Lemas fuertes de Van der Corput

Carlos A. Catalá de la Torre

Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid.

Madrid. 3 de julio de 2015

Trabajo de Fin de Máster. Director: Fernando Chamizo Lorente.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Reconocimientos

Esta breve charla está basada en el trabajo:

- C. A. C., A new proof for a sharp Van der Corput's Lemma, *Amer. Math. Monthly* **122** (2015), no. 2 , 138–142.

sobre un resultado contenido en la referencia:

- K. M. Rogers, Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 12, 3543–3550.

Motivación

En Teoría Analítica de Números aparecen las sumas exponenciales (complejas) de forma bastante natural.

Un famoso ejemplo:

La conjetura de los números primos gemelos: Hay infinitos pares $(p, p+2)$ con p y $p+2$ primos.

Hardy-Littlewood-Ramanujan (siglo XX): Método del Círculo. Estimación asintótica para $\pi_2(x)$: cantidad de números primos gemelos $p, p+2 \leq x$.

Idea básica del método del círculo:
Distinguir el número 0 de cualquier otro número entero n:

$$\int_0^1 e(nt)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Notación: Para todo $t \in \mathbb{R}$, $e(t) := e^{2\pi i t}$.
Para determinar si dos números primos p y q difieren en 2 unidades (!), calculamos la siguiente integral

$$\int_0^1 e((p-q-2)t)\,dt.$$

Sumamos esta integral sobre todos los números primos p, q menores o iguales que $x \longrightarrow$

$$\sum_{p,q\leq x}\int_0^1 e((p-q-2)t)\,dt = \int_0^1 |P(t)|^2 e(-2t)\,dt$$

(fórmula **exacta** para $\pi_2(x)$)

$$P(t) := \sum_{p\leq x} e(pt).$$

Suma de exponenciales (complejas).

PROBLEMA:

¿Cómo estimar estas sumas y otras similares en intervalos finitos?

Métodos de sumación. Algunos ejemplos.

$\sum_n f(n) \longrightarrow$ difíciles (de hallar o estimar).
A veces, es útil ($\longleftrightarrow$ es menos difícil) escribir $\sum \longrightarrow \int$.
Ejemplo 1.- (Estimación básica)
Sean a y b dos números naturales ($a < b$) y una función real $f(x)$ de variable real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona en $[a, b]$. Entonces, hay algún número real c (que dependerá, en general, de a y b) con $|c| \leq 1$ para el cual se verifica:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + c(f(b) - f(a))$$

Una estimación asintótica más precisa:

Ejemplo 2.-

Si la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ es *continua y decreciente* con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces:

Existe una constante A tal que

$$\sum_{1\leq n\leq x} f(n) = \int_1^x f(t)\,dt + A + \mathcal{O}(f(x)).$$

Notación de *Landau*: dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas en $[a, +\infty)$ con $a \geq 0$ y $g(x) > 0$, escribiremos $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ si hay dos constantes $M > 0$ y x_0 tal que $|f(x)| < Mg(x)$ para todo $x \geq x_0$. (Notación equivalente de *Vinogradov*: $f(x) \ll g(x)$.)

Una fórmula fundamental:

Ejemplo 3.-

Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión arbitraria de números complejos y $f : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ una función compleja de variable real con derivada continua para cada número real $x \geq 1$. Entonces:

El lema de Abel

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt$$

donde $A(x) := \sum_{n\leq x} a_n$

La identidad siguiente es muy útil:

Ejemplo 4.- *(más interesante)* Sean dos números enteros positivos N, M con $M > N$ y una función compleja de variable real $x \geq 1$ con $f \in \mathcal{C}^2$. Entonces se tiene la importante:

Fórmula de sumación de Poisson para intervalos finitos

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) = \frac{1}{2}(f(M) + f(N)) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_N^M f(x)e(nx)\,dx.$$

(La convergencia de la serie anterior hay que entenderla como $\lim_{M\to\infty} \sum_{|n|<M}\cdot$)

Interés general: las funciones del tipo $f(n) = G(n)e(\varphi(n))$, $\longrightarrow$ estimar:

$$\int_a^b G(x)e^{iF(x)}\,dx$$

$G(x)$ y $F(x)$ son (resp.) las funciones **amplitud** y **fase**. Y aquí entra **Van der Corput** (1921), quien consideró el caso $G(x) = 1$.

