



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Los ceros de las funciones $\zeta$ de Riemann y $L$ de Dirichlet

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

*Autor:* Antonio Pulido Iniesta

*Tutor:* Fernando Chamizo Lorente

Curso 2025-2026



## Resumen

Este trabajo consiste en un estudio exhaustivo acerca de la distribución de los ceros de la función  $\zeta$  de Riemann y las funciones  $L$  de Dirichlet, así como de sus profundas implicaciones en la teoría de los números primos. En primer lugar, se desarrolla la clásica región libre de ceros de de la Vallée-Poussin para la función  $\zeta$ , al igual que su versión análoga para las funciones  $L$ , vinculándolas con el término de error en el teorema de los números primos, tanto en su forma general como en progresiones aritméticas. Por otra parte, también se demuestran las expresiones asintóticas para los números  $N(T)$  y  $N(T, \chi)$  y las fórmulas explícitas truncadas. Posteriormente, se detalla la prueba de los teoremas de Siegel y Siegel-Walfisz para, seguidamente, dar paso a estudiar el método de Vinogradov-Korobov, el cual proporciona la región libre de ceros más amplia conocida hasta la fecha para  $\zeta$ . A continuación, se abordan los teoremas de densidad de ceros mediante el uso de polinomios de Dirichlet y el estudio de los momentos de  $\zeta$ , destacando los resultados de Ingham y Huxley. Asimismo, se examina el comportamiento de los ceros en la línea crítica, exponiendo la demostración del teorema de Selberg, el cual nos dice que hay una proporción positiva de dichos ceros, además de explorar las consecuencias de la hipótesis de Riemann. Finalmente, se analizan las aplicaciones de los resultados previamente obtenidos a la distribución de los números primos, estudiando la cota de las distancias entre primos consecutivos en intervalos cortos, y se concluye presentando la hipótesis de correlación de pares de Montgomery.

## Abstract

This project consists of a comprehensive study on the distribution of the zeros of the Riemann  $\zeta$ -function and Dirichlet  $L$ -functions, as well as their deep implications in the theory of prime numbers. Firstly, the classical de la Vallée-Poussin zero-free region for the  $\zeta$ -function is developed, along with its analogous version for  $L$ -functions, linking them to the error term in the prime number theorem, both in its general form and in arithmetic progressions. Furthermore, the asymptotic expressions for the numbers  $N(T)$  and  $N(T, \chi)$  and the truncated explicit formulas are also proved. Subsequently, the proofs of the Siegel and Siegel-Walfisz theorems are detailed, followed by a study of the Vinogradov-Korobov method, which provides the widest zero-free region known to date for  $\zeta$ . Next, zero-density theorems are addressed through the use of Dirichlet polynomials and the study of the moments of  $\zeta$ , highlighting the results of Ingham and Huxley. Moreover, the behavior of the zeros on the critical line is examined, presenting the proof of Selberg's theorem, which states that there is a positive proportion of such zeros, in addition to exploring the consequences of the Riemann hypothesis. Finally, the applications of the previously obtained results to the distribution of prime numbers are analyzed, studying the bound for the distances between consecutive primes in short intervals, and concluding by presenting Montgomery's pair correlation conjecture.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Regiones libres de ceros de las funciones <math>\zeta</math> y <math>L</math></b>	<b>1</b>
1.1	Funciones enteras de orden 1	1
1.2	Primeras regiones libres de ceros de $\zeta(s)$ y $L(s, \chi)$	6
1.3	Algunos resultados de crecimiento para $\zeta(s)$	16
1.4	Los números $N(T)$ y $N(T, \chi)$	27
1.5	La fórmula explícita truncada de $\psi(x)$	32
1.6	La fórmula explícita truncada de $\psi(x, \chi)$	38
1.7	El teorema de los números primos I	41
1.8	El teorema de los números primos en progresiones aritméticas	45
<b>2</b>	<b>El teorema de Siegel y el método de Vinogradov-Korobov</b>	<b>51</b>
2.1	Los teoremas de Siegel y Siegel-Walfisz	51
2.2	El método de Vinogradov-Korobov	56
2.3	El teorema de los números primos II	72
<b>3</b>	<b>Teoremas de densidad de ceros</b>	<b>73</b>
3.1	Introducción	73
3.2	Polinomios de Dirichlet y momentos para $\zeta(s)$	74
3.3	El método de detección de ceros	80
3.4	Los teoremas de Ingham y Huxley	84
<b>4</b>	<b>Ceros en la línea crítica</b>	<b>93</b>
4.1	Algunos resultados preliminares	93
4.2	El teorema de Selberg	99
4.3	Consecuencias de la hipótesis de Riemann	112
<b>5</b>	<b>Aplicaciones a la teoría de los números primos</b>	<b>117</b>
5.1	Distancia entre primos	117
5.2	La hipótesis de pair correlation	127
<b>A</b>	<b>Conceptos analíticos básicos</b>	<b>139</b>
A.1	La transformada de Mellin	139
A.2	Las desigualdades de Halász-Montgomery	140
A.3	La función Gamma de Euler	141
A.4	La teoría de pares de exponentes	141
A.5	Sumación por partes	147
A.6	Funciones aritméticas	148



# CAPÍTULO 1

## Regiones libres de ceros de las funciones $\zeta$ y $L$

---

El principal objetivo de este capítulo es hallar regiones libres de ceros en la banda crítica  $0 < \sigma < 1$  para las funciones  $\zeta$  y  $L$  y usarlas para mejorar los errores en el teorema de los números primos así como en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas. A lo largo de este capítulo la filosofía debe ser: cuanto mejor sea la región libre de ceros que tengamos, mejor será el error en los respectivos teoremas antes mencionados. Con tal fin, nuestros esfuerzos se centrarán en obtener las regiones de ceros más precisas que podamos, así como en estudiar en qué se traduce eso en el error correspondiente. Antes de pasar con ello, vamos a presentar una notación que vamos a usar de manera muy recurrente, el conocido como símbolo de Vinogradov,  $\ll$ , el cual no es más que una forma alternativa de escribir la notación  $O$  y que usaremos indistintamente. Introducimos a continuación algunas herramientas de análisis complejo que nos serán de gran utilidad.

### 1.1. Funciones enteras de orden 1

**Definición 1.1.** Una función  $f(z)$  entera se dice de orden finito si existe  $\alpha \geq 0$  tal que  $f(z) = O(e^{|z|^\alpha})$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ . Nótese que  $\alpha > 0$ , salvo si  $f$  es constante. El ínfimo de los  $\alpha$  que verifican eso se denomina el orden de  $f$ .

El siguiente teorema se demuestra combinando el lema 15.17 y el teorema 15.18 de [45].

**Teorema 1.2. Fórmula de Jensen:** Sea  $R > 0$ ,  $f$  holomorfa en un abierto que contiene a  $\overline{D}(0, R)$ , tal que no hay ceros en  $|z| = R$  y  $f(0) \neq 0$ , entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \int_0^R n(r)r^{-1} dr,$$

donde denotamos por  $n(r)$  al número de ceros de  $f(z)$  en  $|z| < r$  con sus respectivas multiplicidades.

Se sigue de la fórmula de Jensen que los ceros de funciones enteras de orden finito, pongamos  $\rho$ , no pueden ser muy densos: Si  $\alpha > \rho$ , entonces  $\log |f(Re^{i\theta})| < R^\alpha$  para  $R$  suficientemente grande. Luego, por un lado,  $\int_0^{2R} n(r)r^{-1}dr < (2R)^\alpha - \log |f(0)| < MR^\alpha$ , y por otro lado,  $\int_R^{2R} n(r)r^{-1}dr \geq n(R) \int_R^{2R} r^{-1}dr = n(R) \log 2$ . Se sigue que  $n(R) = O(R^\alpha)$ . Una consecuencia de esto es que si  $r_n = |z_n|$  donde los  $z_n$  denotan los ceros de  $f$ , entonces  $\sum_n r_n^{-\beta}$  converge si  $\beta > \alpha$ , en particular converge si  $\beta > \rho$ . En efecto, ordenamos los  $r_n$  en orden creciente y se tiene que  $n \leq n(r_{n+1}) = O(r_n^\alpha)$ , luego para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_n r_n^{-\alpha-\varepsilon}$  tiene el mismo tipo de convergencia que  $\sum_n n^{-1-\varepsilon}$ , que converge. Ahora ya estamos en la posición de definir a las funciones enteras de orden 1 como producto de Weierstrass.

**Teorema 1.3. Teorema de Hadamard, orden 1:** [45] Sea  $f(z)$  una función entera de orden 1 con ceros  $z_1, z_2, \dots$  contados conforme a su multiplicidad, existen constantes  $A, B$  tales que:

$$f(z) = e^{A+Bz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n) e^{z/z_n}, \quad \text{con } A, B \text{ constantes.}$$

**Observación 1.4.** Si una función  $f(z)$  tiene orden 1, sabemos que para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_n r_n^{-1-\varepsilon} < \infty$ , pero la serie  $\sum_n r_n^{-1}$  puede converger o divergir. Si converge, entonces  $|f(z)| < e^{C|z|}$  para cierta constante  $C$  y  $|z|$  suficientemente grande, porque para todo  $z$ , se cumple que  $|(1-z)e^z| \leq e^{2|z|}$ , lo cual se deduce directamente de la serie de potencias de  $(1-z)e^z$ .

Teniendo estos resultados en mente, calculemos el producto de Hadamard de la función entera  $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ .

**Proposición 1.5.** [9]

$$|\xi(s)| < \exp(C|s| \log |s|) \quad \text{cuando } |s| \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Como  $\xi(s)$  verifica que  $\xi(s) = \xi(1-s)$ , basta demostrar la desigualdad para  $\sigma \geq 1/2$ . En lo sucesivo, la letra  $C$  se va a usar indistintamente para denotar constantes, aunque no sean necesariamente la misma. Tenemos las siguientes estimaciones cuando  $|s| \rightarrow \infty$ . Por un lado,  $\left| \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2} \right| < \exp(C|s|)$ . Por otro lado, usando la fórmula de Stirling, tenemos que:

$$(1.1) \quad \log(\Gamma(s)) = (s-1/2) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(|s|^{-1}).$$

Esto es válido para  $|s| \rightarrow \infty$  en el ángulo  $-\pi + \delta < \arg(s) < \pi + \delta$  para todo  $\delta > 0$ . Luego se deduce que:

$$|\Gamma(s/2)| < \exp(C|s| \log |s|), \quad \text{pues } -\frac{\pi}{2} < \arg(s) < \frac{\pi}{2}.$$

Por último, sabemos que para  $\sigma > 0$ ,  $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{x-|x|}{x^{s+1}} dx$ . Dicha integral está acotada para  $\sigma \geq 1/2$ , luego  $|\zeta(s)| < C|s|$  cuando  $|s| \rightarrow \infty$ . Juntando todas las estimaciones, se obtiene el resultado.  $\square$

Se deduce de la proposición 1.5 que  $\xi(s)$  tiene orden como mucho 1. De hecho, es la mejor estimación posible porque cuando  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \rightarrow \infty$ , entonces  $\log \Gamma(s) \sim s \log s$  y  $\zeta(s) \rightarrow 1$ . En particular,  $\xi(s)$  no satisface la condición  $|f(z)| < e^{C|z|}$  mencionada en la observación 1.4. Por tanto,  $\xi(s)$  debe tener infinitos ceros. Denotemos cualquier cero de  $\xi(s)$  por  $\rho$ , estos ceros verifican que  $\sum_{\rho} |\rho|^{-1-\varepsilon} < \infty$ , para todo  $\varepsilon > 0$  y  $\sum_{\rho} |\rho|^{-1}$  diverge. Además, por el teorema de Hadamard:

$$(1.2) \quad \xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho}.$$

**Observación 1.6.** Los ceros de  $\xi(s)$  son exactamente los ceros no triviales de  $\zeta(s)$ , pues los ceros triviales de  $\zeta(s)$  se cancelan con los polos de  $\Gamma(s/2)$ ,  $\frac{1}{2}s\Gamma(s/2)$  no tiene ceros y el cero de  $s - 1$  se cancela con el polo de  $\zeta(s)$  en  $s = 1$ . Por tanto, se deduce que  $\zeta(s)$  tiene infinitos ceros no triviales en la banda crítica,  $0 < \sigma < 1$  y verifican lo dicho anteriormente para los  $\{\rho_n\}$ .

Aplicando derivación logarítmica en (1.2), obtenemos que:

$$(1.3) \quad \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

A su vez, calculando  $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$  directamente de la definición, obtenemos que:

$$(1.4) \quad \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{2s-1}{s(s-1)} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Combinando ambas cosas y observando que  $\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}$ , se obtiene:

$$(1.5) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \log \pi + B - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Esta fórmula nos permite ver claramente el polo simple en  $s = 1$  y los ceros no triviales en  $s = \rho$ . Los ceros triviales  $-2, -4, \dots$  están contenidos en el término de  $\Gamma$  pues, aplicando derivación logarítmica al siguiente producto de Hadamard:  $\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + s/n) e^{-s/n}$ , donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni, se obtiene:

$$(1.6) \quad -\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{2} \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right).$$

Calculemos ahora las constantes  $A$  y  $B$ . Como  $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$  y  $\pi^{-1/2}\Gamma(1/2) = 1$ , se tiene que  $\xi(1) = \frac{1}{2}$ , luego  $\xi(0) = \frac{1}{2} = e^A$ . Por otro lado,  $B = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}$ . Además, se sigue de la serie de (1.6) y la de  $\log 2$  que  $-\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{\gamma}{2} - 1 + \log 2$ . Por tanto,  $B = \frac{\gamma}{2} - 1 + \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right)$ . Para evaluar el límite, llamamos  $I(s) = \int_1^{\infty} \frac{x-|x|}{x^{s+1}} dx$  y recurrimos a la expresión  $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - sI(s)$ . Sea

$f(s) = (s-1)\zeta(s)$ , sabemos que  $\lim_{s \rightarrow 1} f(s) = 1$  y el límite que queremos calcular es  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{f'(s)}{f(s)} = 1 - I(1)$ . Calculemos  $I(1)$ :

$$I(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N - \sum_{n=1}^{N-1} n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 1 \right) = 1 - \gamma.$$

Luego  $B = -\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{1}{2} \log 4\pi$ .

Sin embargo, podemos dar otra interpretación de  $B$ . Aunque  $\sum_{\rho} |\rho|^{-1}$  diverge,  $\sum_{\rho} \rho^{-1}$  converge (en el sentido de que  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} \rho^{-1}$  existe) suponiendo que podemos agrupar  $\rho$  y  $\bar{\rho}$  juntos ( $\bar{\rho}$  está en la suma pues los ceros de la función  $\zeta$  son simétricos respecto al eje real). En efecto, sea  $\rho = \beta + i\gamma$ , entonces  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \leq \frac{2}{|\rho|^2}$  y sabemos que  $\sum_{\rho} |\rho|^{-2} < \infty$ . Por tanto, se sigue de la ecuación funcional de  $\xi(s)$  y de su derivada logarítmica que:

$$(1.7) \quad B + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = -B - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

De hecho, los términos que contienen a  $1-s-\rho$  y  $s-\rho$  se cancelan, pues si  $\rho$  es un cero, también lo es  $1-\rho$ . Así, se obtiene:

$$(1.8) \quad B = - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = -2 \sum_{\gamma > 0} \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

El valor numérico de  $B$  es aproximadamente  $-0,023$  (de aquí se deduce que  $|\gamma| > 6$  para todos los ceros no triviales).

Ahora pasemos a estudiar las funciones  $L$ . Sea  $\chi$  carácter primitivo (de ahora en adelante siempre consideraremos al carácter trivial  $\chi_0$  como no primitivo) módulo  $q$  y

$$\xi(s, \chi) = (q/\pi)^{s/2 + \mathfrak{a}/2} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\mathfrak{a}}{2}\right) L(s, \chi), \quad \text{donde } \mathfrak{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1, \\ 1 & \text{si } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Esta función es entera y verifica que  $\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^{\mathfrak{a}} \sqrt{q}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi)$  donde  $e_q(m) = e^{2\pi i m/q}$  y  $\tau(\chi) = \sum_{m=1}^q \chi(m) e_q(m)$ . Además,  $\left| \frac{i^{\mathfrak{a}} \sqrt{q}}{\tau(\chi)} \right| = 1$  ya que  $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ . Si se quiere ver la ecuación funcional de las funciones  $L$  se demuestra en el capítulo 9 de [9]. Veamos que  $\xi(s, \chi)$  tiene orden 1.

**Proposición 1.7.** [9] Sea  $\sigma = \Re(s)$ , entonces existen constantes  $C_0$  y  $C$  tales que para todo  $|s| \geq C_0$  y  $q \in \mathbb{Z}^+$  se tiene que:

$$|\xi(s, \chi)| < q^{\sigma/2 + 3/2} \exp(C|s| \log |s|), \quad \text{cuando } |s| \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Nuevamente, por la ecuación funcional de  $\xi(s, \chi)$  basta probarlo para  $\sigma \geq 1/2$ . Análogamente a la función  $\zeta(s)$ , aplicando la identidad de Abel se obtiene que, en  $\sigma > 0$ ,  $L(s, \chi) = s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx$  con  $S(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$ . Por tanto, por las relaciones de ortogonalidad para caracteres de Dirichlet, se tiene que  $|S(x)| \leq q$ , luego  $|L(s, \chi)| \leq 2q|s|$  para todo  $\sigma \geq 1/2$ . Combinando esto con (1.1) se obtiene el resultado.  $\square$

**Observación 1.8.** De nuevo, esta es la mejor desigualdad posible, con  $q$  fijo, cuando  $|s| \rightarrow \infty$ , pues si  $s \rightarrow \infty$  con  $s$  real, se tiene que  $L(s, \chi) \rightarrow 1$ . Concluimos, al igual que para  $\zeta(s)$ , que  $L(s, \chi)$  tiene infinitos ceros  $\rho$  en la banda crítica y cumplen las mismas propiedades de convergencia que la de aquellos sumatorios para los ceros de  $\zeta(s)$ . Además, por el teorema 1.3,

$$(1.9) \quad \xi(s, \chi) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho},$$

aunque ahora  $A$  y  $B$  dependerán de  $\chi$ .

**Observación 1.9.** Nótese que en la definición de  $\xi(s, \chi)$  no ha sido necesario incluir el término  $s(s-1)$  como en  $\xi(s)$ , pues, si  $\chi(-1) = 1$ , los ceros de  $L(s, \chi)$  en  $\sigma < 0$  corresponden a los polos de  $\Gamma(s/2)$ ,  $s = 0, -2, -4, \dots$  y es entera (porque  $\chi \neq \chi_0$ ). Asimismo, en  $s = 1$  no tiene ni polo ni cero, mientras que en  $\xi(s)$  se necesitaban para contrarrestar los polos de  $\Gamma(s/2)$  y  $\zeta(s)$  en  $s = 0$  y  $s = 1$  respectivamente. Lo mismo ocurre si  $\chi(-1) = -1$ , pues entonces los ceros de  $L(s, \chi)$  en  $\sigma < 0$  son  $s = -1, -3, -5, \dots$  que corresponden a los polos de  $\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))$ , es entera (porque  $\chi \neq \chi_0$ ) y no se anula en  $s = 1$ . Todo ello hace a  $\xi(s, \chi)$  entera.

Aplicando derivación logarítmica en (1.9) se obtiene que:

$$(1.10) \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = B(\chi) - \frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2 + \mathfrak{a}/2)}{\Gamma(s/2 + \mathfrak{a}/2)} + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Luego,  $e^A = \xi(0, \chi)$ , que se puede poner en términos de  $\xi(1, \bar{\chi})$ , luego en términos de  $L(1, \bar{\chi})$ . Para calcular  $B(\chi)$ , necesitamos una proposición previa:

**Proposición 1.10.** *Si  $\chi$  es complejo, los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  tienen cierta simetría respecto a la recta  $\sigma = \frac{1}{2}$  pero no respecto al eje real, en concreto, verifican que  $\rho$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$  si y solo si  $1 - \bar{\rho}$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$ . En cambio, si  $\chi$  es real, los ceros no triviales son simétricos respecto a  $\sigma = \frac{1}{2}$  y respecto al eje real.*

*Demostración.* En  $\sigma > 1$  se cumple que  $L(s, \chi) = \overline{L(\bar{s}, \bar{\chi})}$ , luego por el teorema de identidad se tiene en todo  $\mathbb{C}$  por ser ambas funciones enteras. Esto nos dice que  $\rho$  es un cero de  $\xi(s, \chi)$  si y solo si  $\bar{\rho}$  es un cero de  $\xi(s, \bar{\chi})$ . Así, si  $\chi$  real, simplemente  $\chi = \bar{\chi}$  y se tiene que los ceros de  $L(s, \chi)$  en este caso son simétricos respecto al eje real. Ahora, sea  $\chi$  complejo. Usando la ecuación funcional de  $\xi(s, \chi)$  y lo anterior, obtenemos la siguiente cadena:  $\rho$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$  si y solo si  $1 - \rho$  es un cero no trivial de  $L(s, \bar{\chi})$  si y solo si  $1 - \bar{\rho}$  es un cero no trivial de  $\overline{L(\bar{s}, \bar{\chi})}$  si y solo si  $1 - \bar{\rho}$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$ . Sin embargo, si  $\chi$  real, la misma cadena nos da que  $\rho$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$  si y solo si  $1 - \rho$  es un cero no trivial de  $L(s, \chi)$ .  $\square$

Usaré este resultado constantemente, a veces sin mencionarlo. Calculemos  $B(\chi)$ :

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0, \chi)}{\xi(0, \chi)} = -\frac{\xi'(1, \bar{\chi})}{\xi(1, \bar{\chi})} = -B(\bar{\chi}) - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{1 - \bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right).$$

Como  $B(\bar{\chi}) = \overline{B(\chi)}$ , se sigue que  $2\Re(B(\chi)) = -\sum_{\rho} \left( \Re\left(\frac{1}{1-\bar{\rho}}\right) + \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \right)$ . Ahora, escribamos  $\rho$  en lugar de  $1-\bar{\rho}$  y se tiene que:

$$(1.11) \quad \Re(B(\chi)) = -\frac{1}{2} \sum_{\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) = -\sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

En particular, si  $\chi$  es real,  $B(\chi)$  es negativo y se expresa en términos de los ceros no triviales al igual que la  $B$  para la función  $\zeta(s)$ . En cambio, la dificultad para estimar  $B(\chi)$  está conectada con el hecho de que, hasta donde se sabe,  $L(s, \chi)$  podría tener un cero cerca de  $s = 0$ .

## 1.2. Primeras regiones libres de ceros de $\zeta(s)$ y $L(s, \chi)$

Como coronación de estos poderosos resultados, vamos a demostrar la primera región libre de ceros de  $\zeta(s)$  más allá de  $\sigma = 1$ , probada por de la Vallée-Poussin en 1899, así como la análoga para  $L(s, \chi)$ . En primer lugar, veamos un resultado básico de no anulación de  $\zeta(s)$  que destaca por su sencillez y que nos dice que, en cierta región,  $\zeta(s)$  no tiene ceros a altura suficientemente cercana al eje real. Este tipo de resultados son importantes ya que son la base de la región libre de ceros de de la Vallée-Poussin porque la vamos a probar para altura suficientemente grande y se verificará automáticamente para toda parte imaginaria. De hecho, el par de ceros conjugados de  $\zeta(s)$  con menor parte imaginaria en la banda crítica ocurre a alturas  $\pm 14,134725$ .

**Lema 1.11.** [41]  $\zeta(s)$  no tiene ceros en  $\frac{8}{9} \leq \sigma \leq 1$ ,  $|t| \leq \frac{7}{8}$ .

*Demostración.* En  $\sigma > 0$  se tiene que  $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} (x - [x])x^{-s-1} dx$ , luego:

$$\left| \zeta(s) - \frac{s}{s-1} \right| \leq |s| \int_1^{\infty} x^{-\sigma-1} dx = \frac{|s|}{\sigma}.$$

Por tanto,  $\zeta(s) \neq 0$  en  $\sigma > |s-1|$ , es decir, en  $\sigma > \frac{1+t^2}{2}$ . Así, se concluye el resultado.  $\square$

Vamos ya a probar la región libre de ceros de de la Vallée-Poussin. Dado que:

$$(1.12) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}, \quad \text{en } \sigma > 1,$$

se tiene que:

$$(1.13) \quad -\Re\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} \cos(t \log n), \quad \text{en } \sigma > 1.$$

Además, para todo  $\theta$ ,

$$(1.14) \quad 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0,$$

y juntando ambos resultados, (1.13) y (1.14), se obtiene la siguiente proposición:

**Proposición 1.12.** *En  $\sigma > 1$ , se verifica que:*

$$(1.15) \quad -3 \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4 \Re \left( \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) - \Re \left( \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \geq 0.$$

El comportamiento de  $-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}$  cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$  es sencillo:

$$(1.16) \quad -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A,$$

con  $1 \leq \sigma \leq 2$  y donde  $A$  denotará una constante positiva, no necesariamente la misma en cada aparición. El comportamiento de los otros dos términos está influenciado por cualquier posible cero que  $\zeta(s)$  pueda tener a la izquierda de  $\sigma = 1$ , a alturas  $t$  y  $2t$ . Por un lado, (1.1) nos da que, en (1.5), el término de  $\Gamma$  en módulo es  $< A \log t$  si  $t \geq 2$  y  $1 \leq \sigma \leq 2$ , luego tenemos:

$$(1.17) \quad -\Re \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) < A \log t - \sum_{\rho} \Re \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Si  $\rho = \beta + i\gamma$ ,  $\Re \left( \frac{1}{s - \rho} \right) = \frac{\sigma - \beta}{|s - \rho|^2} > 0$  y  $\Re \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\beta}{|\rho|^2} > 0$ . Por tanto, obtenemos una desigualdad válida cuando  $s = \sigma + 2it$  omitiendo la suma:

$$(1.18) \quad -\Re \left( \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) < A \log t.$$

Además, respecto a  $s = \sigma + it$ , tomamos  $t$  para que coincida con una ordenada  $\gamma$  de un cero  $\rho$  con  $\gamma \geq 2$  y consideramos solo el término en la suma que corresponde a este cero,  $\frac{1}{s - \rho}$ . Obtenemos:

$$(1.19) \quad -\Re \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) < A \log t - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

**Teorema 1.13. de la Vallée-Poussin, 1899:** [9] *Existe una constante efectiva y positiva  $c$  tal que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t}, \quad t \geq 2.$$

*Demostración.* Sustituyendo las acotaciones (1.16), (1.18), (1.19) en (1.15), obtenemos:  $\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + A \log t$ . Ahora, sea  $\delta > 0$ , tomamos  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log t}$ . Entonces,  $\beta < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4\delta}{(3 + A\delta)\log t}$ . Por tanto, tomando  $0 < \delta < \frac{1}{A}$ , se obtiene:  $\beta < 1 - \frac{c}{\log t}$  con  $c > 0$ .  $\square$

**Observación 1.14.** De hecho, en vista de que  $\zeta(s)$  no tiene ceros arbitrariamente cerca de  $\sigma = 1$  con  $|t| \leq 2$ , podemos decir que existe una constante  $c > 0$  tal que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:

$$(1.20) \quad \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}.$$

Aunque este resultado es suficientemente potente, vamos a refinar esta región libre de ceros con el fin de hallar constantes óptimas  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en  $\sigma > 1 - \frac{C_1}{\log(t+C_2)}$ . Todo ello dependerá de afinar las constantes obtenidas en las cotas anteriores. Como ya calculamos,  $\lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$ , donde  $\gamma$  denota la constante de Euler-Mascheroni. Luego el desarrollo en serie de Laurent de  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  cerca de  $s = 1$  tiene término constante  $-\gamma < 0$  y se tiene que  $-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1}$  para  $\sigma$  cercano a 1. De hecho, se tiene lo siguiente:

**Proposición 1.15.** *Para todo  $\sigma > 1$  se verifica que  $-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1}$ .*

*Demostración.* Sea  $f(s) = (s-1)\zeta(s)$ , entonces  $\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$ . Por tanto, basta ver que para todo  $\sigma > 1$  se verifica que  $f'(\sigma) > 0$  (porque  $f(\sigma) > 0$ ). Partimos de la representación integral  $(s-1)\zeta(s) = s - s(s-1) \int_1^\infty u^{-s-1} \{u\} du$ , donde  $\{u\}$  denota la parte fraccionaria de  $u$ . Como  $\{u\} = u - 1$  en  $[1, 2)$ , se tiene que, para  $s > 1$ :

$$\begin{aligned} f'(s) &= 1 - \frac{d}{ds} \left( s(s-1) \int_1^2 u^{-s-1} (u-1) du \right) - \frac{d}{ds} \left( s(s-1) \int_2^\infty u^{-s-1} \{u\} du \right), \\ &> 1 - \frac{d}{ds} \left( s(s-1) \int_1^2 u^{-s-1} (u-1) du \right) - (2s-1) \int_2^\infty u^{-s-1} du. \end{aligned}$$

Calculando las integrales y operando se obtiene que  $f'(s) > 1 - 2^{-s}((s+1) \log 2 + 1 - s^{-1})$ , luego todo se reduce a probar la desigualdad  $(s+1) \log 2 + 1 - s^{-1} < 2^s$  para  $s > 1$ . Por un lado, la desigualdad es cierta para  $s = 2$  y la derivada del miembro izquierdo es menor que la del miembro derecho en  $[2, \infty)$ , luego la desigualdad es válida en dicho intervalo. Por otro lado, en  $[1, 2)$  se tiene que el miembro izquierdo es menor que  $(s+1) \log 2 + \frac{1}{2}$  y el miembro derecho es mayor que  $2 + 2(s-1) \log 2$  por Taylor, luego también se verifica en  $[1, 2)$  y se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 1.16.** *Si  $s = \sigma + it$  donde  $1 \leq \sigma \leq 2$ , entonces se verifica que:*

$$\Re \left( \psi \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \right) < \begin{cases} \log t & \text{si } t \geq 2, \\ \log(t/2 + C_2) & \text{si } t \geq 4, \end{cases}$$

donde  $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$  y  $C_2 \approx 0,5707$ .

*Demostración.* Usando la expresión asintótica dada en 5.11.2 de [43] con término de error dado en 5.11(ii) y tomando  $N = 1$  obtenemos que:

$$\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} + R_1(z),$$

donde  $|R_1(z)| \leq \frac{1}{12|z|^2} \left| \sec^3 \left( \frac{\arg(z)}{2} \right) \right|$ . Por consiguiente, tenemos que para los  $s$  en nuestro dominio se verifica que  $0 < \arg(s) < \frac{\pi}{2}$ , luego  $\sec^3 \left( \frac{\arg(s)}{2} \right) \leq \frac{1}{\cos^3(\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}$ .

Por tanto, tenemos que si,  $s = \sigma + it$ , entonces  $|R_1(s)| \leq \frac{\sqrt{2}}{6|s|^2}$ . Así, denotando por  $\frac{3}{2} \leq x = \frac{\sigma}{2} + 1 \leq 2$  e  $y = \frac{t}{2} \geq 1$ , tenemos que:

$$\Re\left(\psi\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + \Re\left(R_1\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right),$$

y se sigue que:

$$\Re\left(\psi\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) < \log y + A(x, y) = \log t - \log 2 + A(x, y),$$

donde  $A(x, y) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6(x^2 + y^2)}$ . Esta función alcanza el máximo en  $x = 2, y = 1$  y este es  $< \log 2$ , luego se tiene que:

$$\Re\left(\psi\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right) < \log t.$$

Ahora consideramos  $s = \sigma + 2it$ ,  $x = \frac{\sigma}{2} + 1$  e  $y = t$  y buscamos la mejor cota de la forma  $\log(t + C_2)$ . Para ello, siguiendo la demostración anterior, vemos que simplemente hay que tomar  $C_2 \geq y(\exp(A(x, y)) - 1)$ , con  $A(x, y)$  definido exactamente igual que antes. Esta función alcanza un máximo global, en el dominio dado por  $\frac{3}{2} \leq x \leq 2, y \geq 2$ , en el punto  $(2, 2)$  con valor  $\approx 0,5707$ , como queríamos ver.  $\square$

En adelante, tomamos  $C_2 = 0,5707$ . Por tanto, considerando  $s = \sigma + it$  donde  $t$  es la ordenada la de un cero no trivial  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\gamma \geq 2$ , tenemos que  $\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{1}{\sigma-\beta}$  y, si omitimos el resto de la suma en (1.5) y usamos la proposición 1.16, obtenemos que:

$$(1.21) \quad -\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right) < \frac{1}{2} \log(t + C_2) - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

**Teorema 1.17.**  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:

$$(1.22) \quad \sigma \geq 1 - \frac{C_1}{\log(t + C_2)}, \quad t \geq 2,$$

donde  $C_2$  es la constante de la proposición 1.16 y  $C_1 = \frac{14-8\sqrt{3}}{5}$ .

*Demostración.* Gracias a las proposiciones 1.15 y 1.16 obtenemos que:

$$\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{5}{2} \log(t + C_2) + \frac{3}{\sigma - 1} := A(\sigma, t).$$

Luego  $\beta < \sigma - \frac{4}{A(\sigma, t)}$  y eligiendo  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t + C_2)}$  tenemos que  $\beta < 1 - \frac{K(\delta)}{\log(t + C_2)}$  con  $K(\delta) = \frac{\delta(2-5\delta)}{5\delta+6}$ . Esta función alcanza el máximo en  $\delta = \frac{-6+4\sqrt{3}}{5}$  donde  $K(\delta)$  toma el valor  $\frac{14-8\sqrt{3}}{5} \approx 0,0287$ .  $\square$

A continuación, vamos a ir un paso más allá y generalizar el argumento utilizado en las anteriores regiones libres de ceros de  $\zeta(s)$  donde usamos que  $3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq$

0. Para ello queremos encontrar los pares  $(a, b)$  que hagan que  $a + b \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$ . Sea  $t = \cos(\theta)$ , consideramos la función  $f(t) = a - 1 + bt + 2t^2$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Queremos hallar una condición necesaria y suficiente para que  $f(t) \geq 0$  en dicho intervalo. Como  $f$  es una parábola con derivada segunda positiva y vértice en  $t_0 = -\frac{b}{4}$  tenemos que distinguir tres casos:

1. Si  $b \geq 4$ , entonces  $t_0 \leq -1 \leq t$  y  $f$  es creciente en nuestro intervalo, luego  $f(t) \geq f(-1) = a - b + 1$  y  $f(t) \geq 0$  si y solo si  $a - b \geq -1$ .
2. Si  $b \leq -4$ , entonces  $t_0 \geq 1 \geq t$  y  $f$  es decreciente en nuestro intervalo, luego  $f(t) \geq f(1) = a + b + 1$  y  $f(t) \geq 0$  si y solo si  $a + b \geq -1$ .
3. Si  $-4 < b < 4$ , entonces  $t_0 \in (-1, 1)$ , luego el mínimo de los valores de  $f$  en nuestro intervalo se alcanza en  $f(t_0) = a - 1 - \frac{b^2}{8}$  y  $f(t) \geq 0$  si y solo si  $a \geq 1 + \frac{b^2}{8}$ .

Por tanto, esa es la condición necesaria y suficiente. Nótese que sustituyendo los valores  $t = -1, 0, 1$  en  $f(t)$  se obtienen las condiciones necesarias  $a - b \geq -1$ ,  $a \geq 1$  y  $a + b \geq -1$ . Las cuales se puede comprobar que verifican todos nuestros pares  $(a, b)$ . Ahora, vamos a calcular la región libre de ceros de la Vallée-Poussin óptima usando estos pares  $(a, b)$ . Si tomamos uno de estos pares, se cumple que:

$$(1.23) \quad -a\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) - b\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right) - \Re\left(\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right) \geq 0.$$

Por tanto, aplicando las cotas obtenidas en las proposiciones 1.15 y 1.16, tenemos que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:

$$\beta > \sigma - \frac{b}{A(t)},$$

donde  $A(t) = \frac{a}{\sigma-1} + \frac{b+1}{2} \log(t+C_2)$ . Si elegimos  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t+C_2)}$  con  $\delta > 0$  obtenemos que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:

$$\beta > 1 - \frac{f(\delta)}{\log(t+C_2)},$$

donde  $f(\delta) = \frac{2\delta(b-a) - \delta^2(b+1)}{2a + \delta(b+1)}$ . Ahora queremos elegir  $(a, b, \delta)$  de manera que maximicen el valor de  $f(\delta)$ . Tras varios cálculos obtenemos que esa función alcanza el máximo en  $\delta = \frac{2(\sqrt{ab}-a)}{b+1} > 0$  si  $b \geq a$  (en particular,  $b$  es positivo porque  $a \geq 1$ ). Al sustituir, tenemos que  $f(a, b) = \frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{b+1}$ . Debemos maximizar esta función en la región dada por: por un lado,  $b \geq 4$ ,  $b \geq a$ ,  $a - b \geq -1$  y, por otro lado,  $a \leq b \leq 4$ ,  $a \geq 1 + \frac{b^2}{8}$ . Como el máximo se alcanza en el borde, observemos lo que ocurre en los distintos puntos de borde: Si  $a = b$  entonces  $f(a, b) = 0$ . Si  $b = a + 1$ ,  $b \geq 4$  entonces el máximo se alcanza en  $(3, 4)$  y obtenemos  $C_1 := f(a, b) = \frac{14-8\sqrt{3}}{5} \approx 0,0287$ , el mismo que en el teorema 1.17. Si  $a = 1 + \frac{b^2}{8}$ ,  $a \leq 3$ ,  $b \leq 4$  entonces el máximo se alcanza en  $b \approx 2,966$ ,  $a \approx 2,099$  donde la función toma el valor  $\approx 0,03764$ . El  $b$  para el cual se alcanza el máximo es solución del polinomio  $x^5 + 4x^4 - 12x^3 - 40x^2 + 64x - 64$ .

Este polinomio es irreducible y, por tanto, el grado de  $\mathbb{Q}(b)$  sobre  $\mathbb{Q}$  es 5. Además, operando en la ecuación que define a  $C_1$  y usando la relación que verifica  $b$  se obtiene que  $C_1 \in \mathbb{Q}(b)$ , luego  $\mathbb{Q}(C_1)$  también tiene grado 5 sobre los racionales. De hecho, su polinomio mínimo sobre  $\mathbb{Q}$  es  $9x^5 - 86x^4 + 447x^3 - 1891x^2 + 3684x - 136$  que no es resoluble por radicales. Así,  $C_1$  no se puede expresar de forma sencilla usando solo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y radicales.

A continuación, vamos a extender el resultado anterior a los ceros de  $L(s, \chi)$  para un carácter fijado  $\chi$ . Suponemos  $t \geq 0$  en lugar de  $t \geq 2$  sin pérdida de generalidad, pues los ceros de  $L(s, \chi)$  en  $t < 0$  son los conjugados de los ceros de  $L(s, \bar{\chi})$  en  $t > 0$ . La razón para hacer esto es que nos interesa tener uniformidad en  $q$ . Es decir, para la función  $\zeta(s)$  lo hacemos para  $t \geq 2$  y por simetría se tiene para  $t \leq -2$ . A continuación, es sencillo extender a  $-2 \leq t \leq 2$  porque al ser un compacto, cualquier función holomorfa no idénticamente nula tiene como mucho un número finito de ceros en ese rectángulo (en el caso de  $\zeta(s)$  sabemos que no tiene ceros en esa región), que se podrían incluir posteriormente para ajustar la cota obtenida para  $t \geq 2$ . Si fijamos un carácter concreto  $\chi$  la región libre de ceros para  $L(s, \chi)$  se haría exactamente igual que la de  $\zeta(s)$  en  $t \geq 2$ . Sin embargo, ya hemos comentado que no todas tienen simetría respecto al eje real, luego también habría que hacerlo para  $t \leq -2$ , pero más importante aún es que, como queremos hacerlo para todas las funciones  $L(s, \chi)$  en general, nos vemos obligados a considerar  $t \geq 0$  porque ya no se tiene la propiedad mencionada anteriormente de los ceros en  $-2 \leq t \leq 2$  y podríamos tener ceros arbitrariamente cercanos a 1 a medida que  $q$  cambia.

Además, nos centraremos solo en caracteres no principales, luego  $q \geq 3$  a lo largo de esta parte. La derivación logarítmica en el producto de Euler nos da que:

$$(1.24) \quad -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \chi(n) e^{-it \log n}, \quad \text{si } \sigma > 1$$

Si  $(n, q) = 1$ , como  $w = \chi(n) e^{-it \log n}$  verifica que  $|w| = 1$ , las partes reales de  $w$  y  $w^2$  son  $\cos \theta$  y  $\cos 2\theta$  con  $\theta$  su argumento. Por tanto, combinando lo anterior con (1.14) y (1.24) obtenemos:

$$(1.25) \quad -3 \frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} - 4 \Re \left( \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} \right) - \Re \left( \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} \right) \geq 0.$$

**Observación 1.18.** Si  $\chi$  es real,  $\chi^2 = \chi_0$  y eso va a afectar a nuestro argumento cuando  $t$  es pequeño y estamos bajo la influencia del polo de  $L(s, \chi_0)$  en  $s = 1$ .

Primero, supongamos que  $\chi$  es un carácter primitivo complejo. Por un lado, tenemos que:

$$(1.26) \quad -\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n) \Lambda(n) n^{-\sigma} \leq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1}, \quad 1 < \sigma < 2,$$

Para los otros dos términos,  $-\Re(B(\chi)) - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{\rho}\right)$  desaparece en menos la parte real de (1.10), usando (1.11). Además, el término de  $\Gamma$  en la fórmula (1.10) es  $O(\log(t+2))$

nuevamente por la fórmula de Stirling, luego:

$$(1.27) \quad -\Re\left(\frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)}\right) < c_1 \mathcal{L}_q(t) - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s - \rho}\right), \quad \text{con } \mathcal{L}_q(t) = \log(q(|t| + 2)).$$

Esto último se mantiene igual en  $\sigma > 1$ , para cualquier  $t \geq 0$  y para cualquier carácter primitivo, ya sea real o complejo. Incluso, como  $\Re\left(\frac{1}{s - \rho}\right) = \frac{\sigma - \beta}{\sigma^2 + \beta^2} \geq 0$ , podemos omitir la suma entera o cualquier parte de ella, como queremos hacer en el caso  $\sigma + 2it$ , imitando la demostración para  $\zeta(s)$ . La complicación viene en que  $\chi^2$  aunque no sea principal, puede no ser primitivo. Sin embargo, si  $\chi_1$  es el conductor de  $\chi^2$ , se sigue que:

$$(1.28) \quad \left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} \right| \leq \sum_{\substack{p|q \\ p \text{ primo}}} \frac{p^{-\sigma} \log p}{1 - p^{-\sigma}} \leq \sum_{\substack{p|q \\ p \text{ primo}}} \log p \leq \log q.$$

Por tanto, la cota  $c_1 \mathcal{L}_q(t)$  que tendríamos al omitir la suma entera para  $\frac{L'(\sigma + 2it, \chi_1)}{L(\sigma + 2it, \chi_1)}$ , sigue siendo válida para  $\frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)}$ . Tomamos  $t$  que sea la ordenada  $\gamma$  de un cero no trivial  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $L(s, \chi)$  y nos quedamos solo con ese término en la suma de (1.27), luego tenemos la siguiente cota para el término con  $s = \sigma + it$ :

$$(1.29) \quad -\Re\left(\frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)}\right) < c_1 \mathcal{L}_q(\gamma) - \frac{1}{\sigma - \beta},$$

y al sustituir todas las estimaciones anteriores obtenemos:  $\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + c_2 \mathcal{L}_q(\gamma)$ . Por último, tomando  $\sigma = 1 + \frac{c_3}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$  para un  $c_3$  adecuado tenemos  $\beta < 1 - \frac{c_4}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$ .

**Observación 1.19.** Esto se ha probado para cualquier carácter primitivo complejo  $\chi$ , pero la restricción de que sea primitivo se puede quitar. En efecto, sea  $\chi_1$  el carácter primitivo que induce a  $\chi$ , entonces  $L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} (1 - \chi_1(p)p^{-s})$ . Por tanto, los ceros adicionales de  $L(s, \chi)$  respecto a aquellos de  $L(s, \chi_1)$  provienen de un número finito de factores que, en caso de anularse, están en  $\sigma = 0$ , pues si  $\chi_1(p) = p^s$ , entonces  $1 = |\chi_1(p)| = p^\sigma$ . Nótese también que, el carácter  $\chi_1$  tendrá un módulo, pongamos  $q_1$ , menor que  $q$ , luego la región libre de ceros de  $L(s, \chi_1)$  juega a nuestro favor para obtener la región libre de ceros de  $L(s, \chi)$  con  $\mathcal{L}_q(\gamma)$ .

Vamos a enunciar el teorema que acabamos de probar:

**Teorema 1.20.** [9] *Existe una constante positiva y absoluta  $c_5$  tal que si  $\chi$  es un carácter complejo de módulo  $q$ , entonces cualquier cero  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $L(s, \chi)$  satisface:*

$$(1.30) \quad \beta < 1 - \frac{c_4}{\mathcal{L}_q(\gamma)},$$

donde hemos tomado  $t = \gamma$  y  $\mathcal{L}_q(\gamma) = \log(q(|\gamma| + 2))$ , para considerar los ceros tanto en el semiplano superior como en el inferior.

