

Los ceros de las funciones ζ de Riemann y L de Dirichlet

Antonio Pulido Iniesta

Máster en Matemáticas y Aplicaciones – Universidad Autónoma de Madrid
Tutor: Dr. Fernando Chamizo Lorente

Defensa del Trabajo de Fin de Máster

Primeras regiones libres de ceros

Función zeta de Riemann:

Teorema de de la Vallée-Poussin (1899): Existe una constante efectiva $c > 0$ tal que $\zeta(s)$ no tiene ceros en la región:

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}.$$

Las funciones L de Dirichlet:

Teorema: Existe una constante positiva y absoluta, C , con la siguiente propiedad. Si χ es un carácter complejo módulo q , entonces $L(s, \chi)$ no tiene ceros en la región definida por:

$$\sigma \geq 1 - \frac{C}{\log(q(|t| + 2))}.$$

Por otro lado, si χ es real no principal, el único cero posible de $L(s, \chi)$ en esta región es un cero real y simple.

Los números $N(T)$ y $N(T, \chi)$

Función zeta de Riemann:

Llamamos $N(T)$ al número de ceros, contados de acuerdo a su multiplicidad, de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$, $T \geq 2$. De esta manera, se tiene que:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Funciones L de Dirichlet:

Sea χ un carácter primitivo módulo q y $N(T, \chi)$ que denota el número de ceros de $L(s, \chi)$ en el rectángulo $0 < \sigma < 1$, $|t| < T$, $T \geq 2$. Entonces, se tiene que:

$$\frac{1}{2}N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log(qT)).$$

Las fórmulas explícitas truncadas para $\psi(x)$ y $\psi(x, \chi)$

Sean $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ y $\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$, se verifica que:

Fórmula truncada para $\psi(x)$:

Sea $\rho = \beta + i\gamma$, que denota los ceros no triviales de $\zeta(s)$, entonces, uniformemente en x , $T \geq 2$, tenemos que:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(xT^{-1}(\log(xT))^2) + O(\log x).$$

Fórmula truncada para $\psi(x, \chi)$:

Sea χ un carácter de Dirichlet módulo q , tenemos la siguiente fórmula truncada para $2 \leq T \leq x$:

$$\psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + O(xT^{-1} \log^2(qx)).$$

Consecuencias de las regiones libres de ceros

Teorema de los números primos I:

Gracias a la región libre de ceros de de la Vallée-Poussin para $\zeta(s)$ y la fórmula explícita truncada para $\psi(x)$ deducimos que $\psi(x) = x + O(xe^{-C\sqrt{\log x}})$, de lo que sigue que:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-C'(\log x)^{\frac{1}{2}})).$$

Teorema de los números primos en progresiones aritméticas:

Sea $(a, q) = 1$ y $\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n)$. Entonces:

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\chi_1(a)x^{\beta_1}}{\varphi(q)\beta_1} + O(x \exp(-C(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

donde χ_1 denota el único carácter módulo q , si existe, para el cual $L(s, \chi_1)$ tiene un cero real $\beta_1 > 1 - \frac{c}{\log q}$. En caso de que dicho carácter χ_1 no exista, el término relativo a β_1 debe ser omitido.

Los teoremas de Siegel y Siegel-Walfisz

Teorema de Siegel (1935):

Para cada $\varepsilon > 0$, existe un número positivo $C(\varepsilon)$ tal que, si χ es un carácter real no principal de módulo q , entonces se verifica que $L(s, \chi) \neq 0$ para:

$$s > 1 - C(\varepsilon)q^{-\varepsilon}.$$

Desventaja: La constante $C(\varepsilon)$ no es efectiva.

Teorema de Siegel-Walfisz (1936):

Sea N una constante positiva cualquiera, $(a, q) = 1$ y $q \leq (\log x)^N$. Entonces existe un número positivo $C(N)$ tal que se tiene, uniformemente en q :

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x \exp(-C(N)(\log x)^{\frac{1}{2}})).$$

El método de Vinogradov-Korobov

Objetivo: Estimar sumas de la forma $S(t; N, N_1) = \sum_{N < n \leq N_1 \leq 2N} n^{it}$ para $N_0 \leq N \leq t/2$ y $t \geq t_0$. Esta tarea dependerá en gran medida de obtener cotas para:

$$J_{k,n}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

donde $k, n, x \geq 1$ son enteros y P es un entero grande.