J.G. Van der Corput, ca. 1952

Lemas de Van der Corput

Enunciemos el **primer Lema de Van der Corput** :

Primer Lema de Van der Corput (Van der Corput– 1921)

Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces:

$$\Big| \int_a^b e^{iF(x)}\, dx \Big| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Valores de la constante C:

$C = 4$ (Zygmund, 1959)

$C = 3$ (Stein, 1993)

$C = 2$ (Rogers, 2005) Cota óptima para C ("the sharp bound")

Primer Lema fuerte de Van der Corput (Rogers–2005)

Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces:

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)}\, dx \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

¡Sin hipótesis adicionales!.

Este resultado es también la base de la siguiente generalización:

El n-ésimo Lema fuerte de Van der Corput. (Rogers–2005)

Supongamos que $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función real n veces diferenciable, con $n \geq 2$ y con $|F^{(n)}(x)| \geq \lambda > 0$ en (a, b). Entonces:

$$\Big| \int_a^b e^{iF(x)}\, dx \Big| \leq \frac{n \cdot C_n}{\lambda^{1/n}}$$

donde $C_n \leq 2^{5/3} \simeq 3,1748...$ para todo $n \geq 2$ y además $C_n \to 4e^{-1} \simeq 1,4715...$ cuando $n \to \infty$.

La nueva Demostración

En **este trabajo** presentamos una demostración para:

El Primer Lema fuerte de Van der Corput (Rogers–2005)

Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces:

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)}\, dx \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Realizamos la demostración en 5 pasos:

1.- Bonnet

Utilizaremos la siguiente versión del **Segundo Teorema del Valor Medio** para integrales **reales**:

Fórmulas de Bonnet

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y decreciente (creciente) y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces hay un número real c con $a < c < b$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx \qquad \left(= f(b)\int_c^b g(x)\,dx\right)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F'(x) > 0$ puesto que el complejo conjugado de $\int_a^b e^{iF(x)}\,dx$ es $\int_a^b e^{-iF(x)}\,dx$

Sea t una **constante real arbitraria**. Como $|e^{it}| = 1$ y $|zw| = |z||w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|e^{it}\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|\int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx\Big|.$$

Esta ecuación es válida para **todo número** $t \in \mathbb{R}$.
(crucial).
Expresemos la última integral en sus partes real e imaginaria.
Entonces:

$$\Big|\int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx\Big|^2 = \Big|\int_a^b \cos\left(F(x)+t\right)dx + i\int_a^b \sin\left(F(x)+t\right)dx\Big|^2 =$$

$$= \Big(\underbrace{\int_a^b \cos\left(F(x)+t\right)dx}_{U(t)}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\int_a^b \sin\left(F(x)+t\right)dx}_{V(t)}\Big)^2. \qquad (1)$$

Consideremos primeramente la siguiente integral, que define una función diferenciable

$$U(t) := \int_a^b \cos\left(F(x) + t\right) dx.$$

Sólo para simplificar, consideremos que $F'(x)$ es **monótona creciente**, entonces

$$U(t) := \int_a^b \frac{1}{F'(x)} F'(x) \cos\left(F(x) + t\right) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{F'(x)} d(\sin\left(F(x) + t\right)).$$

$F'(x)$ es positiva y monótona creciente, luego $1/F'(x)$ es también positiva y decreciente.

Aplicando la fórmula de Bonnet se tiene que hay un número real (posiblemente dependiente de t) $c(t)$ con $a < c(t) < b$ tal que

$$U(t) = \frac{1}{F'(a)} \int_a^{c(t)} d(\sin(F(x) + t)) =$$

$$= \frac{1}{F'(a)} \Big[\sin(u(t)) - \sin(F(a) + t) \Big] \qquad (2)$$

donde $u(t) := F(c(t)) + t$.

Con la segunda integral,

$$V(t) := \int_a^b \sin\left(F(x) + t\right) dx.$$

Se tiene análogamente:

$$V(t) := \int_a^b \frac{1}{F'(x)} F'(x) \sin\left(F(x) + t\right) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{F'(x)} d(-\cos\left(F(x) + t\right)).$$

$F'(x)$ es positiva y monótona creciente, luego $1/F'(x)$ es también positiva y decreciente.