Ahora supongamos que  $\chi$  es carácter primitivo real. El argumento anterior necesita una modificación pues (1.28) ya no es válida. En su lugar, debemos relacionarla con  $\frac{\zeta'}{\zeta}$  pues  $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s})$ . En ese caso, exactamente por el mismo argumento que en (1.28), se obtiene que:

$$(1.31) \quad \left| \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \log q, \quad \sigma > 1$$

Respecto a  $\frac{\zeta'}{\zeta}$ , no podemos poner lo de (1.18) porque en ella, para  $t$  suficientemente grande ( $t \geq 2$ ), se podía desprestigiar el término  $\frac{1}{s-1}$ . En cambio, ahora estamos trabajando en  $t \geq 0$  y no podemos omitirlo porque  $t$  podría estar próximo a 0 y hacer dicho término muy grande. Al incluirlo se obtiene:

$$(1.32) \quad -\Re\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) < \Re\left(\frac{1}{s-1}\right) + c_5 \log(t+2).$$

Luego, si  $\mathcal{L}_q(t) = \log(q(|t|+2))$ :

$$(1.33) \quad -\Re\left(\frac{L'(\sigma+2it, \chi^2)}{L(\sigma+2it, \chi^2)}\right) < \Re\left(\frac{1}{\sigma-1+2it}\right) + c_6 \mathcal{L}_q(t).$$

Así, al tomar  $t = \gamma$ , se tiene  $\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1} + \Re\left(\frac{1}{\sigma-1+2it}\right) + c_7 \mathcal{L}_q(\gamma)$ . Si ahora consideramos  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$  y postulamos  $\gamma \geq \frac{\delta}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$ , obtenemos  $\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3\mathcal{L}_q(\gamma)}{\delta} + \frac{\mathcal{L}_q(\gamma)}{5\delta} + c_7 \mathcal{L}_q(\gamma)$ , que implica que  $\beta < 1 - \frac{4-5c_7\delta}{16+5c_7\delta} \frac{\delta}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$ . Consecuentemente, si  $\delta$  es suficientemente pequeño con respecto a  $c_7$ , obtenemos una desigualdad del tipo que queremos pero sujeta a la condición  $\gamma \geq \frac{\delta}{\mathcal{L}_q(\gamma)}$ . Esta condición se cumple trivialmente si  $\gamma \geq \frac{\delta}{\log q}$ . Por tanto, si a eso le añadimos que podemos omitir la condición de carácter primitivo al igual que en la observación 1.19, hemos obtenido el siguiente teorema:

**Teorema 1.21.** [9] *Existe una constante positiva y absoluta  $c_8$  tal que si  $0 < \delta < c_8$ ,  $\chi$  es un carácter real no principal módulo  $q$  y  $\rho = \beta + i\gamma$  es un cero de  $L(s, \chi)$  tal que  $|\gamma| \geq \frac{\delta}{\log q}$ , entonces:*

$$(1.34) \quad \beta < 1 - \frac{\delta}{5\mathcal{L}_q(\gamma)}.$$

Finalmente, nos falta considerar el caso de los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  con  $\chi$  real no principal y  $|\gamma| < \frac{\delta}{\log q}$  con  $\delta > 0$  fija. Veamos que a lo sumo hay un cero en  $\sigma > 1 - \frac{\delta'}{\log q}$  para una constante  $\delta' > 0$  adecuada y que, si hay uno, entonces es real. La desigualdad (1.27) con  $s = \sigma > 1$  puede ser escrita como  $-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_{10} \log q - \sum_{\rho} \frac{1}{\sigma-\rho}$ , donde el sumatorio es real porque los ceros ocurren en pares conjugados. Nótese que para usar dicha fórmula hemos usado implícitamente que el carácter es primitivo. Ahora sí, pasemos a demostrar la afirmación. Si hay dos ceros  $\beta \pm i\gamma$  con  $\gamma \neq 0$ , entonces considerando (1.27) y omitiendo todos los términos de la suma que no correspondan a estos ceros deberíamos tener:

$$(1.35) \quad -\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < c_9 \log q - \frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2}.$$

Además, para el lado izquierdo tenemos la cota:

$$(1.36) \quad -\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-\sigma} \geq -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} = \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} > -\frac{1}{\sigma-1}.$$

Combinando (1.35) y (1.36), obtenemos:

$$(1.37) \quad -\frac{1}{\sigma-1} < c_{10} \log q - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2 + \gamma^2}.$$

Ahora tomamos  $\sigma = 1 + \frac{2\delta}{\log q}$ , lo cual implica que  $|\gamma| < \frac{\delta}{\log q} = \frac{1}{2}(\sigma-1) < \frac{1}{2}(\sigma-\beta)$ . Por tanto, la cota de (1.37) queda como sigue:

$$-\frac{1}{\sigma-1} < c_{10} \log q - \frac{8}{5(\sigma-\beta)}.$$

Luego si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño en relación con  $c_{10}$ , obtenemos  $\beta < 1 - \frac{\delta}{\log q}$ . El argumento es igual si en vez de dos ceros conjugados hay dos ceros reales o un cero doble real. Una vez se tiene esto, que el cero es real se sigue del hecho de que si hubiese un cero no real, entonces también lo sería su conjugado y habría dos ceros conjugados. Por tanto:

**Teorema 1.22.** [9] *Existe una constante absoluta y positiva  $c_{10}$  tal que si  $0 < \delta < c_{10}$  y  $\chi$  es un carácter real no principal, el único cero posible de  $L(s, \chi)$  satisfaciendo:*

$$(1.38) \quad |\gamma| < \frac{\delta}{\log q}, \quad y \quad \beta > 1 - \frac{\delta}{\log q},$$

*es un cero simple real. Estos son los posibles ceros excepcionales mencionados en el cálculo de  $B(\chi)$  en (1.11).*

Vamos a agrupar todos los casos posibles de las regiones libres de ceros de las funciones  $L(s, \chi)$  para tenerlos en un único teorema que poder mencionar posteriormente. Nótese que si  $|t| \geq 1$ , entonces  $\mathcal{L}_q(t)$  es como  $\log q|t|$ , y si  $|t| < 1$ , es como  $\log q$ .

**Teorema 1.23.** *Existe una constante positiva y absoluta  $C$  con la siguiente propiedad. Si  $\chi$  es un carácter complejo módulo  $q$ , entonces  $L(s, \chi)$  no tiene ceros en la región definida por:*

$$(1.39) \quad \sigma \geq 1 - \frac{C}{\log(q(|t|+2))}.$$

*Por otro lado, si  $\chi$  es real no principal, el único cero posible de  $L(s, \chi)$  en esta región es un cero real y simple.*

**Observación 1.24.** Sea  $\chi$  carácter de módulo  $q$ , una propiedad interesante y fundamental de las funciones  $L(s, \chi)$  de Dirichlet es que, si  $\gamma_\chi$  denota la parte imaginaria de los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  entonces, como probó Siegel en [49] de manera incondicional, se tiene que:

$$(1.40) \quad \gamma_{\chi, n+1} - \gamma_{\chi, n} \leq \frac{\pi + o(1)}{\log \log \log q}, \quad q \rightarrow \infty,$$

para cualquier  $n$  fijado. En particular, se sigue que:

$$(1.41) \quad \min_{\gamma_\chi} |\gamma_\chi| \leq \left(\frac{\pi}{2} + o(1)\right) \frac{1}{\log \log \log q}.$$

Por tanto, el primer cero de  $L(s, \chi)$  está arbitrariamente próximo al eje real a medida que  $q \rightarrow \infty$ . De hecho, bajo la hipótesis de Riemann generalizada se tiene que:

$$(1.42) \quad \gamma_{\chi, n+1} - \gamma_{\chi, n} \ll \frac{1}{\log \log q}.$$

En contraste con este resultado, se tiene que si  $\gamma$  denota la parte imaginaria de los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  entonces, Littlewood probó en 1924 [37] que existe una constante  $A > 0$  (él también probó que  $A = 32$  es válida) tal que para todo  $n$  suficientemente grande se tiene que:

$$(1.43) \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \frac{A}{\log \log \log \gamma_n}.$$

Esto se comprenderá mejor cuando demos los teoremas relativos a los números  $N(T)$  y  $N(T, \chi)$  pues todas estas cotas dependen de mejorar el error en dichos teoremas.

Para ilustrar el resultado de Siegel, hemos usado [50] y hemos obtenido los datos necesarios para poder visualizar esta tendencia decreciente. Si tomamos  $\chi$  el único carácter real y primitivo módulo  $q$  con  $q$  primo de la forma  $4n + 1$ , obtenemos la siguiente gráfica que representa la parte imaginaria del primer cero de  $L(s, \chi)$ :

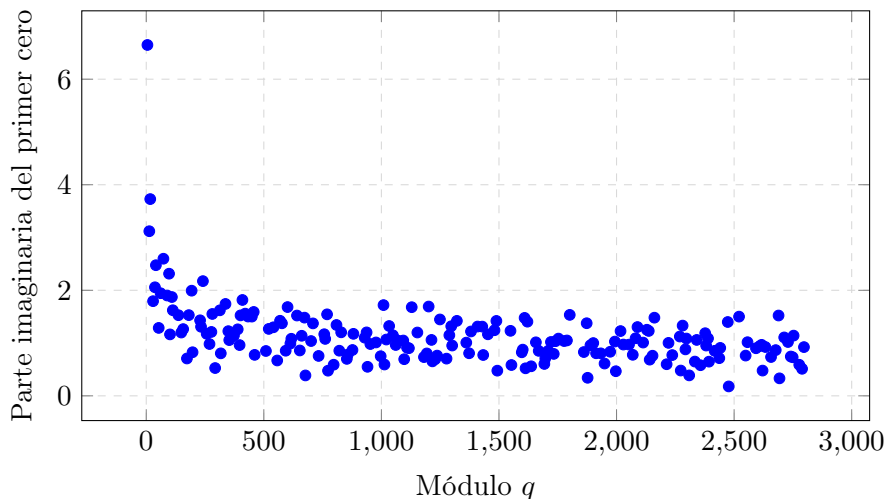


Figura 1.1: Parte imaginaria del primer cero con  $\gamma > 0$  de las funciones  $L(s, \chi)$  con  $\chi$  carácter real y primitivo mód  $q$ .

### 1.3. Algunos resultados de crecimiento para $\zeta(s)$

En esta sección, vamos a ver que, conocer estimaciones asintóticas relativas al orden de  $\zeta(s)$ , se traduce en obtener regiones libres de ceros para esta. Este es un resultado probado por Landau y que nos va a permitir deducir nuevamente la región libre de ceros obtenida en 1.13 de forma muy elegante. Además, este teorema nos da una idea de que nos interesa conocer el orden de  $\zeta(s)$  y de diversas funciones relacionadas con ella, lo cual será el objetivo principal al que dedicaremos la parte final de la sección. Siguiendo el capítulo 3 de [52], comenzamos con varios resultados generales de análisis complejo:

**Teorema 1.25. Desigualdad de Borel-Carathéodory:** Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el disco  $|z| \leq R$ , sea  $0 < r < R$  y sean  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  y  $A(r) = \max_{|z| \leq r} \Re(f(z))$ . Entonces se verifica que:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

*Demostración.* El resultado es fácil si  $f$  es constante. Si  $f$  no es constante, nótese que el teorema del módulo máximo nos dice que  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ . Supongamos que  $f(0) = 0$ . Entonces  $A(R) > A(0) = 0$  (no puede ser 0 porque entonces  $\Re(f(z)) \equiv 0$  y, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann también lo sería  $f$ ). Sea  $\Phi(z) = \frac{f(z)}{2A(R)-f(z)}$ , esta función es holomorfa en  $|z| \leq R$  porque la parte real del denominador nunca es 0 y cumple que  $\Phi(0) = 0$ . Sea  $f(z) = u + iv$ , entonces  $|\Phi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2} \leq 1$  porque  $-2A(R) + u \leq u \leq 2A(R) - u$ , luego  $|2A(R) - u| \geq |u|$ . Por tanto, estamos en las hipótesis del lema de Schwarz y obtenemos que  $|\Phi(z)| \leq \frac{|z|}{R} = \frac{r}{R}$  en  $|z| = r$ . Además,  $|1 + \Phi(z)| \geq |1 - |\Phi(z)|| = 1 - |\Phi(z)| \geq 1 - \frac{r}{R} = \frac{R-r}{R}$ . Por tanto,  $|f(z)| = \left| \frac{2A(R)\Phi(z)}{1+\Phi(z)} \right| \leq \frac{2A(R)r}{R-r}$  y se obtiene el resultado. Si ahora  $f(0)$  no es cero, aplicamos lo anterior a  $f(z) - f(0)$  y obtenemos:

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} (\Re(f(z)) - \Re(f(0))) \leq \frac{2r}{R-r} (A(R) + |f(0)|),$$

y se sigue el resultado aplicando la desigualdad triangular.  $\square$

En particular, si  $A(R) \geq 0$  deducimos que  $M(r) \leq \frac{R+r}{R-r} (A(R) + |f(0)|)$ . Modificando  $f(z)$  por  $-f(z)$  o por  $\pm if(z)$  se obtienen resultados análogos reemplazando  $A(r)$  por  $\min_{|z|=r} \Re(f(z))$ ,  $\max_{|z|=r} \Im(f(z))$  o  $\min_{|z|=r} \Im(f(z))$ .

**Lema 1.26.** Si  $f(z)$  es holomorfa y verifica que  $\left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \right| < e^M$  ambas en el círculo  $|z - z_0| \leq r$ , con  $M > 1$  y  $f(z_0) \neq 0$ . Entonces, se tiene que:

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} \right| < \frac{AM}{r}, \quad \text{en } |z - z_0| \leq \frac{r}{4}.$$

para cierta constante  $A > 0$  y donde  $\rho$  recorre los ceros de  $f(z)$  en  $|\rho - z_0| \leq \frac{r}{2}$ .

*Demostración.* Definimos la función  $g(z) = f(z) \prod_{\rho} (z - \rho)^{-1}$ . Por construcción, esta función es holomorfa en  $|z - z_0| \leq r$  y no tiene ceros en  $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$ . Además, en  $|z - z_0| = r$  se tiene que  $r = |z - z_0| \leq |z - \rho| + |\rho - z_0| \leq |z - \rho| + \frac{r}{2}$ , luego  $|z - \rho| \geq \frac{r}{2} \geq |\rho - z_0|$ . Por tanto, en  $|z - z_0| = r$  se verifica:

$$\left| \frac{g(z)}{g(z_0)} \right| = \left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \prod_{\rho} \frac{z_0 - \rho}{z - \rho} \right| \leq \left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \right| < e^M.$$

Por el principio del módulo máximo, la desigualdad sigue siendo válida en el interior del círculo. Ahora, definimos  $h(z) = \log\left(\frac{g(z)}{g(z_0)}\right)$  que es holomorfa en  $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$  y verifica que  $h(z_0) = 0$  y  $\Re(h(s)) < M$ . A continuación, vamos a aplicar la desigualdad de Borel-Carathéodory a  $l(z) = h(z + z_0)$  tomando, con la notación de dicho lema,  $R = \frac{r}{2}$  y  $r = \frac{3r}{8}$  (en realidad, para lo que lo vamos a usar, nos sirve cualquiera que esté estrictamente entre  $\frac{r}{4}$  y  $\frac{r}{2}$ ). La función  $l(z)$  verifica que  $l(0) = 0$ , es holomorfa en  $|z| \leq \frac{r}{2}$  y  $\Re(l(z)) < M$  en dicho círculo, por tanto, el teorema 1.25 nos da que existe una constante  $A > 0$  tal que  $|l(z)| < AM$  para todo  $|z| \leq \frac{3r}{8}$ . Así, haciendo el cambio de variable  $z \rightarrow z + z_0$  tenemos que  $|h(z)| < AM$  en  $|z - z_0| \leq \frac{3r}{8}$ . En particular, se verifica en  $|z - z_0| \leq \frac{r}{4}$  y, por consiguiente, en dicho círculo también se cumple que:

$$|h'(z)| = \left| (2\pi i)^{-1} \int_{|w-z|=r/4} \frac{h(w)}{(w-z)^2} dw \right| < \frac{4AM}{r},$$

y se tiene el resultado porque  $h'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$  que es exactamente el término izquierdo de la desigualdad del enunciado.  $\square$

**Lema 1.27.** Si  $f(z)$  está en las hipótesis del lema 1.26 y satisface que no se anula en la mitad derecha del círculo  $|z - z_0| \leq r$ , entonces:

$$-\Re\left(\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right) < \frac{AM}{r},$$

mientras que si  $z_0 = \sigma_0 + i\gamma_0$  y  $f(z)$  tiene un cero,  $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ , en el segmento que une  $z_0 - \frac{r}{2}$  y  $z_0$ , entonces:

$$-\Re\left(\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right) < \frac{AM}{r} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0}.$$

*Demostración.* Si llamamos  $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho}$  donde  $|\rho - z_0| \leq r/2$ , entonces, como  $-\Re(h(z)) < |h(z)|$ , aplicando el lema 1.26 con  $z = z_0$  obtenemos que:

$$-\Re\left(\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right) < \frac{AM}{r} - \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{z_0 - \rho}\right).$$

Dado que  $\Re((z_0 - \rho)^{-1}) = \frac{\Re(z_0) - \Re(\rho)}{|z_0 - \rho|^2} \geq 0$  para cada cero  $\rho$  (porque no tiene ceros en la mitad derecha del círculo), omitiendo la suma se concluye el primer resultado. Para el segundo nótese que  $\rho_0$  es uno de los ceros considerados en la suma porque  $|z_0 - \rho_0| < \frac{r}{2}$ . Por tanto, simplemente omitimos nuevamente la suma en  $\rho \neq \rho_0$  y se tiene el resultado.  $\square$

**Lema 1.28.** *Supongamos que  $f(z)$  está nuevamente en las hipótesis del lema 1.26 y que  $\left|\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| < \frac{M}{r}$ . Supongamos también que  $f(z)$  no se anula en la parte  $\sigma \geq \sigma_0 - 2r'$  del círculo  $|z - z_0| \leq r$ , donde  $0 < r' < \frac{r}{4}$ . Entonces se verifica que existe una constante  $A > 0$  tal que:*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{AM}{r}, \quad \text{en } |z - z_0| \leq r'.$$

*Demostración.* El lema 1.26 nos da que:

$$-\Re\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) < \frac{AM}{r} - \sum_{\rho} \Re((z - \rho)^{-1}) < \frac{AM}{r},$$

para todo  $z$  en  $|z - z_0| \leq \frac{r}{4}$ ,  $\sigma \geq \sigma_0 - 2r'$  (donde cada término de la suma anterior es positivo). Para obtener el resultado debemos distinguir dos casos: si  $0 < r' \leq \frac{r}{8}$ , entonces aplicamos el teorema de Borel-Carathéodory a la función  $h(z) = -\frac{f'(z+z_0)}{f(z+z_0)}$  en los círculos  $|z - z_0| \leq 2r'$  y  $|z - z_0| \leq r'$ . En efecto,  $h(z)$  es holomorfa en  $|z| \leq 2r' < r$ ,  $h(0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$  y tenemos la cota para su parte real en  $|z| \leq 2r' \leq \frac{r}{4}$ . Por tanto, el teorema 1.25 junto a las cotas obtenidas anteriormente nos da:

$$|h(z)| < 2A\frac{M}{r} + 3\frac{M}{r}, \quad \text{en } |z| \leq r',$$

y se obtiene el resultado llamando  $A$  a  $2A + 3$ . En cambio, si  $\frac{r}{8} < r' < \frac{r}{4}$ , el círculo de radio  $2r'$  no sirve porque, aunque la holomorfía de  $h(z)$  se tiene, este círculo es más grande que el de radio  $\frac{r}{4}$  y la condición para la estimación de la parte real no es equivalente a estar en el círculo de radio  $2r'$ . Sin embargo, tomando  $R = \frac{r}{4}$  se tiene nuevamente el resultado por el teorema 1.25 aplicado a la misma  $h(z)$ .  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar un teorema general que posteriormente nos encargaremos de particularizar para obtener regiones libres de ceros de  $\zeta(s)$ . Seguiremos la demostración propuesta en el teorema 3.10 de [52].

**Teorema 1.29. Landau:** *Supongamos que  $\zeta(s) = O(e^{\Phi(t)})$  cuando  $t \rightarrow \infty$  en la región  $1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2$  y  $t \geq 0$ , donde  $\Phi(t)$  y  $\frac{1}{\theta(t)}$  son funciones positivas no decrecientes para  $t \geq 0$  tales que  $\theta(t) \leq 1$ ,  $\Phi(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\frac{\Phi(t)}{\theta(t)} = o(e^{\Phi(t)})$ . Entonces existe una constante  $A_1 > 0$  tal que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en la región:*

$$(1.44) \quad \sigma \geq 1 - A_1 \frac{\theta(2t+1)}{\Phi(2t+1)}, \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

*Demostración.* Sea  $\rho = \beta + i\gamma$  un cero de  $\zeta(s)$  en el semiplano superior. Sean  $1 + e^{-\Phi(2\gamma+1)} \leq \sigma_0 \leq 2$ ,  $s_0 = \sigma_0 + i\gamma$ ,  $s'_0 = \sigma_0 + 2i\gamma$ ,  $r = \theta(2\gamma + 1)$ . Entonces, por construcción, ambos círculos  $|s - s_0| \leq r$ ,  $|s - s'_0| \leq r$  están dentro de la región  $\sigma \geq 1 - \theta(t)$ . Esto se debe a que si  $s$  está en el primer círculo (con el segundo círculo es análogo) entonces, por una parte,  $|t - \gamma| \leq \theta(2\gamma + 1) \leq 1$ , luego  $t \leq \gamma + 1 \leq 2\gamma + 1$  y, por otra parte,  $-\sigma \leq -\sigma_0 + \theta(2\gamma + 1)$ , luego  $\sigma \geq 1 + e^{-\Phi(2\gamma+1)} - \theta(2\gamma + 1) > 1 - \theta(t)$  por monotonía. Además, existe una constante positiva  $A$  tal que  $\left|\frac{1}{\zeta(s_0)}\right| < \frac{A}{\sigma_0 - 1} <$

$Ae^{\Phi(2\gamma+1)}$  y análogamente para  $s'_0$ . Por hipótesis, hay una constante positiva  $A_2$  tal que:

$$\left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)} \right| < e^{A_2\Phi(2\gamma+1)}, \quad \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s'_0)} \right| < e^{A_2\Phi(2\gamma+1)},$$

en los círculos  $|s-s_0| \leq r$  y  $|s-s'_0| \leq r$  respectivamente. Nótese que para obtener estas cotas hemos usado que  $\Phi(t)$  tiende a infinito cuando  $t$  tiende a infinito así como la monotonía de  $\Phi(t)$ , pues primero se obtendría una cota de la forma  $Ce^{\Phi(t)} \leq Ce^{\Phi(2\gamma+1)}$  y luego una cota de la forma  $Me^{\Phi(2\gamma+1)} \leq e^{A_2\Phi(2\gamma+1)}$ . Ahora ya estamos en la hipótesis del lema 1.27 con  $z_0 = s'_0$  y  $M = A_2\Phi(2\gamma+1)$  y, al aplicarlo, obtenemos:

$$(1.45) \quad -\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + 2i\gamma)}\right) < \frac{A_3\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}.$$

Por otro lado, si  $\beta > \sigma_0 - \frac{r}{2}$  y tomamos  $z_0 = s_0$  entonces estamos en las hipótesis de la segunda parte del lema 1.27 y obtenemos:

$$(1.46) \quad -\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma_0 + i\gamma)}{\zeta(\sigma_0 + i\gamma)}\right) < \frac{A_3\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}.$$

Además, para  $\sigma_0$  suficientemente cercano a 1 se tiene que:

$$(1.47) \quad -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{a}{\sigma_0 - 1},$$

donde  $a$  se puede tomar todo lo cerca de 1 que queramos eligiendo un  $\sigma_0$  conveniente. Usando (1.45), (1.46) y (1.47) se tiene que, si  $B = \frac{3a}{\sigma_0 - 1} + \frac{5A_3\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}$  entonces  $B - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} \geq 0$  luego,  $1 - \beta \geq 4B^{-1} - (\sigma_0 - 1) = \frac{C}{D}$ , donde:

$$C = 1 - \frac{3a}{4} - \frac{5A_3}{4} \frac{\Phi(2\gamma+1)(\sigma_0 - 1)}{\theta(2\gamma+1)},$$

$$D = \frac{3a}{4(\sigma_0 - 1)} + \frac{5A_3}{4} \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}.$$

Para hacer el numerador positivo tomamos  $a = \frac{5}{4}$  y  $\sigma_0 - 1 = \frac{1}{40A_3} \frac{\Phi(2\gamma+1)}{\theta(2\gamma+1)}$ , lo cual es consistente con como hemos fijado  $\sigma_0$  si tomamos  $\gamma$  suficientemente grande debido a la condición de que  $\frac{\Phi(t)}{\theta(t)} = o(e^{\Phi(t)})$ . Por consiguiente, se sigue que:

$$(1.48) \quad 1 - \beta \geq \frac{\theta(2\gamma+1)}{1240A_3\Phi(2\gamma+1)},$$

como queríamos. Por último, nos falta considerar qué sucede si  $\beta \leq \sigma_0 - \frac{r}{2}$ . En ese caso,  $\sigma_0 - \frac{r}{2} = 1 + \frac{1}{40A_3} \frac{\theta(2\gamma+1)}{\Phi(2\gamma+1)} - \frac{\theta(2\gamma+1)}{2} = 1 - \theta(2\gamma+1) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{40A_3\Phi(2\gamma+1)} \right)$  y el término dentro del paréntesis es positivo para  $\gamma$  suficientemente grande porque  $\Phi(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observación 1.30.** Para ilustrar la importancia de conocer el orden de  $\zeta(s)$  cabe destacar que si sabemos que  $\zeta(it) \ll t^{1/2}$  y  $\zeta(1+it) \ll \log t$  ambas en  $\sigma < 0, t > 0$  (lo cual se demuestra usando la ecuación funcional de  $\zeta(s)$  y la fórmula de Stirling)

entonces gracias a un teorema de análisis complejo que generaliza al teorema del módulo máximo, llamado principio de Phragmén-Lindelöf, [10], se puede demostrar lo que se conoce como la «convexity bound» para  $\zeta(s)$ , [30]. Este resultado nos dice que:

$$(1.49) \quad \zeta(\sigma + it) \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, t \geq t_0 > 0.$$

Para demostrarlo, consideramos la función  $f(s) = \frac{\zeta(s)(s-1)}{(s+2)^{(3-\sigma)/2} \log(s+2)}$ . Esta función es holomorfa en  $0 \leq \sigma \leq 1$  y está acotada en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = 1$  por las estimaciones previas. De este hecho se concluye directamente el resultado aplicando el principio de Phragmén-Lindelöf. Además, como veremos más adelante, en  $1 \leq \sigma \leq 2$   $\zeta(\sigma + it) = O(\log t)$  uniformemente en  $\sigma$ , luego en  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$  se tiene que  $\zeta(s) \ll t$ . En particular, tomando  $\theta = \frac{1}{2}$  y  $\Phi(t) = \log(t+2)$  tenemos una nueva prueba de la región libre de ceros 1.13. De hecho, usando el lema 1.28 y el teorema 1.29 se puede demostrar (teorema 3.11 de [52]) que si tomamos  $\theta(t) = \frac{1}{2}$ ,  $\Phi(t) = \log(t+2)$  y  $\sigma \geq 1 - \frac{A}{\log t}$ , entonces:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t), \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(\log t).$$

En particular, se tiene para  $s = 1 + it$ . Este es un resultado relativo al orden de ciertas funciones relacionadas con  $\zeta(s)$  que demostraremos en esta misma sección sin apelar a este resultado. Durante lo que resta de capítulo, no trataremos más regiones libres de ceros. Sin embargo, en el siguiente capítulo, estudiaremos la región libre de ceros de Vinogradov-Korobov, la mejor obtenida hasta la fecha dada por la cota:

$$\sigma > 1 - \frac{c}{(\log t)^{2/3} (\log \log t)^{1/3}}, \quad t \geq t_0,$$

donde  $c$  es una constante absoluta.

A continuación, pasamos ya a estudiar el comportamiento asintótico de  $\zeta(s)$ . Para ello, siguiendo el lema 1.2 y el teorema 1.8 de [29], vamos a ver que, a pesar de que  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-it}$  no converge, sus sumas parciales aproximan a  $\zeta(1+it)$  salvo por un término de corrección.

**Lema 1.31.** *Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo  $[a, b]$  con valores reales y tal que  $f'(x)$  es continua y monótona en  $[a, b]$ . Además, supongamos que  $|f'(x)| \leq \delta < 1$ . Entonces:*

$$(1.50) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x)) dx + O((1-\delta)^{-1}).$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $f'(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , porque de lo contrario simplemente tomamos conjugados en la suma de la izquierda. Sea  $\phi_n(x) = e(f(n+x))$  con  $a < n \leq b-1$  y  $0 < x < 1$ . Extendemos la anterior definición a toda la recta real de forma 1-periódica definiendo  $\phi_n(0) = \phi_n(1) = \frac{1}{2}(e(f(n)) + e(f(n+1)))$ . Por tanto, aplicando el criterio de Dini (que se puede aplicar porque

$\phi_n(x)$  tiene derivadas laterales en  $x$  para todo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\phi_n(x)$  se puede expandir punto a punto en serie de Fourier de la siguiente forma:

$$\phi_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e(kx).$$

Al calcular los coeficientes se tiene que  $a_0(n) = \int_0^1 e(f(n+x))dx$  y para  $k \neq 0$ , la integración por partes nos da que:

$$a_k(n) = -\frac{e(f(n+x))e(-kx)}{2k\pi i} \Big|_0^1 + k^{-1} \int_0^1 f'(n+x)e(f(n+x)-kx)dx.$$

Por tanto, tomando  $x = 1$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e(f(n)) + e(f(n+1))) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(n) = \\ &= \int_0^1 e(f(x))dx + \sum_{k \neq 0} k^{-1} \int_0^1 f'(n+x)e(f(n+x)-kx)dx = \\ &= \int_n^{n+1} e(f(x))dx + \sum_{k \neq 0} k^{-1} \int_n^{n+1} f'(x)e(f(x)-kx)dx. \end{aligned}$$

Nótese que el término de frontera en los  $a_k$  con  $k \neq 0$  ha desaparecido porque  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \frac{1}{k} = 0$ . Sumando sobre los  $a < n \leq b-1$ , se tiene que:

$$(1.51) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))dx + \sum_{k \neq 0} k^{-1} I_k + O(1),$$

donde  $I_k = \int_{[a]+1}^{[b]} f'(x)e(f(x)-kx)dx = (2\pi i)^{-1} \int_{[a]+1}^{[b]} \frac{f'(x)}{f'(x)-k} \frac{d}{dx}(e(f(x)-kx))dx$ . Obsérvese que el término  $O(1)$  se ha obtenido de acotar la integral  $\int_{[a]+1}^{[b]} e(f(x))dx$  por la integral en todo  $[a, b]$ . También se obtiene un término constante en el lado izquierdo pues  $\sum_{a < n \leq b-1} \frac{1}{2}(e(f(n)) + e(f(n+1))) = \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) - \frac{1}{2}e(f([a]+1)) - \frac{1}{2}e(f([b]))$ . Ahora, recordemos que el segundo teorema del valor medio para integrales nos dice que existe un  $\xi$  en  $[[a]+1, [b]]$  tal que:

$$\int_{[a]+1}^{[b]} u(x)v(x)dx = u([a]+1) \int_{[a]+1}^{\xi} v(x)dx + u([b]) \int_{\xi}^{[b]} v(x)dx,$$

si  $u, v$  son Riemann integrables en dicho intervalo y  $u$  es monótona. La idea es aplicar lo anterior con  $u(x) = \frac{f'(x)}{f'(x)-k}$  y  $v(x) = \frac{d}{dx}(e(f(x)-kx))$ . Si  $k = 1$ , tenemos que  $|f'(x)| < 1$ ,  $|f'(x) - 1| = 1 - f'(x) \geq 1 - \delta$  y se tiene que  $I_1 \ll (1 - \delta)^{-1}$ . Si  $k \neq 1$  entonces  $|f'(x) - k| \geq |k| - f'(x) \geq |k| - \delta$  y se tiene que  $I_k \ll (|k| - \delta)^{-1}$ . Por consiguiente, se cumple que:

$$\sum_{k \neq 0} k^{-1} I_k \ll (1 - \delta)^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (k(k - \delta))^{-1} \ll (1 - \delta)^{-1},$$

y se sigue el resultado. □

**Teorema 1.32.** Para  $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ ,  $x \geq \frac{|t|}{\pi}$ ,  $s = \sigma + it$ , se tiene que:

$$(1.52) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}),$$

donde la constante implícita en el término  $O$  solo depende de  $\sigma_0$ , luego la cota es uniforme en  $\sigma$ .

*Demostración.* Para  $\Re(s) > 1$  y  $N \geq 2$ , la identidad de Abel nos da que:

$$(1.53) \quad \sum_{n > N} n^{-s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} - s \int_N^\infty A(x)x^{-s-1}dx,$$

donde  $A(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = O(1)$ . Por tanto:

$$(1.54) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} - s \int_N^\infty A(x)x^{-s-1}dx.$$

Si tomamos  $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$  para cierto  $\sigma_0$ , entonces tenemos que  $\frac{s}{\sigma} \ll 1 + |t|$ , luego el último término es  $O((1 + |t|)N^{-\sigma})$ . Si ahora consideramos  $u \geq x$  y llamamos  $B(u) := \sum_{x < n \leq u} n^{-it}$  se tiene, por el lema 1.31 con  $f(x) = (2\pi)^{-1}|t|\log x$ ,  $x \geq \frac{|t|}{\pi}$  y  $\delta = \frac{1}{2}$ :

$$B(u) = \int_x^u y^{-it}dy + O(1) = \frac{u^{1-it} - x^{1-it}}{1-it} + O(1).$$

Aplicando nuevamente la identidad de Abel, tenemos que, para  $x \leq N$ , se verifica:

$$\begin{aligned} \sum_{x < n \leq N} n^{-s} &= \sigma \int_x^N u^{-\sigma-1}B(u)du + B(N)N^{-\sigma} = \\ &= \sigma \int_x^N \frac{u^{-s} - u^{-\sigma-1}x^{1-it}}{1-it}du + O(x^{-\sigma}) + O(xN^{-\sigma}) + \frac{N^{1-\sigma-it}}{1-it} = \\ &= \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta estimación en (1.54) tenemos que, para  $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ :

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}) + O(xN^{-\sigma}) + O(|t|N^{-\sigma}),$$

y se obtiene el resultado haciendo  $N \rightarrow \infty$ . □

**Corolario 1.33.** Sea  $t \geq 2$ . Existe un  $A > 0$  tal que  $|\zeta(\sigma + it)| \leq A \log(|t| + 2)$  para todo  $\sigma \geq 1$ .

Con estos resultados en mente, vamos a aplicarlos a un caso concreto. En particular, vamos a usarlos para calcular una constante explícita  $K$  de manera que  $|\zeta(1+it)| \leq \log t + K$  para todo  $t > 2$ . Para ello, definimos la función  $g(x) = \int_1^x A(t)dt$  siguiendo la notación del teorema 1.32. Dado que  $\int_0^1 A(t)dt = 0$  se tiene que  $g(x)$  es la extensión 1-periódica de  $\frac{1}{2}x(x-1)$ . Además, como  $g(1) = 0$  se sigue que  $g(N) = 0$  para todo entero  $N$ . Por consiguiente, integrando por partes en la expresión obtenida en (1.54) se obtiene que:

$$(1.55) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq N} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} - s(s+1) \int_N^\infty g(x)x^{-s-2}dx.$$

Tomando  $s = 1 + it$  y  $N = [t]$  tenemos que:

$$|\zeta(1+it)| \leq \log(t+1) + \gamma + t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-1} + 2t^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}t^{-2}.$$

Luego para  $t > 2$  se deduce que  $|\zeta(1+it)| \leq \log t + K$  con  $K = \log \frac{3}{2} + \gamma + \frac{7}{8} \approx 1,85768$ . A continuación, incluimos una gráfica ilustrativa de esta desigualdad. Demostremos

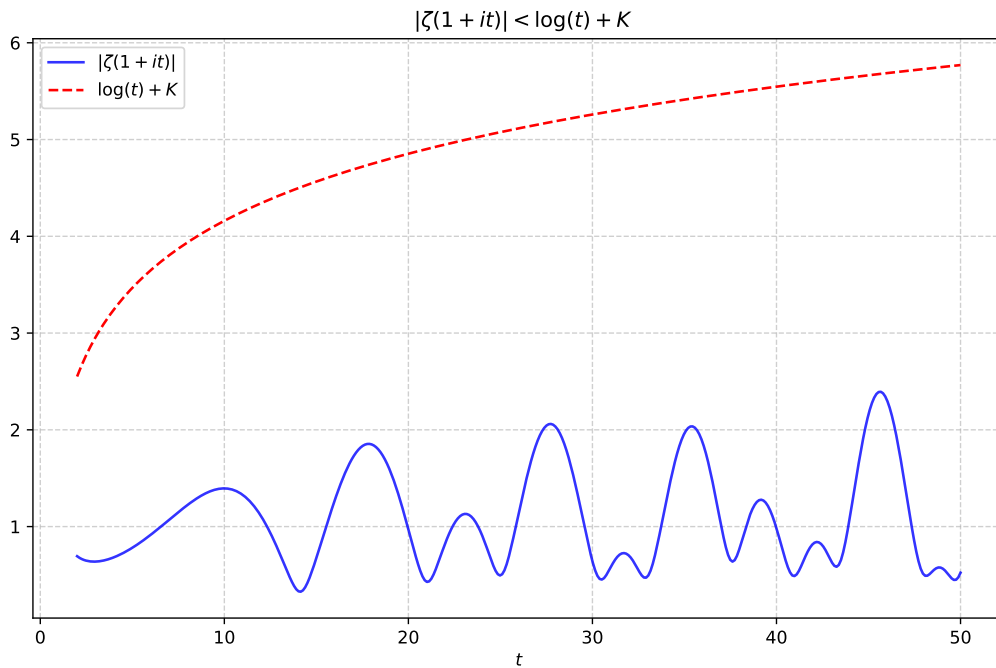


Figura 1.2: Gráfica de  $|\zeta(1+it)|$  y su cota superior  $\log t + K$ .

ahora algunos resultados sobre el orden de distintas funciones relacionadas con  $\zeta(s)$  comenzando por el teorema 6.7 de [41]:

**Teorema 1.34.** Si  $t \geq 2$ ,  $1 - \frac{c}{\log t} < \sigma \leq 2$  y  $s = \sigma + it$ , con  $c$  la constante de la región libre de ceros 1.13, entonces:

$$(1.56) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log t,$$

$$(1.57) \quad |\log(\zeta(s))| \leq \log \log t + O(1),$$

$$(1.58) \quad \frac{1}{\zeta(s)} \ll \log t.$$

En particular se tiene para  $s = 1 + it, t \geq 2$ .

*Demostración.* Si  $\sigma > 1$ , tenemos que:

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Luego el resultado es obvio si  $\sigma \geq 1 + \frac{1}{\log t}$ . En particular, se cumple para  $s_1 = 1 + \frac{1}{\log t} + it$ . Ahora vamos a usar un resultado que aún no hemos probado pero que probaremos durante la demostración de la fórmula del número  $N(T)$ . En realidad, se puede probar combinando la fórmula de Jensen, teorema 1.2, con la desigualdad de Borel-Carathéodory, teorema 1.25. Como para  $s_1$  se cumple (1.56), se tiene que:

$$(1.59) \quad \sum_{|t-\gamma| < 1} \Re\left(\frac{1}{s_1 - \rho}\right) \ll \log t.$$

Por otro lado, si ahora consideramos  $s = \sigma + it$  en la forma del enunciado, aplicamos (1.17) y restamos  $\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)}$  obtenemos:

$$(1.60) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} = \sum_{|t-\gamma| < 1} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{s_1 - \rho} \right) + O(\log t).$$

Además,  $|s - \rho| \asymp |s_1 - \rho|$  para todo cero  $\rho$  en la suma, es decir,  $|s - \rho| \ll |s_1 - \rho| \ll |s - \rho|$ , lo cual es cierto porque  $|s_1 - s| \ll (\log t)^{-1}$  y  $\Re(s_1 - \rho) = |s_1 - \rho| \geq (\log t)^{-1}$ . Por tanto, utilizando estas estimaciones se cumple que:

$$\left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{s_1 - \rho} \right) \ll \frac{1}{|s_1 - \rho|^2 \log t} \ll \frac{\Re(s_1 - \rho)}{|s_1 - \rho|^2} = \Re\left(\frac{1}{s_1 - \rho}\right).$$

Combinando esto último con (1.59) y (1.60), obtenemos (1.56). Para ver (1.57), seguimos el mismo método que para la anterior estimación. Si  $\sigma > 1$  se tiene que:

$$(1.61) \quad |\log(\zeta(s))| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)} n^{-\sigma} = \log(\zeta(\sigma)).$$

Al igual que antes, si  $\sigma \geq 1 + \frac{1}{\log t}$  el resultado se tiene trivialmente. En particular, se tiene para  $s_1 = 1 + \frac{1}{\log t} + it$ . Por otro lado,

$$(1.62) \quad \log(\zeta(s)) - \log(\zeta(s_1)) = \int_{s_1}^s \frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} dw,$$

donde el camino es el segmento que une  $s_1$  con  $s$ . De este término, obtenemos el  $O(1)$  utilizando que  $|s_1 - s| \ll (\log t)^{-1}$  y (1.56). Por tanto, usando las cotas obtenidas en (1.61) y en (1.62) se tiene el resultado. Finalmente,  $\log\left(\frac{1}{\zeta(s)}\right) = -\Re(\log(\zeta(s))) \leq |\log(\zeta(s))| \leq \log(\log t) + O(1)$  y se obtiene lo que queremos.  $\square$

A continuación, vamos a ver un resultado sorprendente para el que vamos a seguir el ejercicio 6.1.1.7 de [41]. Pareciera que, con lo que sabemos gracias al corolario 1.33 y el teorema 1.34,  $\left| \frac{\zeta(\sigma+i(t+1))}{\zeta(\sigma+it)} \right| \ll \log^2 t$  para  $\sigma > 1$  y  $t > 2$ . Sin embargo, este producto se puede acotar de mejor manera que el obtenido mediante el producto de las cotas de sus respectivos términos, como muestra el siguiente teorema:

**Teorema 1.35.** *Si  $\sigma > 1$ , tenemos la siguiente estimación:*

$$(1.63) \quad (\sigma - 1)^{\frac{4}{\pi}} \ll \left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| \ll (\sigma - 1)^{-\frac{4}{\pi}},$$

uniformemente en  $t$ . Además, uniformemente en  $t \geq 2$  se verifica que:

$$(1.64) \quad (\log t)^{-\frac{4}{\pi}} \ll \left| \frac{\zeta(1 + i(t+1))}{\zeta(1 + it)} \right| \ll (\log t)^{\frac{4}{\pi}}.$$

Antes de pasar con la prueba de este teorema, demostremos un par de proposiciones que necesitamos para nuestro cometido.

**Proposición 1.36.** *Si  $\sigma > 1$  entonces se verifica:*

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq \exp \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma} \log n} \left| \sin \left( \frac{\log n}{2} \right) \right| \right),$$

uniformemente para todo  $t$  real.

*Demostración.* Si  $\sigma > 1$ , entonces  $\log(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s}$ . Por tanto,  $\Re(\log(\zeta(\sigma + it))) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-\sigma} \cos(t \log n)$ . Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| &= \Re(\log(\zeta(\sigma + i(t+1)))) - \Re(\log(\zeta(\sigma + it))) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma} \log n} (\cos((t+1) \log n) - \cos(t \log n)). \end{aligned}$$

Para concluir, denotamos por  $\theta = (t+1) \log n$  y  $\phi = t \log n$ . Se cumple que  $\cos(\theta) - \cos(\phi) = -2 \sin \left( \frac{\theta+\phi}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta-\phi}{2} \right) \leq 2 \left| \sin \left( \frac{\log n}{2} \right) \right|$ .  $\square$

Sea ahora  $f(\theta) = |\sin(\pi\theta)|$ . Para  $k$  entero se tiene que  $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(\theta) e(-k\theta) d\theta = \frac{-2}{\pi(4k^2-1)}$ . Dado que  $f(\theta)$  es una función 1-periódica, continua y  $C^1$  a trozos, existen las derivadas laterales en cada punto y el criterio de Dini nos garantiza la convergencia puntual de la serie de Fourier a la función. Es decir, tenemos que  $f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e(k\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos(2\pi k\theta)$  porque  $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$  por ser la función par. Con esta notación, veamos que:

**Proposición 1.37.** *Sea  $1 < \sigma \leq 2$ , entonces:*

$$\left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq \prod_{k=-\infty}^{\infty} |\zeta(\sigma + ik)|^{2\hat{f}(k)},$$

uniformemente para todo  $t$  real.