Teorema del valor medio de Vinogradov:

Sea $r \geq 0$ un entero, $k \geq n(n+r)$, $P \geq P_0$ y $c_r = \frac{n(n+1)(1-1/n)^r}{2}$.
Entonces $J_{k,n}(P) \leq (4n)^{4kr} P^{2k+c_r-n(n+1)/2}$.

Gracias a ello tenemos, uniformemente en N, N_1 y t , la siguiente estimación:

$$S(t; N, N_1) \ll N \exp \left(- \frac{\log^3 N}{10^5 \log^2 t} \right).$$

El teorema de los números primos

Gracias al método de Vinogradov:

Teorema: Existe una constante absoluta $\eta > 0$ tal que, para $1 - \eta \leq \sigma \leq 1$ y uniformemente en σ , se verifica que:

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{122(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \quad t \geq t_0.$$

Región libre de ceros de Vinogradov-Korobov (1958):

Teorema: Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ en la región dada por:

$$\sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}, \quad t \geq t_0.$$

Teorema de los números primos II

Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x \exp\left(-C(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)\right).$$

Teoremas de densidad: Herramientas fundamentales

Definición: Sea $N(\sigma, T)$ el número de ceros $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ tales que $1 \geq \beta \geq \sigma \geq 1/2$ (σ fija), $|\gamma| \leq T$, $T > 2$. Tendremos estimaciones de la forma:

$$N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)} \log^C T \quad \text{o bien} \quad N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Para conseguir las usaremos dos herramientas fundamentales:

1. Momentos de la función $\zeta(s)$

Sean $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $A, M(A) \geq 1$ y $m \geq 4$. Nos interesa obtener cotas de la forma:

$$\int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^A dt \ll T^{M+\varepsilon} \quad \text{y} \quad \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^m dt \ll T^{1+\varepsilon}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

2. Polinomios de Dirichlet

Teorema: Sean $1 \leq t_1 < \dots < t_R \leq T$ números reales tales que $|t_r - t_s| \geq 1$ para $r \neq s \leq R$ y sean $a_1, \dots, a_N$ números complejos cualesquiera. Entonces:

$$\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{-it_r} \right|^2 \ll \left(T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \right) \log N.$$

Los teoremas de Ingham y Huxley y mejoras posteriores

Teoremas de densidad de Ingham y Huxley:

$$(\text{Ingham}) \quad A(\sigma) \leq \frac{3}{2-\sigma}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4},$$

$$(\text{Huxley}) \quad A(\sigma) \leq \frac{3}{3\sigma-1}, \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1,$$

$$(\text{Combinando ambos}) \quad A(\sigma) \leq \frac{12}{5}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1.$$

Mejoras recientes:

Teorema de Maynard-Guth (2024): Se verifica que

$N(\sigma, T) \ll T^{15(1-\sigma)/(3+5\sigma)+\varepsilon}$ para $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, que mejora a la cota de Ingham para $\frac{7}{10} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$. Combinando esto con el resultado de Ingham para $\sigma \leq \frac{7}{10}$, se obtiene que:

$$N(\sigma, T) \ll T^{30(1-\sigma)/13+\varepsilon}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1.$$

Ceros en la línea crítica: Resultados preliminares

Definiciones previas:

Sea $N_0(T)$ el número de ceros $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ con $0 < \gamma \leq T$.

Sea la función $Z(u) = \frac{g(\frac{1}{2}+iu)}{|g(\frac{1}{2}+iu)|} \zeta(\frac{1}{2} + iu)$, donde $g(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$. Por otro lado, definimos:

$$I(t) = \int_t^{t+\Delta} Z(u) du \text{ y } J(t) = \int_t^{t+\Delta} |Z(u)| du, \text{ con } \Delta > 0 \text{ fijo.}$$

Idea clave:

Si $|I(t)| < J(t)$, entonces $Z(u)$ debe tener un cero en $(t, t + \Delta)$, luego $\zeta(\frac{1}{2} + iu)$ tiene un cero de orden impar en ese mismo intervalo.