Por Bonnet hay un número real (posiblemente dependiente de t) $\widetilde{c}(t)$ con $a < \widetilde{c}(t) < b$ tal que

$$V(t) = \frac{1}{F'(a)} \int_a^{\widetilde{c}(t)} d(-\cos(F(x)+t)) =$$

$$= \frac{1}{F'(a)} \Big[-\cos(v(t)) + \cos(F(a)+t) \Big] \qquad (3)$$

donde $v(t) := F(\widetilde{c}(t)) + t$.

$$u(t) := F(c(t)) + t \qquad v(t) := F(\widetilde{c}(t)) + t$$

En resumen, reuniendo (2) y (3) en la ecuación (1), obtenemos

$$\Big| \int_a^b e^{iF(x)}\,dx \Big|^2 = \Big| U(t) + iV(t) \Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{(F'(a))^2}\Big[\Big(\sin\big(u(t)\big) - \sin\big(F(a)+t\big)\Big)^2 +$$

$$+\Big(-\cos\big(v(t)\big) + \cos\big(F(a)+t\big)\Big)^2\Big]$$

(4)

2.- Continuidad

Por Convergencia Dominada,

$$U(t) := \int_a^b \cos(F(x) + t)\, dx$$

$$V(t) := \int_a^b \sin(F(x) + t)\, dx$$

son continuas y diferenciables en $\mathbb{R}$.
Sus derivadas respecto a t (denotadas por un punto):

$$\dot{U}(t) = \int_a^b \partial_t(\cos(F(x) + t))\, dx = -V(t) \quad , \quad \dot{V}(t) = U(t)$$

En consecuencia, $U(t)$ y $V(t)$ tienen derivadas continuas.
Por iteración, resultan ser diferenciables en cualquier orden.

¡Observación importante! $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ SON combinación lineal de dos funciones diferenciables con continuidad en $\mathbb{R}$.

$$\cos(v(t)) = -F'(a) \cdot V(t) + \cos(F(a) + t)$$

$$\sin(u(t)) = F'(a) \cdot U(t) + \sin(F(a) + t)$$

Por tanto, las funciones **compuestas** $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ son también diferenciables con continuidad en $\mathbb{R}$, sin importar cuán discontinuas puedan ser $v(t)$ y $u(t)$.

Como consecuencia, $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

3.- Un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$(2) \text{ y } (3) \longrightarrow \dot{U}(t) = -V(t) \text{ y } \dot{V}(t) = U(t), \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\sin(u(t))\Big) = \cos(v(t)) \\ \dfrac{d}{dt}\Big(\cos(v(t))\Big) = -\sin(u(t)) \end{cases}$$

$$(\cos(v(t)), \sin(u(t))) \in [-1,1] \times [-1,1] \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Solución general

La solución más general del sistema anterior, válida para todo $t \in \mathbb{R}$, está dada por:

$$\begin{cases} \sin(u(t)) = r\sin(t+k) \\ \\ \cos(v(t)) = r\cos(t+k) \end{cases} \tag{5}$$

donde r y k son constantes reales.

Considerando $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ como funciones coordenadas cartesianas, vemos que las ecuaciones (5) describen paramétricamente circunferencias centradas en el origen de coordenadas $(0,0)$ con radio $|r|$.
Como $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ toman valores en $[-1,1]$, $|r|$ satisface la desigualdad $0 \leq |r| \leq \sqrt{2}$.
Pero...

4.- La Continuidad, ¡a escena!

La validez de

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)}\,dx \right| = \left| \int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx \right|$$

para **todo** $t \in \mathbb{R}$.
Y
La **ya probada** continuidad de las funciones coordenadas para todo t en $\mathbb{R} \Longrightarrow$ reducción en el campo de validez para $|r|$

$$0 \leq |r| \leq \sqrt{2} \to 0 \leq |r| \leq 1$$

.

Para cada valor r que satisfaga $1 < |r| \leq \sqrt{2}$, las ecuaciones en (5) describen **cuatro arcos de circunferencia desconexos** dentro de un cuadrado centrado en $(0,0)$ y con vértices en $(1,\pm 1)$ y $(-1,\pm 1)$, **violando así la continuidad de** $\cos(v(t))$ **y** $\sin(u(t))$ **en todo** $\mathbb{R}$.
EN RESUMEN: Sólo cuando $|r| \leq 1$ tenemos realmente **circunferencias completas** dentro del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

5.- El paso final.