*Demostración.* Siguiendo la notación previa al enunciado, tomamos  $\theta = \frac{\log n}{2\pi}$  y aplicando las propiedades que ya hemos comentado de  $f(\theta)$  y la proposición 1.36 tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| &\leq \exp \left( 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n} \cos(k \log n) \hat{f}(k) \right) = \\ &= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n} \cos(k \log n) \right)^{2\hat{f}(k)} = \prod_{k=-\infty}^{\infty} |\zeta(\sigma + ik)|^{2\hat{f}(k)}. \end{aligned}$$

Es importante destacar que el intercambio de sumas en la primera desigualdad es válido porque la serie combinada converge absolutamente ya que lo hace la serie de los  $\hat{f}(k)$  y la de los  $a_n = \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n}$ . Asimismo, la convergencia de la serie dentro de la exponencial nos permite concluir la primera igualdad, pues el producto converge a la exponencial de la suma.  $\square$

Pasemos ya a demostrar el teorema 1.35:

*Demostración.* En primer lugar, nótese que, una vez tenemos demostradas las cotas superiores, obtener las cotas inferiores es sencillo; basta con hacer el cambio  $t \rightarrow -(t+1)$  y aplicar las estimaciones superiores. En efecto, se tiene que  $\left| \frac{\zeta(\sigma - it)}{\zeta(\sigma - i(t+1))} \right| = \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + i(t+1))} \right|$  que es el inverso de lo que teníamos antes. Por tanto, es suficiente con probar las cotas superiores. Sea  $F(\sigma) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} |\zeta(\sigma + ik)|^{2\hat{f}(k)}$ . Tenemos que:

$$\log(F(\sigma)) = 2\hat{f}(0) \log(\zeta(\sigma)) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \log(|\zeta(\sigma + ik)|).$$

Por un lado, por (1.57), la suma en  $k$  es, a partir de un cierto  $k_0$ ,  $\ll \sum_{k \geq k_0} \hat{f}(k) \log(\log k) \ll 1$ . Por tanto,  $\log(F(\sigma)) = \frac{4}{\pi} \log(\zeta(\sigma)) + O(1)$  y se tiene que  $F(\sigma) \asymp \zeta(\sigma)^{\frac{4}{\pi}}$ . A su vez, como  $\zeta(s)$  no se anula en  $\sigma > 1$  y  $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$  es entera, se deduce que  $(\sigma-1)\zeta(\sigma) \asymp 1$  para  $1 < \sigma \leq 2$  y se obtiene (1.63) sin más que notar que, en realidad, en la demostración de las proposiciones anteriores hemos probado que:

$$\left| \log \left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| \right| \leq \log F(\sigma), \quad \text{para } 1 < \sigma \leq 2 \text{ y uniformemente en } t,$$

lo cual nos da que  $F(\sigma)^{-1} \leq \left| \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq F(\sigma)$  para  $1 < \sigma \leq 2$  y uniformemente en  $t$ . Para ver (1.64), tomamos  $\sigma = 1 + \frac{\varepsilon}{\log t}$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño en (1.63). Para  $t \geq 2$ , usando (1.56), se verifica que:

$$\frac{\zeta(\sigma + it)}{\zeta(1 + it)} = \exp \left( \int_1^\sigma \frac{\zeta'(x + it)}{\zeta(x + it)} dx \right) \quad \text{y} \quad \int_1^\sigma \frac{\zeta'(x + it)}{\zeta(x + it)} dx \ll (\sigma - 1) \log t \ll \varepsilon,$$

y se sigue que  $\frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} \asymp \frac{\zeta(1 + i(t+1))}{\zeta(1 + it)}$  pues se cumple que:

$$\frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(\sigma + it)} = \frac{\zeta(\sigma + i(t+1))}{\zeta(1 + i(t+1))} \frac{\zeta(1 + it)}{\zeta(\sigma + it)} \frac{\zeta(1 + i(t+1))}{\zeta(1 + it)} = e^{O(\varepsilon)} \frac{\zeta(1 + i(t+1))}{\zeta(1 + it)}.$$

$\square$

## 1.4. Los números $N(T)$ y $N(T, \chi)$

**Definición 1.38.** Llamamos  $N(T)$  al número de ceros, contados de acuerdo a su multiplicidad, de  $\zeta(s)$  en el rectángulo  $0 < \sigma < 1$ ,  $0 < t < T$ . Como vamos a tomar  $T$  suficientemente grande, podemos suponer que no coincide con la ordenada de ningún cero no trivial.

**Teorema 1.39.** [29]

$$(1.65) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D}$  el rectángulo de vértices  $2 \pm iT$ ,  $-1 \pm iT$  orientado positivamente. Entonces, por el principio del argumento:

$$(1.66) \quad N(T) = (4\pi)^{-1} \Im \left( \int_{\mathcal{D}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right).$$

Si llamamos  $\eta(s) = \frac{1}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ , entonces  $\xi(s) = s(s-1)\eta(s)$  y se tiene que  $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}$ , así como  $\eta(s) = \eta(1-s)$  y  $\eta(s) = \overline{\eta(\bar{s})}$  donde sea holomorfa. Por las simetrías que cumple  $\eta$ , se tiene que  $\Im \left( \int_{\mathcal{D}} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds \right) = 4\Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds \right)$ , donde  $\mathcal{L}$  consiste en los segmentos  $[2, 2+iT]$  y  $[2+iT, 1/2+iT]$ . En efecto, si denotamos por  $f(s) := \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}$  y llamamos  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  a los caminos orientados positivamente resultantes de considerar los caminos derecho e izquierdo de  $\mathcal{D}$  respectivamente (respecto a  $\sigma = 1/2$ ), se tiene que, como  $f(s) = -f(1-s)$ , entonces  $\int_{\mathcal{D}_2} f(s) ds = \int_{\mathcal{D}_1} -f(1-s) ds = \int_{\mathcal{D}_1} f(s) ds$ , donde hemos hecho el cambio de variable  $s \rightarrow 1-s$  en la primera igualdad. Ahora llamamos  $\mathcal{L}$  al camino explicado anteriormente y  $\mathcal{R}$  a su camino simétrico, en  $\mathcal{D}_1$ , respecto del eje real, ambos orientados positivamente. Dado que recorrer  $\mathcal{R}$  es igual a recorrer el conjugado de  $\mathcal{L}$  en sentido negativo, se tiene que  $I_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} f(s) ds = -\int_{\overline{\mathcal{L}}} f(s) ds$ . Si denotamos por  $\gamma(t)$  al camino  $\mathcal{L}$  y puesto que se verifica que  $f(\bar{s}) = \overline{f(s)}$ , se tiene que  $I_{\mathcal{R}} = -\int_a^b f(\overline{\gamma(t)}) \overline{\gamma'(t)} dt = -\int_a^b \overline{f(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt = -\overline{I_{\mathcal{L}}}$ . Por tanto, de la primera explicación obtenemos que  $\int_{\mathcal{D}} f(s) ds = 2 \int_{\mathcal{D}_1} f(s) ds$ ; y de la segunda, obtenemos que  $\Im(\int_{\mathcal{D}_1} f(s) ds) = 2\Im(\int_{\mathcal{L}} f(s) ds)$ , y así logramos lo que queríamos.

Además, por la fórmula integral de Cauchy,  $\Im \left( \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) ds \right) = 4\pi$ . Por tanto, basta con calcular:

$$\begin{aligned} \Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} ds \right) &= \Im \left( \int_{\mathcal{L}} \left( -\frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds \right) = \\ &= -\frac{1}{2} T \log \pi + \Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma'(s/2)}{2\Gamma(s/2)} ds + \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right). \end{aligned}$$

Por un lado,  $\Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma'(s/2)}{2\Gamma(s/2)} ds \right) = \Im \log(\Gamma(\frac{1}{4} + iT/2))$ . Esto se debe a que en  $\mathcal{L}$ ,  $\Gamma(s/2)$  no tiene ceros y  $\Gamma(s/2)$  del camino está contenido en un dominio que es simplemente conexo y no contiene ceros de  $\Gamma(s/2)$ . Por tanto, como la integral de la derivada logarítmica de una función sin ceros en un camino contenido en un dominio simplemente

conexo es una rama bien definida del logaritmo de dicha función, se tiene el resultado. Por otro lado, la fórmula de Stirling, (1.1), nos proporciona una manera de calcular este último valor asintóticamente:

$$\log \left( \Gamma \left( \frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT \right) \log \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} iT \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT \right) + \frac{1}{2} \log 2\pi + O \left( \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT \right|^{-1} \right),$$

Como los términos constantes no aportan nada a la parte imaginaria, y para  $T$  suficientemente grande tenemos que  $|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT| = \frac{\sqrt{1+4T^2}}{4} \sim \frac{T}{2}$  y  $\arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} iT) = \arctan(2T) \sim \frac{\pi}{2}$ . Se obtiene que:

$$\Im \log \left( \Gamma \left( \frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} T \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + O(T^{-1}).$$

Combinando todas estas estimaciones, tenemos:

$$(1.67) \quad N(T) = 1 - \frac{T}{2\pi} \log \pi + \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + \frac{1}{\pi} \Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) + O(T^{-1}),$$

$$(1.68) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{1}{\pi} \Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) + O(T^{-1}).$$

Así, para probar el teorema nos falta ver que:

$$(1.69) \quad \Im \left( \int_{1/2+iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) = O(\log T),$$

pues para  $[2, 2 + iT]$  se tiene que el camino  $\zeta(2 + it)$  con  $t \in [2, 2 + iT]$  está contenido en un dominio simplemente conexo que no contiene al origen. En efecto, en dicho segmento  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ , luego  $|\zeta(2 + it) - 1| = |\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2-it}| \leq \zeta(2) - 1 < 1$ , luego la integral en  $[2, 2 + iT]$  es  $\Im(\log(\zeta(2 + iT)) - \log(\zeta(2)))$  que está acotada uniformemente en  $T$  porque los valores de  $\zeta$  en ese segmento están acotados por  $\zeta(2)$ , usando (1.12), y lejos de 0. Por tanto,  $\Im \left( \int_{\mathcal{L}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) = O(1) - \Im \left( \int_{1/2+iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right)$ .

Para probar (1.69), necesitamos algunas cotas para  $\frac{\zeta'}{\zeta}$ . Si  $t \geq 2$ ,  $1 \leq \sigma \leq 2$ , recordemos que tenemos (1.17). En esta fórmula, tomemos  $s = 2 + iT$  y, por lo dicho anteriormente,  $\frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)} = O(1)$ . Así, obtenemos que:

$$(1.70) \quad \Re \left( \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right) < A \log T.$$

Si  $\rho = \beta + i\gamma$  es un cero no trivial de  $\zeta(s)$ , entonces ya hemos visto que  $\Re(\rho^{-1}) > 0$  y, en este caso,  $\Re \left( \frac{1}{s-\rho} \right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2}$ , luego (1.70) nos da que:

$$(1.71) \quad \sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Este tipo de argumentos los vamos a usar posteriormente y también para el caso de las funciones  $L(s, \chi)$  así que los dejamos aquí como un ejemplo de referencia para

no volver a repetirlo en los demás. Ahora, nótese que para cada  $\rho$  considerado con  $T < \gamma \leq T + 1$ ,  $\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{2}$ , luego:

$$(1.72) \quad N(T+1) - N(T) \leq 2 \sum_{T < \gamma \leq T+1} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq 2 \sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Esto nos dice que cada banda  $T < t \leq T + 1$  contiene menos de  $C \log T$  ceros de  $\zeta(s)$  para una cierta constante  $C > 0$ . A continuación, usando (1.5) con  $s = \sigma + it$  y  $2 + it$  (donde  $t > 2$  no es una ordenada de un cero no trivial) y restando ambas expresiones obtenemos:

$$(1.73) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right).$$

Notemos que en este resultado hemos aplicado implícitamente la fórmula de Stirling, la cual es válida pues estamos tomando  $t$  suficientemente grande, luego los valores para las que la aplicamos están lejos de la recta real negativa donde la fórmula de Stirling no aplica. Además, si  $-1 \leq \sigma \leq 2$ , entonces para los términos con  $|\gamma - t| \geq 1$  tenemos que  $|(s-\rho)^{-1} - (2+it-\rho)^{-1}| = (2-\sigma)|(s-\rho)(2+it-\rho)|^{-1} \leq 3|\gamma-t|^{-2}$ . Por tanto, por (1.71):

$$\sum_{\rho, |\gamma-t| \geq 1} \left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| \leq 3 \sum_{\rho, |\gamma-t| \geq 1} |\gamma-t|^{-2} \leq 3 \sum_{\rho} \frac{1}{(t-\gamma)^2} = O(\log t).$$

Asimismo, para la parte con  $|\gamma - t| < 1$ , tenemos que  $|2 + it - \rho| \geq 1$  y el número de dichos términos es también  $O(\log t)$  por (1.72), luego hemos obtenido:

$$(1.74) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma| < 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log t), \quad \text{en } -1 \leq \sigma \leq 2.$$

Con este resultado, la prueba de (1.69) es sencilla. Por (1.74):

$$\Im \left( \int_{1/2+iT}^{2+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right) = O(\log T) + \Im \left( \int_{1/2+iT}^{2+iT} \sum_{|T-\gamma| < 1} \frac{ds}{s-\rho} \right) =$$

$$O(\log T) + \Im \left( \sum_{|T-\gamma| < 1} \int_{1/2+iT}^{2+iT} \frac{ds}{s-\rho} \right) = O(\log T) + \Im \left( \sum_{|T-\gamma| < 1} \Delta \arg(s-\rho) \right) = O(\log T).$$

pues  $|\Delta \arg(s-\rho)| \leq \pi$  en  $[1/2 + iT, 2 + iT]$ . En conclusión, se obtiene (1.65).  $\square$

De este resultado se obtiene inmediatamente el siguiente corolario:

**Corolario 1.40.** [9] Si  $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots$  son ordenadas consecutivas de ceros no triviales  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $\zeta(s)$ . Entonces:

$$(1.75) \quad \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Del teorema 1.39 deducimos que  $N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T$ . Por tanto,  $2\pi N(\gamma_n \pm 1) \sim (\gamma_n \pm 1) \log(\gamma_n \pm 1) \sim \gamma_n \log(\gamma_n)$ . Además, tenemos que  $N(\gamma_n - 1) \leq n \leq N(\gamma_n + 1)$ . De aquí se obtiene que  $2\pi n \sim \gamma_n \log(\gamma_n)$ . Por último, nuevamente por el teorema 1.39,  $\log n \sim \log N(\gamma_n) \sim \log(\gamma_n)$  y se obtiene el resultado.  $\square$

Sin embargo, no se sigue que  $\gamma_{n+1} - \gamma_n \rightarrow 0$ , aunque este resultado fue probado por Littlewood en 1924 como ya hemos mencionado en la observación 1.24.

**Definición 1.41.** Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$  y  $N(T, \chi)$  que denota el número de ceros de  $L(s, \chi)$  en el rectángulo  $0 < \sigma < 1$ ,  $|t| < T$ . Nótese que ya no es lícito solo considerar valores de  $t$  en el semiplano superior pues los ceros de las funciones  $L(s, \chi)$  no tienen, en general, simetría respecto al eje real como sí lo tenían los ceros de  $\zeta(s)$ .

**Observación 1.42.** Como ahora  $N(T, \chi)$  depende de dos parámetros,  $T$  y  $q$ , deja de ser conveniente suponer  $T$  arbitrariamente grande y simplemente supondremos  $T \geq 2$ . Además, debemos añadir un término  $\frac{1}{2}$  delante para compensar por doblar el tamaño del rectángulo.

**Teorema 1.43.** [9]

$$(1.76) \quad \frac{1}{2}N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T + \log q).$$

*Demostración.* La prueba sigue la misma línea que la de antes, pero ahora conviene escoger el rectángulo  $\mathcal{D}$  de vértices  $\frac{5}{2} \pm iT$ ,  $-\frac{3}{2} \pm iT$ , para evitar el cero en  $s = -1$  que se tiene cuando  $\chi(-1) = -1$ . Este nuevo rectángulo contiene un cero trivial de  $L(s, \chi)$ , o bien  $s = 0$  o bien  $s = -1$ . Por tanto:

$$(1.77) \quad 2\pi(N(T, \chi) + 1) = \Im \left( \int_{\mathcal{D}} \frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} ds \right) = \Delta_{\mathcal{D}} \arg \xi(s, \chi).$$

La contribución en el lado izquierdo del borde (respecto a  $\sigma = \frac{1}{2}$ ) es igual que la del lado derecho. En efecto, como  $\overline{\xi(s, \chi)} = \xi(\bar{s}, \bar{\chi})$ , se tiene que  $\overline{\xi(1 - \bar{s}, \bar{\chi})} = \xi(1 - s, \chi) = C\xi(s, \chi)$ , luego  $\arg \xi(s, \chi) = \arg \xi(1 - \bar{s}) + c$ , donde  $c$  es una constante independiente de  $s$ . Por tanto:

$$2\pi(N(T, \chi) + 1) = 2\Im \left( \int_{\mathcal{R}} \left( \frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2 + \mathfrak{a}/2)}{\Gamma(s/2 + \mathfrak{a}/2)} + \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) ds \right),$$

donde  $\mathcal{R}$  es el borde de la mitad derecha del rectángulo. En este caso lo hemos demostrado así por simplificar pero también se podría demostrar de la misma manera que lo hicimos para la función  $\eta(s)$  en la prueba del teorema 1.39. Análogamente a lo que obtuvimos para  $\zeta$ , se tiene:

$$(1.78) \quad \Im \left( \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} ds \right) = T \log \frac{q}{\pi},$$

Ahora, aplicando (1.1) para  $w = \frac{5}{2} + iT$  y su conjugado, obtenemos que:

$$\Im(\log \Gamma(w) - \log \Gamma(\bar{w})) = 2\Im(w) \log |w| - 2\Im(w) + O(|w|^{-1}) = T \log \frac{T}{2} - T + O(T^{-1}).$$

Luego, como:

$$\Im \left( \int_{\mathcal{R}} \frac{\Gamma'(s/2 + \mathfrak{a}/2)}{2\Gamma(s/2 + \mathfrak{a}/2)} ds \right) = \Im(\log(\Gamma(w))) - \Im(\log \Gamma(\bar{w})),$$

se tiene que:

$$(1.79) \quad \Im \left( \int_{\mathcal{R}} \frac{\Gamma'(s/2 + \mathfrak{a}/2)}{2\Gamma(s/2 + \mathfrak{a}/2)} ds \right) = T \log \frac{T}{2} - T + O(T^{-1}).$$

Todo ello nos lleva a obtener:

$$(1.80) \quad \frac{1}{2}N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \Im \left( \int_{\mathcal{R}} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) + O(T^{-1}).$$

Nuevamente, se tiene que la integral en el segmento  $[5/2 - iT, 5/2 + iT]$  está acotada porque en dicho segmento es válida la expresión  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$ . Por consiguiente, se tiene que  $|L(5/2 + it, \chi) - 1| = |\sum_{n=2}^{\infty} \chi(n)n^{-5/2-it}| \leq \zeta(5/2) - 1 < \zeta(2) - 1 < 1$ . Por tanto, la integral en ese segmento es  $\Im(\log(L(5/2 + iT, \chi)) - \log(L(5/2 - iT, \chi)))$  que está evaluada en términos lejos de 0 por lo anterior y está uniformemente acotada en  $T$  porque  $\left| \frac{L'(5/2+it, \chi)}{L(5/2+it, \chi)} \right| \leq \frac{\zeta'(5/2)}{\zeta(5/2)}$ , donde hemos usado (1.12), (1.24) y que  $|\chi(n)| = 1$ . Luego basta probar que:

$$(1.81) \quad \Im \left( \int_{1/2+iT}^{5/2+iT} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds \right) = O(\log T + \log q)$$

Nótese que al no tener necesariamente la simetría respecto al eje real, también deberíamos ver que  $\Im \left( \int_{1/2-iT}^{5/2-iT} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds \right) = O(\log T + \log q)$ , pero es todo análogo pues:

$$\int_{1/2-iT}^{5/2-iT} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = \overline{\int_{1/2+iT}^{5/2+iT} \frac{L'(s, \bar{\chi})}{L(s, \bar{\chi})} ds},$$

así que nos reducimos solo al caso (1.81). Denotaremos por  $\mathcal{L}(t) := \log(q(|t| + 2))$ . Recordemos que (1.27) era válido en  $\sigma > 1$  para cualquier carácter primitivo módulo  $q$  y  $t \geq 0$ . Sin embargo, también es cierta para cualquier  $t$  real cambiando  $t$  por  $|t|$ . Por tanto, tomando  $s = 2 + it$  y, dado que  $\frac{L'(2+it, \chi)}{L(2+it, \chi)} = O(1)$ , se obtiene que:

$$(1.82) \quad \Re \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} \right) < A\mathcal{L}(t),$$

Donde  $\rho$  recorre los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$ . En particular, tomando  $t = T \geq 2$ ,  $\Re \left( \frac{1}{s - \rho} \right) \geq \frac{1}{4 + (T - \gamma)^2}$ , luego:

$$(1.83) \quad \sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\mathcal{L}(T)) = O(\log q + \log T).$$

Análogamente a lo hecho para la función  $\zeta$ , de lo anterior se tiene que si  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $T < \gamma \leq T + 1$ , entonces:

$$(1.84) \quad N(T + 1, \chi) - N(T, \chi) = O(\log q + \log T).$$

Esto nos dice que cada banda  $T < t \leq T + 1$  contiene menos de  $C \log qT$  ceros de  $L(s, \chi)$  para una cierta constante  $C > 0$ . A continuación, usando (1.10) con  $s = \sigma + it$  y  $2 + it$  (donde  $t > 0$  no es una ordenada de un cero no trivial) y restando ambas expresiones obtenemos:

$$(1.85) \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O(\mathcal{L}(t)) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right).$$

Considerando ahora  $-\frac{3}{2} \leq \sigma \leq \frac{5}{2}$ , se tiene que para los términos con  $|\gamma - t| \geq 1$  (nótese que aquí  $t$  podría ser negativo y por eso necesitamos incluir  $|t|$  en  $\mathcal{L}(t)$ ), obtenemos  $|(s - \rho)^{-1} - (2 + it - \rho)^{-1}| = |2 - \sigma| |(s - \rho)(2 + it - \rho)|^{-1} \leq \frac{7}{2} |\gamma - t|^{-2}$ , luego:

$$\sum_{|\gamma - t| \geq 1} \left| \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right| \leq \frac{7}{2} \sum_{|\gamma - t| \geq 1} |\gamma - t|^{-2} \leq 7 \sum_{|\gamma - t| \geq 1} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} = O(\mathcal{L}(t)).$$

Asimismo, para la parte con  $|\gamma - t| < 1$ , tenemos que  $|2 + it - \rho| \geq 1$  y el número de dichos términos es  $O(\mathcal{L}(t))$  por (1.84). Por tanto, hemos obtenido que:

$$(1.86) \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{|t - \gamma| < 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\mathcal{L}(t)), \quad \text{en } -\frac{3}{2} \leq \sigma \leq \frac{5}{2}.$$

Con esto se deduce el resultado deseado exactamente igual a lo que hicimos con  $\zeta$ .  $\square$

**Observación 1.44.** Puesto que la fórmula dada en (1.83) es cierta para todo  $t$ , por que ya comentamos que (1.27) es válida para todo  $t$ , se tiene que  $\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} = O(\log q(|t| + 2))$  se cumple para cualquier carácter primitivo  $\chi$  módulo  $q$  y para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . En particular, si tomamos  $q$  suficientemente grande, el teorema 1.43 implica que el número de ceros con  $|t| < T_0$  donde  $T_0$  es una constante absoluta adecuada, es mayor que una constante multiplicada por  $\log q$ . Entonces, al considerar  $t = 0$  en la fórmula anterior, la estimación  $\sum_{\rho} \frac{1}{1 + \gamma^2} = O(\log q)$  es la mejor posible.

## 1.5. La fórmula explícita truncada de $\psi(x)$

El objetivo de esta sección es obtener la fórmula demostrada por Landau para  $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ . La razón principal para estudiar esta función se debe a que  $\psi(x) \sim x$  es equivalente al teorema de los números primos. Por tanto, queremos usar la región libre de ceros de  $\zeta(s)$  antes hallada para obtener información acerca del error en el teorema de los números primos vía el error en  $\psi(x) \sim x$ . Esta función es más manejable que  $\pi(x)$ , aunque tiene saltos cuando  $x$  es una potencia de un primo. Por consiguiente, en lugar de tratar con ella vamos a utilizar una modificación suya, denotada por  $\psi_0(x)$ , que toma el valor  $\psi(x)$  si  $x$  no es una potencia de un primo y  $\psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x)$  si sí lo es. Esta función también tiene saltos pero estos saltos van al punto medio lo cual concuerda con las herramientas típicas del análisis de Fourier y hace su trato más sencillo. Será importante para luego tener en cuenta que  $\psi(x) - \frac{1}{2}\log(x) \leq \psi_0(x) \leq \psi(x)$ , lo cual nos está diciendo que si obtenemos información

acerca del comportamiento asintótico de  $\psi_0(x)$ , también la obtendremos para  $\psi(x)$ . Una de las fórmulas que puso Riemann en su famosa memoria de 1859 es la siguiente:

$$(1.87) \quad \psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}), \quad (x > 1),$$

donde la suma debe ser entendida en su forma simétrica, es decir,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho}$ . Esta fórmula es cierta y fue probada por von Mangoldt en 1895. Sin embargo, a pesar de su belleza, es poco práctica debido a las dificultades para estimar la cola de la serie. Una forma truncada de lo anterior fue probada por Landau y es el teorema que probaremos después. Obsérvese que el valor de  $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$  se calcula combinando (1.5) y (1.6) con el hecho de que sabemos el valor exacto de  $B$ . El último término es igual a  $-\sum_{\omega} \frac{x^{\omega}}{\omega}$  donde  $\omega$  son los ceros triviales de  $\zeta(s)$ . Todo esto nos está dando una idea de que queremos usar el teorema de los residuos. Veamos como estas nociones toman forma en el siguiente teorema, en el que seguiremos la sección 12.2 de [29].

**Teorema 1.45.** *Sea  $\rho = \beta + i\gamma$ , que denota los ceros no triviales de  $\zeta(s)$ , entonces, uniformemente en  $x, T \geq 2$ , tenemos que:*

$$(1.88) \quad \psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(xT^{-1}(\log(xT))^2) + O(\log x).$$

La idea clave de la demostración es probar un fórmula de inversión para series de Dirichlet conocida como la fórmula de Perron. En otras palabras, una fórmula para pasar de una serie de Dirichlet a sumas parciales en sus coeficientes.

**Lema 1.46. Fórmula de Perron:** *Sea  $\delta(y) = 0$  si  $0 < y < 1$ ,  $\delta(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\delta(y) = 1$  si  $y > 1$  e  $I(y, T) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s s^{-1} ds$ . Entonces para  $y, c, T > 0$ , se verifica:*

$$(1.89) \quad |I(y, T) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min(1, T^{-1} |\log y|^{-1}) & \text{si } y \neq 1 \\ cT^{-1} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $0 < y < 1$ . La función  $y^s s^{-1}$  tiende a cero cuando  $\sigma \rightarrow \infty$  uniformemente en  $t$ . Por tanto, por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que:

$$I(y, T) = -(2\pi i)^{-1} \int_{c+iT}^{\infty+iT} y^s s^{-1} ds + (2\pi i)^{-1} \int_{c-iT}^{\infty-iT} y^s s^{-1} ds.$$

Además,

$$\left| \int_{c \pm iT}^{\infty \pm iT} y^s s^{-1} ds \right| \leq T^{-1} \int_c^{\infty} y^{\sigma} d\sigma = y^c T^{-1} |\log y|^{-1}.$$

Luego esto nos da que  $|I(y, T) - \delta(y)| < y^c T^{-1} |\log y|^{-1}$ . Para ver la otra desigualdad, consideramos la circunferencia de centro el origen y radio  $R = \sqrt{c^2 + T^2}$ , que interseca al segmento  $[c - iT, c + iT]$  en los extremos. En esta circunferencia, denotamos por  $\mathcal{C}$  al arco de circunferencia que se queda a la derecha del segmento. Este arco junto con

nuestro segmento nos da un camino cerrado donde el integrando es holomorfo, luego  $I(y, T) = -(2\pi i)^{-1} \int_{\mathcal{C}} y^s s^{-1} ds$ . En este arco,  $|s| = R$  e  $|y^s| \leq y^c$ , luego se obtiene la cota:

$$I(y, T) \leq \frac{1}{2\pi} \left( \pi R \frac{y^c}{R} \right) < y^c.$$

Para el caso  $y > 1$ , se considera la misma circunferencia que antes y se toma como  $\mathcal{C}$  el arco de circunferencia que está a la izquierda de nuestro segmento, donde  $|s| = R$  e  $|y^s| \leq y^c$ . El camino formado al unir  $\mathcal{C}$  con  $[c - iT, c + iT]$  contiene al polo del integrando en  $s = 0$ , lo cual nos da como resultado el residuo:  $\delta(y) = 1$ . Por tanto, obtenemos  $|I(y, T) - 1| < y^c$  como antes. Para la otra desigualdad, se considera el rectángulo formado por  $[-\infty - iT, c - iT]$ ,  $[c - iT, c + iT]$  y  $[c + iT, -\infty + iT]$ , que contiene nuevamente al polo en  $s = 0$  y nos da integral total  $\delta(y) = 1$  por el teorema de los residuos. De esta forma se obtiene que:

$$I(y, T) - 1 = -(2\pi i)^{-1} \int_{-\infty - iT}^{c - iT} y^s s^{-1} ds + (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty + iT}^{c + iT} y^s s^{-1} ds.$$

A su vez:

$$\left| \int_{-\infty \pm iT}^{c \pm iT} y^s s^{-1} ds \right| \leq T^{-1} \int_{-\infty}^c y^\sigma d\sigma = y^c T^{-1} |\log y|^{-1}.$$

Luego:  $|I(y, T) - \delta(y)| < y^c T^{-1} |\log y|^{-1}$ . Finalmente, el caso  $y = 1$  se obtiene de manera directa calculando:

$$I(1, T) = (2\pi)^{-1} \int_{-T}^T \frac{dt}{c + it} = \pi^{-1} \int_0^T \frac{cdt}{c^2 + t^2}.$$

Luego

$$\frac{\pi}{2} - \pi I(1, T) = \int_0^\infty \frac{cdt}{c^2 + t^2} - \int_0^T \frac{cdt}{c^2 + t^2} = \int_T^\infty \frac{cdt}{c^2 + t^2} < \int_T^\infty \frac{cdt}{t^2} = \frac{c}{T}.$$

Nótese que en la primera igualdad de este último cálculo, estamos dejando claro que el lado izquierdo es una cantidad positiva.  $\square$

Pasemos ya a demostrar el teorema 1.45.

*Demostración.* Consideremos la integral:

$$(1.90) \quad J(x, T) = (2\pi i)^{-1} \int_{c - iT}^{c + iT} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds.$$

Recordemos que para  $\sigma > 1$ , se tiene (1.12) y esta serie converge uniformemente luego, en este caso, podemos intercambiar suma e integral en (1.90). En definitiva, tenemos:

$$J(x, T) = (2\pi i)^{-1} \int_{c - iT}^{c + iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) x^s}{n^s} \frac{1}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) I(x/n, T).$$

Para poder tener eso, tomamos  $c > 1$ , en concreto,  $c = 1 + (\log x)^{-1}$ . Este número a primera vista parece extraño, pero nótese que al tomar este  $c$  se tiene que  $x^c = ex$ .

De esta manera,  $x^c$  y  $x$  son comparables y veremos la importancia de esto después. Ahora es cuando conviene usar la función  $\psi_0$  definida al principio. Usando el lema 1.46 veamos que aparece de manera natural la utilidad de esta  $\psi_0(x)$ :

$$\begin{aligned}
 (1.91) \quad |\psi_0(x) - J(x, T)| &= \left| \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{1}{2} \Lambda(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) I(x/n, T) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{n < x} \Lambda(n) |1 - I(x/n, T)| + \Lambda(x) \left| \frac{1}{2} - I(1, T) \right| + \sum_{n > x} \Lambda(n) |I(x/n, T)| < \\
 &< \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq x}}^{\infty} \Lambda(n) (x/n)^c \min(1, T^{-1} |\log(x/n)|^{-1}) + \Lambda(x) c T^{-1}.
 \end{aligned}$$

Para estimar la última serie consideramos primero los términos con  $n \leq \frac{3}{4}x$  o  $n \geq \frac{5}{4}x$ , pues para estos términos  $|\log(x/n)| \gg 1$ . Además, por nuestra elección de  $c$ , ya sabemos que  $x^c = ex$ . Por tanto, la contribución de dichos términos es:

$$\ll x T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-c} = -x T^{-1} \frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} \ll x T^{-1} (c-1)^{-1} = T^{-1} x \log x.$$

Ese término  $x$  aparece precisamente porque  $x^c$  y  $x$  son comparables, si tomásemos  $c$  tal que  $x^c$  fuese mucho mayor que  $x$  nos aparecería un término de error  $x^c T^{-1} \log x$ , que sería mayor que el que tenemos. También se usa esta relación para que  $(c-1)^{-1} = \log x$ , si elegimos  $c$  mucho menor que el valor que tomamos, nuevamente el error sería mayor que teniendo el logaritmo. Por último, nos falta estimar los términos  $n \in I := [\frac{3}{4}x, \frac{5}{4}x]$ . En este rango, se tiene que  $n \asymp x$ , luego  $x/n \ll 1$  y el término  $(x/n)^c$  se puede omitir. Por otro lado, los posibles términos en  $J := [x-2, x+2]$ , que son a lo sumo 5, se acotan trivialmente por  $O(\log x)$ . Finalmente, para los términos en  $I - J$ , por Taylor tenemos que  $\log(x/n) \asymp (x/n - 1) \asymp \frac{|x-n|}{x}$  para  $x/n \in [\frac{4}{5}, \frac{4}{3}]$ , luego se sigue que la suma de los  $n \in I$  está acotada por:

$$\ll \log x + \frac{x \log x}{T} \sum_{n \in I - J} \frac{1}{|x - n|} \ll \log x + x T^{-1} \log^2 x.$$

Además, nótese que el término  $\Lambda(x) c T^{-1} = O(T^{-1} \log x)$ . Por consiguiente, combinando todo tenemos que:

$$(1.92) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = J(x, T) + O(T^{-1} x \log^2 x) + O(\log x).$$

El siguiente paso en la prueba es alargar el segmento vertical de integración en  $J(x, T)$  a un rectángulo de vértices  $c \pm iT$ ,  $-U \pm iT$ , donde  $U$  sea un entero positivo impar suficientemente grande. Si conseguimos eso y  $T \neq \gamma$  para todo cero  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $\zeta(s)$ , entonces, dado que el integrando de  $J(x, T)$  tiene polos en  $s = 1$ ,  $s = \rho$ ,  $s = 0$  y  $s = -2m$  con  $m \geq 1$ , el teorema de los residuos nos dará:

$$(1.93) \quad \psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0 < 2m < U} \frac{x^{-2m}}{-2m} + O(T^{-1} x \log^2 x) + O(\log x) + K(T),$$

con:

$$K(T) = \int_{-U-iT}^{-U+iT} -\frac{\zeta'(s)x^s}{\zeta(s)s} ds + \int_{c-iT}^{-U-iT} -\frac{\zeta'(s)x^s}{\zeta(s)s} ds + \int_{-U+iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)x^s}{\zeta(s)s} ds.$$

Esto se debe a que el residuo de  $s = 0$  es  $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi$  y el residuo en  $s = 1$  es  $x$ . Por otro lado, si  $s = -2m$ ,  $m \geq 1$ , entonces el residuo en  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  es menos el orden del cero, que en este caso es  $-1$ , luego se obtiene residuo  $-\frac{x^{-2m}}{-2m}$  y si  $s = \rho$  es cero no trivial entonces, si tiene orden  $-k$ , obtenemos residuo  $-k\frac{x^\rho}{\rho}$  pero como la fórmula incluye  $|\gamma| \leq T$  y se sabe que los ceros no triviales son simples hasta una cantidad enorme, podemos tomar  $k = 1$ . Nótese que el término  $K(T)$  incluye a la suma de las otras 3 integrales recorridas en sentido negativo, es decir, las integrales en  $[c-iT, -U-iT]$ ,  $[-U-iT, -U+iT]$  y  $[-U+iT, c+iT]$ . Para acotar estas integrales recordemos primero que gracias a (1.72) sabemos que para  $T$  suficientemente grande, el número de ceros  $\rho$  para los cuales  $|\gamma - T| < 1$  es  $O(\log T)$ . Por tanto, las diferencias de ordenadas entre ceros consecutivos en este tramo no pueden ser todas  $o((\log T)^{-1})$ . Por consiguiente, eligiendo  $T'$ , por ejemplo, el punto medio de  $(\gamma_k, \gamma_{k+1})$  donde esas son las ordenadas de los ceros que tienen distancia  $\gg (\log T)^{-1}$ , podemos tomar  $T$  (variando una cantidad acotada por 1 si es necesario) de manera que  $|\gamma - T| \gg (\log T)^{-1}$  para todos los ceros  $\rho$  en ese tramo. Para estimar las integrales que conforman  $K(T)$  necesitamos cotas adecuadas para  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ . Para  $s = \sigma + iT$  y  $-1 \leq \sigma \leq 2$ , (1.74) junto a la elección que acabamos de hacer de  $T$  nos da:

$$(1.94) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho, |\gamma-T| < 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log T) \ll \log^2 T,$$

pues el número de sumandos y el tamaño de cada uno es  $O(\log T)$ . Para obtener cotas con  $\sigma \leq -1$ , apelamos a la ecuación funcional de  $\zeta(s)$  en su siguiente versión antisimétrica:

$$(1.95) \quad \zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos(\pi s/2) \Gamma(s) \zeta(s).$$

Por derivación logarítmica se obtiene:

$$(1.96) \quad -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi - \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi s}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Si  $1 - \sigma \leq -1$ , el lado derecho se mueve en  $\sigma \geq 2$ , donde (1.1) nos da que  $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = O(\log |s|) = O(\log 2|1-s|)$  (porque  $\sigma \geq 2$ ) y el término  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  está acotado. Por otro lado, el segundo término del lado derecho de (1.96) está acotado si  $|s - (2m-1)| \geq 1/2$ , esto es,  $|(1-s) + 2m| \geq 1/2$ . Por tanto:

$$(1.97) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log(2|s|), \quad \text{en } \sigma \leq -1.$$

Esto último en caso de que  $1-s$  no pertenezca a ningún círculo de radio  $\frac{1}{2}$  y centro un cero trivial de  $\zeta(s)$ . Nótese que esto se puede garantizar sin problemas pues hemos

tomado  $-U$  un número impar negativo de manera que esté a distancia  $\geq 1$  de los ceros triviales, luego no toca a los discos anteriores. Además, esta elección se hace también para que el camino no pase por un cero trivial de  $\zeta(s)$ . Ya estamos en disposición de acotar las integrales. Usando (1.94) tenemos una cota en  $[-1 \pm iT, c \pm iT]$  de las integrales que se mueven en  $[-U \pm iT, c \pm iT]$ :

$$(1.98) \quad \ll T^{-1} \log^2 T \int_{-1}^c x^\sigma d\sigma \ll T^{-1} \log^2 T \int_{-\infty}^c x^\sigma d\sigma \ll \frac{x \log^2 T}{T \log x}.$$

Para obtener la cota de las integrales en  $[-U \pm iT, c \pm iT]$ , nos falta obtener una cota en  $[-U \pm iT, -1 \pm iT]$ . Esta se obtiene aplicando (1.97). Sea  $s = -u + iT$  con  $u \in [1, U]$ . Queremos acotar  $I = \left| \int_1^U \frac{\zeta'(-u+iT)}{\zeta(-u+iT)} \frac{x^{-u+iT}}{-u+iT} du \right|$ . Por (1.97), metiendo el valor absoluto dentro, se tiene que:

$$I \ll \int_1^\infty \log(u+T) \frac{x^{-u}}{u+T} du \ll \frac{\log T}{T} \int_1^T x^{-u} du + \int_T^\infty \frac{\log u}{u} x^{-u} du.$$

La primera integral es menor que  $\int_1^\infty x^{-u} du = (x \log x)^{-1}$  y la segunda integral se acota igual observando que  $\frac{\log u}{u} \leq \frac{\log T}{T}$  para  $T$  suficientemente grande por ser la función decreciente. Por tanto, obtenemos la siguiente estimación:

$$(1.99) \quad \ll \frac{\log T}{Tx \log x}.$$

Sin embargo, esta cota es despreciable en comparación con la obtenida en (1.98), que permanece como cota de las integrales en ambos segmentos. Finalmente, para acotar la integral en  $[-U - iT, -U + iT]$  volvemos a usar (1.97) y obtenemos:

$$(1.100) \quad \ll U^{-1} \log 2U \int_{-T}^T x^{-U} dt \ll \frac{T \log U}{U x^U},$$

que tiende a 0 cuando  $U \rightarrow \infty$ . Poniendo estas cotas en (1.93) y haciendo tender  $U \rightarrow \infty$  se obtiene el resultado. Nótese que para todo número real fijado  $A$ , el teorema 1.39 nos da que  $\sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} = \sum_{|\gamma| \leq T+A} \frac{x^\rho}{\rho} + O(xT^{-1} \log T)$ . Por tanto, podemos poner  $|\gamma| \leq T$  en el sumatorio compensando con un  $O(xT^{-1} \log T)$  que es despreciable respecto al error que ya teníamos. Por tanto, no cambia nada incluir o no en la suma al valor  $T$ . A su vez, fijando  $x$ , preservando los términos que hemos omitido en la anterior estimación ( $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$  y  $-\frac{1}{2} \log(1-x^{-2})$ ) y tomando  $T \rightarrow \infty$ , se obtiene la fórmula (1.87) con un término de error  $O(\log x)$ . En realidad, si queremos obtener la fórmula limpia, debemos tener en cuenta que (1.87) se verifica para  $\psi_0(x)$  en  $x > 1$ , que es lo mismo que decirlo para  $\psi(x)$  si  $x$  no es potencia de un primo. Probarlo para  $1 < x < 2$  requiere bastante más precisión. Para  $x \geq 2$ , afinando mejor el error que hemos obtenido en esta demostración se puede probar que se consigue término de error  $xT^{-1} \log^2(xT) + \log(x) \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right)$ , donde  $\langle x \rangle$  es la distancia de  $x$  a la potencia de primo más cercana, no contando el propio  $x$  si él mismo es potencia de primo. Por tanto, haciendo tender  $T \rightarrow \infty$  se obtiene la llamada fórmula explícita para  $x \geq 2$ . Nótese que si  $x$  es entero, entonces  $\langle x \rangle \geq 1$  y el término de error es  $xT^{-1} \log^2(xT)$ .  $\square$

## 1.6. La fórmula explícita truncada de $\psi(x, \chi)$

Siguiendo el estudio de la sección previa, continuamos tratando el análogo al teorema 1.45 pero para funciones  $L(s, \chi)$  con  $\chi$  carácter primitivo. Nuevamente, el estudio de la función  $\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$  junto a lo que ya sabemos sobre la región libre de ceros de  $L(s, \chi)$  nos permitirá obtener el teorema de los números primos en progresiones aritméticas con un error acorde a lo buena que sea nuestra región libre de ceros. Al igual que en la anterior sección, denotamos por  $\psi_0(x, \chi)$  al análogo de la función  $\psi_0(x)$ .

**Observación 1.47.** Pareciera que los argumentos del teorema 1.45 se pueden imitar cambiando  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  por  $\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$ . Sin embargo, en el caso de que  $\chi(-1) = 1$ , recordemos que  $L(s, \chi)$  tiene un cero en  $s = 0$ , luego la función  $-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{x^s}{s}$  tiene un polo doble en  $s = 0$ . Esto antes no sucedía y nos obliga a tener un poco más de precisión con el residuo. En cambio, si  $\chi(-1) = -1$  esta ligera complicación no aparece y todo se puede hacer siguiendo el mismo esquema de prueba del teorema 1.45.

**Observación 1.48.** Si  $\chi(-1) = -1$ , entonces  $L(s, \chi)$  tiene los ceros triviales en los enteros impares negativos. Además, el número  $\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}$  se puede hallar en función de  $B(\chi)$  sustituyendo  $s = 0$  en (1.10). En este caso denotaremos por  $b(\chi)$  a este número. Sea ahora  $\chi(-1) = 1$ . Por un lado, como  $\frac{L'}{L}$  tiene un polo simple en  $s = 0$  de residuo 1, tiene la siguiente serie de Laurent en un entorno del origen:  $\frac{1}{s} + b(\chi) + \dots$ , donde ahora hemos denotado por  $b(\chi)$  al término constante de la serie. De aquí en adelante,  $b(\chi)$  tendrá la definición que le acabamos de dar dependiendo del valor de  $\chi(-1)$ . Además, la serie de Laurent en  $s = 0$  de  $\frac{x^s}{s}$  viene dada por  $\frac{x^s}{s} = \frac{1}{s} + \log x + \dots$ . Por tanto, el residuo en  $s = 0$  de la función  $-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{x^s}{s}$  es  $-(b(\chi) + \log x)$ . De nuevo,  $b(\chi)$  puede ser calculado en términos de  $B(\chi)$  usando (1.10). En definitiva, con esta notación el residuo en  $s = 0$  de  $-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{x^s}{s}$  es  $-b(\chi) - (1 - \mathfrak{a}) \log x$ .

