

# Números que brillan:

matemáticas en imágenes cotidianas

---

Fernando Chamizo (UAM-ICMAT)

- Las ideas [matemáticas], como los colores o las palabras, deben combinarse de manera armoniosa. [G. H. Hardy, matemático (1877–1947)].
- Una imagen vale más que mil palabras. [Atribuida a A. Brisbane, editor e inversor (1864–1936)].
- La aritmética es capaz de contar hasta 20 sin quitarte los zapatos. [Atribuida a Mickey Mouse, dibujo animado (1928– $\infty$ )].

## Matemáticas en el fondo de una taza

## Matemáticas en el fondo de una taza

Acercando una linterna al borde una taza o iluminándola bajo un foco surge un curioso patrón de reflejos.

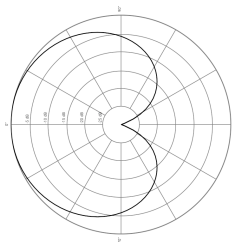


Se parece a los que se ven en el fondo de las piscinas, pero no es aleatorio.

Aparece algo similar en objetos cotidianos o en experimentos y simulaciones de ciencia y tecnología.



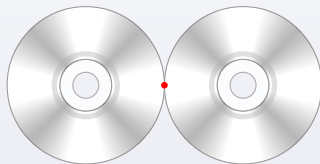
Reloj de pulsera



Atenuación de un micrófono

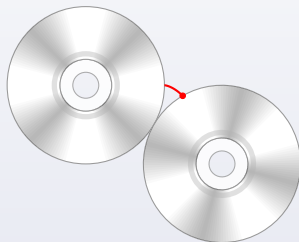
Fuente: Wikipedia: cardioid, microphone

La figura aparece también como una curva mecánica:



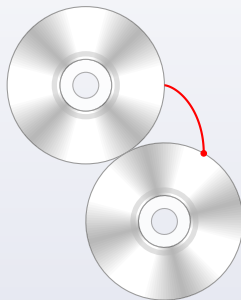
**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

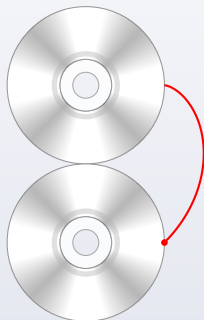
La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.



La figura aparece también como una curva mecánica:



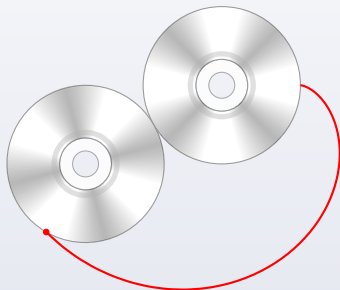
**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

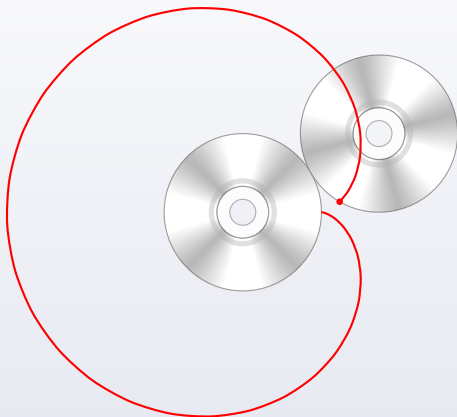
La figura aparece también como una curva mecánica:



**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

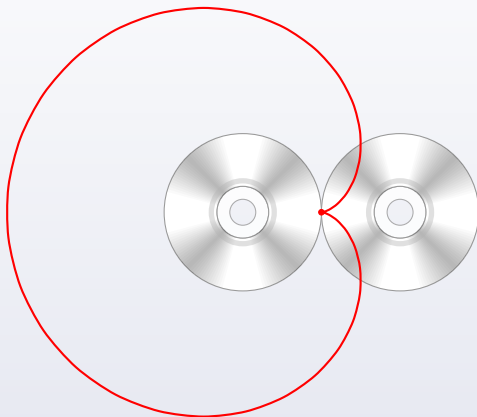


La figura aparece también como una curva mecánica:



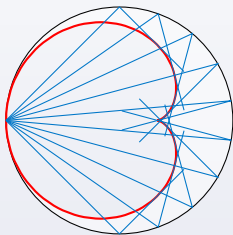
**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La figura aparece también como una curva mecánica:



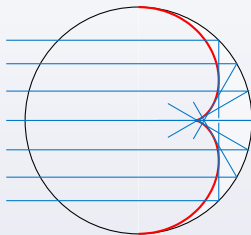
**Curiosidad:** El círculo que gira da dos vueltas.

