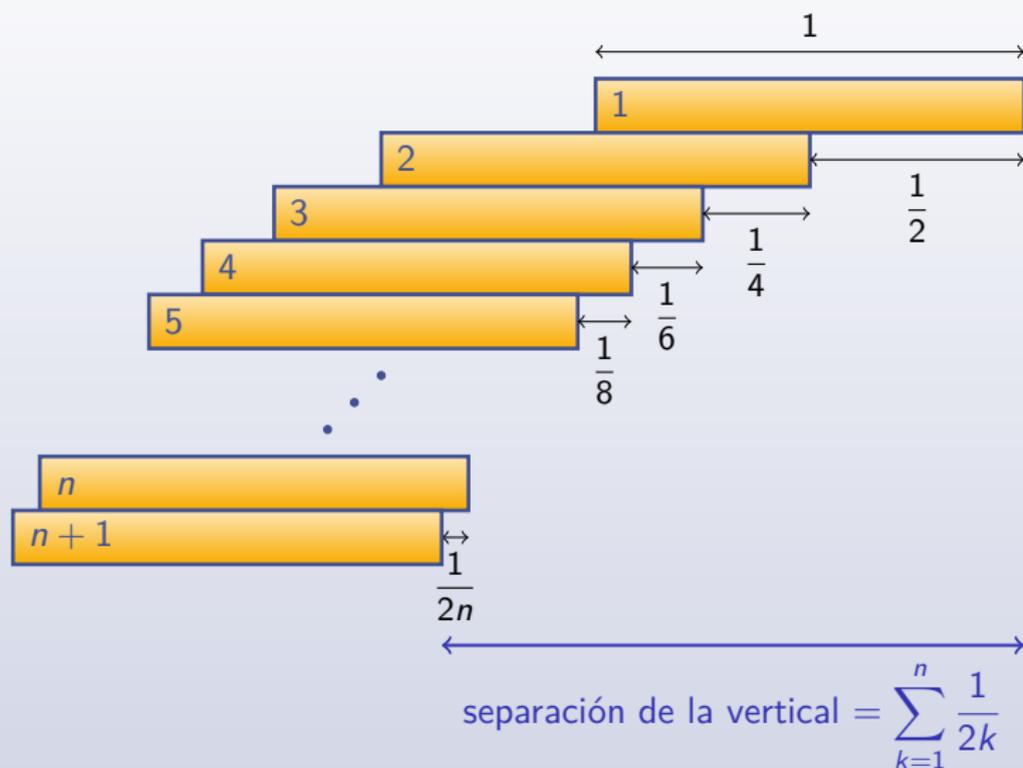
Posición límite de equilibrio



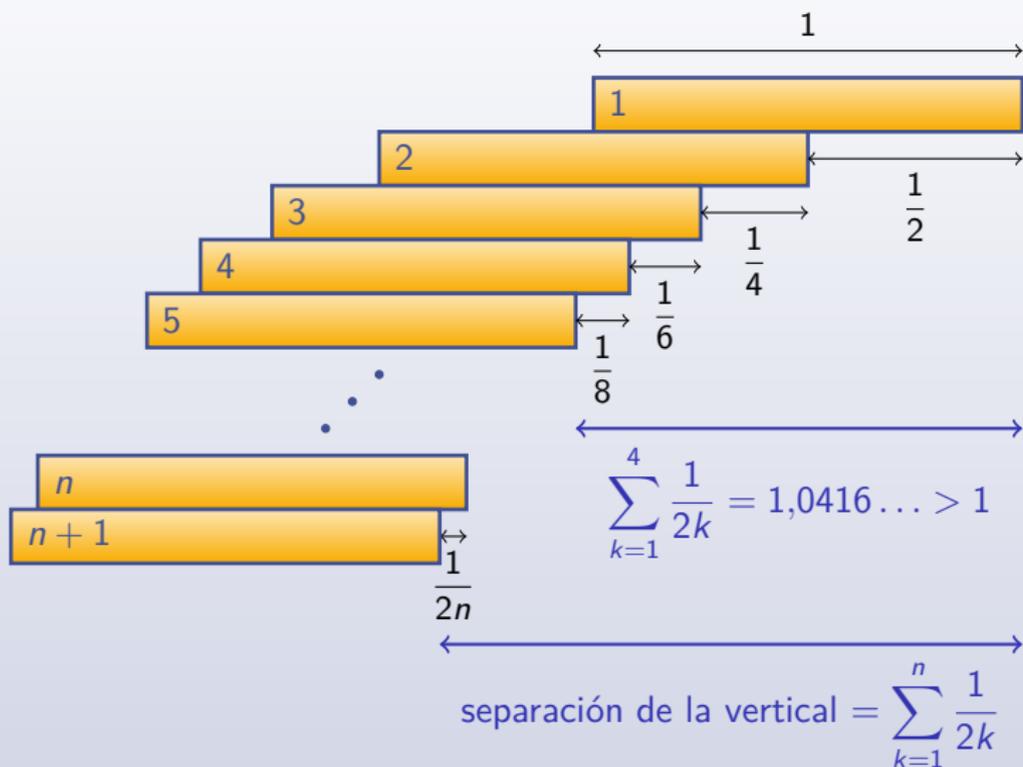
Posición límite de equilibrio



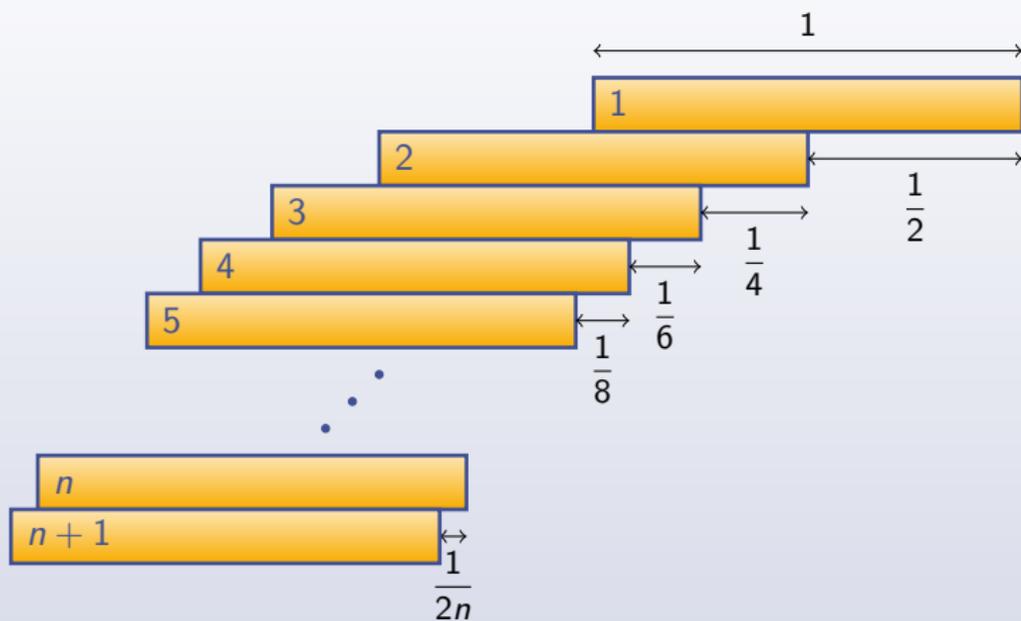
Posición límite de equilibrio



Posición límite de equilibrio



Posición límite de equilibrio



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

2 num. $\geq 1/8$ 4 num. $\geq 1/16$

Ver para creer...



¡Sin caerse!

Velocidad límite

Echa el freno

Un chiste malo

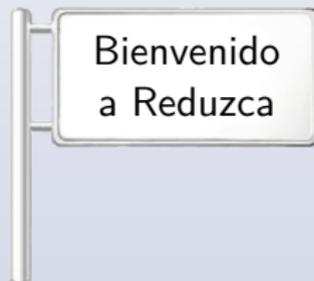


Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica:

Un chiste malo



Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica:



Un chiste malo



Hay 5 tramos de 20 km. El primero se recorre a 100 km/h, el segundo a 80 km/h, hasta el último que se recorre a 20 km/h.



$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20}{100} + \frac{20}{80} + \frac{20}{60} + \frac{20}{40} + \frac{20}{20} = 2\text{h. } 17\text{m.}$$

La realidad supera a la ficción...



Logaritmo neperiano

Los logaritmos neperianos son muy importantes y, aunque parezca mentira, J. Neper los inventó en 1614 mediante una variante de este chiste.

En el caso de Neper, la distancia inicial era 1 y había infinitas señales, con lo cual el coche nunca llegaba.



$$-\ln(x) = \text{tiempo en llegar a distancia } x$$