**Teorema 1.49.** [9] Sea  $\chi$  un carácter de Dirichlet módulo  $q$ , entonces, para  $x \geq 2$ , se tiene la siguiente fórmula explícita con error:

$$(1.101) \quad \psi(x, \chi) = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - b(\chi) + O(\log x),$$

donde  $b(\chi)$  es el residuo en  $s = 0$  de  $\frac{L'(s, \chi)}{sL(s, \chi)}$ . Además, tenemos la siguiente fórmula truncada para  $2 \leq T \leq x$ :

$$(1.102) \quad \psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + O(xT^{-1} \log^2(qx)).$$

*Demostración.* Vamos a hacer ambos casos a la vez,  $\chi(-1) = 1$  y  $\chi(-1) = -1$ , usando el número  $\mathfrak{a}$  que usamos para definir  $\xi(s, \chi)$ . Suponemos que  $x, T \geq 2$ . El carácter no juega ningún papel en la acotación en el análogo de (1.91) para el caso de la función  $\psi_0(x, \chi)$  y, de hecho, es necesario incluirlo porque en  $\sigma > 1$ ,  $-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}$  que es lo que aparecerá en nuestro  $J(x, \chi, T)$  siguiendo la notación

usada en la demostración del teorema 1.45. Por tanto, la fórmula dada en (1.92) sigue siendo válida cambiando  $\psi(x)$  por  $\psi(x, \chi)$  y  $J(x, T)$  por  $J(x, \chi, T)$ . Ahora bien, en este punto de la demostración, apelábamos a una estimación hecha en la prueba del teorema 1.45 para modificar  $T$  de una manera que nos convenía. En este caso, usamos (1.84) para verificar que podemos tomar  $T$  de igual manera y obtenemos:

$$(1.103) \quad \frac{L'(\sigma \pm iT, \chi)}{L(\sigma \pm iT, \chi)} = O(\log^2(qT)), \quad \text{en } -1 \leq \sigma \leq 2.$$

Nótese que hemos puesto el rango  $-1 \leq \sigma \leq 2$ , que no es el que usamos en la demostración del teorema 1.43 porque en esa demostración necesitábamos un rango un poco más ancho. En definitiva, este tipo de cotas son ciertas (con la constante implícita uniforme y en  $|t| \geq 2$ ) en cualquier rango de  $\sigma$  que queramos, siempre y cuando esté acotado tanto superior como inferiormente. Por tanto, dado que  $1 < c \leq 2$  (se toma igual que lo escogimos en la demostración para  $\zeta$ ), la contribución de las integrales en  $[-1 \pm iT, c \pm iT]$  es:

$$(1.104) \quad \ll \frac{x \log^2(qT)}{T \log x}.$$

Ahora, consideramos la siguiente forma antisimétrica de la ecuación funcional de  $L(s, \chi)$ :

$$(1.105) \quad L(1-s, \chi) = \varepsilon(\chi) 2^{1-s} \pi^{-s} q^{s-1/2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi(s+\alpha)\right) \Gamma(s) L(s, \bar{\chi}),$$

donde  $\varepsilon(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^\alpha \sqrt{q}}$  que tiene módulo 1. Aplicando derivación logarítmica en (1.105), se obtiene que, análogamente a (1.97), si  $\sigma \leq -1$  y los círculos de radios  $\frac{1}{2}$  y de centros los ceros triviales de  $L(s, \chi)$  quedan excluidos del camino de integración (que lo van a estar tomando  $U$  según convenga, ya sea impar o par positivo suficientemente grande), entonces:

$$(1.106) \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O(\log(q|s|)).$$

Por tanto, gracias a (1.106) tenemos que la contribución de las integrales en los segmentos horizontales que faltan es:

$$(1.107) \quad \ll \frac{\log(qT)}{Tx \log x},$$

que es despreciable en comparación con (1.104). Por último, usando otra vez (1.106) obtenemos que la integral en el segmento vertical  $[-U - iT, -U + iT]$  es:

$$(1.108) \quad \ll \frac{T \log(qU)}{U x^U},$$

que tiende a 0 cuando  $U \rightarrow \infty$ . Combinando todas estas cotas y haciendo tender  $U \rightarrow \infty$  el resultado es:

$$(1.109) \quad \psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha-2m}}{2m-\alpha} + O(xT^{-1} \log^2(qxT)) + O(\log x).$$

Nótese que en  $O(\log x)$  está incluido el término  $-(1 - \mathfrak{a}) \log x$ . A su vez, dado que  $x \geq 2$ , si  $\mathfrak{a} = 0$ , se tiene que  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m} = -\frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) \ll 1$  y, si  $\mathfrak{a} = 1$ , entonces tenemos que  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{1-2m}}{2m-1} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ll 1$ , luego ambas series son absorbidas por el término  $O(\log x)$ . Por ello, si  $x \geq 2$  está fijado, haciendo tender  $T \rightarrow \infty$  se consigue (1.101). Finalmente, calculemos  $b(\chi)$ . Aplicando (1.10) a  $s$  y a  $2$  y restando ambas expresiones obtenemos que:

$$(1.110) \quad \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O(1) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2 + \mathfrak{a}/2)}{\Gamma(s/2 + \mathfrak{a}/2)} + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 - \rho} \right).$$

donde  $O(1)$  es una constante absoluta. Si  $\chi(-1) = -1$ , entonces  $\mathfrak{a} = 1$  y el término de  $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$  es holomorfo en  $s = 0$ . Si  $\chi(-1) = 1$ , entonces  $\mathfrak{a} = 0$  y el término  $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$  tiene un polo simple en  $s = 0$ , donde la expansión en forma de serie de Laurent es de la forma  $s^{-1} + cte + \dots$ . Por tanto, el número  $b(\chi)$  que habíamos definido antes como  $\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}$  si  $\chi(-1) = -1$  y como el término constante de la expansión de  $\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$  en  $s = 0$  si  $\chi(-1) = 1$ , verifica lo siguiente:

$$(1.111) \quad b(\chi) = O(1) - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right).$$

Para los términos con  $|\gamma| \geq 1$ , tenemos que  $|\rho| \geq 1$  y  $|2 - \rho|^2 \geq 1 + \gamma^2$ . Además,  $|\rho|$  es del orden  $|2 - \rho|$  cuando tomamos  $\gamma$  suficientemente grande. Por tanto:

$$(1.112) \quad \sum_{|\gamma| \geq 1} \left| \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right| = 2 \sum_{|\gamma| \geq 1} \frac{1}{|\rho||2 - \rho|} \ll \sum_{\rho} \frac{1}{|2 - \rho|^2} \leq \sum_{\rho} \frac{1}{1 + \gamma^2}.$$

Esta última suma puede ser estimada por  $O(\log q)$  por la observación 1.44 con  $t = 0$ . Para  $\sum_{|\gamma| < 1} (2 - \rho)^{-1}$  se puede hacer la misma estimación pues si  $|\gamma| < 1$  se verifica que  $|2 - \rho| \gg |2 - \rho|^2$ , luego se tiene que esta serie es  $O(\log q)$  también. Se sigue pues que:

$$(1.113) \quad b(\chi) = O(\log q) - \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho}.$$

Por tanto, suponiendo que  $2 \leq T \leq x$ , podemos absorber la suma  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\mathfrak{a}-2m}}{2m-\mathfrak{a}}$  y los términos  $O(\log x)$  y  $O(\log q)$  en el error de (1.109), luego conseguimos reescribir (1.109) como sigue:

$$(1.114) \quad \psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + O(xT^{-1} \log^2(qx)).$$

□

**Observación 1.50.** La razón para separar  $b(\chi)$  en la suma  $\sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho}$  y  $O(\log q)$  es porque, para las funciones  $L(s, \chi)$ , no se sabe si podrían existir ceros reales potencialmente cerca de  $s = 1$  que harían más difícil estimar dicha suma, dado que habría

términos muy grandes. Estos ceros se llaman ceros de Siegel o ceros excepcionales y su existencia es posible, a diferencia de lo que ocurre para la función  $\zeta(s)$ . Por ello, en lo relativo a ceros no triviales de las funciones  $L(s, \chi)$  se suele distinguir entre la parte  $|\gamma| \geq 1$  que es sencilla de acotar y la parte  $|\gamma| < 1$ , próxima a la recta real.

**Observación 1.51.** Para el caso en que  $\chi = \chi_0$  módulo  $q$ , se verifica que  $L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s})$ . Por tanto, se puede usar la fórmula obtenida en el teorema 1.49 y se llega a que, para  $2 \leq T \leq x$ , se verifica que:

$$(1.115) \quad \psi(x, \chi_0) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(xT^{-1} \log^2(qx)).$$

Lo mismo ocurre para  $\chi$  carácter imprimitivo. Usando la relación de  $L(s, \chi)$  con  $L(s, \chi_1)$ , donde  $\chi_1$  es el conductor de  $\chi$ , se obtiene una fórmula ligeramente modificada para  $\psi(x, \chi)$ .

## 1.7. El teorema de los números primos I

Después de todo el trabajo llevado a cabo para obtener regiones libres de ceros de  $\zeta(s)$ , vamos a ver qué relación tienen con el error en el teorema de los números primos. Comenzamos con un teorema que relaciona el error en  $\psi(x) \sim x$  con el error en  $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ .

**Teorema 1.52.** [9] Si  $\psi(x) = x + O(xe^{-C_3\sqrt{\log x}})$  entonces se tiene que  $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(xe^{-C'_3\sqrt{\log x}})$  para cualquier  $C'_3 \leq \frac{C_3}{2}$ .

*Demostración.* Queremos aplicar sumación por partes así que necesitamos tener un sumatorio de algo de clase  $C^1$  multiplicado por la función  $\Lambda(n)$  para que nos salga  $\psi(x)$ . Para ello, consideramos primero la función  $\pi_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$ . Por el lema de Abel tenemos lo siguiente:

$$\pi_1(x) = \int_2^x \frac{\sum_{n \leq t} \Lambda(n)}{t \log^2 t} dt + \frac{\sum_{n \leq x} \Lambda(n)}{\log x} = \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2 t} dt + \frac{\psi(x)}{\log x}.$$

Sustituyendo  $\psi(x) = x + O(xe^{-C_3\sqrt{\log x}})$  e integrando por partes tenemos que  $\int_2^\infty \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^\infty t \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\log t} \right) dt = \text{Li}(x) + \frac{2}{\log 2} - \frac{x}{\log x}$ . Por tanto, el término sin error es  $\pi_1(x) = \text{Li}(x) + \frac{2}{\log 2}$ . Respecto al término de error, tenemos que es:

$$\ll \int_2^x \exp(-C_3\sqrt{\log t}) dt + x \exp(-C_3\sqrt{\log x}).$$

Respecto a la integral, en el rango  $t < x^{1/4}$ , podemos acotar el integrando por 1 y la integral está dominada por  $O(x^{1/4})$ . En el rango  $x^{1/4} \leq t \leq x$ , tenemos que  $(\log t)^{1/2} > \frac{1}{2}(\log x)^{1/2}$ , luego la integral en este tramo es  $O(x \exp(-C_4\sqrt{\log x}))$  donde  $C_4 = \frac{C_3}{2}$ . Así, obtenemos:

$$\pi_1(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-C_4\sqrt{\log x})).$$

Finalmente, nótese que  $\pi_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \leq x} \frac{\log p}{m \log p}$ . Dado  $m = 1$ , la suma interior es simplemente  $\pi(x)$ . Si  $m > 1$ , entonces la suma interior es  $\sum_{p \leq x^{1/m}} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \pi(x^{1/m})$ . Además, por el teorema de los números primos tenemos que  $\pi(x^{1/m}) = O\left(\frac{x^{1/m}}{\log x}\right)$ , luego todos los sumandos con  $m \geq 2$  están dominados por  $O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right)$ . En definitiva, tenemos que:

$$\pi_1(x) - \pi(x) = O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right).$$

Luego como  $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$  entonces  $\pi_1(x) \sim \text{Li}(x)$  si y solo si  $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$  y con el mismo error.  $\square$

A continuación, vamos a usar la región libre de ceros y la fórmula explícita truncada para  $\psi(x)$  para hallar el error de  $\psi(x) \sim x$  y posteriormente nos remitiremos al teorema anterior para obtener el error en el teorema de los números primos. Para estimar  $\psi(x) - x$ , solo nos queda acotar el término  $\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho}$  del teorema 1.45. Con este fin probamos el siguiente lema:

**Lema 1.53.**  $\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \log^2 T$  y  $\sum_{|\gamma| > T} \gamma^{-2} \ll T^{-1} \log T$ .

*Demostración.* Basta con estimar  $\sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma}$ . De hecho, como la función  $\zeta(s)$  no tiene ceros suficientemente próximos a la recta real podemos suponer sin pérdida de generalidad que el rango de sumación es  $1 \leq \gamma \leq T$ . Aplicando integración por partes para la integral de Riemann-Stieltjes se tiene que:

$$\sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} = \int_1^T t^{-1} dN(t) = \frac{N(T)}{T} + \int_1^T \frac{N(t)}{t^2} dt.$$

Por el teorema 1.39, tenemos que  $N(T) \ll T \log T$  y obtenemos que:

$$\sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} \ll \log T + \log T \int_1^T t^{-1} dt \ll \log^2 T.$$

Por otro lado, para obtener el segundo resultado, nuevamente consideraremos solo los términos con  $\gamma > T$ . Dado  $R > T$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{T < \gamma < R} \gamma^{-2} &= \int_T^R t^{-2} dN(t) = R^{-2} N(R) - T^{-2} N(T) + 2 \int_T^R N(t) t^{-3} dt \\ &\ll R^{-1} \log R + \int_T^R t^{-2} \log t dt = T^{-1} \log T + T^{-1} - R^{-1}, \end{aligned}$$

luego haciendo  $R \rightarrow \infty$  se tiene que la suma es  $\ll T^{-1} \log T$ .  $\square$

Por el teorema de la región libre de ceros 1.17, tenemos que:

$$(1.116) \quad |x^\rho| = x^\beta < x \exp(-C_1 \log x / \log T).$$

Aquí la constante  $C_2$  no juega ningún papel asintóticamente así que la podemos omitir. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x$  es un entero (recordemos que en ese caso el error en la fórmula explícita se puede simplificar a  $\ll xT^{-1} \log^2(xT)$ ) y combinando la estimación (1.116) con el lema 1.53 y el teorema 1.45 obtenemos:

$$(1.117) \quad |\psi(x) - x| \ll \frac{x \log^2(xT)}{T} + x(\log^2 T) \exp(-C_1 \log x / \log T),$$

para  $x$  suficientemente grande. Si ahora fijamos  $T$  en función de  $x$  como  $\log^2 T = C_1 \log x$ , entonces  $T^{-1} = \exp(-\sqrt{C_1}(\log x)^{1/2})$  y tenemos que:

$$\ll x(\log x)((\log x) \exp(-\sqrt{C_1}(\log x)^{1/2}) + \exp(-\sqrt{C_1}(\log x)^{1/2})) \ll x \exp(-C_3(\log x)^{1/2}),$$

para cualquier  $C_3$  positivo y menor  $\sqrt{C_1}$ . Nótese que la razón para elegir  $T$  como lo hemos tomado en lugar de  $\log^2(T) = \log x$  es que, si lo hiciésemos con esta última elección, nos saldría un error válido para cualquier  $C_3$  positivo y menor que  $C_1$ , que es más grande que con  $\sqrt{C_1}$  porque  $C_1 < 1$ . Finalmente, por el teorema 1.52, obtenemos que podemos tomar cualquier  $C'_3 < \frac{\sqrt{C_1}}{2}$  en el error del teorema de los números primos. Análogamente a lo hecho anteriormente, si consideramos la región libre de ceros de  $\zeta(s)$  con la constante  $C_1$  óptima y usando nuevamente el teorema 1.52 se obtiene un mejor error en el teorema de los números primos donde se puede tomar  $C'_3 < \frac{\sqrt{0.03764}}{2} \approx 0,097$ .

**Observación 1.54.** Si la hipótesis de Riemann fuese cierta entonces tendríamos que  $|x^\rho| = x^{1/2}$  y haciendo lo mismo que antes llegaríamos a que:

$$|\psi(x) - x| \ll x^{1/2} \log^2 T + xT^{-1} \log^2(xT).$$

Eligiendo  $T = x^{1/2}$  obtenemos que:

$$(1.118) \quad \psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x),$$

y se sigue que:

$$(1.119) \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x).$$

Es precisamente este resultado el que supone la verdadera conexión entre la hipótesis de Riemann y el teorema de los números primos. Un argumento análogo funciona si asumimos que todos los ceros de  $\zeta(s)$  tienen parte real  $\beta \leq \alpha$  con  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , cambiando  $x^{1/2}$  por  $x^\alpha$ . Asimismo, cabe destacar que el término de error de (1.119) sería el mejor posible en cuanto al exponente de  $x$ . En cambio, hay ciertas dudas acerca del logaritmo. Lo mejor que se sabe a este respecto es el teorema de oscilación de Littlewood, [11], que nos dice que  $\log x$  no puede cambiarse por algo que sea  $o((\log x)^{-1} \log \log \log x)$ , es decir, los conocimientos actuales no excluyen que el término  $\log x$  se puede quitar o incluso reemplazar por algo que tienda lentamente a cero.

En relación con lo anterior, pasamos a demostrar un teorema que nos da una equivalencia entre regiones libres de ceros de  $\zeta(s)$  en semiplanos y ciertos errores en  $\psi(x) \sim x$ .

**Teorema 1.55.** [29] Sea  $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$  fijo. Entonces:

$$(1.120) \quad \psi(x) = x + O(x^\theta \log^2 x),$$

si y solo si:

$$(1.121) \quad \zeta(s) \neq 0 \text{ para } \sigma > \theta.$$

*Demostración.* En  $\sigma > 1$  tenemos que  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ . Considerando la suma truncada  $1 \leq n \leq x$  y aplicando el lema de Abel se tiene que:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n)n^{-s} = \psi(x)x^{-s} + s \int_1^x \psi(t)t^{-s-1} dt.$$

Haciendo tender  $x \rightarrow \infty$  vemos que:

$$(1.122) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \psi(x)x^{-s-1} dx.$$

Si ahora ponemos  $\psi(x) = x + R(x)$ , obtenemos:

$$(1.123) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} R(y)y^{-s-1} dy \text{ para } \sigma > 1.$$

Por tanto, si  $R(x) \ll x^\theta \log^2 x$ , la integral define una función holomorfa en  $s$  para  $\sigma > \theta$ , luego  $\zeta(s)$  no puede tener un cero en dicha región. Para ver el recíproco simplemente aplicamos la fórmula explícita truncada con  $T = x^{1-\theta}$  para obtener:

$$\psi(x) = x + O\left(x^\theta \sum_{|\gamma| \leq T} |\gamma|^{-1}\right) + O(xT^{-1} \log^2 x) = x + O(x^\theta \log^2 x).$$

□

Por tanto, si  $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$  para cierto  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , se sigue que todos los ceros de  $\zeta$  verifican que  $\beta \leq \alpha$ . En particular, esto demuestra que la hipótesis de Riemann es equivalente a que:

$$(1.124) \quad \psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x).$$

El resultado anterior ya era conocido desde 1901 por matemáticos como Helge von Koch, sin embargo, una versión refinada de esta equivalencia, demostrada por Lowell Schoenfeld en 1976, es la siguiente:

**Teorema 1.56.** [47] La hipótesis de Riemann es equivalente a que:

$$(1.125) \quad |\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log x, \quad \text{para todo } x \geq 2657.$$

## 1.8. El teorema de los números primos en progresiones aritméticas

En esta sección, el objetivo es aplicar los resultados obtenidos sobre la función  $\psi(x, \chi)$  al teorema de los números primos en progresiones aritméticas. Para ello, queremos obtener estimaciones para:

$$(1.126) \quad \psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n),$$

que nos llevarán a estimaciones para  $\pi(x; q, a)$  que es el número de primos menores o iguales que  $x$  congruentes con  $a$  módulo  $q$ . Si  $(a, q) = 1$  entonces la relación entre  $\psi(x; q, a)$  y  $\psi(x, \chi)$  viene dada por la siguiente fórmula:

$$(1.127) \quad \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $\varphi(q)$  es la función de Euler y la suma es sobre todos los caracteres de módulo  $q$ . Se tiene que:

$$(1.128) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) = \sum_{p|q} \sum_{\substack{k \\ p^k \leq x}} \log p \ll \log(x) \sum_{p|q} \log p \ll (\log x)(\log q),$$

Luego:

$$(1.129) \quad |\psi(x, \chi_0) - \psi(x)| \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) \ll (\log q)(\log x) \ll \log^2(qx).$$

Si tenemos el teorema de los números primos en la forma de la Vallée-Poussin:

$$(1.130) \quad \psi(x) = x + O(x \exp(-C_1(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

entonces:

$$(1.131) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi) + R_1(x, q),$$

donde  $R_1(x, q) \ll \frac{1}{\varphi(q)} (x \exp(-C_1(\log x)^{\frac{1}{2}}) + \log^2(qx))$ . Ahora si tomamos  $\delta < \frac{1}{4}$  en el teorema 1.22 y si  $\chi$  es un carácter real no principal módulo  $q$  (luego  $q \geq 3$ ), entonces  $L(s, \chi)$  no tiene ceros en la región:

$$|\gamma| < 1, \quad \beta > 1 - \frac{\delta}{\log q} > \frac{3}{4},$$

excepto un único posible cero real  $\beta_1$  cerca de 1 llamado cero excepcional. También hay un cero en  $1 - \beta_1$ . Consideremos ahora la fórmula obtenida para  $\psi(x, \chi)$  en caso de que  $2 \leq T \leq x$  dada por el teorema 1.49:

$$(1.132) \quad \psi(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + R_2(x, q, T),$$

con  $R_2(x, q) \ll xT^{-1} \log^2(qx)$ . Si denotamos por  $\sum'$  a la suma en  $\rho$  sin contar los ceros  $\beta_1$  y  $1 - \beta_1$  obtenemos:

$$(1.133) \quad \psi(x, \chi) = - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum'_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} - \frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} - \frac{x^{\beta_1} - 1}{\beta_1} + R_2(x, q, T).$$

El segundo sumatorio puede ser absorbido en el error porque para dichos  $\rho$  se tiene que  $\beta \leq 1 - \frac{\delta}{\log q}$ , luego  $\rho^{-1} = O(\log q)$ . Además, el número de términos es  $O(\log q)$  y se obtiene un  $O(\log^2 q)$ . También podemos omitir el término  $\beta_1^{-1} = O(1)$ . Por último, consideramos la función  $f(t) = x^t$  con derivada  $f'(t) = x^t \log x$ . Observemos que  $\frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} = \frac{f(1-\beta_1) - f(0)}{1 - \beta_1}$  y, aplicando el teorema del valor medio, obtenemos que existe un  $0 < k < 1 - \beta_1$  tal que:

$$\frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} = x^k \log x.$$

Como  $1 - \beta_1 < \frac{1}{4}$ , este último término es menor que  $x^{\frac{1}{4}} \log x$ . Con todo ello, hemos probado la siguiente fórmula, que nos será de gran utilidad posteriormente, para  $\chi$  carácter primitivo no principal y real y  $2 \leq T \leq x$ :

$$(1.134) \quad \psi(x, \chi) = - \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + R_3(x, q, T),$$

con  $R_3(x, q, T) \ll xT^{-1} \log^2(qx) + x^{\frac{1}{4}} \log x$ . Nótese que si  $\chi$  es un carácter primitivo no principal complejo entonces el término  $\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$  no aparece pero la fórmula sin él sigue siendo válida porque el término  $x^{\frac{1}{4}} \log x$  puede ser omitido si  $\beta_1$  no existe. La fórmula también es válida si  $\chi$  es un carácter imprimitivo no principal. En efecto, sea  $\chi \neq \chi_0$  carácter módulo  $q$  y  $\chi_1$  su conductor (carácter primitivo) de módulo  $q_1$  con  $q_1 | q$ ,  $1 < q_1 < q$ . Por ser su conductor, se verifica que  $\chi(n) = \chi_0(n)\chi_1(n)$  para todo  $n$ , donde  $\chi_0$  es el carácter principal módulo  $q$ . Por tanto, si  $(n, q) = 1$  entonces  $\chi(n) = \chi_1(n)$  y  $\chi(n) = 0$  si  $(n, q) > 1$ . Esto junto a (1.128) nos lleva a que:

$$(1.135) \quad |\psi(x, \chi_1) - \psi(x, \chi)| = \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \chi_1(n) \Lambda(n) \right| \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) \ll (\log q)(\log x),$$

que es despreciable en comparación a  $R_3(x, q, T)$ . Nótese que el error en  $\psi(x, \chi_1)$  tal y como lo hemos probado sería con  $q_1$  en lugar de  $q$ , pero como  $q_1 < q$  se tiene que la fórmula es válida con  $R_3(x, q, T)$ . Otro punto que requiere consideración es que, tal y como hemos definido los ceros excepcionales, estos dependen del módulo del carácter cuando es primitivo. Si tenemos la misma definición para cuando el carácter es imprimitivo entonces, como  $q_1 < q$ , si  $\beta_1$  es un cero excepcional de  $L(s, \chi)$  lo es de  $L(s, \chi_1)$ , pero no al revés. Sin embargo, si  $\beta_1$  es un cero excepcional de  $L(s, \chi_1)$  pero no de  $L(s, \chi)$ , aún así será un cero de  $L(s, \chi)$  y  $\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$ , que aparece explícitamente en la fórmula para  $\psi(x, \chi_1)$ , también aparecerá en la fórmula para  $\psi(x, \chi)$  en el término  $\sum'_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}$ . En cualquier caso, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.57.** [9] Si  $\chi$  es un carácter no principal de módulo  $q$  y  $2 \leq T \leq x$ , entonces se cumple que:

$$(1.136) \quad \psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + R_3(x, q, T),$$

donde  $R_3(x, q, T) \ll xT^{-1} \log^2(qx) + x^{\frac{1}{4}} \log x$  y  $\beta_1$  es el único posible cero simple y real tal que  $|\gamma| < 1$  y  $\beta_1 > 1 - \frac{c}{\log q}$ . El término  $\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$  debe ser omitido salvo en el caso en que  $\chi$  sea real.

A continuación, vamos a enunciar sin demostración un teorema demostrado por Landau que nos dice que si existen valores de  $q$  tales que una función  $L(s, \chi)$ , con  $\chi$  carácter primitivo y real módulo  $q$ , tiene un cero excepcional  $\beta_1$  entonces esos valores de  $q$  son muy raros.

**Teorema 1.58. Landau:** [9] Si  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son caracteres reales primitivos distintos de módulos  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente y las correspondientes funciones  $L$  tienen ceros excepcionales  $\beta_1, \beta_2$ , entonces:

$$(1.137) \quad \min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\log q_1 q_2},$$

donde  $c$  es una constante absoluta y positiva. Nótese que el caso  $q_1 = q_2$  no está excluido. De hecho, si  $q = q_1 = q_2$  y tomamos  $K < \frac{c}{2}$ , entonces el teorema nos diría que, de entre todas las funciones  $L$  asociadas a caracteres reales y primitivos módulo  $q$ , no puede haber más de un cero real en  $\sigma > 1 - \frac{K}{\log q}$ .

En primer lugar, obsérvese que este teorema nos está diciendo que, fijado un módulo  $q$ , entonces, de entre todas las funciones  $L$  asociadas a caracteres reales y primitivos módulo  $q$  distintos, o bien ninguna tiene ceros excepcionales o, a lo sumo, solo una de ellas lo tiene. Es por ello que se puede intuir que los ceros excepcionales, de existir, son extremadamente raros. Por otro lado, varias deducciones se pueden llevar a cabo usando este teorema. En particular, se puede demostrar que  $L(s, \chi)$  puede tener un cero excepcional para a lo sumo uno de todos los caracteres  $\chi$  reales y no principales de módulo  $q$ , es decir, un cero real y simple en la región dada por el teorema 1.23. Otra consecuencia del teorema 1.58 es relativa a la sucesión de posibles  $q_j$  tales que existe un carácter real y primitivo  $\chi_j$  de módulo  $q$  tal que  $L(s, \chi_j)$  tiene un cero en  $\beta > 1 - \frac{C}{\log q}$ . Si tuviéramos una sucesión de ceros excepcionales  $\beta_j > 1 - \frac{C_j}{\log q}$  con  $C_j \searrow 0$ ,  $q_j \nearrow \infty$  y  $\beta_j < \beta_{j+1}$  entonces, según el teorema 1.58, se cumple que:

$$(1.138) \quad 1 - \frac{C_j}{\log q_j} < 1 - \frac{c}{\log q_j q_{j+1}}.$$

Despejando se obtiene que  $q_{j+1} > q_j^{c/C_j - 1}$ . Como el anterior exponente se puede hacer tan grande como queramos, a partir de cierto punto superará a 1 y los módulos crecerán más rápido que una progresión geométrica. En particular, si  $C_j < \frac{c}{3}$  con  $c$  el del teorema 1.58, entonces  $q_{j+1} > q_j^2$ .

**Teorema 1.59.** [9] Sea  $(a, q) = 1$  y  $C$  una constante positiva. Entonces:

$$(1.139) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\bar{\chi}_1(a)x^{\beta_1}}{\varphi(q)\beta_1} + O(x \exp(-C'(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

para una constante positiva  $C'$  que depende solo de  $C$ , uniformemente en  $q$  en el rango  $q \leq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$ . En realidad, como vamos a ver en la prueba, el teorema es trivialmente cierto si  $q \geq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$  pero carece de utilidad práctica pues el error es ampliamente superior al término principal que queremos estimar. En este teorema,  $\chi_1$  denota el único carácter módulo  $q$ , si existe, para el cual  $L(s, \chi_1)$  tiene un cero real  $\beta_1 > 1 - \frac{c}{\log q}$  para una cierta constante absoluta y positiva  $c$ . En caso de que dicho carácter  $\chi_1$  no exista, el término relativo a  $\beta_1$  debe ser omitido.

*Demostración.* En primer lugar, hagamos el caso más sencillo. Si  $q \geq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$ , entonces el término  $\frac{x}{\varphi(q)}$  es muy pequeño comparado con el error, así que este último domina. Por ello, acotamos trivialmente cada sumando de  $\psi(q; x, a)$  por  $\log x$  y, como hay a lo sumo  $x/q + 1$  sumandos, se sigue que:

$$\psi(x; q, a) \leq (x/q + 1) \log x \ll x \exp\left(-\frac{C}{2}(\log x)^{\frac{1}{2}}\right),$$

como queríamos. Ahora volvamos al caso  $q \leq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$ . Todos los ceros en la suma (1.136) verifican que  $\beta < 1 - \frac{c_1}{\log(qT)}$  para una constante absoluta y positiva  $c_1$ . Por tanto:

$$(1.140) \quad |x^\rho| = x^\beta < x \exp(-c_1(\log x)/\log(qT)).$$

Asimismo, al igual que en el lema 1.53, se tiene que la suma en  $|\gamma| < T$  es  $\ll \log^2(qT) \ll \log^2(qx)$ . Combinando ambas estimaciones obtenemos que:

$$(1.141) \quad \psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + R_4(x, q, T),$$

con  $R_4(x, q, T) \ll x \log^2(qx) \exp(-c_1 \log(x)/\log(qT)) + xT^{-1} \log^2(qx) + x^{\frac{1}{4}} \log x$ . Como  $q \leq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$ , si elegimos  $T = \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$  entonces todos los términos en el error son  $\ll x \exp(-C'(\log x)^{\frac{1}{2}})$  para una cierta constante positiva  $C'$  que depende solo de  $C$  y se tiene que:

$$(1.142) \quad \psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O(x \exp(-C'(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

para todo carácter no principal  $\chi$  módulo  $q$ . Sustituyendo esta estimación en (1.131) y recordando que el término con  $\beta_1$  ocurre a lo sumo para un solo carácter  $\chi_1$ , tenemos el resultado.  $\square$

**Observación 1.60.** Si la hipótesis generalizada de Riemann fuese cierta entonces, como vimos en la observación 1.54, se tendría que  $\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x)$  y lo mismo

se cumpliría para  $\psi(x, \chi_0)$  por el análogo de (1.135) suponiendo que  $q \leq x$ . Cuando  $\chi \neq \chi_0$ , el teorema 1.57 implicaría que:

$$(1.143) \quad \psi(x, \chi) \ll x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \sum_{|\gamma| < T} |\rho|^{-1} + xT^{-1} \log^2(qx) + x^{\frac{1}{4}} \log x,$$

para  $2 \leq T \leq x$ . Como ya vimos,  $\sum_{|\gamma| < T} |\rho|^{-1} \ll \log^2(qx)$ . Por tanto, tomando  $T = x^{\frac{1}{2}}$  obtenemos que:

$$(1.144) \quad \psi(x, \chi) \ll x^{\frac{1}{2}} \log^2 x,$$

para  $\chi \neq \chi_0, q \leq x$  y  $2 \leq T \leq x$ . Utilizando de nuevo (1.131) se sigue que, bajo las condiciones anteriores y la hipótesis de Riemann generalizada:

$$(1.145) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x),$$

y al hacer sumación por partes con la función  $\pi_1(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) (\log n)^{-1}$ , bajaríamos un orden  $\log x$  en el error anterior, obteniendo el mejor error posible en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas:

$$(1.146) \quad \pi(x; q, a) = \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} + O(x^{\frac{1}{2}} \log x).$$

Es importante resaltar que, en comparación a lo que ocurría en (1.119), se espera que (1.145) no sea el mejor error posible en cuanto permitimos que  $q$  crezca un poco más. Concretamente, la conjetura más ambiciosa a este respecto se debe a Montgomery, quien propuso que para cualquier  $\varepsilon > 0$ , se verifica que:

$$(1.147) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(q^{-1/2} x^{1/2+\varepsilon}) \quad \text{uniformemente en } 2 \leq q \leq x.$$

En [14], se muestra que, en el caso extremo en el que  $q$  se acerca mucho a  $x$ , el  $\varepsilon$  es necesario. En particular, se demuestra que  $\psi(x; q, a) \sim x/\varphi(q)$  no puede ser cierto uniformemente en  $q \leq x/(\log x)^N$ .



## CAPÍTULO 2

# El teorema de Siegel y el método de Vinogradov-Korobov

---

En este capítulo, vamos a demostrar dos resultados muy poderosos que mejoran considerablemente el error en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas (teorema de Siegel) y en el teorema de los números primos (método de Vinogradov-Korobov).

### 2.1. Los teoremas de Siegel y Siegel-Walfisz

El teorema de Siegel en la primera de sus dos formas dice lo siguiente:

**Teorema 2.1. Siegel (1935):** [9] Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un número positivo  $C_1(\varepsilon)$  tal que, si  $\chi$  es un carácter real primitivo módulo  $q$ , entonces se cumple que:

$$(2.1) \quad L(1, \chi) > C_1(\varepsilon)q^{-\varepsilon}.$$

En su segunda forma dice que:

**Teorema 2.2. Siegel (1935):** [9] Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un número positivo  $C_2(\varepsilon)$  tal que, si  $\chi$  es un carácter real no principal de módulo  $q$ , entonces se verifica que  $L(s, \chi) \neq 0$  para:

$$(2.2) \quad s > 1 - C_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon}.$$

Sin embargo, ambos resultados tienen una desventaja importante y es el hecho de que las constantes que aparecen en ellos no son efectivas, en el sentido de que no es posible (con el conocimiento actual) calcular el valor numérico de  $C_1(\varepsilon)$  o  $C_2(\varepsilon)$  para un  $\varepsilon > 0$  dado. La razón de esta ineffectividad se verá posteriormente. Por otro lado, para comprobar que basta demostrar el primer teorema, veamos primero un resultado más débil que acota superiormente el valor de un posible cero excepcional cuando el carácter  $\chi$  es real y primitivo.

**Proposición 2.3.** [9] Sea  $\chi$  un carácter real y primitivo y supongamos que  $1 - \frac{1}{\log q} \leq \sigma \leq 1$ , entonces existe una constante  $c_1$  tal que:

$$(2.3) \quad |L'(\sigma, \chi)| < c_1 \log^2 q.$$

*Demostración.* Para  $\sigma > 0$  el criterio de Dirichlet para series nos garantiza que:

$$(2.4) \quad L'(\sigma, \chi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \log(n) n^{-\sigma}.$$

Dado que  $n^{-\sigma} = e^{-\sigma \log n} \leq e n^{-1}$  con  $n \leq q$  por las hipótesis sobre  $\sigma$ , tenemos que:

$$(2.5) \quad \left| \sum_{n=1}^q \chi(n) \log(n) n^{-\sigma} \right| \leq e \sum_{n=1}^q \log(n) n^{-1} = \frac{e}{2} \log^2 q + O(1) < c_2 \log^2 q.$$

Por otro lado, como  $\log(n) n^{-\sigma}$  decrece si  $n > q$  ( $q \geq 2$ ), se sigue por sumación por partes y las relaciones de ortogonalidad para caracteres que:

$$(2.6) \quad \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \chi(n) \log(n) n^{-\sigma} \right| \leq \log(q) q^{-\sigma} \max_N \left| \sum_{n=q+1}^N \chi(n) \right| \leq e \log(q) q^{-1} q = e \log q,$$

y se tiene el resultado.  $\square$

Nótese que, por el mismo argumento aplicado a  $L(\sigma, \chi)$ , se obtiene que existe una constante  $c_3$  tal que:

$$(2.7) \quad |L(\sigma, \chi)| < c_3 \log q, \quad \text{si } 1 - \frac{1}{\log q} \leq \sigma \leq 1.$$

Finalmente, vamos a usar la fórmula del número de clases para formas cuadráticas, [9], que dejamos aquí escrita para futuras referencias:

$$(2.8) \quad h(d) = \begin{cases} w \frac{|d|^{1/2}}{2\pi} L(1, \chi) & \text{si } d < 0, \\ \frac{d^{1/2}}{\log \varepsilon} L(1, \chi) & \text{si } d > 0, \end{cases}$$

donde  $\varepsilon$  denota la unidad fundamental y  $w$  está definido como el número de raíces de la unidad en el cuerpo cuadrático  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Este teorema solo aplica para caracteres reales y primitivos. Como  $h(d) \geq 1$ , entonces tomando  $d = \pm q$  obtenemos que existe una constante  $c_4$  tal que:

$$(2.9) \quad L(1, \chi) > c_4 q^{-1/2}.$$

Por el teorema del valor medio, (2.7) y la proposición 2.3 se tiene que, si  $\beta$  es un cero excepcional, entonces  $c_4 q^{-1/2} < L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\beta, \chi) < (1 - \beta) c_1 \log^2 q$ , y despejando se tiene que:

$$(2.10) \quad \beta < 1 - \frac{c_5}{q^{1/2} \log^2 q}.$$

Por el mismo argumento que ya hemos hecho varias veces, este último resultado aplica también para caracteres reales no principales aunque sean imprimitivos. Ya estamos en disposición de demostrar el teorema 2.2 suponiendo el teorema 2.1. Sea  $\varepsilon > 0$  y

supongamos que tenemos un cero  $\beta$  satisfaciendo (2.2), entonces tomando  $q$  suficientemente grande, se tendrá que  $1 - \frac{1}{\log q} \leq \beta \leq 1$ , luego por la proposición 2.3, el teorema del valor medio y el teorema 2.1 con  $\frac{\varepsilon}{2}$  tendríamos que:

$$C_1(\varepsilon/2)q^{-\varepsilon/2} < L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\beta, \chi) < c_1 \log^2(q)C_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon},$$

lo cual supone una contradicción haciendo  $q \rightarrow \infty$ . Se sigue de este resultado que todo cero excepcional,  $\beta$ , de  $L(s, \chi)$  con  $\chi$  carácter real no principal de módulo  $q$  verifica que:

$$(2.11) \quad \beta \leq 1 - C_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Lo cual es bastante mejor acotación que la que se consigue usando el teorema del valor medio y (2.8), que viene dada por  $\beta \leq 1 - cq^{-1/2} \log^{-2} q$  para cierta constante  $c$ . Ahora sí, vamos a demostrar el teorema 2.1. Seguiremos a [9], aunque la prueba que daremos se debe a Estermann, [12], quien la probó mediante un método simplificado al usado originalmente por Siegel. La idea es combinar las funciones  $L$  de dos caracteres  $\chi_1$  y  $\chi_2$  reales y primitivos de módulos  $q_1$  y  $q_2$  distintos. Consideremos el carácter  $\chi_1\chi_2$ . Este carácter tiene módulo  $q_1q_2$  y, aunque no es primitivo en general, debe ser no principal. En efecto, si  $\chi_1(n)\chi_2(n) = 1$  para todo  $(n, q_1q_2) = 1$ , entonces por ser reales,  $\chi_1(n) = \chi_2(n)$  para todo  $(n, q_1q_2) = 1$  y como son primitivos se concluye que son iguales, luego lo son sus módulos y se llega a contradicción.

**Lema 2.4.** [9] *Definimos  $F(s) := \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2)$  y  $G(s) := \lambda(s-1)^{-1}$ , donde  $\lambda := L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2)$ . Entonces existe una constante positiva, absoluta y efectiva  $c_4$  tal que:*

$$(2.12) \quad F(s) > \frac{1}{2} + c_4G(s)(q_1q_2)^{8(1-s)}, \quad \frac{7}{8} \leq s < 1.$$

*Demostración.* Análogamente a cómo se demuestra para la derivada logarítmica de  $\zeta(s)$ , se tiene que:

$$(2.13) \quad -\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}(1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)), \quad \text{en } \sigma > 1.$$

así como:

$$(2.14) \quad \log F(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}p^{-ms}(1 + \chi_1(p^m))(1 + \chi_2(p^m)), \quad \text{en } \sigma > 1.$$

En esta última serie, los coeficientes son todos no negativos. Por tanto, tomando exponenciales, se tiene que  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  en  $\sigma > 1$ , donde  $a_1 = 1$  y todos los coeficientes son no negativos. Ahora desarrollamos  $F(s)$  en serie de Taylor en torno a  $s = 2$  y tenemos una serie de la forma:

$$(2.15) \quad F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(2-s)^m,$$

válido para  $|2 - s| < 1$ . Además, se tiene que:

$$b_m = \frac{(-1)^m}{m!} F^{(m)}(2) = \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-2} (\log n)^m,$$

luego  $b_m \geq 0$  para todo  $m$  y  $b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-2} \geq 1$ . Asimismo, obsérvese que el polo en  $s = 1$  es el que impide extender más allá la validez de este desarrollo, lo cual se puede arreglar restando  $G(s)$ :

$$(2.16) \quad F(s) - G(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (2 - s)^m,$$

donde  $c_m = b_m - \lambda$  porque  $\lambda(s - 1)^{-1} = \lambda(1 - (2 - s)) = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} (2 - s)^m$ . Esta expresión debe ser válida en  $|s - 2| < 2$  porque el lado izquierdo es holomorfo ahí. Además, en  $|s - 2| = 3/2$ ,  $\zeta(s)$  está acotada y recordemos que, en  $\sigma \geq 1/2$ , teníamos que  $|L(s, \chi)| \leq 2q|s|$  para cualquier carácter  $\chi$  de módulo  $q$ , luego:

$$(2.17) \quad |L(s, \chi_1)| < c_5 q_1, \quad |L(s, \chi_2)| < c_5 q_2, \quad |L(s, \chi_1 \chi_2)| < c_5 q_1 q_2.$$

Por consiguiente,  $|F(s)| \leq c_6 q_1^2 q_2^2$  en la circunferencia y lo mismo sucede para  $G(s)$  porque  $\lambda$  es el producto de las tres funciones  $L$ . Así, usando las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de Taylor para la función  $F(s) - G(s)$  se obtiene que  $|b_m - \lambda| \leq 2c_6 q_1^2 q_2^2 (2/3)^m$ . A continuación, la estrategia es separar la serie (2.15) a partir de un cierto  $M$  que elegiremos después convenientemente. Para  $7/8 \leq s < 1$ , tenemos que  $\sum_{m=M}^{\infty} |b_m - \lambda| (2 - s)^m \leq \sum_{m=M}^{\infty} 2c_6 q_1^2 q_2^2 (\frac{2}{3}(2 - s))^m \leq \sum_{m=M}^{\infty} 2c_6 q_1^2 q_2^2 (3/4)^m < c_7 q_1^2 q_2^2 (3/4)^M < c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4}$  y, consecuentemente tenemos que:

$$F(s) - G(s) \geq 1 - \lambda \sum_{m=0}^{M-1} (2 - s)^m - c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4} = 1 - \lambda \frac{(2 - s)^M - 1}{1 - s} - c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4}.$$

Elegimos  $M$  de manera que se cumpla que  $\frac{1}{2} e^{-1/4} \leq c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4} < \frac{1}{2}$  y obtenemos:

$$(2.18) \quad F(s) > \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1 - s} (2 - s)^M.$$

Además, como  $\frac{1}{4}M \leq 2 \log(q_1 q_2) + c_8$ , se verifica que  $M \leq 8 \log(q_1 q_2) + c_9$  y tenemos que:

$$(2 - s)^M = \exp(M \log(1 + 1 - s)) < \exp(M(1 - s)) < c_{10} (q_1 q_2)^{8(1-s)}.$$

□

Veamos que con este lema se tiene el teorema 2.1

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño para que el  $\beta_1$  que vamos a escoger esté en las hipótesis del lema 2.4 y de (2.7). Distinguiamos dos casos en función de como sea el  $\varepsilon > 0$ . Por un lado, si hay un

carácter primitivo real para el cual  $L(s, \chi)$  tenga un cero real entre  $1 - \frac{\varepsilon}{16}$  y 1, elegimos  $\chi_1$  el carácter en cuestión y  $\beta_1$  dicho cero. En este caso,  $F(\beta_1) = 0$  independientemente de la elección de  $\chi_2$ . Si no hay tal carácter, tomamos  $\chi_1$  cualquier carácter primitivo real y  $\beta_1$  cualquier número real entre  $1 - \frac{\varepsilon}{16}$  y 1. Ahora, para  $0 < s < 1$  se tiene que  $\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} < 0$  e independientemente de  $\chi_2$ , las tres funciones  $L$  en  $s = 1$  son positivas (por la fórmula del número de clases) y no se anulan en  $\beta_1 \leq s \leq 1$ , luego  $F(\beta_1) < 0$ . Nótese que la positividad de las funciones  $L$  también la hemos usado en (2.18) omitiendo el término  $\frac{\lambda}{1-s}(2-s)^M > 0$ . En ambos casos,  $F(\beta_1) \leq 0$  y el lema 2.4 nos da que:

$$(2.19) \quad c_4 \lambda > \frac{1}{2}(1 - \beta_1)(q_1 q_2)^{-8(1-\beta_1)}.$$

Teniendo  $\chi_1$  y  $\beta_1$  fijados, elegimos  $\chi_2$  como un carácter primitivo y real cualquiera tal que  $q_2 > q_1$ . Se sigue de (2.7) que:

$$(2.20) \quad \lambda < (c_{11} \log q_1) L(1, \chi_2) (c_{11} \log(q_1 q_2)).$$

Luego:

$$(2.21) \quad L(1, \chi_2) > C q_2^{-8(1-\beta_1)} (\log q_2)^{-1},$$

donde  $C$  solo depende de  $\chi_1$ , más concretamente de  $q_1$  y, por tanto, solo de  $\varepsilon$ . Como  $8(1 - \beta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$ , tomando  $q_2$  suficientemente grande (cosa que podemos hacer) se obtiene que  $(\log q_2)^{-1} \geq q_2^{-\varepsilon/2}$  y se concluye el resultado.  $\square$

Es en esta prueba donde podemos apreciar por qué las respectivas constantes de los teoremas 2.1 y 2.2 no son efectivas. Imaginemos que queremos calcular la constante  $C$  del teorema anterior. Sabemos que esta constante depende solo de  $\chi_1$  y, por consiguiente, también lo hacen  $C_1(\varepsilon)$  y  $C_2(\varepsilon)$ . Si no hay ceros excepcionales, entonces seguimos los pasos del teorema y sabemos que podemos tomar  $\chi_1$  un carácter primitivo y real arbitrario, luego nos saldrá un  $q_1$  concreto y calcularemos  $C$  sin problemas. Sin embargo, si sí hay ceros excepcionales, entonces para calcular  $C$  necesitaríamos conocer el módulo  $q_1$  del carácter  $\chi_1$  tal que  $L(s, \chi_1)$  posee un cero excepcional, pero a día de hoy no se han podido encontrar tales ceros así que no tenemos ningún  $\chi_1$  concreto al que aplicarle eso, luego no podemos calcular  $C$  explícitamente.