La explicación es que los rayos de luz se reflejan en el borde circular dando lugar a rayos reflejados que son tangentes a la curva. A lo largo de ella, se produce una acumulación e interferencia de rayos que muestra una zona especialmente iluminada.



Luz en el borde

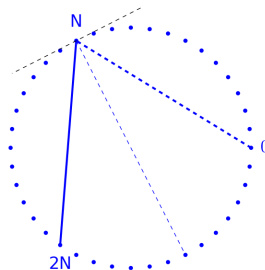
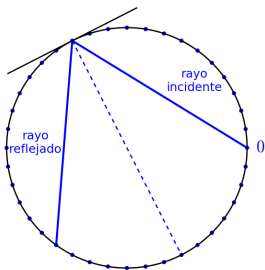
**Cardioide**



Luz lejana

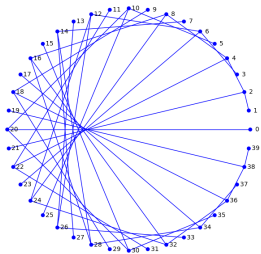
**Nefroide**

Multiplicando por dos conseguimos aproximar el patrón. Esto se sigue de sencillas leyes de la óptica.

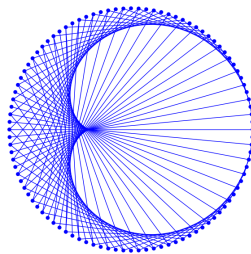


Receta universal de los espejos: ángulo de incidencia = ángulo de reflexión.

Con más rayos conseguimos mejores aproximaciones.

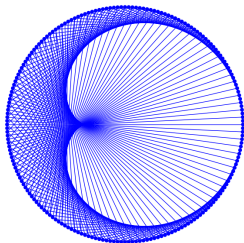


40 puntos

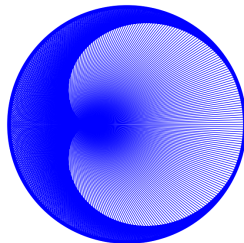


100 puntos

Y con muchísimos, algunos fenómenos extraños. . .



200 puntos

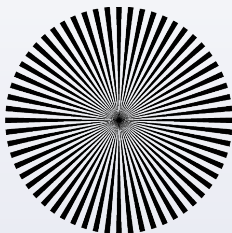


600 puntos

No lleves a la tele camisa de rayas

## No laves a la tele camisa de rayas

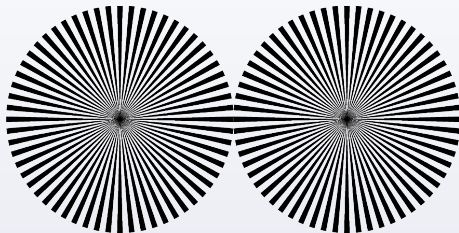
Imprimamos un montón de sectores muy finos de un círculo grande en un lámina transparente:



Ya en esta diapositiva se pueden ver unas curvas raras cerca del centro.

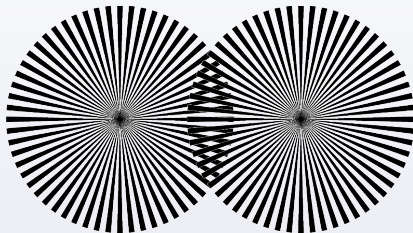


Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



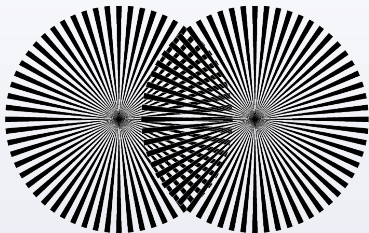
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