El número real r está en el intervalo $[-1,1]$ y k es un número real arbitrario. Si introducimos la solución general (5) en (4) obtenemos la interesante fórmula:

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\right|^2 = \frac{1}{(F'(a))^2}\left[r^2+1-2r\cos\left(F(a)-k\right)\right]$$

Sin dependencia explícita de t, como era de esperar.
k en $\cos\left(F(a)-k\right)$ puede ser siempre elegido apropiadamente de modo que se obtenga cualquier número del intervalo $[-1,1]$.

¿Máximo global de la función $r^2 + 1 - 2r\cos(F(a) - k)$?
Con las restricciones $-1 \leq r \leq 1$, $-1 \leq \cos(F(a) - k) \leq 1$, y la desigualdad triangular:

$$|r^2 + 1 - 2r\cos(F(a) - k)| \leq |r^2 + 1| + 2|r||\cos(F(a) - k)| \leq 4.$$

El máximo absoluto se alcanza respectivamente en $r = \pm 1$ y $\cos(F(a) - k) = \mp 1$ con el mismo resultado $4 \longrightarrow$ Rogers–2005.
CONCLUSIÓN:

$$r^2 + 1 - 2r\cos(F(a) - k) \leq 4$$

que, a su vez, implica que:

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\right|^2 = \frac{1}{(F'(a))^2}\left[r^2+1-2r\cos(F(a) - k)\right] \leq \frac{4}{(F'(a))^2} \leq$$

$$\leq \frac{4}{\lambda^2}.$$

Q.E.D.

FIN. ¡MUCHAS GRACIAS!

APÉNDICE 1. TVM1 Y TVM2.

Por completitud enunciamos los dos Teoremas de Valor Medio para integrales Riemann reales:

TVM1

Si f y h son continuas en $J := [a, b]$ y h es no negativa, entonces existe un punto $c \in J$ tal que

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(c)\int_a^b h(x)\,dx.$$

Éste es el más conocido. Pero el segundo...lo es menos:

TVM2

Si f es creciente y h es continua en J, entonces existe un punto c en J tal que

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(a)\int_a^c h(x)\,dx + f(b)\int_c^b h(x)\,dx.$$

En particular (Fórmula de Bonnet), si f es no negativa, creciente y h es continua en J, entonces existe un punto c en J tal que

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(b)\int_c^b h(x)\,dx.$$

Para probar esta fórmula de Bonnet, definimos F como la función que coincide con f en $x \in J\setminus\{a\}$ y ponemos $F(a) = 0$, entonces aplicaríamos el TVM2 a F. Obviamente, hay un resultado correspondiente para el caso de funciones decrecientes.

APÉNDICE 2

Aplicación del Ejemplo 1:

$$\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k = \int_1^n \log t \, dt + c(\log n - \log 1) = n \log n - n + \mathcal{O}(\log n)$$

Aunque como estimación, es mejor usar la de **Stirling**:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{r_n}$$

con

$$r_n \in ((12n+1)^{-1}, (12n)^{-1})$$

para $n = 1, 2, \ldots$. De modo que, cuanto más grande sea n, el factorial se aproxima cada vez mejor, en error relativo, a $\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

APÉNDICE 3

Prueba de la fórmula de sumación de Poisson en intervalos finitos. Sumación de Abel con $a_n = 1$. Si ponemos $x = N$ un número entero positivo, entonces
$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} 1 = \lfloor x \rfloor$, $A(N) = N$, y por ello

$$\sum_{n \leq N} f(n) = Nf(N) - \int_1^N \lfloor x \rfloor f'(x)\, dx$$

Ahora, si expresamos la función *Parte Entera* $\lfloor x \rfloor$ de x en términos de $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, que es la *Parte fraccionaria de promedio nulo de* x obtenemos

$$\sum_{n \leq N} f(n) = Nf(N) - \int_1^N (x - \frac{1}{2}) f'(x)\, dx + \int_1^N \{x\} f'(x)\, dx$$

que, mediante integración por partes es igual a

$$= Nf(N) - \left[(x-\frac{1}{2})f(x)\right]_1^N + \int_1^N f(x)\,dx + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + Nf(N) - (N-\frac{1}{2})F(N) + (1-\frac{1}{2})f(1) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx$$

por lo que obtenemos así una importante identidad:

$$\sum_{n\leq N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx$$

En este punto, recurrimos al Análisis Armónico para incorporar a la identidad anterior el desarrollo de *Fourier* de la función $\{x\}$ (válido para todo $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$) siguiente

$$\{x\} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}} \frac{e(nx)}{n} = \frac{i}{2\pi} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nx)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(-nx)}{-n} \Big) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \big(e(nx) - e(-nx) \big) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \big(2i \operatorname{sen}(2\pi n x) \big) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n}$$