Teorema de Hardy-Littlewood (1921):

Se verifica que:

$$N_0(T) \gg T.$$

El teorema de Selberg

El cambio de Selberg:

El refinamiento principal de Selberg consistió en suavizar la función $\zeta(s)$ con un polinomio de Dirichlet, Φ , en la definición de $Z(u)$. Así, tomó

$$Z(u) = \frac{g(\frac{1}{2}+iu)}{|g(\frac{1}{2}+iu)|} \zeta(\frac{1}{2}+iu) |\Phi(\frac{1}{2}+iu)|^2.$$

Lema:

Sea $(\log T)^{-1} \leq \Delta \leq 1$ y $D = T^\theta$ con $0 < \theta \leq \frac{1}{80}$. Entonces tenemos que:

$$\int_0^T |Z(t)| dt \gg T, \quad \int_0^T |Z(t)|^2 dt \ll T \text{ y } \int_0^T |I(t)|^2 dt \ll \Delta T (\log T)^{-1}.$$

Teorema de Selberg (1942):

Se verifica que:

$$N_0(T) \gg T \log T.$$

Distancia entre primos

Sea p_n el n -ésimo número primo. Para acotar $p_{n+1} - p_n$, estudiamos la expresión asintótica $\psi(x+h) - \psi(x) \sim h$ en el intervalo corto $(x, x+h]$.

Resultados incondicionales

La validez de $N(\sigma, T) \ll T^{C(1-\sigma)} \log^D T$ determina el rango de h .

- Se tiene que $\psi(x+h) - \psi(x) = (1 + o(1))h$ para $x^{7/12} \log^{22} x \leq h \leq x$, de manera que $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{7/12} \log^{22} p_n$.
- Para casi todo x hay un primo en el intervalo $(x, x + x^{1/6} \log^B x]$ con $B = 4 \cdot 10^7$.

Cotas condicionales y conjeturas

- **Bajo la hipótesis de densidad:** $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2+\varepsilon}$.
- **Bajo la hipótesis de Riemann:** $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log p_n$.
- **Bajo la conjetura de pair correlation:** $p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n \log p_n}$.
- **Conjetura de Cramér:** $p_{n+1} - p_n \ll \log^2 p_n$.

La conjetura de pair correlation de Montgomery

Sea $\alpha < \beta$, queremos estudiar el número:

$$N(\alpha, \beta; T) = \left| \left\{ m \neq n; 0 < \gamma_m, \gamma_n \leq T, \frac{2\pi\alpha}{\log T} < \gamma_m - \gamma_n < \frac{2\pi\beta}{\log T} \right\} \right|.$$

El comportamiento asintótico de $F(\alpha, T)$

Montgomery introdujo la función:

$$F(\alpha, T) = \frac{2\pi}{T \log T} \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') T^{i\alpha(\gamma - \gamma')}, \text{ con } w(u) = \frac{4}{4 + u^2}.$$

Bajo HR, demostró que para $0 \leq \alpha \leq 1$ y $T \geq 2$ se verifica:

$$F(\alpha, T) = \alpha + T^{-2\alpha} \log T + O(\alpha T^{\alpha-1} + T^{-\alpha} \log(2T^\alpha) + (\log T)^{-1}).$$

Conexión con la teoría de matrices aleatorias

- **Strong pair correlation conjecture:** $F(\alpha, T) \sim 1$, cuando $T \rightarrow \infty$, uniformemente en intervalos acotados $1 \leq \alpha \leq A$.
- **Pair correlation conjecture:** Cuando $T \rightarrow \infty$ se cumple que:

$$N(\alpha, \beta; T) \sim N(T) \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right)^2 \right) du.$$

Bibliografía destacada



H. Davenport.
Multiplicative Number Theory.
2ª edición, revisada por H. L. Montgomery.
Springer, 1980.



A. Ivić.
The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications.
Dover Publications, 2013.



H. Iwaniec y E. Kowalski.
Analytic number theory.
American Mathematical Society, Colloquium Publications, volume 53, 2004.



H. L. Montgomery y R. C. Vaughan.
Multiplicative Number Theory I: Classical Theory.
Cambridge University Press, 2006.