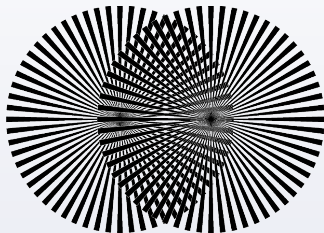
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



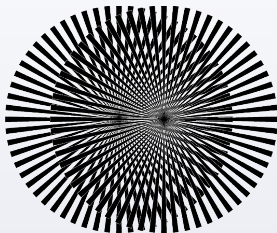
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



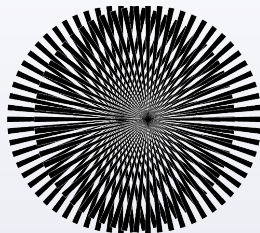
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



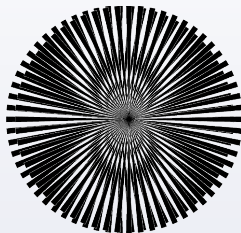
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



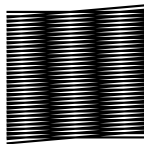
Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes, se producen curiosas sensaciones de movimiento.

- El efecto moiré es un efecto a evitar para la correcta visualización de imágenes estáticas, como las producidas por impresoras, o dinámicas, como las emitidas por televisión.

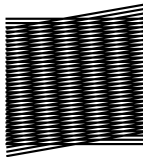
- También se utiliza en sentido positivo para efectuar mediciones ópticas con cierta precisión y alguna vez se ha propuesto como medida de seguridad en tarjetas bancarias.

Su explicación proviene de las matemáticas de la interferencia de ondas, aunque hay casos que admiten una explicación sencilla.

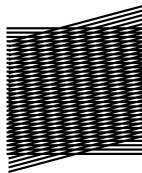




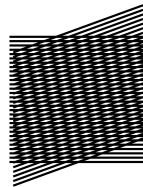
$$\alpha = 5^\circ$$



$$\alpha = 10^\circ$$

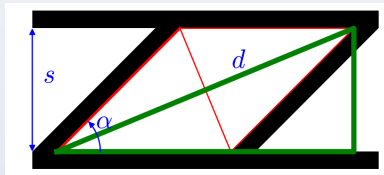


$$\alpha = 15^\circ$$



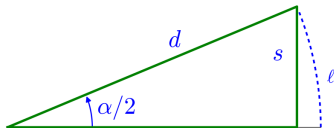
$$\alpha = 20^\circ$$

## Problema:



Dada la separación  $s$ ,  
¿cómo varía  $d$   
con el ángulo  $\alpha$ ?

## Un pequeño argumento matemático



Circunferencia completa  $\rightarrow 2\pi R$

$\Downarrow$  (regla de tres)

Arco de ángulo  $\frac{\alpha}{2} \rightarrow 2\pi R \cdot \frac{\alpha/2}{360}$

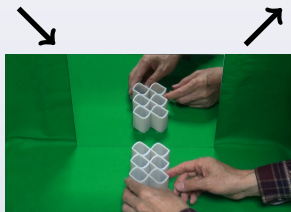
Tomando  $R = d$  y aproximando  $\ell \approx s$ , se tiene

$$s \approx 2\pi d \cdot \frac{\alpha/2}{360} \Rightarrow \boxed{d \approx \frac{360s}{\pi\alpha}}$$

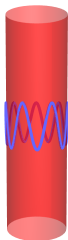
¡Qué ilusión!

# ¡Qué ilusión!

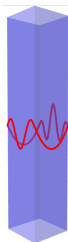
K. Sugihara es un matemático y artista famoso por sus ilusiones ópticas. Un vídeo suyo muy difundido muestra paradojas en un espejo.



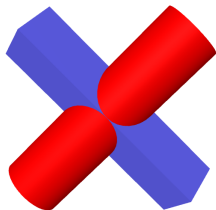
¿El truco?



Una curva pintada en un cilindro transparente desde arriba se ve como una circunferencia.



Para este ortoedro, una curva se vería cuadrada desde arriba.