Entonces, suponiendo que $f \in C^2$ (para poder intercambiar suma e integral)

$$\sum_{n\leq N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) +$$

$$+\int_1^N \Big(-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{n}\Big) f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Big(\int_1^N f'(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\,dx\Big)$$

Que, tras una integración por partes es igual a

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N) + f(1)\big) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Big(\underbrace{\big[f(x)\,\mathrm{sen}\,(2\pi nx)\big]_1^N}_{0} - 2\pi n \int_1^N f(x)\cos(2\pi nx)\,dx\Big).$$

Al realizar las oportunas simplificaciones y tener en cuenta que $\cos(2\pi nx) = \big(e(nx) + e(-nx)\big)/2$ y que $e(0) = 1$ obtenemos así la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(N) + f(1)\big) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_1^N f(x)e(nx)\,dx.$$

Para probar la fórmula dada en la presentación, es suficiente con darse cuenta de que

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) = \sum_{n=1}^{M} f(n) - \Big(\sum_{n=1}^{N} f(n) - f(N)\Big),$$

cambiar N por M en la identidad anterior, restar las identidades y usar la propiedad elemental $\int_1^M - \int_1^N = \int_N^M$ de integrales. [1]

[1] Una aplicación de esta fórmula de sumación es el cálculo exacto de las *sumas cuadráticas de Gauss*:

$$\sum_{n=1}^{N} e(n^2/N) = \frac{1+(-i)^N}{1-i}\sqrt{N},$$

donde N es un número entero positivo cualquiera. De esta evaluación, que costó muchos esfuerzos a Gauss, se puede deducir la ley de reciprocidad cuadrática.

APÉNDICE 4. Una extensión sencilla.

Es posible extender el primer lema con $C = 4$ para incluir una amplitud real $G(x)$ positiva y monótona en $[a, b]$ tal que $|G(x)| \leq G$ en dicho intervalo:

Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Sea también una función real $G(x)$ positiva, monótona con $|G(x)| \leq G$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces

$$\left| \int_a^b G(x) e^{iF(x)}\, dx \right| \leq \frac{4G}{\lambda}.$$

La prueba es igual que en el caso $G(x) = 1$. Por otra parte, nótese que la amplitud $G(x)$ puede extraerse mediante el *Segundo Teorema del Valor Medio* para integrales.

APÉNDICE 5. ¿ Y si $F'(x)$ es positiva y monótona decreciente?

La prueba recién terminada suponía, para simplificar, que $F'(x)$ es positiva y **monótona creciente**.
¿Qué ocurre si $F'(x)$ es positiva y **monótona decreciente**?
NADA. La conclusión es exactamente la misma.
Para ver que eso es así, basta coger la otra fórmula de Bonnet.
Sencillamente, intercambiamos $F'(a)$ y $F'(b)$ y tenemos en cuenta la conocida propiedad $\int_c^b g(x)\,dx = -\int_b^c g(x)\,dx$.
Luego a y b son intercambiables en las fórmulas anteriores. El signo negativo en el miembro derecho de la ecuación anterior no afecta en absoluto a la ecuación (4) ni al sistema (5).

APÉNDICE 6. Algunas consecuencias.

Sea f una función dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo $[a, b]$, con a, b, α, β enteros[a] tal que $\alpha < f' < \beta$; entonces

$$\sum_{a \le n \le b} e(f(n)) = \sum_{\alpha \le n \le \beta} \int_a^b e(f(x) - nx)\, dx + \mathcal{O}(\log(\beta - \alpha + 1)).$$

[a] en el caso de α, β; sólo para simplificar.

Sea $f \in C^2([a, b])$ con a, b enteros. Si $0 < \lambda \ll |f''| \ll \lambda$, entonces

$$\sum_{a \le n \le b} e(f(n)) \ll (b - a)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}.$$