**Teorema 2.5. Teorema de Siegel-Walfisz (1936): [9]** Sea  $N$  una constante positiva cualquiera,  $(a, q) = 1$  y  $q \leq (\log x)^N$ . Entonces existe un número positivo  $C(N)$  tal que se tiene, uniformemente en  $q$ :

$$(2.22) \quad \pi(x; q, a) = \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} + O(x \exp(-C(N)(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

o equivalentemente:

$$(2.23) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x \exp(-C(N)(\log x)^{\frac{1}{2}})).$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , por el teorema de Siegel, 2.2,  $\beta_1 < 1 - C_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$ , luego:

$$(2.24) \quad x^{\beta_1} < x \exp(-C_2(\varepsilon)(\log x)q^{-\varepsilon}).$$

Ahora es cuando se ve el porqué de la restricción que hemos exigido a  $q$  y es simplemente para hacer la exponencial pequeña en comparación a  $x$ . Nótese que necesitamos una cota más severa que simplemente pedir  $q \leq \exp(C(\log x)^{\frac{1}{2}})$  para cierta constante  $C$  como pedíamos en el teorema 1.59. En definitiva, con esta condición y tomando  $\varepsilon = (2N)^{-1}$  se tiene que  $q^\varepsilon \leq (\log x)^{1/2}$ , luego:

$$(2.25) \quad x^{\beta_1} < x \exp(-C_3(N)(\log x)^{\frac{1}{2}}).$$

Asimismo, recordemos que teníamos (1.136), luego se verifica que:

$$(2.26) \quad \psi(x, \chi) \ll x \exp(-C_4(N)(\log x)^{\frac{1}{2}}),$$

para cualquier carácter no principal  $\chi$  módulo  $q$ . Así, se obtiene (2.23) sustituyendo esta última expresión en (1.131). Por otra parte, para obtener el teorema en la forma (2.22), simplemente hacemos lo mismo que en el teorema 1.52 con la función  $\pi_1(x; q, a)$  definida en la observación 1.60 y se obtiene que:

$$(2.27) \quad \pi_1(x; q, a) = \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} + O(x \exp(-C_4(N)(\log x)^{\frac{1}{2}})).$$

Esto implica (2.22) porque  $\pi_1(x; q, a) - \pi(x; q, a) = O(\frac{x^{1/2}}{\varphi(q) \log x})$ . □

El error que proporciona el teorema de Siegel-Walfisz otorga la mayor uniformidad en  $q$  conocida hasta la fecha para el teorema de los números primos en progresiones aritméticas. Sin embargo, si consideramos  $q$  fijado, este resultado admite mejoras.

## 2.2. El método de Vinogradov-Korobov

Durante toda esta sección seguiremos el capítulo 6 de [29]. El objetivo es probar la región libre de ceros de Vinogradov-Korobov, la mejor conocida hasta la fecha. Para ello, vamos a usar el teorema 1.29. Un primer resultado obtenido usando este método es la región libre de ceros de Littlewood, demostrada en 1922, que mejora a la de de la Vallée-Poussin. Para ello, deduciremos el teorema 5.14 de [52] que nos dice que:

**Teorema 2.6.** *Si  $k \geq 3$  y  $\sigma = 1 - \frac{k}{2^k - 2}$ , entonces:*

$$(2.28) \quad \zeta(\sigma + it) = O(t^{1/(2^k - 2)} \log t).$$

**Teorema 2.7. Littlewood (1922):** *Sea  $t \geq 3$ , entonces existe una constante absoluta  $A$  tal que  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  en la región:*

$$(2.29) \quad \sigma > 1 - \frac{A \log \log t}{\log t}.$$

*Demostración.* En primer lugar, si tomamos  $f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log x$ , que cumple que  $|f'(x)| \asymp \frac{t}{N}$  en  $[N, 2N]$ , y consideramos  $S(N, t) = \sum_{N < n \leq 2N} e(f(n))$ , la teoría de pares de exponentes nos dice que, si  $(\kappa, \lambda)$  es un par de exponentes, entonces  $S(N, t) \ll t^\kappa N^{\lambda-\kappa}$ . Además, aplicando sumación por partes, tenemos que  $\sum_{N < n \leq 2N} n^{-\sigma-it} \ll t^\kappa N^{\lambda-\kappa-\sigma}$ . Por otro lado, usando el teorema 1.32 con  $x = t$  se tiene que:

$$(2.30) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq t} n^{-\sigma-it} + O(t^{-\sigma}), \quad t \geq t_0.$$

Luego dividiendo el rango de sumación del sumatorio anterior en intervalos diádicos de manera que tengamos  $\sum_{j=0}^{\lfloor \log_2 t \rfloor} \sum_{2^j < n \leq 2^{j+1}} n^{-\sigma-it}$  y utilizando las estimaciones anteriores se obtiene que:

$$\zeta(\lambda - \kappa + it) \ll t^\kappa \log t.$$

Si ahora tomamos el par de exponentes  $A^{k-2}B(0, 1) = \left(\frac{1}{2^{k-2}}, 1 - \frac{k-1}{2^{k-2}}\right)$  para  $k \geq 3$ , el cual se obtiene por inducción, conseguimos la siguiente cota:

$$\zeta(1 - \sigma_k + it) \ll t^{\frac{1}{2^{k-2}}} \log t,$$

donde  $\sigma_k = \frac{k}{2^{k-2}}$ . A continuación, denotamos por  $A(t) = \frac{\log t}{\log \log t}$  y elegimos  $k = \lfloor \frac{1}{\log 2} \log A(t) \rfloor$ . Así, tenemos que  $\frac{A(t)}{2} < 2^k \leq A(t)$  y que  $\frac{1}{2^{k-2}} \leq \frac{2}{A(t)-4}$ , luego  $t^{\frac{1}{2^{k-2}}} \ll t^{2/A(t)} = \log^2 t$  y se deduce que  $\zeta(1 - \sigma_k + it) \ll \log^3 t$ . Además, como  $k \sim \frac{\log \log t}{\log 2}$  y  $2^k \leq A(t)$ , se tiene que  $1 - \sigma_k \gtrsim \frac{1}{\log 2} \frac{(\log \log t)^2}{\log t}$  para  $t$  suficientemente grande. Por otra parte, en  $\sigma = 2$  tenemos la cota trivial  $\zeta(\sigma + it) \ll 1$ . Por tanto, usando el principio de Phragmén-Lindelöf, obtenemos que  $\zeta(\sigma + it) \ll \log^3 t$  con  $1 - \frac{(\log \log t)^2}{\log t} \leq \sigma \leq 2$ . Así, tomando  $\Phi(t) = 3 \log \log t$  y  $\theta(t) = \frac{(\log \log t)^2}{\log t}$  en el teorema 1.29, concluimos el resultado.  $\square$

La siguiente mejora llegó más de una década después. Concretamente, en 1938, Chudakov probó el siguiente resultado:

**Teorema 2.8. Chudakov (1938):** Sea  $t \geq 2$ , entonces  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  en la región:

$$(2.31) \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{(\log t)^{3/4+o(1)}}.$$

No fue hasta 1958 que, gracias a la sofisticación de los métodos de acotación de sumas trigonométricas, Vinogradov y Korobov obtuvieron la región libre de ceros a cuya demostración dedicaremos esta sección entera y que permanece imbatida a día de hoy. Es la siguiente:

**Teorema 2.9. Vinogradov-Korobov (1958):** Existe una constante absoluta  $C > 0$  tal que  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  en la región dada por:

$$(2.32) \quad \sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}, \quad t \geq t_0.$$

Previo a la demostración, necesitamos introducir una potente maquinaria conocida como el método de Vinogradov-Korobov. En el curso de la prueba, se verá que la precisión de resultados como el teorema 2.9 dependen fuertemente de la región donde sea válida la estimación  $\zeta(s) \ll \log^A |t|$  para cierto  $A > 0$ . Intuitivamente, mediante sumación por partes en (2.30) eliminamos de la suma el término  $n^{-\sigma}$  y, en definitiva, todo dependerá de encontrar estimaciones uniformes a sumas de la forma:

$$(2.33) \quad S(t; N, N_1) = \sum_{N < n \leq N_1 \leq 2N} n^{it} \quad (N_0 \leq N \leq t/2, t \geq t_0).$$

Antes de sumergirnos en los tecnicismos, es crucial entender la potente idea del método de Vinogradov-Korobov. Como ya hemos dicho, nuestro objetivo es acotar sumas de la forma (2.33), es decir, queremos ver si hay suficiente cancelación como para que dicha suma se mantenga pequeña. Sin embargo, intentar dar cotas no triviales de manera directa a sumas de este estilo no es sencillo. Por ello, la idea es aproximar el logaritmo por suficientes términos de su serie de Taylor y reducir el problema a estimar sumas trigonométricas con exponentes polinómicos. Ahora bien, si nos lanzamos directamente a aproximar  $\log n$ , dado que  $n$  se mueve en un rango muy grande, necesitaremos muchos términos de la serie de Taylor para que sea lo suficientemente precisa en dicho rango. Por ello, un primer intento consistió en hacer una traslación  $n \rightarrow n + x$  para reducir el problema a aproximar  $it \log(1 + x/n)$  que, para  $x$  suficientemente pequeño en relación con  $N$ , nos da una convergencia rápida de la serie de Taylor.

No fue hasta más tarde que se utilizó el método más efectivo, consistente en trasladar por  $xy$ , construyendo así formas bilineales y que supone el corazón del método de Vinogradov-Korobov. La razón de esto es puramente técnica, pues como se verá en (2.43), un solo parámetro nos origina sumas en las que dicho parámetro termina desapareciendo, mientras que trasladando por  $xy$  esto no sucede, véase (2.44). Al preservar uno de los dos parámetros, tenemos mayor control en nuestras cotas y, por ende, mayor precisión. Por último, cabe destacar que, aunque tras aproximar obtengamos una suma de la forma  $\sum_{x,y \leq a} e(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_n x^r y^r)$  con los  $\alpha_i$  fijados, la mejor forma de estimarla pasa por aplicar la desigualdad de Hölder para separar el problema en dos factores independientes. Por un lado, extraemos una integral que promedia dichas sumas sobre todos los  $\alpha_i \in (0, 1)$  y que actúa como un filtro para contar cuántas variables verifican un cierto sistema de ecuaciones diofánticas; si probamos que este sistema tiene pocas soluciones, obtendremos una gran cancelación general. Por otro lado, esta separación nos permite conservar nuestros  $\alpha_i$  específicos en un segundo factor, pero evaluados ahora sobre sumas trigonométricas lineales mucho más sencillas de acotar, como vemos en el lema 2.13. De esta forma, hemos conseguido reducir un problema puramente analítico en la combinación de un problema combinatorio de conteo de soluciones enteras, teorema 2.12, y uno de estimación de sumas trigonométricas lineales mediante la aproximación racional de los coeficientes, lema 2.14, una idea muy profunda y llena de belleza. Pasemos a desarrollar la teoría necesaria para enfrentarnos a dichos sistemas diofánticos y que nos llevará a probar lo que se conoce como el teorema del valor medio de Vinogradov, el cual nos proporciona una cota superior del número de soluciones enteras de dicho sistema. Sea

$$(2.34) \quad J_{k,n}(P) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n,$$

donde  $k, n, x \geq 1$  son enteros y  $P$  es un entero grande. Una herramienta fundamental es:

$$(2.35) \quad \int_0^1 e(kx) dx = \int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k \text{ es un entero no nulo,} \end{cases}$$

que, combinada con  $|z|^2 = z\bar{z}$  nos muestra que  $J_{k,n}(P)$  representa el número de soluciones enteras del sistema de ecuaciones:

$$(2.36) \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_{2k} = 0, \\ \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n - x_{k+1}^n - \cdots - x_{2k}^n = 0, \end{cases}$$

donde  $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$ . En efecto, sea  $S = \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n)$ , el término dentro de las integrales que definen a  $J_{k,n}(P)$  es  $S^k \bar{S}^k$ . Usemos  $x_1, \dots, x_k$  para denotar las variables de los  $k$  sumatorios de  $S^k$  y  $x_{k+1}, \dots, x_{2k}$  para las variables de los  $k$  sumatorios de  $\bar{S}^k$ . Así, obtenemos que:

$$(2.37) \quad |S|^{2k} = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P} e\left(\sum_{m=1}^n C_m \alpha_m\right),$$

donde  $C_m = \sum_{j=1}^k x_j^m - \sum_{j=k+1}^{2k} x_j^m$ . Por tanto, por el teorema de Fubini:

$$J_{k,n}(P) = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P} \prod_{m=1}^n \int_0^1 e(\alpha_m C_m) d\alpha_m,$$

que cuenta el número de tuplas  $(x_1, \dots, x_{2k})$  tales que  $C_m = 0$  para todo  $1 \leq m \leq n$ . Más en general, dados  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  enteros, denotamos por  $J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  al número de soluciones enteras del sistema:

$$(2.38) \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_k - x_{k+1} - \cdots - x_{2k} = \lambda_1, \\ \vdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n - x_{k+1}^n - \cdots - x_{2k}^n = \lambda_n, \end{cases}$$

con  $1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$ , de manera que, con esta notación,  $J_{k,n}(P) = J_{k,n}(0, \dots, 0)$ . Usando (2.35) obtenemos que:

$$J_{k,n}(\vec{\lambda}) = |J_{k,n}(\vec{\lambda})| \leq J_{k,n}(\vec{0}) = J_{k,n}(P).$$

Es decir, para toda tupla de enteros  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  se cumple que:

$$(2.39) \quad J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k,n}(P).$$

Cuando  $x_1, \dots, x_{2k}$  recorre todos los posibles  $P^{2k}$  valores, entonces el lado izquierdo del sistema (2.38) toma todos los valores posibles  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , lo cual escribiremos formalmente como:

$$(2.40) \quad \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P^{2k}.$$

El número de sumandos en (2.40) es finito, pues  $|\lambda_1| \leq kP, |\lambda_2| \leq kP^2, \dots, |\lambda_n| \leq kP^n$ . Además, tenemos que  $J_{k,n}(P) \leq P^{2k}$  y que  $J_{k,n}(P)$  es no decreciente como función de  $k$  o  $P$ . Aunque estamos interesados en obtener cotas superiores para  $J_{k,n}(P)$ , vamos a ver que se puede obtener una cota inferior de la siguiente manera, gracias a (2.39), (2.40) y la cota para cada  $|\lambda_i|$ , tenemos que:

$$(2.41) \quad P^{2k} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k,n}(P) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} 1 \leq J_{k,n}(P)(2k)^n P^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

lo cual nos da que:

$$(2.42) \quad J_{k,n}(P) \geq (2k)^{-n} P^{2k - n(n+1)/2}.$$

Es importante destacar que esta cota es no trivial si  $k > \frac{n(n+1)}{2}$ . Veamos esto último. Observemos que si asignamos  $x_1 = x_{k+1} \cdots x_k = x_{2k}$  entonces tenemos  $P^k$  soluciones. Como existen  $k!$  formas distintas de asignar  $x_i$  con  $1 \leq i \leq k$  a  $x_j$  con  $k+1 \leq j \leq 2k$ , tenemos que, una cota inferior «trivial» para  $J_{k,n}(P)$ , es  $k!P^k$ . Por tanto, dado que vamos a tomar  $P$  suficientemente grande y  $k$  está fijado, si se cumple la condición  $k > \frac{n(n+1)}{2}$ , la cota inferior obtenida en (2.42) es mejor que la trivial. Obtengamos algunas propiedades más acerca de  $J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  antes de pasar a probar los lemas que necesitaremos posteriormente. Dado que:

$$(2.43) \quad \left| \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e(\alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n),$$

lo cual se obtiene elevando el lado izquierdo a la potencia  $2k$  y agrupando los términos tales que son soluciones de (2.38) para cada  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , se tiene, reemplazando  $x$  por  $xy$  y sumando, lo siguiente:

$$(2.44) \quad \sum_{x \leq P} \left| \sum_{y \leq P} e(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_n x^n y^n) \right|^{2k} \leq \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(\vec{\lambda}) \left| \sum_{x \leq P} e(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_n \lambda_n x^n) \right|.$$

Si ahora consideramos solo  $n-1$  ecuaciones en (2.38), entonces el número de soluciones es  $J_{k,n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  y, si permitimos que  $|\lambda_n|$  recorra todos los valores ( $< kP^n$ ) en la última ecuación, entonces obtenemos que:

$$(2.45) \quad \sum_{|\lambda_n| < kP^n} J_{k,n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = J_{k,n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

Pasemos ya a probar algunas estimaciones más complicadas para  $J_{k,n}(P)$  y para ello veamos el siguiente lema sobre sistemas de congruencias módulo una potencia de un primo:

**Lema 2.10.** *Sea  $m \geq 1$ ,  $p > n$  primo y sea  $T$  el número de soluciones del sistema de congruencias:*

$$(2.46) \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n \equiv \mu_1 & (\text{mód } p), \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \equiv \mu_2 & (\text{mód } p^2), \\ \vdots \\ x_1^m + \cdots + x_n^m \equiv \mu_m & (\text{mód } p^m), \end{cases}$$

donde  $A \leq x_r \leq A + mp^n - 1$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ ,  $A$  es un entero dado y  $x_i \not\equiv x_j \pmod{p}$  para  $i \neq j$ . Entonces para cualesquiera enteros  $\mu_1, \dots, \mu_n$  tenemos que:

$$(2.47) \quad T \leq n! m^n p^{n(n-1)/2}.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $A = 0$ . Pues si  $x_1, \dots, x_n$  satisfacen (2.46) y  $x_j \equiv y_j \pmod{p^n}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), entonces también  $y_1, \dots, y_n$  verifican (2.46). Para cada  $r = 1, \dots, n$  escribimos  $x_r = x_{r,1} + px_{r,2} + \dots + p^n x_{r,n+1}$ , donde  $0 \leq x_{r,j} < p$  para todo  $r, j = 1, \dots, n$ ,  $0 \leq x_{r,n+1} < m$  y  $x_{i,1} \neq x_{j,1}$  para  $i \neq j$ . Así, los números  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1}$  verifican el siguiente sistema de congruencias:

$$(2.48) \quad \begin{cases} x_{1,1} + \dots + x_{n,1} \equiv \mu_1 \pmod{p}, \\ x_{1,1}^2 + \dots + x_{n,1}^2 \equiv \mu_2 \pmod{p}, \\ \vdots \\ x_{1,1}^n + \dots + x_{n,1}^n \equiv \mu_n \pmod{p}, \end{cases}$$

A continuación, la idea es levantar este sistema a sistemas módulo  $p^k$  sucesivamente hasta llegar a  $p^n$ , usando argumentos del tipo lema de Hensel. Si  $s_1, \dots, s_n$  son los polinomios simétricos elementales en las variables  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1}$  entonces, por las identidades de Newton, se tiene que  $ks_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} s_{k-i} \mu_i \pmod{p}$  para todo  $1 \leq k \leq n$ , con la convención de que  $s_0 = 1$ . Por tanto,  $s_1, \dots, s_n$  están unívocamente determinados, módulo  $p$ , por los  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Además, tenemos que la congruencia  $x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n \equiv 0 \pmod{p}$ , que tiene a lo sumo  $n < p$  raíces, es tal que  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1}$  son solución. Así, hemos obtenido que todas las soluciones de (2.48) son permutaciones de una única solución en números distintos  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1}$ , luego  $T_1 \leq n!$ , donde  $T_1$  es el número de soluciones de (2.48). Si fijamos una solución de (2.48), entonces (2.46) nos da el sistema:

$$(2.49) \quad \begin{cases} (x_{1,1} + px_{1,2})^2 + \dots + (x_{n,1} + px_{n,2})^2 \equiv \mu_2 \pmod{p^2}, \\ \vdots \\ (x_{1,1} + px_{1,2})^n + \dots + (x_{n,1} + px_{n,2})^n \equiv \mu_n \pmod{p^2}, \end{cases}$$

que se reduce, dividiendo todo entre  $p$ , al siguiente sistema de  $n - 1$  congruencias en las variables  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1} \pmod{p}$ :

$$(2.50) \quad \begin{cases} x_{1,1}x_{1,2} + \dots + x_{n,1}x_{n,2} \equiv \mu'_2 \pmod{p}, \\ \vdots \\ x_{1,1}^{n-1}x_{1,2} + \dots + x_{n,1}^{n-1}x_{n,2} \equiv \mu'_n \pmod{p}, \end{cases}$$

Por otro lado, como los números  $x_{1,1}, \dots, x_{n,1}$  son distintos, podemos suponer que  $x_{1,1}, \dots, x_{n-1,1}$  son todos no nulos. Por tanto:

$$(2.51) \quad \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,1}^{n-1} & \cdots & x_{n-1,1}^{n-1} \end{vmatrix} = x_{1,1} \cdots x_{n-1,1} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_{i,1} - x_{j,1}) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Por consiguiente, aplicando la regla de Cramer para cada  $x_{n,2}$  fijado (que puede tomar a lo sumo  $p$  valores), los números  $x_{1,2}, \dots, x_{n-1,2}$  están unívocamente determinados por el sistema (2.50) y, si  $T_2$  denota el número de soluciones de (2.50), entonces  $T_2 = p$ . Similarmente, considerando el sistema análogo a (2.49) módulo  $p^3$ , obtenemos  $n - 2$  congruencias en  $x_{1,3}, \dots, x_{n,3}$  con número de soluciones  $T_3 = p^2$ . Continuando este proceso obtenemos  $T_4 = p^3, \dots, T_n = p^{n-1}$ . Por último, como cada  $x_{j,n+1}$  solo puede tomar hasta  $m$  valores, se obtiene  $T_{n+1} = m^n$ . Finalmente, combinando todas estas estimaciones obtenemos que:

$$(2.52) \quad T \leq T_1 T_2 \cdots T_n T_{n+1} \leq n! m^n p^{n(n-1)/2}.$$

□

Ya estamos en disposición de dar una estimación recursiva para  $J_{k,n}(P)$ , que nos permitirá acotarla explícitamente. Esta es la parte crucial del método de Vinogradov-Korobov:

**Lema 2.11.** *Sea  $n \geq 2$ ,  $P \geq (2n)^{3n}$  y  $k \geq n(n+1)$ . Entonces:*

$$J_{k,n}(P) \leq 4^{2k} P^{2k/n + (3n-5)/2} J_{k-n,n}(P_1),$$

con  $P_1$  satisfaciendo  $P^{(n-1)/n} \leq P_1 \leq 4P^{(n-1)/n}$ .

*Demostración.* Sea  $p$  un primo de  $\left[\frac{1}{2}P^{1/n}, P^{1/n}\right]$ , que existe por el postulado de Bertrand. Entonces  $p > n$  y, si definimos  $P_1 = \lfloor Pp^{-1} \rfloor + 1$ , tenemos que  $P^{(n-1)/n} \leq P_1 \leq 4P^{(n-1)/n}$ ,  $P < pP_1$ . Esto nos da que  $J_{k,n}(P) \leq J_{k,n}(pP_1)$ , donde  $J_{k,n}(pP_1)$  representa el número de soluciones  $1 \leq x_j \leq p$ ,  $0 \leq y_j \leq P_1$  para  $j = 1, \dots, 2k$  del sistema:

$$(2.53) \quad \begin{cases} (x_1 + py_1) + \cdots + (x_k + py_k) - (x_{k+1} + py_{k+1}) - \cdots - (x_{2k} + py_{2k}) = 0 \\ \vdots \\ (x_1 + py_1)^n + \cdots + (x_k + py_k)^n - (x_{k+1} + py_{k+1})^n - \cdots - (x_{2k} + py_{2k})^n = 0. \end{cases}$$

A continuación, dividimos el número de soluciones de (2.53) en dos clases. La primera clase consiste en las soluciones tales que tanto  $x_1, \dots, x_k$  como  $x_{k+1}, \dots, x_{2k}$  contienen  $n$  números diferentes, mientras que la segunda clase contiene todas las demás soluciones. Si denotamos por  $J_1$  y  $J_2$  al número de soluciones de primera y segunda clase respectivamente, entonces:

$$(2.54) \quad J_{k,n}(P) \leq J_{k,n}(pP_1) = J_1 + J_2,$$

luego hemos reducido el problema a estimar  $J_1$  y  $J_2$ . De hecho, observando que  $n$  números pueden ser colocados de  $k(k-1) \cdots (k-n+1)$  maneras en  $k$  lugares y renombrando las soluciones contadas en  $J_1$ , tenemos que  $J_1 \leq k^{2n} J'_1$ , donde  $J'_1$  es el número de soluciones de (2.53) con  $x_1, \dots, x_n$  y  $x_{k+1}, \dots, x_{k+n}$  números distintos. Si ahora llamamos:

$$S(x) = \sum_{y=0}^{P_1-1} e(f(x+py)), \quad f(t) = \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n,$$

tenemos que:

$$J'_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1, \dots, x_n} S(x_1) \cdots S(x_n) \right|^2 \left| \sum_{x \leq p} S(x) \right|^{2k-2n} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n,$$

donde  $\sum_{x_1, \dots, x_n}$  denota la suma sobre números distintos  $x_1, \dots, x_n$ . Usando la desigualdad de Hölder obtenemos que:

$$\begin{aligned} J'_1 &\leq p^{2k-2n-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1, \dots, x_n} S(x_1) \cdots S(x_n) \right|^2 \sum_{x \leq p} |S(x)|^{2k-2n} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \\ (2.55) \quad &\leq p^{2k-2n} \max_{1 \leq x \leq p} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1, \dots, x_n} S(x_1) \cdots S(x_n) \right|^2 |S(x)|^{2k-2n} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n. \end{aligned}$$

Por tanto,  $x$  está fijado en la última integral, que representa el número de soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} (x_1 + py_1) + \cdots + (x_n + py_n) + (x + py_{n+1}) + \cdots + (x + py_k) \\ &= (x_{k+1} + py_{k+1}) + \cdots + (x_{k+n} + py_{k+n}) \\ &\quad + (x + py_{k+n+1}) + \cdots + (x + py_{2k}), \\ (2.56) \quad &\vdots \\ (x_1 + py_1)^n + \cdots + (x_n + py_n)^n + (x + py_{n+1})^n + \cdots + (x + py_k)^n \\ &= (x_{k+1} + py_{k+1})^n + \cdots + (x_{k+n} + py_{k+n})^n \\ &\quad + (x + py_{k+n+1})^n + \cdots + (x + py_{2k})^n. \end{aligned}$$

Por otro lado, como el número de soluciones contadas por  $J_{k,n}(P)$  no cambia si restamos  $x$  de las variables, se sigue que el número de soluciones del sistema (2.56) es igual al de:

$$\begin{aligned} (x_1 - x + py_1) + \cdots + (x_n - x + py_n) \\ - (x_{k+1} - x + py_{k+1}) - \cdots - (x_{k+n} - x + py_{k+n}) = -p(y_{n+1} + \cdots - y_{2k}), \\ (2.57) \quad &\vdots \\ (x_1 - x + py_1)^n + \cdots + (x_n - x + py_n)^n \\ - (x_{k+1} - x + py_{k+1})^n - \cdots - (x_{k+n} - x + py_{k+n})^n = -p^n(y_{n+1}^n + \cdots - y_{2k}^n). \end{aligned}$$

que denotaremos por  $J_0$ . Tomando  $y_{n+1} + \cdots - y_{2k} = \lambda_1$ ,  $y_{n+1}^n + \cdots - y_{2k}^n = \lambda_n$  vemos, por (2.39), que el número de soluciones de este sistema, para cada  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  fijos, no excede a  $J_{k-n,n}(P_1)$ . Además, fijando  $0 \leq x_{k+1} + py_{k+1} \leq pP_1, \dots, 0 \leq x_{k+n} + py_{k+n} \leq pP_1$ , vemos que  $x_1 + py_1, \dots, x_n + py_n$  satisfacen las condiciones del lema 2.10 con  $m \geq pP_1p^{-n} > Pp^{-n}$ , de manera que podemos tomar  $m = \lfloor pPp^{-n} \rfloor + 1$ . Luego  $J_0 \leq (pP_1)^n T J_{k-n,n}(P_1)$ , donde  $T$  es el número de soluciones del sistema del lema 2.10 adaptado a nuestro caso. Por tanto, usando (2.47), obtenemos:

$$(2.58) \quad J_1 \leq k^{2n} p^{2k-2n} n! m^n p^{n(n-1)/2} (pP_1)^n J_{k-n,n}(P_1).$$

Además, si  $P = qp + r$  con  $0 \leq r < p$ , entonces  $pP_1 = pq + p = P + p - r$ , luego  $pP_1p^{-n} \leq Pp^{-n} + p^{1-n}$ . Así, como  $p \geq \frac{1}{2}P^{1/n}$ , tenemos que  $Pp^{-n} \leq 2^n$  y  $m \leq$

$2^n + p^{1-n} + 1 \leq 2^{n+1}$ , lo que implica que  $m^n \leq 2^{n(n+1)} \leq 2^k$ . Usando también que  $p \leq P^{1/n}$ ,  $P_1 \leq 4P^{(n-1)/n}$ , se deduce de (2.58) que:

$$(2.59) \quad J_1 \leq n! 2^k k^{2n} P^{2k/n+(3n-5)/2} 4^n J_{n-k,k}(P_1) \leq \frac{1}{2} 4^{2k} P^{2k/n+(3n-5)/2} J_{k-n,n}(P_1),$$

porque  $k \geq n(n+1)$  y  $n \geq 2$ . Así, solo nos falta estimar  $J_2$ . En este caso, hay a lo sumo  $n-1$  números distintos entre  $x_1, \dots, x_k$  y cada  $x_i$  toma a lo sumo  $p$  valores, luego hay como mucho  $\binom{p}{n-1} (n-1)^k \leq p^{n-1} n^k$  posibles elecciones para los números  $x_1, \dots, x_k$ . Por consiguiente, si  $x_1, \dots, x_{2k}$  pertenecen a la segunda clase, aplicando la desigualdad de Hölder vemos que:

$$(2.60) \quad \left| \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} S(x_1) \cdots \overline{S(x_{2k})} \right| \leq \left( \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} |S(x_1)|^{2k} \right)^{1/2k} \cdots \left( \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} |S(x_{2k})|^{2k} \right)^{1/2k} \\ \leq \sum_{x \leq p} |S(x)|^{2k} \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} 1 \leq p^{k+n-1} n^k \sum_{x \leq p} |S(x)|^{2k} \leq p^{k+n-1} n^k P_1^{2n} \sum_{x \leq p} |S(x)|^{2(k-n)},$$

pues  $|S(x)| \leq P_1$ . Nótese que solo hemos aplicado la restricción para los  $x_i$  en el conjunto  $x_1, \dots, x_k$  mientras que para los  $k$  valores restantes simplemente hemos acotado por  $p^k$ . Consecuentemente:

$$(2.61) \quad J_2 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{x_1, \dots, x_{2k}} S(x_1) \cdots S(x_k) \overline{S(x_{k+1})} \cdots \overline{S(x_{2k})} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \\ \leq p^{k+n-1} n^k P_1^{2n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{x \leq P_1} |S(x)|^{2(k-n)} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \\ \leq p^{k+n-1} n^k P_1^{2n} J_{k-n,n}(P_1) \leq \frac{1}{2} 4^{2k} P^{2k/n+(3n-5)/2} J_{k-n,n}(P_1),$$

que junto a (2.59) prueba el lema en vista de (2.54).  $\square$

Como ya hemos comentado, el lema anterior nos permite probar una cota superior para  $J_{k,n}(P)$  que depende explícitamente de  $k, n$  y  $P$ . Esta es la verdadera clave del método de Vinogradov:

**Teorema 2.12. Teorema del valor medio de Vinogradov:** Sea  $r \geq 0$  un entero,  $k \geq n(n+r)$ ,  $P \geq P_0$  y  $c_r = \frac{n(n+1)(1-1/n)^r}{2}$ . Entonces:

$$(2.62) \quad J_{k,n}(P) \leq (4n)^{4kr} P^{2k+c_r-n(n+1)/2}.$$

*Demostración.* Usaremos inducción sobre  $r$ . Para  $r = 0$ , es cierto pues  $J_{k,n}(P) \leq P^{2k}$ . Supongamos ahora que el lema es cierto para  $r = m \geq 0$  y consideremos  $r = m+1$ . Si  $P \geq (2n)^{3n(1+(n-1)^{-1})^{(m+1)}}$ , como  $k \geq n^2 + n(m+1)$  podemos aplicar el lema 2.11 y tenemos que:

$$(2.63) \quad J_{k,n}(P) \leq 4^{2k} P^{2k/n+(3n-5)/2} J_{k-n,n}(P_1).$$

Para acotar  $J_{k-n,n}(P_1)$  podemos usar la hipótesis de inducción pues  $k-n \geq n(n+m)$  y  $P_1 \geq P^{1-1/n} \geq (2n)^{3n(1+(n-1)^{-1})^m}$ . Por tanto, se sigue que:

$$(2.64) \quad \begin{aligned} J_{k-n,n}(P_1) &\leq (4n)^{4(k-n)m} P_1^{2(k-n)-n(n+1)/2+c_m} \\ &\leq (4n)^{4(k-n)m} 4^{2(k-n)} P^{(1-1/n)(2k-2n-n(n+1)/2+c_m)}, \end{aligned}$$

que, combinado con (2.63), nos da el resultado. Supongamos ahora que  $k \geq n^2 + n(m+1)$  y  $P < (2n)^{3n(1+(n-1)^{-1})^{m+1}}$ . Primero, aplicamos la cota trivial:

$$(2.65) \quad J_{k,n}(P) \leq P^{2n} J_{k-n,n}(P).$$

A continuación, usamos la hipótesis de inducción para estimar  $J_{k-n,n}(P)$  y obtenemos:

$$(2.66) \quad J_{k-n,n}(P) \leq (4n)^{4km} P^{2(k-n)-n(n+1)/2+c_m},$$

luego (2.65) nos da que:

$$(2.67) \quad J_{k,n}(P) \leq (4n)^{4k(m+1)} P^{2k-n(n+1)/2+c_{m+1}},$$

pues la condición  $P < (2n)^{3n(1+(n-1)^{-1})^{(m+1)}}$ ,  $k \geq n^2 + n(m+1)$ , implica que:

$$(2.68) \quad P^{c_m - c_{m+1}} \leq (4n)^{4k}.$$

□

Es interesante destacar que el problema de estimar  $J_{k,n}(P)$  ha sido, por sí mismo, uno de los problemas centrales de la teoría aditiva de números y el análisis armónico durante las últimas décadas. A este respecto, el resultado más deseado era lo que se conoce como la «Main Conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem» que decía que, para todo  $k \geq 1$ ,  $n, P \geq 2$  y  $\varepsilon > 0$ , se cumple que:

$$J_{k,n}(P) \ll_{\varepsilon} P^{\varepsilon} (P^k + P^{2k-n(n+1)/2}).$$

Si nos paramos a pensar, esta cota tiene mucho sentido pues parece como una media, salvo por el término  $P^{\varepsilon}$ , de las cotas inferiores para  $J_{k,n}(P)$ , (2.42) y aquella que llamábamos trivial,  $k!P^k$ . Para  $n = 2$ , este resultado se sabía que era verdadero desde hacía mucho tiempo pues se obtiene mediante estimaciones elementales relativas a la función  $d(n)$ . El caso  $n = 3$  fue resuelto mediante métodos aritméticos por Wooley, [57], en 2016. Wooley usó una técnica muy sofisticada conocida como «efficient congruencing» cuyas variantes llevaron a probar la conjetura para ciertos valores grandes de  $n$ . Finalmente, unos meses más tarde, en 2016, debido a Bourgain, Demeter y Guth, [3], la conjetura se probó para todo  $n \geq 4$ , gracias a una técnica muy novedosa de análisis armónico conocida como «decoupling».

El siguiente paso en nuestro camino es demostrar un teorema importante que nos da una estimación para  $S(t; N, N_1)$ . Sin embargo, necesitamos dos lemas previos que, aunque a primera vista parecen inconexos, nos servirán para estimar ciertas sumas que aparecerán en la demostración de dicho teorema en relación con los coeficientes de Taylor del logaritmo, los cuales queremos que no sean demasiado cercanos a un entero por razones que veremos a continuación.

**Lema 2.13.** Para  $N \geq 1$  y  $\alpha$  real, se tiene que:

$$(2.69) \quad \left| \sum_{n \leq N} e(\alpha n) \right| \leq \min \left( N, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right),$$

donde  $\|\alpha\|$  es la distancia de  $\alpha$  al entero más cercano, explícitamente,  $\|\alpha\| = \min(\alpha - [\alpha], 1 + [\alpha] - \alpha)$ , con la convención de que si  $\alpha$  es entero, entonces  $1/\|\alpha\| = \infty$ .

*Demostración.* El resultado es sencillo si  $\alpha$  es entero. Para el resto de casos, por periodicidad de la exponencial, podemos suponer que  $0 < \alpha < 1$ . Entonces:

$$(2.70) \quad \left| \sum_{n \leq N} e(\alpha n) \right| = \left| \frac{e(\alpha N) - 1}{e(\alpha) - 1} \right| \leq \frac{2}{|e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)|} \leq \frac{1}{\sin(\pi\alpha)},$$

y como  $\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi\|\alpha\|)$  y  $\sin x \geq (2/\pi)x$  para  $0 \leq x \leq \pi/2$ , se sigue que  $\frac{1}{\sin(\pi\alpha)} \leq \frac{1}{2\|\alpha\|}$ .  $\square$

En el siguiente lema vamos un paso más allá, estudiando qué ocurre cuando  $\alpha$  se aproxima por un racional  $a/q$ . Por el teorema de aproximación de Dirichlet, podemos conseguir que  $|\alpha - a/q| < q^{-2}$ , luego  $\alpha = a/q + \theta/q^2$  con  $|\theta| \leq 1$ .

**Lema 2.14.** Sea  $\alpha = a/q + \theta/q^2$ , donde  $a$  y  $q$  son enteros tales que  $(a, q) = 1$ ,  $q \geq 1$  y  $|\theta| \leq 1$ . Entonces para cualesquiera  $\beta, U > 0$  y  $N \geq 1$  se tiene que:

$$(2.71) \quad \sum_{n \leq N} \min \left( U, \frac{1}{\|\alpha n + \beta\|} \right) \leq 6 \left( \left\lfloor \frac{N}{q} \right\rfloor + 1 \right) (U + q \log q).$$

*Demostración.* Escribiendo  $\sum_{n \leq N} = \sum_{n=1}^q + \sum_{n=q+1}^{2q} + \dots$  y cambiando los índices, obtenemos a lo sumo  $\lfloor N/q \rfloor + 1$  sumas de la forma  $S = \sum_{n \leq q} \min \left( U, \|\alpha n + \beta_1\|^{-1} \right)$  con, quizás, distintos  $\beta_1$ . Por consiguiente, basta con probar que:

$$(2.72) \quad S \leq 6(U + q \log q).$$

Para  $1 \leq n \leq q$  tenemos que  $\alpha n + \beta_1 = (an + [q\beta_1])q^{-1} + \theta'(n)q^{-2}$ , donde  $\theta'(n) = \theta n + (q\beta_1 - [q\beta_1])q$ . Por tanto,  $|\theta'(n)| < 2q$ . Ahora hacemos el cambio de variable  $m = an + [q\beta_1]$ , de manera que, como  $(a, q) = 1$  y  $n$  recorre un sistema completo de residuos módulo  $q$ , tenemos que  $m$  también lo hace. Además, como la función  $x \rightarrow \|x\|$  es 1-periódica, se verifica que  $\|m\|$  no cambia si le sumamos un múltiplo de  $q$ , luego podemos elegir los representantes módulo  $q$  que queramos para  $m$  y  $\|m\|$  no cambiará. Así, elegimos  $m \in \{-\lfloor \frac{q}{2} \rfloor, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lfloor \frac{q}{2} \rfloor\}$  de forma que se cumple que  $|m| \leq q/2$ . Por tanto:

$$(2.73) \quad S = \sum_{|m| \leq q/2} \min \left( U, \left\| \frac{m}{q} + \frac{\theta''(m)}{q} \right\|^{-1} \right),$$

donde  $|\theta''(m)| < 2$ . Para  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ , estimamos el mínimo por  $U$  y, para  $2 < |m| \leq q/2$ , como  $\|x + y\| \geq \|x\| - \|y\|$ , tenemos que  $\left\| \frac{m}{q} + \frac{\theta''(m)}{q} \right\| > \frac{|m|-2}{q}$ , luego:

$$S \leq 5U + \sum_{2 < |m| \leq q/2} \frac{q}{|m|-2} < 6(U + q \log q).$$

Nótese que el segundo sumatorio solo existe si  $q > 5$ , luego se cumple que  $\sum_{2 < |m| \leq q/2} \frac{q}{|m|-2} = 2q \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor - 2} m^{-1} \leq 2q(1 + \log q) < 6q \log q$ .  $\square$

**Teorema 2.15.** Si  $S(t; N, N_1)$  es la suma definida por (2.33), donde recordemos que pedíamos  $N_0 \leq N \leq t/2$  y  $t \geq t_0$ , entonces tenemos, uniformemente en  $N, N_1$  y  $t$ , lo siguiente:

$$(2.74) \quad S(t; N, N_1) \ll N \exp\left(-\frac{\log^3 N}{10^5 \log^2 t}\right).$$

*Demostración.* Esta demostración es larga y muy técnica, así que solo explicaremos cómo se usan los lemas que tenemos a nuestra disposición para probarla. Para más detalles, véase el lema 6.2 de [29]. Como ya hemos explicado, la mejor forma de proceder es escribiendo  $n^{it} = \exp(it \log n)$  y usando suficientes términos del desarrollo de Taylor del logaritmo. Para ello, fijamos dos variables enteras  $1 \leq x \leq a$ ,  $1 \leq y \leq a$  con  $a = \lfloor N^{2/5} \rfloor$ . Si definimos la suma  $S_1 = \sum_{N+1}^{N_1} \exp(it \log(n+xy)) = \sum_{N+xy+1 < n \leq N_1+xy} n^{it}$ , entonces  $S(t; N, N_1) = S_1 + \sum_{N < n \leq N+xy} n^{it} - \sum_{N_1 < n \leq N_1+xy} n^{it}$ . Así, obtenemos que:

$$S(t; N, N_1) \ll Na^{-2} \max_{N \leq n \leq 2N} |T(n)| + a^2, \quad \text{con } T(n) = \sum_{x,y \leq a} \exp(it \log(1 + xy/n)).$$

Por tanto, usando los primeros  $r = \lfloor 5,01 \frac{\log t}{\log N} \rfloor$  términos de la serie de Taylor de  $\log(1+x)$  (solo tomamos  $r$  así para que sea  $\geq 5$ ) tenemos que:

$$S(t; N, N_1) \ll Na^{-2} \max_{N \leq n \leq 2N} U(n) + N^{4/5} + Nt^{-1/500},$$

donde:

$$U(n) = \left| \sum_{x,y \leq a} e(\alpha_1 xy + \cdots + \alpha_r x^r y^r) \right|, \quad \alpha_j = (-1)^{j-1} \frac{t}{2\pi j n^j}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Por consiguiente, para demostrar el lema, basta con ver que  $U(n) \ll a^2 \exp\left(-\frac{\log^3 N}{10^5 \log^2 t}\right)$  y  $U(n)$  es una suma del mismo tipo que las que hemos estudiado durante toda la sección. Aplicando la desigualdad de Hölder, (2.39), (2.40) y (2.44) se tiene que:

$$U^{4k^2}(n) \leq J_{k,r}(a) a^{8k^2-4k} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \left| \sum_{x \leq a} e(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r) \right|^{2k}.$$

Para estimar la última suma, usamos (2.43) y el lema 2.13 que nos dan lo siguiente:

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \left| \sum_{x \leq a} e(\alpha_1 \lambda_1 x + \cdots + \alpha_r \lambda_r x^r) \right|^{2k} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r} J_{k,r}(\vec{\mu}) e(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)$$

$$\begin{aligned} &\leq J_{k,r}(a) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \prod_{i=1}^r \left| \sum_{\lambda_i} e(\alpha_i \lambda_i \mu_i) \right| \leq J_{k,r}(a) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \prod_{i=1}^r \min(2A_i, \|\alpha_i \mu_i\|^{-1}) \\ &\leq J_{k,r}(a) \prod_{m=1}^r \sum_{|\mu_m| < A_m} \min(2A_m, \|\alpha_m \mu_m\|^{-1}), \end{aligned}$$

donde  $A_m = 2ka^m$  para todo  $m = 1, \dots, r$ . Del término  $J_{k,r}(a)$  se encarga el teorema 2.12, mientras que del producto se encarga el lema 2.14. Así, aunque la suma de la derecha se pueda acotar trivialmente por  $(2A_m)^2$ , para algunos valores de  $m$  se puede hacer una estimación más fina. En particular, para  $A := 1 + \lfloor \frac{2 \log t}{\log N} \rfloor \leq m \leq \lfloor \frac{5 \log t}{\log N} \rfloor := B$ , podemos usar el lema 2.14. Tras algunos cálculos, se deduce que:

$$\prod_{m=1}^r \sum_{|\mu_m| < A_m} \min(2A_m, \|\alpha_m \mu_m\|^{-1}) \leq W(4k)^{2r} 2^{8r^2} a^{r(r+1)} \log^r N,$$

donde  $W = \prod_{A \leq m \leq B} N^{m/5} t^{-1}$ . A continuación, tomamos  $Y = \log t / \log N$  y, por razones técnicas relacionadas con la teoría de pares de exponentes, podemos suponer que  $Y \geq 10$ , es decir, podemos restringirnos al intervalo  $\exp(\log^{2/3} t) \leq N \leq t^{1/10}$ . La condición  $Y \geq 10$  nos lleva a que  $W \leq -\frac{841 \log^2 t}{1000 \log N}$ , luego se tiene que:

$$\prod_{m=1}^r \sum_{|\mu_m| < A_m} \min(2A_m, \|\alpha_m \mu_m\|^{-1}) \leq (4k)^{2r} 2^{8r^2} a^{r(r+1)} \exp\left(-\frac{841 \log^2 t}{1000 \log N}\right) \log^r N,$$

y

$$U^{4k^2} \leq J_{k,r}^2(a) (4k)^{2r} 2^{8r^2} a^{8k^2 - 4k + r(r+1)} \exp\left(-\frac{841 \log^2 t}{1000 \log N}\right) \log^r N.$$