La curva intersección se verá por un lado como circunferencia y por el otro, como cuadrado.



La curva intersección puede ser complicada, pero hallarla es *solo matemáticas*...

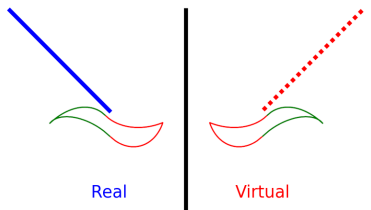
$$c = c_+ \cup c_-$$

$$c_{\pm}(t) = (t, \pm f_+(t^*), \pm f_-(t^*))$$

$$t^* = t \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

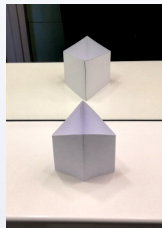
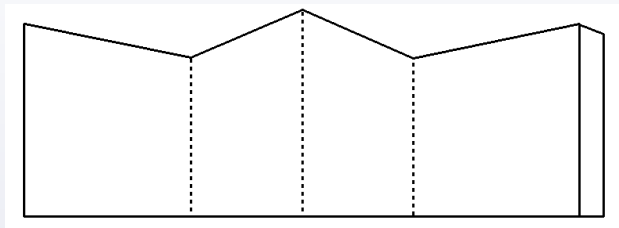
$$f_{\pm}(t) = \frac{1}{2} (1 - t \pm \sqrt{1 - t^2})$$

## Geometría de un espejo



El caso de un triángulo-cuadrado es matemáticamente más simple porque la curva es una línea poligonal (no plana).

Si quieres intentarlo, aquí tienes una plantilla:



Una vez construido, hay que ajustar un poco las esquinas hasta que se vea un triángulo reflejado como un cuadrado al mirar con un ángulo de unos  $45^\circ$ . Al darle la vuelta, tendrás un cuadrado reflejado como un triángulo.

**Misterio:** Por alguna razón que no sé explicar, en la práctica se ve mejor el triángulo reflejado como cuadrado que el cuadrado reflejado como triángulo.

## ¡Y en 3D!

La ilusión óptica más increíble de la que tengo noticia fue creada para un encuentro en honor de Martin Gardner (1914-2010), un famoso divulgador matemático. Está basada en ideas del mago Jerry Andrus (1918–2007).

Consiste en una especie de dragón tridimensional que parece mover la cabeza cuando lo miramos con un solo ojo. El efecto también se captura en vídeo. Si tienes curiosidad, mira por ejemplo:

<https://www.gathering4gardner.org/3d-dragon-illusion>

La perspectiva se comenzó a estudiar matemáticamente en el Renacimiento por su interés en la pintura.

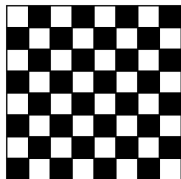


## Filtros y más filtros

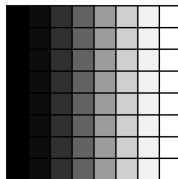
# Filtros y más filtros

## Imágenes con números

El modelo matemático para una foto en blanco y negro es una matrix de números que indican el tono de gris de cada píxel.



0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0



1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0
1	0.95	0.81	0.61	0.39	0.19	0.049	0

Para los pitagóricos de hace 25 siglos y para los ordenadores actuales, casi todo son números.

¿Qué ocurre si al transmitir la foto por un canal defectuoso algunos píxeles pasan a cero o a uno con cierta probabilidad?



¿Qué ocurre si al transmitir la foto por un canal defectuoso algunos píxeles pasan a cero o a uno con cierta probabilidad?



(Probabilidad defecto = 15 %)

## ¿Tiene arreglo?

Empleamos los *filtros* media  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right)$  y mediana  $\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right)$ .

## ¿Tiene arreglo?

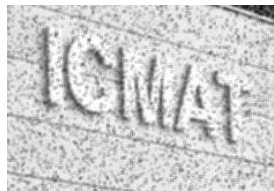
Empleamos los *filtros* media (



) y mediana (



).



## ¿Tiene arreglo?

Empleamos los *filtros* media  $\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\right)$  y mediana  $\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\right)$ .