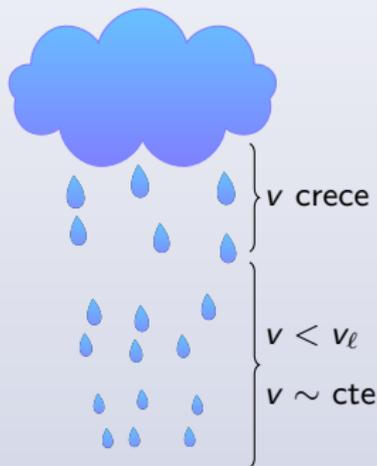
Los logaritmos permiten pasar multiplicaciones a sumas, divisiones a restas y raíces a divisiones.

Velocidad límite

Hay situaciones en las que la velocidad se comporta como el espacio recorrido en el chiste: se incrementa cada vez menos y hay una **velocidad límite**.

¿A qué velocidad cae la lluvia?

¿Por qué los paracaidistas llevan gafas?



Velocidad límite

Hay situaciones en las que la velocidad se comporta como el espacio recorrido en el chiste: se incrementa cada vez menos y hay una **velocidad límite**.

¿A qué velocidad cae la lluvia?

¿Por qué los paracaidistas llevan gafas?

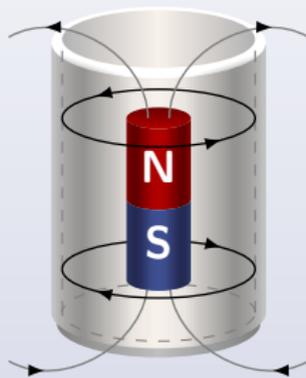
Dependiendo de las condiciones, se tiene:

- Gotas de lluvia gruesa: $v_\ell = 36 \text{ Km/h}$
- Salto en paracaídas: $v_\ell = 200 \text{ Km/h}$



Velocidad límite

Un ejemplo menos conocido es el de un imán que cae por un tubo metálico que no se pegue al imán.



Un campo magnético que varía mueve los electrones de metal que a su vez, crean otro campo magnético. Según la ley de Lenz, estos campos son opuestos.

Rápidamente la velocidad del imán se acerca a la velocidad límite, que es pequeña si el imán es potente.

Podéis encontrar la presentación en:

<https://www.uam.es/fernando.chamizo>