Por tanto, solo nos quedaría estimar  $J_{k,r}(a)$ . Para ello, usamos el teorema 2.12 con  $k = r^2 + (Rr)r$ , donde  $R \geq 0$  es un entero a determinar. Así, tenemos que:

$$U(n) \leq ((4k)^{2r} 2^{8r^2} (4r)^{8krR} (2k)^{-2} a^{r(r+1)(2k)^{-2(1-r^{-1})Rr} a^2 (\log N)^{r(2k)^{-2}} \exp\left(-\frac{841 \log^2 t}{4000k^2 \log N}\right).$$

El primer factor de la derecha está acotado, mientras que, para todo  $\varepsilon > 0$  y  $N > N_0(\varepsilon)$ ,  $(\log N)^{r(2k)^{-2}} < \exp\left(\frac{\varepsilon \log^2 t}{4000k^2 \log N}\right)$ . Por otro lado, la condición  $N \leq t^{1/10}$  nos asegura que  $r \geq 50$ , de manera que el término con  $a$  está acotado por  $\exp\left(\frac{51e^{-R} \log N}{500(R+1)^{2r^2}}\right)$ . Combinando todas estas estimaciones obtenemos que:

$$U(n) \ll a^2 \exp\left(\left(\frac{51e^{-R}}{500} + \frac{\varepsilon - 841}{100401}\right) \frac{\log N}{r^2(R+1)^2}\right).$$

Por último, elegimos  $R \geq 0$  entero para que lo de dentro de la exponencial sea lo menor posible. Esto nos da  $R = 4$ , lo cual nos lleva a que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, se verifica que:

$$U(n) \ll a^2 \exp\left(-\frac{\log N}{3842r^2}\right) \leq a^2 \exp\left(-\frac{\log^3 N}{96500 \log^2 t}\right),$$

y se sigue el resultado. De hecho, habríamos obtenido una estimación mejor que la del lema.  $\square$

Gracias al resultado anterior, ya podemos obtener lo que tan ansiadamente estábamos buscando, el respectivo teorema sobre el orden de  $\zeta(s)$ :

**Teorema 2.16.** *Existe una constante absoluta  $\eta > 0$  tal que, para  $1 - \eta \leq \sigma \leq 1$  y uniformemente en  $\sigma$ , se verifica:*

$$(2.75) \quad \zeta(\sigma + it) \ll t^{122(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \quad (t \geq t_0).$$

*Cabe destacar que Richert probó, en 1967, este teorema con constante 100 en lugar de 122 y su resultado es válido uniformemente en  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ .*

Este resultado implica que:

$$(2.76) \quad \zeta(1 + it) \ll \log^{2/3} t, \quad (t \geq t_0),$$

que es el mejor resultado del orden de  $\zeta(1 + it)$  conocido hasta la fecha, aunque la hipótesis de Riemann implica una cota aún más fuerte como es  $\zeta(1 + it) \ll \log \log t$  (teorema 14.8 de [52]). La relevancia de este teorema es la de ser capaces de dar buenas cotas para cuando  $\sigma$  está próximo a 1. Pasemos a demostrarlo:

*Demostración.* Comenzamos usando el teorema 2.15 para estimar la suma  $S(t, M) := \sum_{n \leq M} n^{it}$  cuando  $N_0 \leq M \leq t$ . Para ello, la idea es descomponer el rango de  $n$  en subintervalos diádicos de la forma  $[M2^{-k}, M2^{1-k}]$  con  $k = 1, 2, \dots$ . Ahora bien, siguiendo la notación del teorema 2.15, si en cada subsuma llamamos  $N$  al extremo inferior del rango,  $N = M2^{-k}$ , entonces todas ellas son de la forma  $S(t; N, 2N)$  con  $N_02^{-k} \leq N \leq M/2 \leq t/2$ . Como vemos, esto garantiza que podemos aplicar el teorema 2.15 a cada una por separado. En definitiva, obtenemos:

$$(2.77) \quad \begin{aligned} S(t, M) &\ll M \sum_{k=0}^{O(\log M)} 2^{-k} \exp\left(-\frac{\log^3(M2^{-k})}{10^5 \log^2 t}\right) \\ &= M \left( \sum_{k < \delta \log M} + \sum_{k \geq \delta \log M} \right) := M \left( \sum_1 + \sum_2 \right), \end{aligned}$$

donde  $\delta > 0$  es un número fijo suficientemente pequeño. Una vez aclarado el uso del teorema 2.15 y por comodidad, usaremos la letra  $N$  en lugar de la  $M$ , es decir, se tiene (2.77) con  $N$  para  $N_0 \leq N \leq t$ . De esta manera, en  $\sum_1$  tenemos que  $N2^{-k} \geq N^{1-\delta \log 2}$ , luego:

$$\sum_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \exp\left(\frac{-(1-\delta \log 2)^3 \log^3 N}{10^5 \log^2 t}\right) \leq 2 \exp\left((\varepsilon - 10^{-5}) \frac{\log^3 N}{\log^2 t}\right),$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$ , si  $\delta = \delta(\varepsilon)$  es suficientemente pequeño. Además, como:

$$\sum_2 \leq \sum_{k \geq \delta \log N} 2^{-k} \leq 2^{-\delta \log N} = N^{-\delta \log 2},$$

obtenemos, tras cambiar  $\delta$  por  $\delta/\log 2$ , lo siguiente:

$$(2.78) \quad S(t, N) \ll N \exp\left((\varepsilon - 10^{-5}) \frac{\log^3 N}{\log^2 t}\right) + N^{1-\delta}.$$

Ahora tomamos  $N = \lfloor \exp(\log^{2/3} t) \rfloor$  y, usando (2.30), tenemos:

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq N} n^{-\sigma - it} + \sum_{N < n \leq t} n^{-\sigma - it} + O(t^{-\sigma}).$$

La primera suma es:

$$\ll N^{1-\sigma} \sum_{n \leq N} n^{-1} \ll e^{(1-\sigma) \log N} \log^{2/3} t \leq t^{(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t,$$

si  $(1-\sigma) \log^{2/3} t \leq 1$ . Si  $(1-\sigma) \log^{2/3} t > 1$ , se tiene que  $(1-\sigma) \log^{2/3} t \leq (1-\sigma)^{3/2} \log t$ , luego en cualquier caso tenemos la cota:

$$\sum_{n \leq N} n^{-\sigma - it} \ll t^{(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t.$$

Para la segunda suma, aplicando sumación por partes y (2.78) para cierto  $\delta_0 > 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq t} n^{-s} &\ll t^{-\sigma} |S(t, t)| + \int_N^t u^{-\sigma-1} |S(t, u)| du \\ &\ll t^{1-\sigma-\delta_0} + \int_N^t u^{-\sigma} \exp\left((\varepsilon - 10^{-5}) \frac{\log^3 u}{\log^2 t}\right) du \\ &\ll t^{(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t + \int_{\log N}^{\log t} \exp\left(v(1-\sigma) + (\varepsilon - 10^{-5}) \frac{v^3}{\log^2 t}\right) dv, \end{aligned}$$

supuesto que  $1 - \delta_0 \leq \sigma \leq 1$  para un cierto  $\delta_0 > 0$  fijo y suficientemente pequeño. Escribiendo, por brevedad,  $D = 10^{-5} - 2\varepsilon$ , vemos que la integral anterior es menor que:

$$(2.79) \quad \left( \max_{\log N \leq v \leq \log t} \exp\left(v(1-\sigma) - \frac{Dv^3}{\log^2 t}\right) \right) \int_{\log N}^{\log t} \exp\left(-\frac{\varepsilon v^3}{\log^2 t}\right) dv.$$

Por un lado, haciendo el cambio de variable  $v^3 = y \log^2 t$  se tiene que:

$$\int_{\log N}^{\log t} \exp\left(-\frac{\varepsilon v^3}{\log^2 t}\right) dv = \frac{1}{3} \log^{2/3} t \int_{1+o(1)}^{\log t} y^{-2/3} e^{-\varepsilon y} dy \ll \log^{2/3} t.$$

Esto se debe a que:

$$\int_{1+o(1)}^{\log t} y^{-2/3} e^{-\varepsilon y} dy \ll \int_{1/2}^{\infty} e^{-\varepsilon y} dy \ll 1.$$

Por otro lado, si  $f(v) = v(1-\sigma) - Dv^3 \log^{-2} t$ , entonces  $f'(v_0) = 0$  para  $v_0 = (\log t) \left(\frac{1-\sigma}{3D}\right)^{1/2}$  y  $f(v_0) = \frac{2}{3}(3D)^{-1/2}(1-\sigma)^{3/2} \log t$ , de manera que la expresión en (2.79) es:

$$\ll t^{(2/3)(3D)^{-1/2}(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t.$$

Por tanto, para cierto  $\eta > 0$ , obtenemos:

$$\zeta(s) \ll t^{(2/3)(3D)^{-1/2}(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \quad 1 - \eta \leq \sigma \leq 1.$$

Luego el resultado se sigue de tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño.  $\square$

Cabe destacar que, si en lugar de tener la estimación del teorema 2.15, tuviésemos una desigualdad más general dada por:

$$(2.80) \quad S(t; N, N_1) \ll N \exp\left(-\gamma \frac{\log^{a+1} N}{\log^a t}\right), \quad (N_0 \leq N \leq t/2, t \geq t_0, a > 0),$$

válida para cierto  $a > 0$  fijo y una constante absoluta  $\gamma > 0$ , entonces los argumentos anteriores nos llevarían a:

$$(2.81) \quad \zeta(\sigma + it) \ll t^{C(1-\sigma)^{(a+1)/a}} \log^{a/(a+1)} t, \quad (1 - \eta \leq \sigma \leq 1),$$

para cierto  $\eta > 0$  suficientemente pequeño y una constante absoluta  $C > 0$ . Esto generalizaría los teoremas 2.15 y 2.16 sin más que tomar  $a = 2$ , pero a día de hoy el método de Vinogradov-Korobov no parece llevar a (2.80) para ningún  $a < 2$ . Para demostrar la región libre de ceros basaremos nuestros argumentos en la cota general (2.81), de modo que en vista del teorema 2.15, tendremos la región libre de ceros con  $a = 2$ . Como:

$$(2.82) \quad t^{C(1-\sigma)^{(a+1)/a}} = \exp\left(C(1-\sigma)^{(a+1)/a} \log t\right) \leq \exp(\varepsilon \log \log t) = \log^\varepsilon t,$$

para

$$(2.83) \quad \sigma \geq 1 - (\varepsilon C^{-1} \log \log t / \log t)^{a/(a+1)}, \quad (t \geq t_0),$$

tenemos que, para todo  $\varepsilon > 0$ , se cumple que:

$$(2.84) \quad \zeta(\sigma + it) \ll \log^{a/(a+1)+\varepsilon} t,$$

bajo la condición (2.83). Con ello, ya tenemos todas las herramientas para demostrar el teorema.

**Teorema 2.17. Vinogradov-Korobov (1958):** *Existe una constante absoluta  $C > 0$  tal que  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  en la región dada por:*

$$(2.85) \quad \sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}, \quad t \geq t_0.$$

*Demostración.* Una vez tenemos las estimaciones (2.83) y (2.84) con  $a = 2$ , podemos aplicar el teorema 1.29 con:

$$(2.86) \quad \Phi(t) = \left(\frac{a}{a+1} + \varepsilon\right) \log \log t \quad \text{y} \quad \theta(t) = C_1(\log t)^{-a/(a+1)}(\log \log t)^{a/(a+1)}.$$

Comprobar que las condiciones del teorema se satisfacen es rutinario, por ejemplo:

$$(2.87) \quad \frac{\Phi(t)}{\theta(t)} \ll (\log t)^{a/(a+1)}(\log \log t)^{1/(a+1)} = o\left((\log t)^{\frac{a}{a+1}+\varepsilon}\right) = o(e^{\Phi(t)}), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por tanto, obtenemos que  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  en la región:

$$(2.88) \quad \sigma \geq 1 - C(\log t)^{-a/(a+1)}(\log \log t)^{-1/(a+1)}, \quad (C > 0, t \geq t_0),$$

y tenemos lo que queríamos.  $\square$

### 2.3. El teorema de los números primos II

Después de haber obtenido la fórmula explícita truncada en el teorema 1.45 y la mejor región libre de ceros conocida en el teorema 2.17, será relativamente simple deducir el teorema de los números primos en su versión más fuerte conocida hasta la fecha. De hecho, será igualmente sencillo deducirlo de la región, algo más general, dada por (2.88):

$$(2.89) \quad \zeta(s) \neq 0, \text{ para } \sigma \geq 1 - C_1(\log t)^{-a/(a+1)}(\log \log t)^{-1/(a+1)},$$

donde  $a > 0$ ,  $C_1 > 0$  y  $t \geq t_0$ . Por tanto, para cualquier cero  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $\zeta(s)$  con  $|\gamma| \leq T$ , tenemos que:

$$(2.90) \quad \beta \leq 1 - C_1(\log T)^{-a/(a+1)}(\log \log T)^{-1/(a+1)}.$$

Suponiendo que  $x^\varepsilon \leq T \leq x$ , obtenemos del teorema 1.45 que:

$$(2.91) \quad \begin{aligned} \psi(x) &= x + O\left(x^{1-C_1(\log T)^{-a/(a+1)}(\log \log T)^{-1/(a+1)}} \sum_{|\gamma| \leq T} |\gamma|^{-1}\right) + O(xT^{-1} \log^2 x) \\ &= x + O\left(x \exp\left(-C_2 \log x (\log T)^{-a/(a+1)} (\log \log T)^{-1/(a+1)}\right)\right) + O(xT^{-1} \log^2 x), \end{aligned}$$

para cierto  $C_2 > 0$ , donde hemos usado el lema 1.53. Para hacer los términos de error parecidos elegimos:

$$(2.92) \quad T = \exp((\log x)^{(a+1)/(2a+1)}(\log \log x)^{-1/(2a+1)}),$$

de manera que obtenemos, para una constante  $C_3 > 0$ :

$$(2.93) \quad \psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-C_3(\log x)^{(a+1)/(2a+1)}(\log \log x)^{-1/(2a+1)}\right)\right).$$

El teorema 2.17 nos muestra que (2.90) se tiene con  $a = 2$ , lo que nos da la siguiente forma del teorema de los números primos:

**Teorema 2.18.** *Existe una constante absoluta  $C > 0$  tal que:*

$$(2.94) \quad \psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-C(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)\right),$$

que en la forma de  $\pi(x)$  nos da:

$$(2.95) \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x \exp\left(-C(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)\right).$$

De hecho, podemos decir algo más acerca de la relación entre la región libre de ceros de  $\zeta(s)$  y el error en el teorema de los números primos. En este sentido, es de destacar la siguiente equivalencia que probó P. Turán en 1950, [53]:

$$(2.96) \quad \psi(x) = x + O(x \exp(-C_1(\log x)^\kappa)), \quad (0 < \kappa < 1, C_1 > 0),$$

es equivalente a:

$$(2.97) \quad \zeta(s) \neq 0, \quad \text{para } \sigma \geq 1 - C_2(\log t)^{(\kappa-1)/\kappa}, \quad (C_2 > 0, t \geq t_0(\kappa)).$$

Gracias a la fórmula explícita truncada para  $\psi$ , pasar de (2.97) a (2.96) es rutinario. La otra implicación es la que es realmente difícil de probar. Por consiguiente, el teorema 2.18 es esencialmente una versión equivalente a la región libre de ceros de Vinogradov-Korobov y viceversa.

# Teoremas de densidad de ceros

---

## 3.1. Introducción

Los teoremas de densidad de ceros se refieren a la obtención de cotas superiores para la función  $N(\sigma, T)$ , que representa el número de ceros  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $\zeta(s)$  para los cuales  $\beta \geq \sigma \geq 0$ , donde  $\sigma$  está fijada, y  $|\gamma| \leq T$  con  $T > 2$ . Las estimaciones para  $N(\sigma, T)$  vendrán usualmente dadas por expresiones de la forma:

$$(3.1) \quad N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)} \log^C T,$$

donde  $C \geq 0$ , o de la forma:

$$(3.2) \quad N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

A lo largo de este capítulo siempre supondremos que la constante dada por  $\ll$  en (3.2) es uniforme en  $\sigma$  y  $T$  y depende solo de  $\varepsilon$ . En vista del teorema 1.39, se obtiene que  $A(\sigma)(1 - \sigma) = 1$  y  $C = 1$  en (3.1) es el óptimo para  $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$  pues, en dicho rango,  $N(\sigma, T) \geq \frac{1}{2}N(T)$ , mientras que para  $\sigma > \frac{1}{2}$  tenemos que  $A(\sigma)(1 - \sigma) \leq 1$  y  $A(\sigma)(1 - \sigma)$  es no creciente. Las estimaciones dadas por los teoremas de densidad tienen un gran número de aplicaciones en teoría analítica de números y en el estudio de la distribución de los primos. De hecho, muchos resultados que dependen de hipótesis muy fuertes como la hipótesis de Lindelöf o incluso la hipótesis de Riemann, pueden obtenerse casi con la misma precisión partiendo de una conjetura mucho más débil como es que  $A(\sigma) \leq 2$  para  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ . Esta conjetura se conoce, tanto en (3.1) como en (3.2), como la hipótesis de densidad. Por otro lado, dado que en las aplicaciones (3.1) no tiene mucha ventaja respecto a su versión más débil (3.2), nos centraremos principalmente en obtener cotas del segundo tipo, formulando nuestros resultados como cotas superiores para  $A(\sigma)$  en (3.2) en lugar de para el propio  $N(\sigma, T)$ . Nótese que, dado que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en  $\sigma = 1$ , por la explicación anterior es suficiente con considerar el rango  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ . Con este propósito, vamos a introducir una técnica conocida como el método de detección de ceros. Pero antes, necesitamos algunas herramientas analíticas previas.

### 3.2. Polinomios de Dirichlet y momentos para $\zeta(s)$

Esta sección está principalmente dedicada a probar un resultado fundamental en todas las estimaciones posteriores de densidad de ceros: el teorema del valor medio para polinomios de Dirichlet. Por otro lado, para los teoremas de densidad también vamos a necesitar otra herramienta muy potente, que son los momentos de la función  $\zeta(s)$ . Algunos de los resultados relativos a ellos dependen en gran medida de estimaciones para polinomios de Dirichlet y, por dicha razón, los introducimos juntos. Para entender el desarrollo histórico y la necesidad de ambos necesitamos algo de contexto. Una de las conjeturas más importantes y conocidas en la teoría de las funciones zeta, detrás de la hipótesis de Riemann, es **la hipótesis de Lindelöf**. Esta nos dice que:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll (1 + |t|)^\varepsilon.$$

Una de las consecuencias inmediatas que tendría probar dicha hipótesis sería la de obtener la siguiente estimación:

$$(3.3) \quad M_k(T) = \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt \ll T^{1+\varepsilon}, \quad \text{para cualquier } k \geq 1.$$

De hecho, (3.3) es equivalente a la hipótesis de Lindelöf. Por tanto, gran parte del estudio en la teoría de las funciones zeta está dedicado a obtener estimaciones de lo que se conocen como los  $2k$ -momentos de la función  $\zeta$  de Riemann, que no son más que las integrales de la forma  $M_k(T)$ . Cabe destacar que, aunque solo lo hemos definido para  $\sigma = \frac{1}{2}$ , puede usarse cualquier  $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ . El primer resultado que se obtuvo en este sentido fue probado por Hardy y Littlewood en 1918, [21], y dice lo siguiente:

**Teorema 3.1. Hardy-Littlewood (1918):**

$$(3.4) \quad \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \sim T \log T.$$

El siguiente resultado en llegar fue para el cuarto momento gracias a A.E. Ingham, [27]. Él probó el teorema central que vamos a usar en la siguiente sección. Este nos dice lo siguiente:

**Teorema 3.2. Ingham (1926):**

$$(3.5) \quad \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^4 dt = (2\pi^2)^{-1} T \log^4 T + O(T \log^3 T).$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en el teorema 5.1 de [29]. En vista de los dos resultados anteriores pareciera que, dado  $k \geq 1$ , el respectivo momento es  $\sim C_k T \log^{k^2} T$  para cierta constante positiva  $C_k$ ; luego veremos algunos resultados condicionales que van en dicha dirección. Muchas décadas después del resultado conseguido por Ingham, D.R. Heath-Brown lo mejoró, obteniendo:

$$(3.6) \quad \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^4 dt = T \sum_{k=0}^4 c_k \log^{4-k} T + O(T^{7/8+\varepsilon}),$$

donde  $c_0 = (2\pi^2)^{-1}$  y las otras constantes  $c_k$  son efectivas. Tras lo obtenido por Ingham, se pensaba que el sexto momento sería el siguiente en conocerse. Sin embargo, el orden de este momento permanece sin probar hasta la fecha y es que, los momentos de orden  $\geq 6$ , parecen ser mucho más complicados de obtener. A continuación, presentamos algunos resultados que avanzaron en gran medida nuestro conocimiento de los momentos. Uno de los más importantes es el siguiente:

**Teorema 3.3. Heath-Brown (1978): [23]**

$$(3.7) \quad \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{12} dt \ll T^2 \log^{17} T.$$

Posteriormente, en 2009, Soundararajan demostró, bajo la hipótesis de Riemann, que para cualquier  $k \geq 1$ , se verifica lo siguiente:

$$(3.8) \quad T \log^{k^2} T \ll_k M_k(T) \ll_{k,\varepsilon} T \log^{k^2+\varepsilon} T.$$

Finalmente, en 2013 y, nuevamente bajo la hipótesis de Riemann, Harper logró eliminar ese  $\varepsilon$  de la cota de Soundararajan para obtener:

$$(3.9) \quad M_k(T) \ll T \log^{k^2} T.$$

Una vez hemos visto lo que son los momentos de la función  $\zeta(s)$ , ya estamos en condiciones de dar un par de definiciones que usaremos en la próxima sección. En primer lugar, llamamos momentos de orden superior de  $\zeta(s)$  a los momentos de orden mayor que 4. Como casi siempre sucede en este tipo de menesteres, es conveniente distinguir el caso  $\sigma = \frac{1}{2}$  del caso  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ . Consecuentemente:

**Definición 3.4.** Definimos el número  $M(A)$  para cualquier  $A \geq 1$  como el ínfimo de los  $M \geq 1$  tales que:

$$(3.10) \quad \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^A dt \ll T^{M+\varepsilon}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Análogamente, para  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ , definimos el número  $m(\sigma)$  como el supremo de los  $m \geq 4$  tales que:

$$(3.11) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^m dt \ll T^{1+\varepsilon}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Naturalmente, el objetivo del estudio de estos dos números es obtener cotas superiores para  $M(A)$  y cotas inferiores para  $m(\sigma)$ . Como ya hemos comentado antes, la veracidad de  $M(A) = 1$  no se sabe para ningún  $A > 4$  a día de hoy, mientras que, para cualquier  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  fijo, es posible encontrar un número  $m > 4$  tal que se verifica (3.11). Además, nótese que, por lo comentado anteriormente, el teorema de Heath-Brown demuestra que  $M(12) \leq 2$  mientras que  $M(A) = 1$  para todo  $A \geq 1$  es equivalente a la hipótesis de Lindelöf. A continuación, presentamos un teorema que nos va a ser de gran utilidad y que se puede encontrar en la sección 8.1 de [29].

**Teorema 3.5.** Sean  $T \leq t_r \leq 2T$  para  $r = 1, \dots, R$  tales que  $|t_r - t_s| \geq \log^C T$  para todo  $1 \leq r \neq s \leq R$ , donde  $C > 0$  es una constante fija. Entonces se tiene que: La condición (3.10) con  $M = M(A)$  es equivalente a que se cumpla:

$$(3.12) \quad \sum_{r \leq R} \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it_r \right) \right|^A \ll T^{M(A)+\varepsilon},$$

y la condición (3.11) con  $m = m(\sigma)$  es equivalente a que se verifique:

$$(3.13) \quad \sum_{r \leq R} |\zeta(\sigma + it_r)|^{m(\sigma)} \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Pasamos ya a demostrar los teoremas del valor medio para polinomios de Dirichlet, tanto en su forma integral como en su versión discreta, para lo que seguiremos las secciones 5.2 y 5.3 de [29].

**Teorema 3.6.** Sean  $a_1, \dots, a_N$  números complejos cualesquiera. Entonces:

$$(3.14) \quad \int_0^T \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{it} \right|^2 dt = T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + O\left( \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \right).$$

Además, la anterior fórmula sigue siendo válida para  $N = \infty$ , supuesto que la serie del lado derecho de (3.14) converja.

*Demostración.* Comenzamos elevando al cuadrado e integrando la suma de la izquierda para obtener que el lado izquierdo es:

$$(3.15) \quad T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{m \neq n \leq N} a_m \bar{a}_n \frac{(m/n)^{iT} - 1}{i \log(m/n)}.$$

De manera que (3.14) es consecuencia de:

$$(3.16) \quad \sum_{m \neq n \leq N} \frac{a_m \bar{a}_n}{\log(m/n)} \ll \sum_{n \leq N} n |a_n|^2,$$

aplicado directamente una vez y otra vez reemplazando  $a_m$  por  $a_m m^{iT}$ . Para obtener (3.16) primero probaremos que:

$$(3.17) \quad \left| \sum_{m \neq n} \frac{a_m \bar{a}_n}{m - n} \right| \leq \pi \sum |a_n|^2,$$

que se conoce en la literatura como la desigualdad de Hilbert. Sea  $S = \sum_{m \neq n} \frac{a_m \bar{a}_n}{m - n}$ . Se tiene que  $S = -\bar{S}$ , luego  $S$  es imaginario puro y  $S/i$  es real. De la identidad elemental:

$$(3.18) \quad \int_0^1 e(kx) dx = \int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0, \end{cases}$$

se deduce que:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \int_0^y \left| \sum a_n e(nx) \right|^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^y \left( \sum |a_n|^2 + \sum_{m \neq n} a_m \bar{a}_n e((m-n)x) \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \sum |a_n|^2 + \int_0^1 \sum_{m \neq n} a_m \bar{a}_n \frac{e((m-n)y) - 1}{2\pi i(m-n)} dy = \frac{1}{2} \sum |a_n|^2 - \frac{S}{2\pi i}. \end{aligned}$$

Luego el resultado se sigue si  $S/i \geq 0$ . Si  $S/i < 0$ , entonces repetimos el argumento anterior con  $|\sum a_n e(-nx)|^2$  y se tiene. De hecho, la prueba anterior muestra un resultado un poco más general:

$$(3.20) \quad \left| \sum_{m \neq n} \frac{a_m \bar{a}_n}{q_m - q_n} \right| \leq \pi \sum |a_n|^2,$$

para cualquier sucesión de enteros  $\{q_n\}_n$  tales que no se repita ningún término. Más en general, se tiene que:

$$(3.21) \quad \left| \sum_{m \neq n} \frac{a_m \bar{b}_n}{q_m - q_n} \right| \leq 3\pi \left( \sum |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Para ver este último resultado, partimos de la siguiente identidad, que se demuestra calculando la integral explícitamente:

$$(3.22) \quad (2\pi i)^{-1} \sum_{m \neq n} \frac{a_m \bar{b}_n}{q_m - q_n} = \frac{1}{2} \sum a_n \bar{b}_n - \int_0^1 \int_0^y \sum a_m e(q_m x) \sum \bar{b}_n e(-q_n x) dx dy.$$

En el término integral aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.19) y (3.20) para obtener:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} &\left| \int_0^1 \int_0^y \sum a_m e(q_m x) \sum \bar{b}_n e(-q_n x) dx dy \right|^2 \\ &\leq \int_0^1 \int_0^y \left| \sum a_n e(q_n x) \right|^2 dx dy \int_0^1 \int_0^y \left| \sum \bar{b}_n e(-q_n x) \right|^2 dx dy \leq \sum |a_n|^2 \sum |b_n|^2. \end{aligned}$$

Pasamos ahora a demostrar (3.16). Por simplicidad, denotaremos por  $L_n = \log n$  y  $S = \sum_{m \neq n \leq N} \frac{a_m \bar{a}_n}{L_m - L_n}$ , de manera que  $S$  es imaginario puro y, como muestran las pruebas anteriores, podemos suponer que  $S/i \geq 0$ . Análogamente a (3.19) obtenemos que:

$$(3.24) \quad \frac{S}{2\pi i} \leq \frac{1}{2} \sum |a_n|^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{k, l \geq 1} \left| \sum_{(m, n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \int_0^1 a_m \bar{a}_n \frac{e((L_m - L_n)y)}{L_m - L_n} \right|,$$

donde hemos dividido el rango de sumación  $1 \leq n \leq N$  en subintervalos diádicos  $I_j = (N2^{-j}, N2^{1-j}]$  para  $j = 1, 2, \dots$ . Como  $|\int_0^1 e^{ixt} dt| = |(e^{it} - 1)t^{-1}| \leq 2|t|^{-1}$  para

$0 \neq t \in \mathbb{R}$ , tenemos que, para  $|k - l| \geq 2$  en (3.24) se verifica que:

$$(3.25) \quad \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l} \int_0^1 a_m \bar{a}_n \frac{e((L_m - L_n)y)}{L_m - L_n} \ll \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l} |a_m a_n| \max_{(m,n) \in I_k \times I_l} (L_m - L_n)^{-2} \\ \ll (k - l)^{-2} \left( \sum_{I_k \times I_l} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{I_k \times I_l} |a_n|^2 \right)^{1/2} \\ \ll (k - l)^{-2} N 2^{-(k+l)/2} \left( \sum_{m \in I_k} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in I_l} |a_n|^2 \right)^{1/2} \ll (k - l)^{-2} (S_k S_l)^{1/2},$$

donde  $S_j = \sum_{n \in I_j} n |a_n|^2$ . Nótese que en la segunda desigualdad hemos usado que, si  $k - l \geq 2$  (el caso  $l - k \geq 2$  es análogo), entonces se cumple que:

$$(3.26) \quad |L_m - L_n| \geq \log(N 2^{-l}) - \log(N 2^{1-k}) = (\log 2)(k - l - 1) \geq \frac{1}{4}(k - l).$$

Nuevamente, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que:

$$(3.27) \quad \sum_{|k-l| \geq 2} (k - l)^{-2} (S_k S_l)^{1/2} \leq \left( \sum_{k \neq l} (k - l)^{-2} S_k \right)^{1/2} \left( \sum_{k \neq l} (k - l)^{-2} S_l \right)^{1/2} \ll \sum_{n \leq N} n |a_n|^2,$$

puesto que las series  $\sum_{k, k \neq l} (k - l)^{-2}$ ,  $\sum_{l, k \neq l} (k - l)^{-2}$  convergen. Por otro lado, la integral de los términos en (3.24) para los cuales  $|k - l| \leq 1$  se pueden escribir como:

$$(3.28) \quad \int_0^1 \sum_{\substack{(m,n) \in I_k \times I_l \\ m \neq n}} a_m \bar{a}_n \frac{e((L_m - L_n)y)}{L_m - L_n} dy = M \int_0^1 \left( \sum_{\substack{(m,n) \in I_k \times I_l \\ m \neq n}} \frac{a'_m \bar{a}'_n}{M(L_m - L_n)} \right) dy,$$

donde  $a'_m = a_m e(L_m y)$  y  $M = N 2^{6-k}$ . Por tanto, basta con estimar la serie. Introducir esta  $M$  puede parecer algo misterioso pero la razón es que, si  $|k - l| \leq 1$ , entonces para  $m > n$ ,  $(m, n) \in I_k \times I_l$  se verifica que:

$$(3.29) \quad [ML_m] - [ML_n] \geq M(L_m - L_n) - 2 = M \log \left( 1 + \frac{m - n}{n} \right) - 2 \\ \geq \frac{2^{6-k} N (m - n)}{3N 2^{2-k}} - 2 \geq \frac{16}{3} (m - n) - 2 \geq m - n,$$

debido a que  $m - n \geq 1$ ,  $0 \leq (m - n)/n \leq 3$  y  $\log(1 + x) \geq x/3$  para  $0 \leq x \leq 3$ . Por tanto, para  $|k - l| \geq 1$ , tenemos que  $M(L_m - L_n)([ML_m] - [ML_n]) \gg (m - n)^2$ , luego:

$$(3.30) \quad M \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{a'_m \bar{a}'_n}{M(L_m - L_n)} = M \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{a'_m \bar{a}'_n}{[ML_m] - [ML_n]} \\ + O \left( M \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{|a_m a_n|}{(m - n)^2} \right).$$

Ahora nótese que, como  $|k - l| \leq 1$ , se tiene que  $M \asymp m \asymp n$ , luego  $M \ll (mn)^{1/2}$ . De esta manera, al aplicar (3.21) con  $q_m = [ML_m]$  a la primera suma del lado derecho,

obtenemos que:

$$\sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{M a'_m \bar{a}'_n}{[ML_m] - [ML_n]} \ll \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{m^{1/2} a'_m n^{1/2} \bar{a}'_n}{[ML_m] - [ML_n]} \ll (S_k S_l)^{1/2}.$$

Por otro lado, una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la convergencia de  $\sum_{m \neq n} (m-n)^{-2}$  con una de las dos variables fijada, nos lleva a:

$$\sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{M |a_m \bar{a}_n|}{(m-n)^2} \ll \sum_{(m,n) \in I_k \times I_l, m \neq n} \frac{m^{1/2} |a_m|}{(m-n)} \frac{n^{1/2} |a_n|}{(m-n)} \ll (S_k S_l)^{1/2}.$$

Por último, tenemos que:

$$\sum_{|k-l| \leq 1} (S_k S_l)^{1/2} = \sum_k S_k + 2 \sum_k (S_k S_{k+1})^{1/2} \ll \sum_k S_k = \sum_{n \leq N} n |a_n|^2,$$

que, junto a las anteriores estimaciones, nos da (3.16) y, con ello, el resultado. Finalmente, cabe destacar que para  $N = \infty$  el razonamiento es análogo si las series de la derecha de (3.14) convergen, aunque, en dicho caso, tomamos  $I_j = (2^{j-1}, 2^j]$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** Sean  $1 \leq t_1 < \dots < t_R \leq T$  números reales tales que  $|t_r - t_s| \geq 1$  para  $r \neq s \leq R$  y sean  $a_1, \dots, a_N$  números complejos cualesquiera. Entonces:

$$(3.31) \quad \sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{-it_r} \right|^2 \ll \left( T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \right) \log N.$$

*Demostración.* Si  $0 \leq x \leq 1$  y  $f(x) \in C^1[0, 1]$ , entonces integrando por partes obtenemos que:

$$(3.32) \quad f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x t f'(t) dt + \int_x^1 (t-1) f'(t) dt,$$

luego:

$$(3.33) \quad |f(1/2)| \leq \int_0^1 \left( |f(x)| + \frac{1}{2} |f'(x)| \right) dx.$$

En particular, tomando  $f(x) = F(x - \frac{1}{2} + t_r)$  tenemos que:

$$(3.34) \quad |F(t_r)| \leq \int_{t_r-1/2}^{t_r+1/2} |F(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{t_r-1/2}^{t_r+1/2} |F'(t)| dt.$$

Ahora tomamos  $F(t) = \left( \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \right)^2$ . Por la condición impuesta sobre los  $t_r$  se tiene que los intervalos  $(t_r - 1/2, t_r + 1/2)$  son disjuntos dos a dos para todo  $r \leq R$ , luego el lado izquierdo de (3.31) es menor que:

$$(3.35) \quad \int_0^{T+1} |F(t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^{T+1} |F'(t)| dt.$$

Observemos que la primera integral es exactamente la del enunciado del teorema anterior, por lo que su contribución es  $\ll T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2$ . Con respecto a la otra integral, nótese que:

$$(3.36) \quad F'(t) = -2i \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \log n,$$

luego aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema 3.6 obtenemos lo siguiente:

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{T+1} |F'(t)| dt &\leq \left( \int_0^{T+1} \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^{T+1} \left| \sum_{n \leq N} a_n n^{-it} \log n \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\ll \left( T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 \log^2 n + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \log^2 n \right)^{1/2} \\ &\ll \left( T \sum_{n \leq N} |a_n|^2 + \sum_{n \leq N} n |a_n|^2 \right) \log N. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. Cabe destacar que, en el caso  $N = \infty$ , la misma prueba nos da que:

$$(3.38) \quad \sum_{r \leq R} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-it_r} \right|^2 \ll T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \log^2(n+1) + \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \log^2(n+1),$$

si las series de la derecha convergen.  $\square$

**Observación 3.8.** Si tomamos  $T_0$  número real fijo tal que  $|a_n| = |a_n n^{iT_0}|$  y en los teoremas anteriores cambiamos  $\int_0^T$  por  $\int_{T_0}^{T+T_0}$  y suponemos  $T_0 + 1 \leq t_1 < \dots < t_R \leq T_0 + T$ , entonces las conclusiones siguen siendo válidas.

### 3.3. El método de detección de ceros

Como motivación de las ideas que desarrollaremos en esta sección pensemos en métodos para contar ceros de funciones holomorfas  $L(s)$  en una cierta región  $D \subset \mathbb{C}$ . Uno podría pensar en la fórmula de Jensen que, como hemos visto, nos da:

$$(3.39) \quad \int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = (2\pi i)^{-1} \int_{|s|=R} \log \left| \frac{L(s)}{L(0)} \right| \frac{ds}{s}.$$

Este método nos requeriría obtener tanto cotas superiores como inferiores de  $|L(s)|$  en la frontera para obtener estimaciones del número de ceros en el interior de dicha región. Normalmente, la cota inferior es la más difícil de obtener. Por tanto, el anterior método solo es práctico para una región suficientemente ancha de manera que la frontera esté alejada de la zona donde se concentran los ceros, en otro caso, uno no puede obtener cotas inferiores razonables para  $|L(s)|$  en la frontera. Sin embargo, este no es el caso que nos ocupa y necesitamos recurrir a otras técnicas para superar esta barrera. Para

ello, la idea es multiplicar a  $L(s)$  por otra función holomorfa  $M(s)$  que crezca cuando  $L(s)$  se haga pequeña y contar el número de ceros de  $N(s) = L(s)M(s)$ . Es cierto que contaremos ceros extra provenientes de  $M(s)$  pero si elegimos  $M(s)$  de manera correcta, el orden de los ceros no se verá afectado. Así, uno podría intentar que  $M(s)$  imite a la función  $1/L(s)$ , de manera que  $N(s)$  esté cercano a 1 en la región dada. Con este fin, imaginemos que  $1/L(s)$  viene dada por una serie absolutamente convergente en una región dada y que dichas sumas parciales aproximan suficientemente bien a  $1/L(s)$  de manera uniforme en una región más ancha que no contiene los ceros de  $L(s)$ , entonces una suma parcial con suficientes sumandos es un buen candidato para  $M(s)$ . Siguiendo la idea anterior, tomamos  $L(s) = \zeta(s)$  y observamos que:

$$(3.40) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}, \quad \text{en } \Re(s) > 1.$$

En cualquier caso, uno esperaría que las sumas parciales se aproximen a  $1/\zeta(s)$  en  $s = \sigma > \frac{1}{2}$ . A estas sumas parciales las llamaremos polinomios de detección de ceros. Comenzamos aplicando (A.6) con  $x = n/Y$  y  $c = 2$  para obtener:

$$(3.41) \quad e^{-n/Y} = (2\pi i)^{-1} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) Y^w n^{-w} dw,$$

y sea  $M_X(s) = \sum_{n \leq X} \mu(n)n^{-s}$ , donde  $s = \sigma + it$ ,  $\log^2 T \leq |t| \leq T$ ,  $1 \ll X \leq Y \ll T^C$  y  $X = X(T)$ ,  $Y = Y(T)$  son parámetros que elegiremos convenientemente después. En primer lugar, definimos  $a(n) = \sum_{d|n, d \leq X} \mu(d)$ . Nótese que esta función verifica que  $|a(n)| \leq d(n) \ll n^\epsilon$ . Por un lado, gracias a la fórmula de Stirling, se deduce que la función  $\Gamma(\sigma + it)$ , con  $\sigma > 0$  fijado, decrece en módulo como una exponencial negativa en  $t$  en las rectas  $x = \sigma$  luego, en particular, es una función absolutamente integrable en dichas rectas. Por otro lado, para cada cero  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $\zeta(s)$  contado en  $N(\sigma, T)$ , la serie  $\zeta(\rho + w) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\rho-w}$  converge absolutamente, luego combinando ambos hechos se deduce lo siguiente:

$$(3.42) \quad \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(\rho + w) M_X(\rho + w) Y^w \Gamma(w) dw = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ k \leq X}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (mk)^{-\rho-w} \mu(k) Y^w \Gamma(w) dw.$$

Por consiguiente, usando (3.41), se sigue que:

$$(3.43) \quad \begin{aligned} (2\pi i)^{-1} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(\rho + w) M_X(\rho + w) Y^w \Gamma(w) dw &= \sum_{m \geq 1, k \leq X} \mu(k) (mk)^{-\rho} e^{-mk/Y} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k|n, k \leq X} \mu(k) n^{-\rho} e^{-n/Y} = e^{-1/Y} + \sum_{n > X} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la igualdad elemental  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$  para  $n > 1$ , que se puede encontrar demostrada en el teorema 2.1 de [1]. A continuación, fijado  $T$ , consideramos la misma integral que en (3.43) pero en el rectángulo que une los vértices  $2 \pm iT$ ,  $\frac{1}{2} - \beta \pm iT$ . Para  $|\gamma| \geq \log^2 T$ , el residuo en el polo  $w = 1 - \rho$

es  $o(1)$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . En efecto, por (A.15), se tiene que  $M_X(1) \ll \log X \ll \log T$ ,  $Y^{1-\rho} \ll T^C$  y  $\Gamma(1-\rho) \ll |\gamma|^{1/2-\beta} e^{-\pi|\gamma|/2}$  luego, si  $|\gamma| \geq \log^2 T$ , entonces  $\Gamma(1-\rho) \ll \log^{1-2\beta} T e^{-\frac{\pi \log^2 T}{2}} \ll T^{-\frac{\pi}{2} \log T}$  que gana a  $T^C$  para cualquier constante  $C > 0$ . Asimismo, el polo en  $w = 0$  de  $\Gamma(w)$  se cancela con el cero en ese mismo punto de  $\zeta(\rho + w)$ , luego la suma de los residuos es  $o(1)$ . Por otro lado, usando de nuevo (A.15) y (1.49) en la línea crítica,  $\zeta(s) \ll |s|^{1/4}$ , se obtiene que:

(3.44)

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Re(w)=1/2-\beta} \zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) Y^w \Gamma(w) dw = o(1) + (2\pi)^{-1} \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iv\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iv\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iv\right) Y^{1/2-\beta+iv} dv.$$

Además, se verifica que:

$$(3.45) \quad \sum_{n > Y \log^2 Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} = o(1), \quad e^{-1/Y} \rightarrow 1, \quad \text{cuando } Y \rightarrow \infty.$$

Por último, nótese que, en los segmentos de altura fijada  $v = \pm T$ , las funciones  $|\zeta(u + iv)|$  y  $|M_X(u + iv)|$  crecen a lo sumo como  $T^A$  cuando  $T \rightarrow \infty$  mientras que (A.15) nos dice que el término  $|\Gamma(u + iv)|$  decae como  $e^{-\pi|T|/2}$ , luego se sigue que las integrales en los segmentos superior e inferior del rectángulo tienden a 0 cuando  $T \rightarrow \infty$ . Combinando todas estos resultados y denotando por  $s' = \frac{1}{2} + i\gamma + iv$  y  $s'' = \frac{1}{2} - \beta + iv$ , se sigue que:

(3.46)

$$e^{-1/Y} + \sum_{X < n \leq Y \log^2 Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} = (2\pi)^{-1} \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} \zeta(s') M_X(s') \Gamma(s'') Y^{s''} dv + o(1).$$

Por consiguiente, cada cero  $\rho = \beta + i\gamma$  contado en  $N(\sigma, T)$ , verifica al menos una de las siguientes cosas:

$$(3.47) \quad \sum_{X < n \leq Y \log^2 Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \gg 1,$$

$$(3.48) \quad (2\pi)^{-1} \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} \zeta(s') M_X(s') \Gamma(s'') Y^{s''} dv \gg 1,$$

$$(3.49) \quad |\gamma| \leq \log^2 T.$$

El número de ceros satisfaciendo (3.49) es  $O(\log^3 T)$  pues cada banda  $T \leq t \leq T + 1$  tiene  $O(\log T)$  ceros como vimos en el teorema 1.39. Respecto al resto de ceros, podemos elegir  $R_1$  ceros satisfaciendo (3.48) y  $R_2$  ceros satisfaciendo (3.47) tal que las partes imaginarias de dichos ceros estén separadas unas de otras por al menos  $2 \log^4 T$ . Como en cada tramo de altura  $2 \log^4 T$  hay a lo sumo  $O(\log^5 T)$  ceros, nuevamente por el teorema 1.39, se sigue que:

$$(3.50) \quad N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1) \log^5 T.$$