Hay filtros con muchos propósitos. Por ejemplo, ¿Qué ocurre si aplicamos a la imagen de partida el filtro correspondiente a multiplicar los valores de los bloques  $3 \times 3$  de píxeles con la tabla

$$L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (\text{Filtro de Laplace})$$

y sumar los resultados?



Hay filtros con muchos propósitos. Por ejemplo, ¿Qué ocurre si aplicamos a la imagen de partida el filtro correspondiente a multiplicar los valores de los bloques  $3 \times 3$  de píxeles con la tabla

$$L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (\text{Filtro de Laplace})$$

y sumar los resultados?



Obtenemos un detector de aristas, que recuerda a un dibujo a lápiz.

El resultado se mejora con la operación más complicada:

$$S = \frac{1}{8} \sqrt{\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)^2 + \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \right)^2} \quad (\text{Filtro de Sobel})$$

y ajustando el contraste.

El resultado se mejora con la operación más complicada:

$$S = \frac{1}{8} \sqrt{\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)^2 + \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \right)^2} \quad (\text{Filtro de Sobel})$$

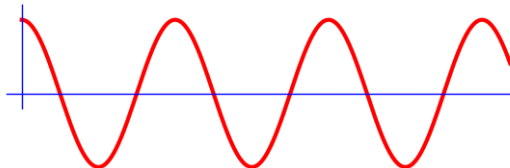
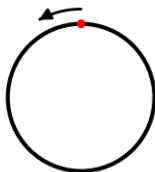
y ajustando el contraste.



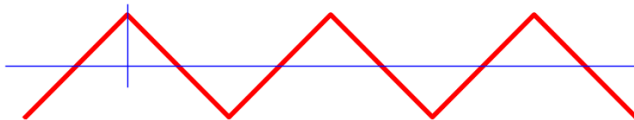
Base de gran parte del tratamiento de imágenes y sonidos

**Toda onda es superposición de tonos puros**

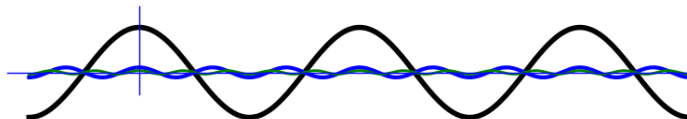
¿Y qué es un tono puro? La altura en función del tiempo de un punto que gira en una circunferencia:



Por ejemplo, la onda triangular



es muy similar a la superposición



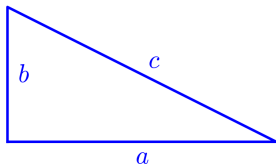
Si las circunferencias generan los tonos puros y estos todas las gráficas, ¿no podríamos hacer *todos los dibujos* combinando círculos?

<http://tiny.cc/k1jtzz>

¡Vaya ladrillo!

# ¡Vaya ladrillo!

## En las primeras civilizaciones. . .



$$\iff a^2 + b^2 = c^2$$

## Hace 2300 años. . .

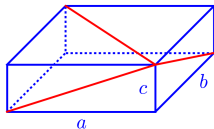
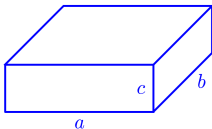
$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

Escogiendo enteros positivos  $n < m$  se obtienen las soluciones enteras.

$$\begin{array}{l} 1, 2 \rightarrow 3, 4, 5, \\ 2, 3 \rightarrow 5, 12, 13, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20, 24 \rightarrow 176, 960, 976, \\ 20, 25 \rightarrow 225, 1000, 1025. \end{array}$$

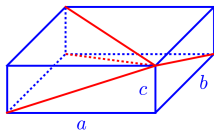
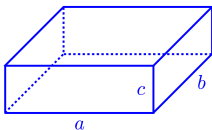
## Hace 300 años...



Hay una fórmula que da las dimensiones de infinitud de ladrillos con aristas enteras y diagonales de las caras también enteras.

## Hoy...

(tarea para futuros matemáticos)



Se desconoce si existe alguno con la diagonal interior también entera.

Si existe, dicha diagonal tiene más de 15 cifras.



Esta presentación está disponible en

---

<https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>

---

**¡Gracias por la atención!**