Así, hemos reducido nuestro problema a obtener estimaciones para un conjunto de ceros muy concreto, ceros que hemos elegido de manera que estén suficientemente espaciados para poder llevar a cabo los argumentos que vamos a usar más adelante. En este momento, necesitamos elegir nuestra  $X$ . Una elección conveniente para  $X$  en la mayoría de teoremas de densidad será  $X = T^\varepsilon$ , de manera que  $M_X(s)(\frac{1}{2} + i\gamma + iv) \ll T^\varepsilon$  para  $|v| \leq \log^2 T$ . Ahora nótese que para cada cero  $\rho$  en  $R_1$  se satisface que:

$$(3.51) \quad \sum_{N < n \leq 2N} a(n)n^{-\rho}e^{-n/Y} \gg \frac{1}{\log Y},$$

para al menos uno de los  $O(\log Y)$  posibles valores de  $N$  tales que  $T^\varepsilon \leq N = 2^{-j}Y \log^2 Y$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Además, por el principio del palomar, podemos considerar, de entre todos los ceros de  $R_1$ , un conjunto de representantes que cumpla que su cardinal sea  $\gg R_1/\log Y$  y tal que satisfagan (3.51) para un  $N$  en particular. No importa qué  $N$  escojamos, ya que vamos a elevar (3.51) a la potencia  $k$ , donde  $k$  será un número natural, que depende solo de  $N$ , tal que  $M := N^k$  y  $(2N)^k := P \leq T^C$ , luego  $k \ll 1$  y:

$$(3.52) \quad \sum_{N < n_1, \dots, n_k \leq 2N} a(n_1)\dots a(n_k)(n_1\dots n_k)^{-\rho}e^{-\sum_{i=1}^k n_i/Y} = \sum_{M < n \leq P} b(n)n^{-\rho} \gg \frac{1}{\log^k Y},$$

con  $P \ll M$  y  $b(n) \ll d_{2k}(n) \ll n^\varepsilon$ , donde  $d_m(n)$  denota el número de formas de obtener  $n$  como producto de  $m$  números. Esto último se debe a que  $d(n) = d_2(n)$  y, como  $|a(n_i)| \leq d_2(n_i)$ , se verifica que el producto de todas las  $a(n_i)$  es menor o igual en módulo que  $\prod_{i=1}^k d_2(n_i) \leq d_{2k}(n)$ . A continuación, dividimos la serie de (3.52) en subsumas de manera que, en cada una, el rango de valores del índice no supere a  $M$  y elegimos  $k$  tal que  $N^k \leq Y^r \log^{2r} Y < N^{k+1}$  y  $k \geq r \geq 2$ , donde  $r$  es un entero fijado. Dado que  $N = M^{1/k}$ , se sigue que, si  $L = Y^r \log^{2r} Y$ , entonces  $L \leq M^{\frac{k+1}{k}}$ , luego  $L^{\frac{k}{k+1}} \leq M$ . Como  $\frac{k}{k+1}$  es creciente en  $k$  se tiene que  $L^{\frac{r}{r+1}} \leq M$  y se obtiene que:

$$(3.53) \quad Y^{r^2/(r+1)} \log^{2r^2/(r+1)} Y \ll M \ll Y^r \log^{2r} Y.$$

En vista de los momentos de la función zeta (solo sabemos que  $M(A) = 1$  para  $A \leq 4$ ), la elección más práctica para  $r$  es 2, la cual se justificará por sí misma más adelante. Esta nos da:

$$(3.54) \quad Y^{4/3} \log^{8/3} Y \ll M \ll Y^2 \log^4 Y.$$

Por tanto, aplicando sumación por partes en la serie:

$$(3.55) \quad \sum_{M < n \leq 2M} b(n)n^{-\sigma-i\gamma}n^{\sigma-\beta},$$

usando la estimación (3.52) y sumando sobre todos los ceros que hemos elegido de  $R_1$  obtenemos que:

$$(3.56) \quad R_1 \ll \log^D T \left( \sum_{\rho} \left( \left| \sum_{M < n \leq 2M} b(n)n^{-\sigma-i\gamma} \right| M^{\sigma-\beta} + \int_M^{2M} \left| \sum_{M < n \leq u} b(n)n^{-\sigma-i\gamma} \right| M^{\sigma-\beta-1} du \right) \right),$$

para cierta  $D \asymp 1$ . Por consiguiente, renombrando los  $b(n)$  dentro de la integral, es decir, definiendo  $b(n) = 0$  para  $u < n \leq 2M$ , vemos que  $R_1$  está estimado por:

$$(3.57) \quad R_1 \ll \sum_{\rho} \left| \sum_{M < n \leq 2M} b(n) n^{-\sigma - i\gamma} \right|^{\alpha} \log^D T, \quad \text{con } \alpha = 1 \text{ o } \alpha = 2,$$

donde  $D \asymp 1$ ,  $b(n) \ll n^{\varepsilon}$ ,  $M$  satisface (3.54) y la suma es sobre los ceros,  $\rho = \beta + i\gamma$ , que hemos seleccionado de  $R_1$ , a los cuales llamaremos ceros representativos de  $R_1$ . En realidad, obsérvese que la cota que se obtiene estimando de la manera natural es con  $\alpha = 1$ . Sin embargo, el resultado es cierto para cualquier  $\alpha > 0$  pues la estimación (3.52) sigue siendo válida al elevar ambos miembros a  $\alpha$ . La elección de  $\alpha = 1$  o  $\alpha = 2$  simplemente se hace para preparar, para futuras demostraciones, el uso de (A.8) y el teorema 3.7 respectivamente. Para estimar  $R_2$  definimos, para cada  $r = 1, 2, \dots, R_2$ , lo siguiente:

$$(3.58) \quad \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_r + iv'\right) \right| = \max_{-\log^2 T \leq v \leq \log^2 T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_r + iv\right) \right| \quad \text{y } t_r = \gamma_r + v',$$

donde  $\gamma_1, \dots, \gamma_{R_2}$  son partes imaginarias de ceros satisfaciendo (3.48). De la convergencia absoluta de  $|\Gamma(\frac{1}{2} - \beta + iv)|$  y (3.48) se deduce que:

$$(3.59) \quad 1 \ll T^{\varepsilon} Y^{1/2 - \sigma} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|, \quad (r = 1, 2, \dots, R_2).$$

Para  $r \neq s$  se cumple que  $|t_r - t_s| \geq \log^4 T$ , luego elevando (3.59) a la potencia  $A \geq 4$  y sumando sobre los ceros de  $R_2$ , tenemos que:

$$(3.60) \quad R_2 \ll T^{\varepsilon} \sum_{r \leq R_2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^A Y^{A(1/2 - \sigma)} \ll T^{M(A) + \varepsilon} Y^{A(1/2 - \sigma)},$$

donde  $M(A)$  está definido en 3.4 y hemos usado el teorema 3.5. Una forma alternativa de deducir una cota para  $R_2$ , que no usaremos, es utilizando la teoría de pares de exponentes que explicamos en el apéndice A.4. De esta manera se puede obtener la siguiente estimación:

$$(3.61) \quad R_2 \ll T^{1 + \varepsilon} Y^{3 - 6\sigma} + T^{(\kappa + \lambda + \varepsilon)/\kappa} Y^{(1 - 2\sigma)(1 + 2\kappa + 2\lambda)/\kappa},$$

donde  $(\kappa, \lambda)$  es cualquier par de exponentes para el cual  $\kappa > 0$ .

### 3.4. Los teoremas de Ingham y Huxley

Habiendo hecho el trabajo previo, ya estamos en condiciones de presentar ciertos teoremas de densidad específicos. Cabe destacar que la estimación para  $R_1$  es, en general, más complicada que la de  $R_2$ , para el cual las estimaciones dadas en (3.60) y (3.61) son bastante buenas. Es por ello que mostraremos varias técnicas para acotar  $R_1$ . Por un lado, para  $\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{3}{4}$ . Los teoremas del valor medio para polinomios de Dirichlet, teoremas 3.6 y 3.7, son la mejor herramienta conocida, mientras que para  $\sigma \geq \frac{3}{4}$ , los mejores resultados se obtienen mediante el uso de las desigualdades de Halász-Montgomery, (A.8) y (A.9). Pasemos ya a demostrar los teoremas de Ingham y Huxley para los que seguiremos la prueba del teorema 11.1 de [29].

**Teorema 3.9.**

$$(3.62) \quad A(\sigma) \leq \frac{3}{2-\sigma}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4},$$

$$(3.63) \quad A(\sigma) \leq \frac{3}{3\sigma-1}, \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.64) \quad A(\sigma) \leq \frac{12}{5}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1.$$

La estimación (3.64) es una consecuencia de (3.62) (probada por A. E. Ingham en 1940) y (3.63) (probada por Huxley en 1972) pues, para  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$ , la función  $\frac{3}{2-\sigma}$  es creciente mientras que, para  $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$ , la función  $\frac{3}{3\sigma-1}$  es decreciente y su valor común en  $\sigma = \frac{3}{4}$  es  $\frac{12}{5}$ . La importancia de (3.64) radica en que, durante mucho tiempo, ha sido la mejor cota de la forma  $A(\sigma) \leq C$ , con  $C \geq 2$  constante absoluta, válida en todo el rango  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  y es muy útil en las aplicaciones como veremos en secciones posteriores.

*Demostración.* Para obtener (3.62), usamos (3.54) y (3.57) con  $\alpha = 2$  y aplicamos la estimación del valor medio para polinomios de Dirichlet en la forma dada por el teorema 3.7 para obtener que:

$$(3.65) \quad R_1 \ll T^\varepsilon \sum_r \left| \sum_{M < n \leq 2M} b(n)n^{-\sigma-i\gamma_r} \right|^2 \ll T^\varepsilon (T+M)M^{1-2\sigma} \ll T^\varepsilon (Y^{4-4\sigma} + TY^{4(1-2\sigma)/3}),$$

donde  $\sum_r$  denota la suma sobre los ceros representativos del conjunto  $R_1$ . Usando (3.60) con  $M(4) = 1$ , lo cual sabemos gracias al teorema 3.2, obtenemos que:

$$R_2 \ll T^{1+\varepsilon} Y^{2-4\sigma} \ll T^{1+\varepsilon} Y^{4(1-2\sigma)/3},$$

luego se sigue de (3.50) que:

$$(3.66) \quad N(\sigma, T) \ll T^\varepsilon (Y^{4-4\sigma} + TY^{4(1-2\sigma)/3} + 1) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)+\varepsilon},$$

tomando  $Y = T^{3/(8-4\sigma)}$ , lo cual nos da (3.62). Quizás, pueda parecer sorprendente que la cota de Ingham permaneciese inmutable por casi medio siglo, excepto cuando  $\sigma$  está próximo a  $\frac{1}{2}$ . La razón principal de esto ha quedado patente en la prueba y no es más que la falta de  $M(A) = 1$  para  $A > 4$ . Por este motivo, conocer los momentos de la función  $\zeta(s)$  es crucial en este tipo de estimaciones. Por otro lado, la principal dificultad para estimar  $R_1$  es la presencia de los coeficientes  $b(n)$ , que no son monótonos, luego no pueden ser eliminados mediante técnicas de sumación por partes como las mencionadas en (A.45) o (A.46). Una forma de solventar estos problemas es usar las desigualdades de Halász-Montgomery, en particular, para probar (3.63) vamos a usar (A.8) con  $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , donde  $\xi_n = b(n)n^{-\sigma}$  para  $M < n \leq 2M$  y cero en otro caso, y  $\varphi_r = \{\varphi_{r,n}\}_{n=1}^\infty$  con  $\varphi_{r,n} = n^{-it_r}$  para  $M < n \leq 2M$  y cero en otro caso, donde hemos denotado por  $t_r$  a las ordenadas de los ceros representativos de  $R_1$ .

Por tanto, se tiene que  $\|\xi\|^2 \ll T^\varepsilon M^{1-2\sigma}$ , luego tomando  $\alpha = 1$  en (3.57) y usando (A.8) se deduce que:

$$(3.67) \quad R_1^2 \ll T^\varepsilon R_1 M^{2-2\sigma} + T^\varepsilon M^{1-2\sigma} \sum_{r \neq s} \left| \sum_{M < n \leq 2M} n^{-it_r + it_s} \right|.$$

La idea de este procedimiento es reducir la estimación de  $R_1$  a la estimación de sumas exponenciales como  $\sum_{M < n \leq 2M} n^{-it_r + it_s}$ , con el fin de emplear técnicas más sofisticadas como el lema de van der Corput, donde esta potente maquinaria entra en juego y nos ayuda a obtener mejores cotas. Así, dividimos la suma interior en dos partes. Por un lado, para los términos tales que  $|t_r - t_s| \geq M/2$ , definimos  $\tau = t_s - t_r$  y  $f(x) = -\frac{\tau \log x}{2\pi}$ , luego se tiene que  $\lambda := \frac{|\tau|}{8\pi M^2} \leq |f''(x)| = \frac{|\tau|}{2\pi x^2} \leq \frac{|\tau|}{2\pi M^2}$ . Ahora aplicamos el siguiente resultado, el cual se deduce directamente de los lemas A.4 y A.5, [4], que nos dice que si  $f$  satisface que  $\lambda \leq |f''| \leq C\lambda$ , entonces  $\sum_{a \leq n \leq b} e(f(n)) \ll (b-a+1)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}$ , que en nuestro caso nos da que la suma es  $\ll |\tau|^{1/2} + M|\tau|^{-1/2} \ll |\tau|^{1/2} \ll T^{1/2}$ . Por otro lado, para los demás términos primero usamos el lema 1.31, observando que  $|f'(x)| \leq \delta < 1$  para cierto  $\delta > 0$ , de manera que:

$$\sum_{M < n \leq 2M} e(f(n)) = \int_M^{2M} e(f(x)) dx + O(1).$$

Para acotar dicha integral y con ello la suma, tomamos  $F(x) = -\tau \log x$  y notamos que su derivada es monótona en  $M < x \leq 2M$  y verifica que  $|F'(x)| \geq \frac{|\tau|}{2M} > 0$ , luego el lema A.3 nos da que:

$$\sum_{M < n \leq 2M} e(f(n)) \ll M|t_r - t_s|^{-1}.$$

Por consiguiente, combinando ambas estimaciones obtenemos que:

$$(3.68) \quad \sum_{M < n \leq 2M} n^{-it_r + it_s} \ll M|t_r - t_s|^{-1} + T^{1/2}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$(3.69) \quad R_1^2 \ll T^\varepsilon R_1 M^{2-2\sigma} + T^\varepsilon M^{2-2\sigma} \sum_{r \neq s} |t_r - t_s|^{-1} + T^\varepsilon R_1^2 T^{1/2} M^{1-2\sigma}.$$

Además, en vista de que  $|t_r - t_s| \geq \log^4 T$ , si fijamos  $r$  y ordenamos los  $t_s$  de manera que consideramos primero los que verifican que  $|t_r - t_s| \geq \log^4 T$ , luego los que cumplen que  $|t_r - t_s| \geq 2 \log^4 T, 3 \log^4 T \dots$  se sigue que:

$$(3.70) \quad \sum_{r \neq s} |t_r - t_s|^{-1} \ll \sum_{r \leq R_1} \log^{-4} T \sum_{n \leq 3T} n^{-1} \ll R_1 \log^{-3} T.$$

Nótese que, como  $|t_r - t_s| \leq T$ , entonces  $n$  estará superiormente acotado por  $CT$  con  $C > 0$  una constante cualquiera y por esa razón hemos puesto  $n \leq 3T$ . Por otro lado, es importante notar que la cota trivial para dicha suma nos da que es  $\ll R_1^2 \log^{-4} T$  lo

cual estropearía la demostración pues necesitamos un único factor  $R_1$  en el segundo miembro de (3.69) para que sea comparable al primero. Con todo ello, obtenemos que:

$$(3.71) \quad R_1 \ll T^\varepsilon M^{2-2\sigma}, \quad \text{si } T \ll M^{4\sigma-2-\varepsilon}.$$

Por consiguiente, dividimos  $T$  en subintervalos de longitud a lo sumo  $T_0 = M^{4\sigma-2-\varepsilon}$  de manera que, si  $R_0$  denota el número de ceros representativos de  $R_1$  en cada uno de esos intervalos, entonces la estimación (3.71) funciona para  $R_0$  en lugar de  $R_1$  y (3.54) nos da que:

$$(3.72) \quad R_1 \ll R_0(1 + T/T_0) \ll T^\varepsilon(M^{2-2\sigma} + TM^{4-6\sigma}) \ll T^\varepsilon(Y^{4-4\sigma} + TY^{(16-24\sigma)/3}).$$

Finalmente, por (3.60) con  $M(12) \leq 2$ , gracias al teorema 3.3, tenemos que:

$$(3.73) \quad N(\sigma, T) \ll T^\varepsilon(Y^{4-4\sigma} + TY^{(16-24\sigma)/3} + T^2Y^{6-12\sigma} + 1) \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)+\varepsilon},$$

donde hemos tomado  $Y = T^{3/(12\sigma-4)}$ , lo cual completa la demostración del teorema.  $\square$

Cabe destacar tres observaciones importantes. Por un lado, para el teorema de Huxley la restricción más fuerte que hemos impuesto sobre  $\sigma$  es, en realidad,  $\sigma \geq \frac{2}{3}$ , que se necesita en (3.72) porque si  $4 - 6\sigma < 0$  entonces se usa la cota  $Y^{4/3} \log^{8/3} Y \ll M$ . Sin embargo, la razón por la que el teorema de Huxley se enuncia para  $\sigma \geq \frac{3}{4}$  es porque ese es el rango donde mejora a la estimación de Ingham, aunque sea válida un poco más a la izquierda. Por otro lado, naturalmente cabe preguntarse qué ocurriría si en los lugares dónde hemos podido elegir nuestros parámetros cambiásemos nuestras decisiones por otras. Sin ir más lejos, si suponemos que  $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{3}$  entonces la cota (3.72) quedaría como sigue:

$$R_1 \ll T^\varepsilon(Y^{4-4\sigma} + TY^{8-12\sigma}),$$

y tomando  $Y = T^{1/2}$  en (3.73), que es el valor que igualaría el término que más crece,  $TY^{8-12\sigma}$ , con el que decrece,  $T^2Y^{6-12\sigma}$ , obtendríamos que  $N(\sigma, T) \ll T^{5-6\sigma+\varepsilon}$ , lo que nos da  $A(\sigma) \leq \frac{5-6\sigma}{1-\sigma}$  que es peor que la cota de Ingham en todo el rango. Otro cambio razonable sería usar el momento  $M(4) = 1$  en lugar de  $M(12) = 2$  en el teorema de Huxley y seguir exactamente los mismos pasos que en dicha prueba. En ese caso, quedaría:

$$N(\sigma, T) \ll T^\varepsilon(Y^{4-4\sigma} + TY^{(16-24\sigma)/3} + TY^{2-4\sigma} + 1).$$

Si  $\sigma < 5/6$  entonces el segundo término gana al tercero y la demostración nos llevaría a la misma cota que a Huxley. En cambio, si  $\sigma > 5/6$ , el tercer término domina y el óptimo se obtiene tomando  $Y = T^{1/2}$ , en cuyo caso obtenemos la cota  $N(\sigma, T) \ll T^{2-2\sigma}$  que nos da  $A(\sigma) \leq 2$ , lo cual es lo mismo que nos da la cota de Huxley pues en  $\sigma = 5/6$  vale 2 y es una función decreciente. Aun así, hemos conseguido encontrar un rango donde la hipótesis de densidad es cierta, luego veremos que este rango se puede mejorar. Finalmente y, en vista de la anterior demostración, ya podemos entender la elección, aparentemente misteriosa, de  $r = 2$  en (3.53). En efecto, si hubiésemos

escogido, por ejemplo,  $r = 3$ , entonces siguiendo la prueba que hemos dado del teorema 3.9 llegaríamos a que:

$$R_1 \ll T^\varepsilon M^{1-2\sigma}(T + M) \ll T^\varepsilon(Y^{6-6\sigma} + TY^{9(1-2\sigma)/4}), \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4},$$

$$R_1 \ll T^\varepsilon(M^{2-2\sigma} + TM^{4-6\sigma}) \ll T^\varepsilon(Y^{6-6\sigma} + TY^{9(2-3\sigma)/2}), \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1.$$

Si, a continuación, usamos  $R_2 \ll T^{1+\varepsilon}Y^{2-4\sigma}$  o  $R_2 \ll T^{2+\varepsilon}Y^{6-12\sigma}$ , que provienen de  $M(4) = 1$  y  $M(12) \leq 2$  respectivamente, observamos que, para la estimación  $R_2 \ll T^{1+\varepsilon}Y^{2-4\sigma}$  y las dos estimaciones para  $R_1$  habríamos conseguido la misma cota que la de Ingham en el rango  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ , lo cual no supone mejora, mientras que para  $R_2 \ll T^{2+\varepsilon}Y^{6-12\sigma}$  ambas cotas de  $R_1$  nos llevan a obtener  $A(\sigma) \leq \frac{2}{\sigma}$  en todo el rango  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ , una cota obtenida en su momento por F. Carlson, pero que supone una peor estimación para  $N(\sigma, T)$  que las obtenidas en el teorema 3.9. Sin embargo, si supiésemos que  $M(6) = 1$  fuera cierto, entonces de (3.60) y las estimaciones anteriores para  $R_1$  tendríamos que:

$$N(\sigma, T) \ll T^\varepsilon(Y^{6-6\sigma} + TY^{9(1-2\sigma)/4} + TY^{3-6\sigma} + 1) \ll T^{8(1-\sigma)/(5-2\sigma)+\varepsilon}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4},$$

$$N(\sigma, T) \ll T^\varepsilon(Y^{6-6\sigma} + TY^{9(2-3\sigma)/2} + TY^{3-6\sigma} + 1) \ll T^{4(1-\sigma)/(5\sigma-2)+\varepsilon}, \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq \frac{4}{5},$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad \frac{4}{5} \leq \sigma \leq 1,$$

con  $Y = T^{4/(15-6\sigma)}$ ,  $Y = T^{2/(15\sigma-6)}$  e  $Y = T^{1/3}$  respectivamente. Esto mejoraría el teorema 3.9, nos daría la hipótesis de densidad en un rango más amplio que el que hemos obtenido anteriormente y supondría que  $A(\sigma) \leq \frac{16}{7}$  para todo el rango  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ , luego una razón más que apoya la importancia de obtener  $M(6) = 1$ . Las estimaciones que aparecen en el teorema 3.9 pueden ser reemplazadas por una versión análoga con logaritmos ligeramente más precisa. En particular, las siguientes estimaciones son ciertas:

$$(3.74) \quad N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \log^5 T, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4},$$

$$(3.75) \quad N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} \log^{44} T, \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.76) \quad N(\sigma, T) \ll T^{(5\sigma-3)(1-\sigma)/(\sigma^2+\sigma-1)} \log^9 T, \quad \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1.$$

La primera de ellas se debe a Ingham, quien la probó en 1940, [28]. Las otras dos fueron demostradas por Huxley; (3.75) se puede encontrar en el capítulo 23 de [25] y (3.76) se encuentra en [26], ambos escritos en 1972. Como en  $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$  tenemos que  $(5\sigma - 3)/(\sigma^2 + \sigma - 1) \geq 3/(3\sigma - 1)$ , se sigue que (3.75) es mejor que (3.76), aunque su factor logarítmico sea peor. Además,  $(5\sigma - 3)/(\sigma^2 + \sigma - 1) \leq \frac{12}{5}$  en  $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$ , luego se deduce de (3.74) y (3.76) que:

$$(3.77) \quad N(\sigma, T) \ll T^{12(1-\sigma)/5} \log^9 T, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1.$$

Las pruebas de las anteriores estimaciones se hacen de una manera muy similar a las estimaciones que ya hemos obtenido, excepto por la elección de  $X$ , que no será  $X = T^\varepsilon$  como en el método de detección de ceros, de manera que tendremos más flexibilidad para elegirlo convenientemente después, así como por la mejora de la cota, bastante drástica, que allí se usaba,  $a(n) \ll n^\varepsilon$ , que nos llevaba a  $b(n) \ll n^\varepsilon$ . En su lugar, se usa que  $|a(n)| \leq d(n)$  y se estiman sumas de la forma  $\sum d^2(n)n^{-2\sigma}$  que aparecen cuando se aplican o bien el teorema 3.7 o bien las desigualdades de Halász-Montgomery. Para ello, tengamos presente un resultado clásico que nos dice que  $\sum_{n \leq x} d^2(n) \ll x \log^3 x$ , el cual se puede encontrar demostrado en el capítulo 24 de [9]. Este resultado tiene una versión asintótica que fue propuesta sin prueba por Ramanujan en 1916, [44] y probada definitivamente por Wilson en 1922, [56].

A continuación, presentamos una demostración de la cota (3.74) pero con un término logarítmico un poco peor. Antes de embarcarnos con dicha tarea, es importante observar que, en esta demostración, vamos a tomar los ceros de  $R_1$  y  $R_2$  que estén separados por  $2B \log T$  para  $B$  suficientemente grande, lo cual difiere con la elección que hicimos durante el desarrollo del método de detección de ceros en el que pedíamos que las partes imaginarias estuviesen separadas por al menos  $2 \log^4 T$ . Como se puede observar a lo largo de dicha sección, en realidad, la única cota que depende de dicha separación es (3.50), pues el factor logarítmico que allí aparece viene precisamente determinado por esa elección. Para los teoremas de la sección anterior esto no nos importaba porque buscábamos cotas con  $T^\varepsilon$  que son, aparentemente, igualmente válidas si suponemos cualquier otra separación del orden de  $\log^D T$ . Sin embargo, si  $D \leq 2$ , dicho método dejaría de funcionar para la demostración del teorema de Huxley porque nótese que, por como se definen los  $t_r$  en (3.58), si por ejemplo  $|\gamma_r - \gamma_s| = \log T$  entonces, como  $-\log^2 T \leq v' \leq \log^2 T$ ,  $t_r$  y  $t_s$  podrían estar muy próximos o incluso ser iguales, lo cual estropearía la cota (3.70). En cambio, tomando una separación de  $2 \log^3 T$  se obtendrían los mismos resultados que en la sección anterior. Sabiendo esto, parecería que estamos en una situación complicada pues, como ahora estamos interesados en obtener cotas de  $N(\sigma, T)$  con un factor logarítmico, por un lado necesitamos elegir una separación lo más pequeña que podamos para conseguir un menor término logarítmico en (3.50), pero por otro lado queremos hacerlo de manera que sigamos pudiendo aplicar el teorema del valor medio de Dirichlet, 3.7, o las desigualdades de Halász-Montgomery, que requieren una separación suficientemente grande entre los  $t_r$ . Por ello, la solución es tomar una separación de  $2B \log T$  para  $B$  suficientemente grande, que nos va a proporcionar un factor  $\log^2 T$  en la estimación (3.50) mientras que, a la par, nos va a permitir que los  $t_r$  estén suficientemente separados.

**Teorema 3.10.** [29]  $N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \log^9 T, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}.$

*Demostración.* En primer lugar, como ya hemos comentado, elegimos los conjuntos  $R_1$  y  $R_2$  de manera que las partes imaginarias de los ceros representativos estén separadas por  $2B \log T$  donde  $B > 0$  es una constante fija pero grande. Para acotar el término  $R_1$ , gracias al método de detección de ceros sabemos que existen  $R'_1 \gg R_1 / \log T$  de estos ceros para los cuales se cumple que:

$$(3.78) \quad \left| \sum_{N < n \leq 2N} a(n) n^{-\sigma - i\gamma_r} e^{-n/Y} \right| \gg 1 / \log Y, \quad \text{con } |a(n)| \leq d(n),$$

para cierto  $N$  satisfaciendo que  $X \leq N \leq Y \log^2 Y$ . Por tanto, elevando al cuadrado ambos miembros de (3.78), aplicando el teorema 3.7, observando que  $\log N \ll \log T$  y usando la fórmula antes mencionada relacionada con el trabajo de Ramanujan y Wilson, se tiene que:

$$(3.79) \quad \begin{aligned} R_1 &\ll \log^4 T \left( T \sum_{N < n \leq 2N} d^2(n) n^{-2\sigma} + \sum_{N \leq n \leq 2N} d^2(n) n^{1-2\sigma} \right) e^{-N/Y} \\ &\ll (T + N) N^{1-2\sigma} e^{-N/Y} \log^7 T \ll (TX^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}) \log^7 T. \end{aligned}$$

Para acotar  $R_2$  y, en vista del teorema 1.39, podemos suponer que  $\beta \geq \sigma \geq 1/2 + 1/\log T$ . En efecto, si  $1/2 < \sigma \leq 1/2 + 1/\log T$  y denotamos por  $f(\sigma) = 3(1-\sigma)/(2-\sigma)$  entonces, como  $f(1/2) = 1$  y  $T^{C(\log T)^{-1}} = e^C$ , el teorema es trivialmente cierto para  $\sigma = 1/2 + O((\log T)^{-1})$  porque habría que probar una cota de la forma  $\ll T \log^9 T$ , la cual es evidente por el teorema 1.39. Consecuentemente, siguiendo la notación de (3.48), denotando por  $x = \frac{1}{2} - \beta \geq \log T$  y usando (A.12) y (A.15), deducimos que  $|\Gamma(s'')| = \frac{|\Gamma(1-x+iv)|}{\sqrt{x^2+v^2}} \ll (\log T) e^{-\pi|v|/2}$ . Por tanto, elevando (3.48) a  $\frac{4}{3}$ , obtenemos  $R_2$  ceros con  $t_r$  tal que  $|t_r| \leq 2T$ ,  $|t_r - t_s| \geq B \log T$  si  $r \neq s$  y se verifica que:

$$(3.80) \quad \begin{aligned} R_2 Y^{(4\sigma-2)/3} \log^{-4/3} T &\ll \sum_{r \leq R_2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^{4/3} \left| M_X\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^{4/3} \\ &\leq \left( \sum_{r \leq R_2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^4 \right)^{1/3} \left( \sum_{r \leq R_2} \left| M_X\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^2 \right)^{2/3} \\ &\ll (T \log^5 T)^{1/3} \left( T \sum_{n \leq X} n^{-1} + \sum_{n \leq X} 1 \right)^{2/3} \ll T \log^{7/3} T, \end{aligned}$$

supuesto que  $X \ll T \log T$ , donde hemos usado la desigualdad de Hölder,  $M(4) = 1$  y el teorema 3.7. Por consiguiente:

$$(3.81) \quad \begin{aligned} N(\sigma, T) &\ll (R_1 + R_2 + 1) \log^2 T \ll (Y^{2-2\sigma} + TX^{1-2\sigma} + TY^{(2-4\sigma)/3}) \log^9 T \\ &\ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \log^9 T, \end{aligned}$$

tomando  $X = T$  e  $Y = T^{3/(4-2\sigma)}$ . Con algunas modificaciones en la prueba de (3.63) obtendríamos también (3.75) y (3.76), pero lo omitiremos.  $\square$

Más allá de las estimaciones conseguidas a lo largo de esta sección, se hicieron progresos en lo relativo al orden de  $N(\sigma, T)$  cuando  $\sigma$  está muy próximo a 1. A continuación, presentamos los dos mejores resultados en esta dirección, los cuales se pueden encontrar probados en los teoremas 11.2 y 11.3 de [29].

**Teorema 3.11.**

$$(3.82) \quad A(\sigma) \leq \frac{4}{2\sigma + 1}, \quad \frac{17}{18} \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.83) \quad A(\sigma) \leq \frac{24}{30\sigma - 11}, \quad \frac{155}{174} \approx 0,8908 \leq \sigma \leq \frac{17}{18}.$$

**Teorema 3.12.** *Sea  $M(\alpha, T) = \max_{1 \leq t \leq T} |\zeta(\alpha + it)|$  para  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ . Entonces, para  $\frac{9}{10} \leq \sigma \leq 1$ , se verifica que:*

$$(3.84) \quad N(\sigma, T) \ll M(5\sigma - 4, 3T)^{7/6} \log^{169/12} T,$$

y, en particular, para  $\frac{152}{155} \leq \sigma \leq 1$  se tiene que:

$$(3.85) \quad N(\sigma, T) \ll T^{1600(1-\sigma)^{3/2}} \log^{15} T,$$

y

$$(3.86) \quad N(\sigma, T) \ll T^{35(1-\sigma)/36} \log^{36} T.$$

Nótese que (3.85) es el único resultado que hemos presentado hasta ahora en el que el término  $(1 - \sigma)$  aparece elevado a una potencia distinta de 1. Debido a ello, esta cota es tremendamente fuerte y útil, pues es increíblemente precisa cuando  $\sigma$  está muy cercano a 1. Veremos su potencia en los siguientes capítulos. Otros resultados sorprendentes que se demuestran en el capítulo 11 de [29] y que ahora enunciamos son:

**Teorema 3.13.** [29]

$$(3.87) \quad A(\sigma) \leq \frac{3}{2\sigma}, \quad \frac{3831}{4791} \approx 0,799624 \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.88) \quad A(\sigma) \leq 2, \quad \frac{11}{14} \approx 0,785714 \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.89) \quad A(\sigma) \leq 9/(7\sigma - 1), \quad \frac{41}{53} \approx 0,773584 \leq \sigma \leq 1,$$

$$(3.90) \quad A(\sigma) \leq 6/(5\sigma - 1), \quad \frac{13}{17} \approx 0,764705 \leq \sigma \leq 1.$$

De hecho, (3.88) proporciona el mejor rango en el que se sabe que la hipótesis de densidad es cierta. Sacaremos partido de este hecho en capítulos posteriores. Otro frente en el que los resultados que hemos obtenido en este capítulo no son los más precisos es cuando  $\sigma$  está muy próximo a  $\frac{1}{2}$ . En este caso, A. Selberg probó en 1946 que:

$$(3.91) \quad N(\sigma, T) \ll T^{1-(\sigma-1/2)/4} \log T, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1.$$

Posteriormente, en 1982, M. Jutila mejoró la cota anterior reemplazando el  $\frac{1}{4}$  por  $1 - \delta$  para cualquier  $0 < \delta < 1$  fijado. Cabe destacar que el método empleado para estimar  $R_1$  mediante la selección de un conjunto de ceros representativos para los cuales se verifica (3.53) y (3.57), fue también introducido por M. Jutila en 1972. Por otro lado, (3.74) fue probado por A.E. Ingham en 1940, mediante un procedimiento distinto al hemos dado nosotros usando el método de detección de ceros, mientras que, como ya hemos comentado, (3.75) y (3.76) fueron probados por M.N. Huxley en 1972 y su demostración original se puede encontrar en [25] y [26]. Para finalizar esta sección, vamos a presentar la última mejora que se ha conseguido en lo relativo a teoremas de densidad. Como ya hemos mencionado, aunque la cota uniforme de  $\frac{12}{5}$  de Huxley para el rango  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  permaneció inmejorable durante mucho tiempo, en 2024, J. Maynard y L.Guth, en [19], consiguieron mejorar las estimaciones sobre la frecuencia con la que un polinomio de Dirichlet toma valores grandes. Más concretamente, mejoraron las estimaciones para polinomios de Dirichlet de longitud  $N$  tomando valores de tamaño cercano a  $N^{3/4}$  y, con ello, consiguieron superar la barrera de  $\frac{12}{5}$ . Este tipo de resultados se conocen como «large value estimates» y, aunque ya se conocían resultados en este sentido por parte de Montgomery, Halász y Huxley, ninguno es tan potente en la región donde interesa como el obtenido por Maynard y Guth. El teorema dice lo siguiente:

**Teorema 3.14. Maynard-Guth (2024):** [19] Supongamos que  $(a_n)_n$  es una sucesión de números complejos tales que  $|a_n| \leq 1$  y  $(t_r)_{r \leq R}$  es una sucesión de puntos 1-separados en  $[0, T]$  tales que:

$$(3.92) \quad \left| \sum_{n=N}^{2N} a_n n^{it_r} \right| \geq V, \text{ para todo } r \leq R.$$

Entonces tenemos que:

$$(3.93) \quad R \leq T^\varepsilon (N^2 V^{-2} + N^{18/5} V^{-4} + TN^{12/5} V^{-4}).$$

Para demostrarlo, recurrieron a métodos de decoupling, una técnica de análisis armónico que no existía en tiempos de Huxley o Jutila, lo cual explica la dificultad para mejorar la cota, pues la barrera con la que se toparon era conceptual y no consistía en refinar los métodos entonces existentes. Con el teorema anterior en mente, Maynard y Guth probaron lo siguiente:

**Teorema 3.15. Maynard-Guth (2024):** [19] Usando el teorema 3.14 se obtiene que:

$$(3.94) \quad N(\sigma, T) \ll T^{15(1-\sigma)/(3+5\sigma)+\varepsilon}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

que mejora a la cota de Ingham para  $\frac{7}{10} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$ . Combinando esto con el resultado de Ingham para  $\sigma \leq \frac{7}{10}$ , se obtiene que:

$$(3.95) \quad N(\sigma, T) \ll T^{30(1-\sigma)/13+\varepsilon}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

y el exponente 30/13 mejora al 12/5 de Huxley.

## CAPÍTULO 4

# Ceros en la línea crítica

---

A día de hoy, somos incapaces de demostrar la hipótesis de Riemann. Sin embargo, podemos decir algunas cosas relativas a los ceros en la línea crítica. A esto mismo es a lo que vamos a dedicar este capítulo. Con tal fin, definimos  $N_0(T)$  como el número de ceros  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$  con  $0 < \gamma \leq T$ . La hipótesis de Riemann nos dice que  $N_0(T) = N(T)$  y, aunque cálculos computacionales nos muestran que los primeros millones de ceros de  $\zeta(s)$  están en la línea crítica, todavía no tenemos certeza de que sean todos. Por tanto, un objetivo muy natural en busca de la hipótesis de Riemann es intentar encontrar cotas inferiores para  $N_0(T)$  así como estudiar cuál es su orden de crecimiento en relación con el de  $N(T)$ . Este es el propósito de los teoremas que vamos a demostrar.

### 4.1. Algunos resultados preliminares

El primer resultado que se obtuvo acerca de los ceros en la línea crítica se lo debemos a Hardy quien, en 1914, probó que hay infinitos ceros en la línea crítica, [20]. Poco tiempo después, en 1921, junto a Littlewood, demostraron que esto se puede mejorar, obteniendo  $N_0(T) \gg T$  para  $T$  suficientemente grande, [22]. Posteriormente, en 1942, A. Selberg logró demostrar que una proporción positiva de los ceros se encuentran en la línea crítica, [48]. La prueba de Hardy y Littlewood será el contenido de esta primera parte, en la que seguiremos la sección 24.1 de [31], mientras que el teorema de Selberg será demostrado en la sección siguiente, siguiendo el apartado 24.2 de [31]. Aunque nosotros vamos a demostrar directamente que  $N_0(T) \gg T$ , lo cual implica que hay infinitos ceros en la línea crítica, esto último se puede encontrar explicado, de la misma manera en la que lo demostró Hardy originalmente, en la sección 14.2 de [41]. La idea principal en la que se basa el resultado de Hardy y Littlewood es la siguiente: definimos la función  $Z(u) = \frac{g(\frac{1}{2}+iu)}{|g(\frac{1}{2}+iu)|} \zeta(\frac{1}{2} + iu)$ , donde  $g(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ . Por la ecuación funcional que verifica  $\zeta(s)$  tenemos que  $g(s)\zeta(s) = g(1-s)\zeta(1-s)$ . Además, dado que  $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ , se tiene que  $g(\bar{s}) = \overline{g(s)}$  y se deduce que la función  $Z(u)$  es real y par. Por otro lado, definimos:

$$(4.1) \quad I(t) = \int_t^{t+\Delta} Z(u) du,$$

$$(4.2) \quad J(t) = \int_t^{t+\Delta} |Z(u)| du,$$

donde  $\Delta$  es un número positivo fijo. Claramente,  $|I(t)| \leq J(t)$ , pero si  $|I(t)| < J(t)$ , entonces  $Z(u)$  no puede tener signo constante en  $(t, t + \Delta)$ , es decir, debe cambiar de signo en dicho intervalo y, por consiguiente, debe tener un cero en él. Así, dado que  $g(s)$  nunca se anula, debe darse que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + iu\right)$  tiene un cero de orden impar en ese mismo intervalo. Aquí es donde reside la idea clave, hemos reducido nuestro problema a demostrar que  $|I(t)| < J(t)$  ocurre suficientemente a menudo. Para ello vamos a probar dos lemas, una cota inferior para  $J(t)$  y una cota superior para  $I(t)$  en promedio sobre el segmento  $[T, 2T]$ .

**Lema 4.1.** Sean  $\Delta \geq 1$  y  $T \geq \Delta^2$ . Entonces existe una función  $K(t)$ , que también depende de  $\Delta$ , tal que:

$$(4.3) \quad J(t) \geq \Delta - K(t),$$

$$(4.4) \quad \int_T^{2T} |K(t)|^2 dt \ll T,$$

donde la constante implícita en  $\ll$  es absoluta.

*Demostración.* Comenzamos notando que:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} J(t) &= \int_0^\Delta \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) \right| du \geq \left| \int_0^\Delta \zeta\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) du \right| \\ &\geq \Delta - \left| \int_0^\Delta \left( \zeta\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) - 1 \right) du \right| := \Delta - K(t). \end{aligned}$$

Para estimar  $K(t)$  usamos la aproximación:

$$(4.6) \quad \zeta(s) = \sum_{1 \leq n \leq T} n^{-s} + O(T^{-1/2}),$$

que es válida para  $s = \frac{1}{2} + it$  con  $T < t < 3T$ , por el teorema 1.32. Por tanto:

$$(4.7) \quad K(t) = \left| \sum_{1 < n \leq T} n^{-1/2-it} \frac{1 - n^{-i\Delta}}{i \log n} \right| + O(\Delta T^{-1/2}) := |S(t)| + O(\Delta T^{-1/2}).$$

Ahora bien,  $|K(t)|^2 \ll |S(t)|^2 + \Delta^2 T^{-1}$ , luego:

$$(4.8) \quad \int_T^{2T} |K(t)|^2 dt \ll \int_T^{2T} |S(t)|^2 dt + \Delta^2.$$

A continuación, aplicamos el teorema 3.6 y concluimos que:

$$(4.9) \quad \int_T^{2T} |S(t)|^2 dt \ll T \sum_{1 < n \leq T} n^{-1} \log^{-2} n + \sum_{1 < n \leq T} \log^{-2} n.$$

Finalmente, como  $\sum_{1 < n \leq T} n^{-1} \log^{-2} n \ll 1$  y  $\sum_{1 < n \leq T} \log^{-2} n \ll T$ , se tiene que:

$$(4.10) \quad \int_T^{2T} |K(t)|^2 dt \ll T.$$

□

**Lema 4.2.** *Sea  $\Delta \geq 1$ . Tenemos que:*

$$(4.11) \quad \int_T^{2T} |I(t)|^2 dt \ll \Delta T,$$

si  $T \geq \Delta^6$ , donde la constante implícita es absoluta.

*Demostración.* Usando (1.49),  $\zeta(s) \ll |s|^{1/4}$ , se tiene  $Z(t) \ll |t|^{1/4}$ , luego  $Z(t)\bar{Z}(t+u_2-u_1) \ll |t|^{1/2}$  para todo  $u_1, u_2 \in [0, \Delta]$ . Así:

$$\int_T^{T+u_1} Z(t)\bar{Z}(t+u_2-u_1) dt, \int_{2T}^{2T+u_1} Z(t)\bar{Z}(t+u_2-u_1) dt \ll \Delta T^{1/2}.$$

Con esto en mente, tenemos que:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} I &:= \int_T^{2T} |I(t)|^2 dt = \int_T^{2T} \left| \int_0^\Delta Z(t+u) du \right|^2 dt = \int_0^\Delta \int_0^\Delta \int_T^{2T} Z(t+u_1)\bar{Z}(t+u_2) dt du_1 du_2 \\ &= \int_0^\Delta \int_0^\Delta \int_{T+u_1}^{2T+u_1} Z(t)\bar{Z}(t+u_2-u_1) dt = \int_0^\Delta \int_0^\Delta \left( \int_T^{2T} - \int_T^{T+u_1} + \int_{2T}^{2T+u_1} \right) \\ &= \int_0^\Delta \int_0^\Delta \int_T^{2T} Z(t)\bar{Z}(t+u_2-u_1) dt du_1 du_2 + O(\Delta^3 T^{1/2}) \\ &= \int_{-\Delta}^\Delta \int_{\max(0, -u)}^{\min(\Delta, \Delta-u)} \int_T^{2T} Z(t)\bar{Z}(t+u) dt du_1 du + O(\Delta^3 T^{1/2}) \\ &= \int_{-\Delta}^\Delta (\Delta - |u|) \int_T^{2T} Z(t)\bar{Z}(t+u) dt du + O(\Delta^3 T^{1/2}). \end{aligned}$$

El siguiente paso es aproximar  $Z(t)\bar{Z}(t+u)$  por un polinomio de Dirichlet. Por (A.14), vemos que:

$$(4.13) \quad \frac{g(\frac{1}{2} + it)\bar{g}(\frac{1}{2} + it + iu)}{|g(\frac{1}{2} + it)\bar{g}(\frac{1}{2} + it + iu)|} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{iu}{2}} \left(1 + O\left(\frac{u^2 + 1}{t}\right)\right).$$

Por tanto, usando (4.6) y (1.49),  $\zeta(s) \ll |s|^{1/4}$ , obtenemos que, para  $-\Delta \leq u \leq \Delta$  y  $T \leq t \leq 2T$ , se verifica lo siguiente:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} Z(t)\bar{Z}(t+u) &= \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{iu}{2}} \left(1 + O\left(\frac{u^2 + 1}{t}\right)\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \bar{\zeta}\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) = \\ &= \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{iu}{2}} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \bar{\zeta}\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) + O\left(\Delta^2 T^{-1} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it + iu\right) \right| \right) = \\ &= \sum_{1 \leq m \leq T} \sum_{1 \leq n \leq T} (mn)^{-1/2} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \left(\frac{2\pi m^2}{t}\right)^{\frac{iu}{2}} + O(\Delta^2 T^{-1/2}). \end{aligned}$$

Luego:

$$(4.15) \quad I = \sum_{1 \leq m \leq T} \sum_{1 \leq n \leq T} c(m, n) (mn)^{-1/2} + O(\Delta^4 T^{1/2}),$$

donde, si denotamos por  $\chi(x) = x^{-2} \sin^2 x$ , entonces:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} c(m, n) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} (\Delta - |u|) \int_T^{2T} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \left(\frac{2\pi m^2}{t}\right)^{\frac{iu}{2}} dt du \\ &= \Delta^2 \int_T^{2T} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \chi\left(\frac{\Delta}{4} \log \frac{2\pi m^2}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

Si  $m \neq n$ , denotamos por  $F(t) = \Delta^2 \chi\left(\frac{\Delta}{4} \log \left(\frac{2\pi m^2}{t}\right)\right)$  e integramos por partes para obtener:

$$\begin{aligned} c(m, n) \log\left(\frac{m}{n}\right) &= -i \left(\frac{m}{n}\right)^{it} F(t) \Big|_T^{2T} + i \int_T^{2T} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} F'(t) dt, \\ \left| c(m, n) \log\left(\frac{m}{n}\right) \right| &\leq |F(2T)| + |F(T)| + \int_T^{2T} |F'(t)| dt. \end{aligned}$$

A continuación, nótese que  $\chi(x) \ll \min(1, x^{-2})$ . A su vez, es de clase  $C^1(\mathbb{R})$ , luego es absolutamente continua en todo  $\mathbb{R}$  y, además, es de variación acotada, pues  $\int_{-\infty}^{\infty} |\chi'(x)| dx < \infty$ , como se puede comprobar separando la integral en las regiones  $|x| \geq 1$  y  $|x| < 1$ . Por consiguiente, como  $\int_{x_2}^{x_1} |\chi'(x)| dx$  representa la variación total de  $\chi(x)$  en el intervalo  $[x_2, x_1]$ , tenemos que dicha integral es  $\ll 1$ . Por tanto, se verifica que:

$$I_1 = \int_T^{2T} |F'(t)| dt = \Delta^2 \int_{x_2}^{x_1} |\chi'(x)| dx \ll \Delta^2,$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $x = f(t)$  con  $f(t) = \frac{\Delta}{4} \log\left(\frac{2\pi m^2}{t}\right)$ ,  $x_2 = f(2T)$ ,  $x_1 = f(T)$  y hemos cambiado los límites de integración porque  $f'(t) < 0$ . Por otro lado, obsérvese que  $x_1 - x_2 \ll \Delta$  y  $\chi'(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^3} \ll x^{-2}$ , luego:

$$I_1 \ll \Delta^2 \int_{x_2}^{x_1} x^{-2} dx = \Delta^2 \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1} \ll \Delta^3 (x_2^{-2} + x_1^{-2}).$$

Con todo ello, obtenemos:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} c(m, n) \log \frac{m}{n} &\ll \min\left(\Delta^2, \left|\log \frac{\pi m^2}{T}\right|^{-2}\right) + \min\left(\Delta^2, \left|\log \frac{2\pi m^2}{T}\right|^{-2}\right) \\ &+ \Delta \min\left(\Delta, \left|\log \frac{\pi m^2}{T}\right|^{-2} + \left|\log \frac{2\pi m^2}{T}\right|^{-2}\right) \ll \Delta \min\left(\Delta, \left|\log \frac{\pi m^2}{T}\right|^{-2} + \left|\log \frac{2\pi m^2}{T}\right|^{-2}\right). \end{aligned}$$

En cambio, si  $m = n$ , es más fácil integrar primero sobre  $t$  y luego sobre  $u$ , obteniendo:

$$c(m, m) = 2T \int_{-\Delta}^{\Delta} (\Delta - |u|) \frac{2 - 2^{iu/2}}{2 - iu} \left(\frac{\pi m^2}{T}\right)^{iu/2} du := I_2.$$

Para conseguir la mejor estimación posible y tener mayor flexibilidad en estimaciones posteriores, acotamos  $I_2$  de dos formas distintas. Dividiendo la integral en dos obtenemos que  $I_2 = 2T(2I(\alpha_1) - I(\alpha_2))$  donde:

$$I(\alpha) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\Delta - |u|}{2 - iu} e^{i\alpha u} du,$$

con  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi m^2}{T}\right)$  y  $\alpha_2 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi m^2}{T}\right)$ . Ahora, por un lado, definimos  $f(u) = \Delta - |u|$  en  $[-\Delta, \Delta]$  y 0 fuera. Esta función está en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , es par (luego lo es  $\hat{f}$ ), continua en 0 y verifica que  $\hat{f} \geq 0$ . Por tanto, por inversión de Fourier tenemos que  $\|\hat{f}\|_{L^1} = 2\pi f(0)$ . A continuación, nótese que  $(2 - iu)^{-1} = \int_0^\infty e^{-2y} e^{iuy} dy$ , luego se cumple que:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-2y} \int_{-\Delta}^{\Delta} f(u) e^{iu(\alpha+y)} du dy \ll \|\hat{f}\|_{L^1} = 2\pi f(0) = 2\pi\Delta.$$

Luego se sigue que  $I_2 \ll \Delta T$ . Por otro lado, sea  $g(u) := \frac{\Delta - |u|}{2 - iu}$ , integrando por partes en  $I(\alpha)$  obtenemos que:

$$I(\alpha) = - \int_{-\Delta}^{\Delta} g'(u) \frac{e^{i\alpha u}}{i\alpha} du,$$

y, como  $g'(u) = -\frac{\text{sgn}(u)}{2 - iu} + i\frac{\Delta - |u|}{(2 - iu)^2}$ , se verifica que:

$$\begin{aligned} |I(\alpha)| &\leq |\alpha|^{-1} \left( 2 \int_0^\Delta \frac{1}{\sqrt{4 + u^2}} du + 2\Delta \int_0^\Delta \frac{1}{4 + u^2} du \right) \\ &= |\alpha|^{-1} (2 \operatorname{arcsinh}(\Delta/2) + \Delta \operatorname{arctan}(\Delta/2)) \ll |\alpha|^{-1} (\log \Delta + \Delta) \ll |\alpha|^{-1} \Delta, \end{aligned}$$

luego se deduce que:

$$I_2 \ll \Delta T (|\alpha_1|^{-1} + |\alpha_2|^{-1}) \ll \Delta T \left( \left| \log \frac{\pi m^2}{T} \right|^{-1} + \left| \log \frac{2\pi m^2}{T} \right|^{-1} \right).$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos que:

$$(4.18) \quad c(m, m) \ll \Delta T \min \left( 1, \left| \log \frac{\pi m^2}{T} \right|^{-1} + \left| \log \frac{2\pi m^2}{T} \right|^{-1} \right).$$

Finalmente, usando todas estas estimaciones deducimos, tras cálculos extensos que omitiremos, lo siguiente:

$$(4.19) \quad \sum_{1 \leq m, n \leq T} c(m, n) (mn)^{-1/2} \ll \Delta T.$$

lo cual completa la prueba. □

**Teorema 4.3. Hardy-Littlewood (1921):** *Se verifica que:*

$$(4.20) \quad N_0(T) \gg T.$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  el subconjunto de  $[T, 2T]$  donde  $|I(t)| = J(t)$ , entonces  $\int_{\mathcal{T}} |I(t)| dt = \int_{\mathcal{T}} J(t) dt$  y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema 4.2, se tiene que:

$$\int_{\mathcal{T}} |I(t)| dt \leq \int_T^{2T} |I(t)| dt \leq T^{1/2} \left( \int_{T_0}^{2T} |I(t)|^2 dt \right)^{1/2} \ll \Delta^{1/2} T.$$

Por otro lado, por el lema 4.1 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que:

$$\int_{\mathcal{T}} J(t) dt \geq \Delta |\mathcal{T}| - \int_{\mathcal{T}} K(t) dt = \Delta |\mathcal{T}| + O(|\mathcal{T}|^{1/2} T^{1/2}).$$

Combinando ambas estimaciones se llega a que  $|\mathcal{T}| \ll \Delta^{-1/2} T$ , donde la constante implícita es absoluta. Así, para  $\Delta$  suficientemente grande, lo anterior nos da que  $|\mathcal{T}| \leq \frac{1}{2} T$ . En otras palabras, el conjunto  $\mathcal{S} = [T, 2T] - \mathcal{T}$ , donde se tiene que  $|I(t)| < J(t)$ , tiene medida  $|\mathcal{S}| \geq \frac{1}{2} T$ . Por tanto,  $\mathcal{S}$  contiene una sucesión de puntos  $\{t_1, \dots, t_R\}$   $\Delta$ -espaciados de longitud  $R \geq \Delta^{-1} |\mathcal{S}| \geq T/2\Delta$ . Esto se debe a que, si particionamos el intervalo  $[T, 2T]$  en subintervalos de longitud  $\Delta$  y nos quedamos solo con todos los subintervalos  $U_1, \dots, U_R$  que cortan a  $\mathcal{S}$  en un conjunto de medida positiva, entonces  $|\mathcal{S}| \leq R\Delta$ . Por consiguiente, para cada  $t_r$ ,  $1 \leq r \leq R$ ,  $Z(u)$  cambia de signo en  $t_r < u < t_r + \Delta$ , luego existe un cero en la línea crítica  $\rho_r = \frac{1}{2} + i\gamma_r$  con  $t_r < \gamma_r < t_r + \Delta$ . Esto prueba que  $N_0(T) \gg T/\Delta$ , que nos da lo que queremos.  $\square$

Antes de terminar con esta sección y siguiendo la línea histórica, cabe destacar que Hardy y Littlewood no solo aportaron a nuestro avance en el conocimiento del número  $N_0(T)$  con el teorema 4.3, sino que también probaron dos resultados acerca de los ceros de  $\zeta(s)$  en la línea crítica que motivaron en gran medida el desarrollo posterior. Estos nos dicen lo siguiente:

- (i) Sea  $\varepsilon > 0$ , existe un  $T_0(\varepsilon) > 0$  tal que, para todo  $T \geq T_0(\varepsilon)$  y  $H = T^{1/4+\varepsilon}$ , el intervalo  $(T, T + H]$  contiene la parte imaginaria de algún cero de orden impar.
- (ii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $T_0(\varepsilon) > 0$  y  $c_\varepsilon > 0$  tal que la desigualdad

$$(4.21) \quad N_0(T + H) - N_0(T) \geq c_\varepsilon H,$$

es válida para todo  $T \geq T_0(\varepsilon)$  con  $H = T^{1/2+\varepsilon}$ .

El primer resultado nos dice que, en intervalos cortos, siempre hay ceros de orden impar en la línea crítica. Su demostración se encuentra en [21]. Por otro lado, el segundo nos dice que, bajo ciertas condiciones, el número de ceros en la línea crítica en un determinado rango de alturas crece proporcionalmente al tamaño de dicho intervalo. Este hecho fue probado por Hardy y Littlewood en el mismo artículo en el que probaron que  $N_0(T) \gg T$ , [22]. Es importante destacar que, a diferencia del teorema que vamos a probar en la siguiente sección, el cual es debido a A. Selberg y nos dice que hay una proporción positiva de ceros en la línea crítica, (4.21) es un resultado que no se deduce directamente del de Selberg. La razón principal es que el teorema de Selberg es un resultado global, en el sentido de que nos habla sobre la proporción de ceros que hay en la línea crítica hasta una determinada altura  $T$ , mientras que (4.21)

trata el problema de la densidad de dichos ceros en intervalos cortos. Aún teniendo el teorema de Selberg, podría darse que existiesen grandes huecos entre ceros en la línea crítica, que es el tipo de preguntas que intentan abordar estimaciones como (4.21). Como ya hemos comentado, ambos enunciados dieron lugar a una enorme cantidad de nuevos resultados y métodos que culminaron con mejoras sustanciales para los dos. Respecto al primero, aunque A. Selberg hizo grandes avances que apuntaban a que incluso se podía mejorar ese  $1/4$ , el resultado crucial se lo debemos a A. Karatsuba que, en 1984, demostró que el resultado es cierto tomando  $H = T^{5/32+\varepsilon}$ , [32]. En lo relativo al segundo, Moser probó que dicha estimación es válida para  $H \geq T^{5/12+\varepsilon}$ , [42], y Karatsuba la llevó nuevamente un paso más allá, consiguiendo  $H \geq T^{27/82+\varepsilon}$ , [33], la cota más fuerte conocida hasta la fecha.

## 4.2. El teorema de Selberg

El refinamiento principal de Selberg respecto al método de Hardy y Littlewood consiste en suavizar la función  $\zeta(s)$  con un polinomio de Dirichlet en la definición de  $Z(u)$ , cuyo rol es el de disminuir la contribución de los valores grandes de  $\zeta(s)$ . Esta idea fue utilizada por primera vez por Bohr y Landau pero no de manera tan efectiva y elegante como en las manos de Selberg. Así, definimos  $Z(u) = \frac{g(\frac{1}{2}+iu)}{|g(\frac{1}{2}+iu)|} \zeta(\frac{1}{2}+iu) |\Phi(\frac{1}{2}+iu)|^2$ , donde  $g(s)$  se define igual que en la sección anterior, mientras que  $\Phi(s)$  es un polinomio de Dirichlet del tipo:

$$(4.22) \quad \Phi(s) = \sum_{d \leq D} h\left(\frac{\log d}{\log D}\right) \gamma_d d^{-s},$$

donde los coeficientes  $\gamma_d$  tendrán naturaleza aritmética (también serán reales y estarán acotados) y donde  $h(x)$  es una función real y continua en  $[0, 1]$  tal que:

$$(4.23) \quad h(x) = 1 + O(x), \quad \text{para } x \rightarrow 0^+,$$

$$(4.24) \quad h(x) \ll 1 - x, \quad \text{para } x \rightarrow 1^-.$$

Nótese que la razón para incluir el término con  $\Phi$  en módulo al cuadrado es que, aunque este término incluya ceros, ninguno de ellos afecta a los cambios de signo luego nos aseguramos de que todos los cambios de signo vienen por ceros de  $\zeta(\frac{1}{2}+iu)$  y así los podemos seguir identificando. Al igual que en los teoremas de densidad del capítulo anterior, nos gustaría que el molificador se parezca lo máximo posible al recíproco de  $\zeta(s)$ . Por tanto, parece razonable escoger  $\Phi(s)$  de manera que intente aproximar a  $\zeta(s)^{-1/2}$ . De hecho, Selberg tomó directamente los  $\gamma_d$  como los coeficientes de la representación en serie de Dirichlet del siguiente producto de Euler:

$$(4.25) \quad \zeta(s)^{-1/2} = \prod_p (1 - p^{-s})^{1/2} = \sum_d \gamma_d d^{-s}, \quad \text{válido para } \sigma > 1.$$

Además, si  $\tilde{\gamma}_d$  son los coeficientes de:

$$(4.26) \quad \zeta(s)^{1/2} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1/2} = \sum_d \tilde{\gamma}_d d^{-s}, \quad \text{en } \Re(s) > 1,$$

entonces se cumple que  $|\gamma_d| \leq \tilde{\gamma}_d \leq 1$ . Esto se puede ver sin más que comprobar que, usando la fórmula del binomio de Newton generalizado,  $(1-p^{-s})^{1/2} = \sum_k c_k p^{-sk}$  y  $(1-p^{-s})^{-1/2} = \sum_k \tilde{c}_k p^{-sk}$ , donde  $c_0 = 1$ ,  $|c_1| = \frac{1}{2}$  y  $|c_k| = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!}$  para  $k \geq 2$ , mientras que  $\tilde{c}_0 = 1$  y  $\tilde{c}_k = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!}$  para  $k \geq 1$ , luego  $|c_k| \leq \tilde{c}_k \leq 1$  y, como los coeficientes  $\gamma_d$  y  $\tilde{\gamma}_d$  provienen respectivamente del producto de los  $c_k$  y  $\tilde{c}_k$  correspondientes a la descomposición en factores primos de  $d$ , se sigue el resultado. Al igual que en la demostración de Hardy y Littlewood, queremos comparar las integrales  $I(t)$  y  $J(t)$  en el rango  $0 \leq t \leq T$ . Gracias a la molificación, vamos a ser capaces de trabajar con un  $\Delta$  más pequeño:

$$(4.27) \quad \Delta \asymp (\log T)^{-1},$$

donde la constante implícita es absoluta. Nuevamente, la demostración dependerá de probar estimaciones para ciertas integrales:

**Lema 4.4.** *Sea  $(\log T)^{-1} \leq \Delta \leq 1$  y  $D = T^\theta$  con  $0 < \theta \leq \frac{1}{80}$ . Entonces tenemos que:*

$$(4.28) \quad \int_0^T |Z(t)| dt \gg T.$$

*Demostración.* Tenemos que:

$$(4.29) \quad \int_0^T |Z(t)| dt \geq \left| \int_{T/2}^T \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \Phi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|.$$

Por la aproximación (4.6) y la cota  $\Phi(s) \ll D^{1/2}$  para  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  obtenemos:

$$(4.30) \quad \zeta(s) \Phi^2(s) = \sum_{n \leq N} a_n n^{-s} + O(DT^{-1/2}),$$

donde  $a_1 = 1$  y  $|a_n| \leq d_3(n) \ll n^\varepsilon$  para todo  $n \leq N = D^2 T$ . Luego, suponiendo que  $D \leq T^{1/2} (\log T)^{-1}$ , se tiene que:

$$(4.31) \quad \int_{T/2}^T \zeta(s) \Phi^2(s) dt \geq \frac{T}{2} - 2 \sum_{2 \leq n \leq N} |a_n| n^{-1/2} (\log n)^{-1} + O(T (\log T)^{-1}) \geq \frac{T}{3},$$

si  $T$  es suficientemente grande, porque la suma es  $\ll N^{1/2+\varepsilon} \ll T^{1/2+\theta+\varepsilon} \ll T$ , lo cual prueba el resultado.  $\square$

Las otras dos estimaciones que necesitamos son bastante más complicadas de obtener que la anterior porque necesitamos apelar a las propiedades del molificador,  $\Phi(s)^2$ . Para ello, vamos a dividir el argumento en partes, comenzando por probar ciertas cotas relativas a integrales de  $\zeta(s)$  que tienen interés por sí mismas:

**Teorema 4.5.** *Sea  $s_1 = \frac{1}{2} + iv_1$ ,  $s_2 = \frac{1}{2} + iv_2$  con  $|v_1|, |v_2| \leq 1$ . Sean  $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$  tales que  $(a, b) = 1$ . Tenemos que:*

$$(4.32) \quad \int_0^T \zeta(s_1 + it) \bar{\zeta}(s_2 + it) a^{s_1 + it} b^{\bar{s}_2 - it} dt = TP_v\left(\frac{T}{2\pi ab}\right) + O((ab)^{3/2} T^{8/9} \log^4 T),$$

donde la constante implícita es absoluta,  $v = v_2 - v_1$  y  $P_v(X)$  se define como:

$$(4.33) \quad P_v(X) = \zeta(1 - iv) + \zeta(1 + iv) \frac{X^{iv}}{1 + iv}.$$

*Demostración.* Sea  $T > 0$  arbitrario. Comenzamos evaluando la siguiente integral:

$$(4.34) \quad S = \int_{T_1}^{T_2} \zeta(s_1 + it) \bar{\zeta}(s_2 + it) a^{-s_1 - it} b^{-s_2 + it} dt,$$

para  $T \leq T_1 \leq T_2 \leq 2T$ . Haciendo el cambio de variable  $t \rightarrow t - v_1$  obtenemos que:

$$(4.35) \quad S = (ab)^{-1/2} b^{iv} \int_{T_1}^{T_2} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \bar{\zeta}\left(\frac{1}{2} + iv + it\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{it} dt + E,$$

donde  $E \ll (ab)^{-1/2} T^{1/2}$ , aplicando (1.49) en la línea crítica. Ahora aproximamos  $\zeta(s)$  por sus sumas parciales tal y como nos dicta el teorema 1.32. De esta manera, para  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  y  $|s| \leq \pi X$ , se tiene que:

$$(4.36) \quad \zeta(s) = \zeta_X(s) - \frac{X^{1-s}}{1-s} + O(X^{-\sigma}),$$

donde  $\zeta_X(s) = \sum_{n \leq X} n^{-s}$ . En particular, para  $\sigma = \frac{1}{2}$  y  $T \ll |s| \leq \pi T$  se cumple que:

$$(4.37) \quad \zeta(s) = \zeta_T(s) + O(T^{-1/2}).$$

Por tanto:

$$(4.38) \quad \begin{aligned} S &= (ab)^{-1/2} b^{iv} \int_{T_1}^{T_2} \zeta_T\left(\frac{1}{2} + it\right) \bar{\zeta}_T\left(\frac{1}{2} - iv - it\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{it} dt + E + E_\infty \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m, n \leq T} (am)^{-1/2 - it} (bn)^{-1/2 + iv + it} dt + E + E_\infty, \end{aligned}$$

donde  $E_\infty$  corresponde a la contribución del error en (4.37), luego verifica que  $E_\infty \ll (ab)^{-1/2} (T \log T)^{1/2}$ , en virtud de la estimación  $\int_0^{3T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| dt \ll T (\log T)^{1/2}$ , que se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.4). A continuación, tratamos los términos de la diagonal  $am = bn$  de (4.38). Como  $a$  y  $b$  son coprimos, se sigue que  $m = bl$  y  $n = al$  con  $l \leq L = Tc^{-1}$  donde  $c = \max(a, b)$ , luego dichos términos contribuyen:

$$(4.39) \quad S_0 = (T_2 - T_1) (ab)^{-1+iv} \zeta_L(1-iv) = (T_2 - T_1) (ab)^{-1+iv} \left( \zeta(1-iv) + \frac{L^{iv}}{iv} \right) + O(1).$$

Ahora veamos la aportación de los términos tales que  $am \neq bn$ . Denotemos a dicha suma como  $S^*$ , integrando vemos que  $S^* = S(T_2) - S(T_1)$ , donde:

$$(4.40) \quad S(t) = i \sum_{am \neq bn} (am)^{-1/2 - it} (bn)^{-1/2 + iv + it} \left( \log \frac{am}{bn} \right)^{-1}.$$

La principal contribución a  $S(t)$  proviene de los términos cercanos a la diagonal, es decir, de los  $m, n$  tales que  $1 - \varepsilon < \frac{am}{bn} < 1 + \varepsilon$  para cierto  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño que será escogido posteriormente. Denotemos por:

$$(4.41) \quad S_\varepsilon(t) = \sum_{0 < |am - bn| < \varepsilon bn} (am)^{-1/2 - it} (bn)^{-1/2 + iv + it} \left( \log \frac{am}{bn} \right)^{-1}.$$

Para los términos restantes tenemos que  $\left| \log \frac{am}{bn} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$ . Sabiendo esto, nos gustaría eliminar dicho término logarítmico de la suma, mediante sumación por partes, para lo que necesitamos usar la monotonía en  $m$  y  $n$ . Sin embargo, tal y como tenemos el rango de  $m$  y  $n$  esto no se cumple, pues habrá una región donde se tenga  $\log \frac{am}{bn} > \varepsilon/2$  y otra donde  $\log \frac{am}{bn} < -\varepsilon/2$ . Por ello, dividimos los rangos de  $m$  y  $n$  en intervalos diádicos de la forma  $[2^{-j-1}T, 2^{-j}T]$  con  $j = 0, 1, \dots$ . Así, hemos dividido dicho cuadrado en una cuadrícula formada por  $O(\log^2 T)$  rectángulos de manera que, en cada uno de estos bloques, el rango en el que se mueven  $m$  y  $n$  es un conjunto convexo fuera de la diagonal, luego cada uno de ellos cae o bien en la región positiva o bien en la negativa. Por tanto,  $\log \frac{am}{bn}$  es monótona en  $m$  y  $n$  en dichos bloques y no cambia de signo ni se anula, lo que nos permite aplicar sumación por partes para estimar la contribución de estos términos por:

$$\ll \varepsilon^{-1} (ab)^{-1/2} (\log T)^2 \left| \zeta_x \left( \frac{1}{2} + it \right) \zeta_y \left( \frac{1}{2} - iv - it \right) \right|,$$

para ciertos  $1 \leq x, y \leq T$ . Por otro lado, por la cota de subconvexidad de Weyl, (A.43), tenemos que  $\zeta_x(s) \ll |s|^{1/6} \log 3|s|$ , lo cual es válido para  $\sigma = \frac{1}{2}$  y  $x \leq 4|s|^2$ , y se deduce que:

$$(4.42) \quad S(t) = S_\varepsilon + O(\varepsilon^{-1} (ab)^{-1/2} T^{1/3} (\log T)^4).$$

Para los términos que componen  $S_\varepsilon(t)$  escribimos  $am = bn + h$  con  $0 < |h| < \varepsilon bn$  y usamos las aproximaciones:

$$(4.43) \quad (abmn)^{-1/2} \left( \log \frac{am}{bn} \right)^{-1} = \frac{1}{h} + O\left(\frac{1}{bn}\right), \quad \left( \frac{bm}{am} \right)^{it} = \left( 1 + \frac{h}{bn} \right)^{-it} = e^{-ith/bn} + O\left(\frac{th^2}{b^2 n^2}\right),$$

obteniendo:

$$(4.44) \quad S_\varepsilon(t) = \sum_{\substack{am - bn = h \\ 0 < |h| < \varepsilon bn}} ih^{-1} (bn)^{iv} e^{-ith/bn} + E_1,$$

donde  $E_1$  proviene de los términos de error de (4.43). Por ello, se tiene que:

$$(4.45) \quad \begin{aligned} E_1 &\ll (1 + \varepsilon t) \sum_{|am - bn| < \varepsilon bn} (bn)^{-1} \\ &\ll (1 + \varepsilon t) \sum_n (\varepsilon n b a^{-1} + 1) (bn)^{-1} \ll (1 + \varepsilon T) (\varepsilon a^{-1} T + b^{-1} \log T), \end{aligned}$$

donde hemos sumado primero sobre  $m$  habiendo fijado  $n$  y teniendo en cuenta que  $m$  puede tomar a lo sumo  $(2\varepsilon n b a^{-1} + 1)$  valores. Si en lugar de fijar  $n$ , fijamos  $m$

y sumamos primero sobre  $n$ , deducimos la misma cota que antes pero de manera que los papeles de  $a$  y  $b$  se habrán intercambiado, luego en realidad podemos acotar  $E_1$  por la estimación que más nos convenga en cada caso. Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $a \geq b$ . En este caso, aplicamos la cota en la que se fija  $m$  y como  $n \leq T$  se sigue que  $m \leq (1 + \varepsilon)a^{-1}bT$ . Por consiguiente, deducimos que  $E_1 \ll \varepsilon b^{-1}(1 + \varepsilon)a^{-1}bT + a^{-1} \log T \ll a^{-1}\varepsilon T \ll (ab)^{-1/2}\varepsilon T$  supuesto que  $\varepsilon T \geq \log T$ . En cambio, si tuviésemos que  $b \geq a$ , usamos la cota que surge de fijar  $n$  y una deducción análoga a la que acabamos de realizar nos lleva a la misma cota simétrica:

$$(4.46) \quad E_1 \ll (ab)^{-1/2}(\varepsilon T)^2,$$

supuesto que  $\varepsilon T \geq \log T$ , condición que asumimos como válida en adelante. Ahora escribimos  $S_\varepsilon(t)$  como sigue:

$$(4.47) \quad S_\varepsilon = \sum_{H^- < h < H^+, h \neq 0} ih^{-1} \sum_{\substack{N_1 < n < N_2 \\ n \equiv -hb \pmod{a}}} (bn)^{iv} e^{-ith/bn} + E_1,$$

donde  $H^+ = \min(\varepsilon bT, \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}aT)$ ,  $H^- = -\min(\varepsilon bT, \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1}aT)$ ,  $N_1 = \frac{|h|}{\varepsilon b}$  y  $N_2 = \min(T, (aT - h)b^{-1})$ . Para la suma interior, usamos el lema 1.31 aplicado a  $f(an + \alpha)$ :

$$(4.48) \quad \sum_{\substack{N_1 < n < N_2 \\ n \equiv \alpha \pmod{a}}} e(f(n)) = a^{-1} \int_{N_1}^{N_2} e(f(x)) dx + O(1),$$

lo cual es válido para toda función  $f$  tal que  $|f'| \leq (2a)^{-1}$  y  $f'' \neq 0$  en el intervalo  $[N_1, N_2]$  con  $N_1 < N_2$ . Asumiendo que  $2\varepsilon^2 abT \leq 1$  obtenemos que:

$$(4.49) \quad \sum_{\substack{N_1 < n < N_2 \\ n \equiv -hb \pmod{a}}} (bn)^{iv} e^{-ith/bn} = a^{-1} \int_{N_1}^{N_2} (bx)^{iv} e^{-ith/bx} dx + O(1).$$

En esta expresión reemplazamos  $N_2$  por  $T \min(1, a/b)$  y tenemos un error  $O(|h|/ab)$ . Posteriormente, realizamos el cambio de variable  $x \rightarrow t/(2\pi bx)$ , consiguiendo:

$$(4.50) \quad \sum_{\substack{N_1 < n < N_2 \\ n \equiv -hb \pmod{a}}} (bn)^{iv} e^{-ith/bn} = (ab)^{-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1+iv} \int_{t/2\pi dT}^{\varepsilon t/2\pi|h|} e(-hx) x^{-iv-2} dx + O\left(\frac{|h|}{ab} + 1\right),$$

donde  $d = \min(a, b)$ . Por tanto, poniendo esto último en  $S_\varepsilon(t)$ , obtenemos lo siguiente:

$$(4.51) \quad S_\varepsilon(t) = \frac{t}{ab} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{iv} \int_{t/2\pi dT}^{\infty} x^{-2-iv} \left( \sum_{\substack{0 < |h| < \varepsilon t/2\pi x \\ H^- < h < H^+}} (2\pi i h)^{-1} e(-hx) \right) dx + E_1 + E_2,$$

donde:

$$(4.52) \quad E_2 \ll \sum_{0 < h < 2\varepsilon dT} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{h}\right) \ll (ab)^{-1/2} \varepsilon T + \log T.$$

Nótese que el rango de  $h$  usado en la anterior suma se deduce de observar que el valor máximo que puede tomar  $h$  es  $|H^-|$  y, suponiendo que  $\varepsilon < 1/2$ , lo cual podemos hacer, llegamos a que  $|H^-| \leq 2\varepsilon dT$ . A continuación, notemos que la suma sobre  $h$  en la integral de (4.51) es una suma parcial de la expansión en serie de Fourier de  $-\psi(x) = \lfloor x \rfloor - x + \frac{1}{2}$ . En efecto,  $-\psi(x) = \frac{1}{2} - x$  en  $(0, 1)$  y es 1-periódica, además se puede comprobar que sus coeficientes de Fourier  $h$ -ésimos son exactamente  $(2\pi ih)^{-1}$ . Por consiguiente, el criterio de Dini nos asegura que  $-\psi(x)$  coincide con su serie de Fourier en todos los puntos excepto en los enteros. Por otro lado, gracias a (4.18) de [31], se cumple que:

$$(4.53) \quad -\psi(x) = \sum_{\substack{0 < |h| < H \\ h \neq 0}} (2\pi ih)^{-1} e(hx) + O((1 + \|x\|H)^{-1}),$$

para todo  $H \geq 1$  y  $x \in \mathbb{R}$ . En nuestro caso particular, tenemos una serie asimétrica, ya que  $h$  pertenece al rango  $-H_1 < h < H_2$ ,  $h \neq 0$ , con  $H_1 = \min(|H^-|, \frac{\varepsilon t}{2\pi x})$  y  $H_2 = \min(H^+, \frac{\varepsilon t}{2\pi x})$ . Ahora tomamos  $H = \min(H_1, H_2) = H_2$  y observamos que, cuando  $a \geq b$  y  $\varepsilon$  es pequeño, entonces  $H^+ = |H^-|$ , mientras que en caso contrario,  $H^+ = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}aT$  y  $|H^-| = \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}aT$ , en cuyo caso  $\frac{|H^-|}{H^+} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  pequeño. En cualquier caso,  $|H^-| \leq (1 + O(\varepsilon))H^+$  y se deduce que  $H_1 \leq (1 + O(\varepsilon))H$ . Por tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned} -\psi(x) - \sum_{\substack{-H_1 < h < H_2 \\ h \neq 0}} (2\pi ih)^{-1} e(hx) &= - \sum_{H < h < H_1} (2\pi ih)^{-1} e(-hx) + O((1 + \|x\|H)^{-1}) \\ &\ll \log(H_1/H) + (1 + \|x\|H)^{-1} \ll \varepsilon + (1 + \|x\|H)^{-1}, \end{aligned}$$

luego sustituyendo en (4.51) se obtiene que:

$$(4.54) \quad S_\varepsilon(t) = \frac{t}{ab} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{iv} \int_{t/2\pi dT}^{\infty} x^{-2-iv} \psi(x) dx + E_1 + E_2 + E_3 + E_{asim},$$

donde  $E_{asim} \ll \frac{\varepsilon dT}{ab} \ll (ab)^{-1/2} \varepsilon T$ , que se absorbe en el error de  $E_2$ , y:

$$(4.55) \quad \begin{aligned} E_3 &\ll \frac{t}{ab} \int_{t/2\pi dT}^{\infty} \left(1 + \varepsilon t \frac{\|x\|}{x}\right)^{-1} x^{-2} dx = \frac{1}{\varepsilon ab} \int_{t/2\pi dT}^{\infty} \left(\|x\| + \frac{x}{\varepsilon t}\right)^{-1} \frac{dx}{x} \\ &\ll \frac{1}{\varepsilon ab} \left( \int_{t/2\pi dT}^{\infty} x^{-2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \log\left(1 + \frac{\varepsilon t}{k}\right) \right) \ll \frac{1}{\varepsilon ab} (d + \log^2 T) \ll \varepsilon^{-1} (ab)^{-1/2} \log^2 T, \end{aligned}$$

recordando que  $t \asymp T$ . Además, obsérvese que en la segunda desigualdad hemos separado la integral en la parte con  $x \leq 1/2$ , en la que  $\|x\| = x$ , y en la suma en  $k \geq 1$  de las integrales con  $x \in [k - 1/2, k + 1/2]$ , donde  $\|x\| = |x - k|$  y se pueden resolver explícitamente. Por otro lado, en la penúltima desigualdad hemos aproximado la suma en  $k$  por la integral correspondiente,  $\int_0^{\varepsilon t} \log(1+u)u^{-1} du \ll \log^2 T$ . Finalmente, usamos la fórmula:

$$(4.56) \quad \int_y^{\infty} \psi(x) x^{-2-w} dx = \frac{\zeta(1+w)}{1+w} - \frac{y^{-w}}{w} + \frac{1}{2} \frac{y^{-1-w}}{1+w},$$

válida para  $0 < y < 1$  y  $\Re(w) > -1$ , que se obtiene de la identidad  $\zeta(s)s^{-1} = (s-1)^{-1} - (2s)^{-1} + \int_y^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx - \int_y^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)x^{-s-1}dx$ , válida para todo  $0 < y < 1$  y  $\Re(s) > 0$ . Con todo ello, llegamos a la siguiente igualdad:

$$(4.57) \quad S_\varepsilon(t) = \frac{t}{ab} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{iv} \frac{\zeta(1+iv)}{1+iv} - \frac{t}{ab} \frac{(dT)^{iv}}{iv} + \frac{\pi}{ab} \frac{(dT)^{1+iv}}{1+iv} + E_1 + E_2 + E_3.$$

Nótese que el tercer término de  $S_\varepsilon(t)$  no depende de  $t$  luego desaparece al calcular  $S^*$ . Por otro lado, nótese que el primer término de  $S_0(t) := t(ab)^{-1+iv} \left(\zeta(1+iv) + L^{iv}(iv)^{-1}\right) + O(1)$  sumado con el primer término de  $S_\varepsilon(t)$  nos da exactamente  $t(ab)^{-1+iv} P_v\left(\frac{t}{2\pi ab}\right)$ , donde  $P_v(X)$  está definido en (4.33). Por último, nótese que  $cd = ab$ , luego  $abL = abc^{-1}T = dT$  y se sigue que  $t(ab)^{-1+iv} L^{iv}(iv)^{-1} = t(ab)^{-1} (dT)^{iv}(iv)^{-1}$  que es exactamente el segundo término que aparece en  $S_\varepsilon(t)$  pero con el signo cambiado. Por tanto, esos términos también se cancelan. En definitiva, hemos visto que al calcular  $S = S_0(T_2) - S_0(T_1) + S_\varepsilon(T_2) - S_\varepsilon(T_1) + R$  obtenemos que:

$$(4.58) \quad S = (ab)^{-1+iv} \left( T_2 P_v\left(\frac{T_2}{2\pi ab}\right) - T_1 P_v\left(\frac{T_1}{2\pi ab}\right) \right) + R,$$

donde  $R$  es el error total. Gracias a todas las cotas que hemos conseguido para los diferentes errores  $E, E_\infty, E_1, E_2, E_3$  y el de  $S(t)$  al aproximar por  $S_\varepsilon(t)$ , se tiene que:

$$(4.59) \quad R \ll (ab)^{-1/2} (T^{1/2} + \varepsilon^{-1} T^{1/3} + \varepsilon^2 T^2) \log^4 T + \log T,$$

suponiendo que  $\varepsilon T \geq \log T$  y  $2\varepsilon^2 abT \leq 1$ . Ahora elegimos  $\varepsilon = T^{-\frac{5}{9}}$ . Consecuentemente, se verifica que:

$$(4.60) \quad R \ll (ab)^{-1/2} T^{\frac{8}{9}} \log^4 T,$$

si  $2ab \leq T^{\frac{1}{9}}$ . Por otro lado, también tenemos la cota:

$$(4.61) \quad S \ll (ab)^{-1/2} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll (ab)^{-1/2} T \log T.$$

Combinando (4.58) y (4.61) podemos deshacernos de la condición  $2ab \leq T^{\frac{1}{9}}$ , aunque con una cota un poco más débil:

$$(4.62) \quad S = (ab)^{-1+iv} \left( T_2 P_v\left(\frac{T_2}{2\pi ab}\right) - T_1 P_v\left(\frac{T_1}{2\pi ab}\right) \right) + O\left((ab)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{8}{9}} \log^4 T\right).$$

Finalmente, nótese que en la definición de  $S$  hemos cambiado de signo los exponentes de  $a$  y  $b$  con respecto a la forma final de la integral que queremos acotar para el teorema. Si denotamos por  $S(a, b)$  a la integral con la que hemos trabajado y por  $I(a, b)$  a la misma integral pero con los exponentes que queremos, entonces se tiene que  $I(a, b) = (ab)^{1-iv} S(b, a)$ , luego se verifica que:

$$I(a, b) = \left( T_2 P_v\left(\frac{T_2}{2\pi ab}\right) - T_1 P_v\left(\frac{T_1}{2\pi ab}\right) \right) + O\left((ab)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{8}{9}} \log^4 T\right).$$

Esto nos da el teorema sin más que sumar los respectivos resultados obtenidos para puntos diádicos  $T_j$ .  $\square$

**Corolario 4.6.** Si  $(a, b) = 1$ , entonces tenemos que:

$$(4.63) \quad \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{it} dt = \frac{T}{\sqrt{ab}} \left( \log\left(\frac{T}{2\pi ab}\right) + 2\gamma - 1 \right) + O(abT^{8/9} \log^4 T),$$

donde la constante implícita es absoluta.

*Demostración.* Sabemos que la expansión en serie de Laurent de  $\zeta(1 + iv)$  viene dada por  $(iv)^{-1} + \gamma + O(|v|)$ . Por otro lado,  $(1 + iv)^{-1} = 1 - iv + O(|v|^2)$  y  $X^{iv} = 1 + iv \log X + O(|v|^2)$ , luego tenemos que  $P_v(X) = \log X + 2\gamma - 1 + O(|v|)$ . Como se puede observar, este error es bastante bueno si  $|v|$  es pequeño. En particular, tenemos que  $P_0(X) = \log X + 2\gamma - 1$  y se obtiene el resultado aplicando el teorema 4.5.  $\square$

**Observación 4.7.** Los términos de error en (4.32) y (4.63) pueden ser mejorados sustancialmente. Por ejemplo, si  $a = b = 1$ , el corolario 4.6 nos da que:

$$(4.64) \quad \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = T \left( \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + 2\gamma - 1 \right) + E(T),$$

donde  $E(T) \ll T^{8/9} \log^4 T$  que contrasta con la conocida  $E(T) \ll T^{7/22+\varepsilon}$ . De hecho, se conjetura que es cierto para  $E(T) \ll T^{1/4+\varepsilon}$ .

El teorema 4.5 puede ser generalizado para integrales del tipo:

$$(4.65) \quad G_{v,g}(T) = \int_0^T \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} - it - iv\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{it} g(t) dt,$$

donde  $g(t)$  es una función suave en  $[0, T]$ . Para  $g(t) = 1$ , simplemente denotamos a la integral por  $G_v(T)$  y obtenemos, por (4.32), lo siguiente:

$$(4.66) \quad G_v(T) = \frac{Tb^{iv}}{\sqrt{ab}} \left( \zeta(1 - iv) + \frac{\zeta(1 + iv)}{1 + iv} \left(\frac{T}{2\pi ab}\right)^{iv} \right) + O(abT^{8/9} \log^4 T) := A(t) + O(E_T),$$

si  $(a, b) = 1$ ,  $|v| \leq 1$  y  $T \geq 2$ , donde la constante implícita es absoluta. Si  $0 \leq T \leq 2$ , entonces  $G_v(T) = O(T)$  trivialmente. Así, integrando por partes en  $G_{v,g}(T)$  y estimando posteriormente por  $G_v(t) = O(t)$  en  $[0, 2]$ , se tiene que:

$$G_{v,g}(T) = G_v(T)g(T) - \int_2^T G_v(t)g'(t)dt + O(G),$$

donde:

$$(4.67) \quad G = |g(T)| + \int_0^T |g'(t)| \frac{tdt}{t+1}.$$

Al sustituir  $G_v(t) = A(t) + O(E_t)$  y deshacer la integración por partes en los términos correspondientes a  $A(t)$ , se deduce que:

$$G_{v,g}(T) = \int_2^T A'(t)g(t)dt + A(2)g(2) + O(GE_T),$$

que se puede reescribir como:

$$G_{v,g}(T) = \int_0^T A'(t)g(t) + \int_0^2 A(t)g'(t)dt + O(GE_T).$$

Para los casos en los que la segunda integral se pueda absorber en el término de error, como sucede, por ejemplo, si  $v$  es un valor fijo, obtenemos un resultado más general que (4.66):

$$(4.68) \quad G_{v,g}(T) = \frac{b^{iv}}{\sqrt{ab}} \int_0^T g(t) \left( \zeta(1-iv) + \zeta(1+iv) \left( \frac{t}{2\pi ab} \right)^{iv} \right) dt + O(abGT^{8/9} \log^4 T).$$

En particular, dicha condición se cumple para  $g(t) = (2\pi/t)^{iv/2}$ , lo cual nos da el siguiente corolario:

**Corolario 4.8.** Sean  $(a, b) = 1$ ,  $|v| \leq 1$  y  $T \geq 2$ . Entonces se verifica que:

$$(4.69) \quad \int_0^T \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} - it - iv\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{it} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{iv/2} dt \\ = \frac{2T}{\sqrt{ab}} \left( \frac{\zeta(1+iv)}{2+iv} \left(\frac{T}{2\pi a^2}\right)^{iv/2} + \frac{\zeta(1-iv)}{2-iv} \left(\frac{T}{2\pi b^2}\right)^{-iv/2} \right) + O(abT^{8/9} \log^5 T),$$

donde la constante implícita es absoluta.

Pasamos ya a demostrar el lema clave que necesitamos para probar el teorema de Selberg.

**Lema 4.9.** En las mismas hipótesis del lema 4.4 tenemos que:

$$(4.70) \quad \int_0^T |Z(t)|^2 dt \ll T,$$

$$(4.71) \quad \int_0^T |I(t)|^2 dt \ll \Delta T (\log T)^{-1},$$

donde  $I(t)$  está definida en (4.1).

*Demostración.* A continuación, probaremos con todo detalle (4.70). Para la demostración completa de (4.71) remitimos al lector a la prueba de (24.24) de [31]. Sean  $\alpha_l$  los coeficientes de:

$$(4.72) \quad \Phi^2(s) = \left( \sum_{d \leq D} \beta_d d^{-s} \right)^2 = \sum_{l \leq D^2} \alpha_l l^{-s},$$

donde  $\beta_d = \gamma_d h(\log d / \log D)$  y  $\alpha_l = \sum_{d_1 d_2 = l} \beta_{d_1} \beta_{d_2} = \sum_{d \leq D, l/d \leq D} \beta_d \beta_{l/d}$ , luego  $\beta_d \ll 1$  y  $\alpha_l \ll \sum_{d|l} 1 = d(l)$ . Por el corolario 4.6, tenemos que:

$$(4.73) \quad \int_0^T |Z(t)|^2 dt = \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \Phi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \\ = \sum_{a,b} \alpha_a \alpha_b (ab)^{-1/2} \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 (a/b)^{it} dt \\ = AT \left( \log \frac{T}{2\pi} + 2\gamma - 1 \right) - BT + O(D^6 T^{8/9} \log^6 T),$$

donde:

$$(4.74) \quad A = \sum_d \sum_{(a,b)=1} \alpha_{ad} \alpha_{bd} (abd)^{-1}, \quad B = \sum_d \sum_{(a,b)=1} \alpha_{ad} \alpha_{bd} (abd)^{-1} \log ab.$$

Para poder usar el corolario 4.6 y obtener la anterior igualdad lo que hemos hecho es denotar por  $d = (a, b)$ ,  $a = a'd$  y  $b = b'd$ . Así, la suma en  $a, b$  se reduce a la suma en  $\sum_d \sum_{a', b'}$ . Ahora, en la suma interior tenemos que  $(a', b') = 1$  y  $(a/b)^{it} = (a'/b')^{it}$  luego estamos en las hipótesis del corolario. Lo aplicamos y obtenemos:

$$(4.75) \quad \sum_d \sum_{a', b'} \alpha_{a'd} \alpha_{b'd} (a'b')^{-1/2} d^{-1} \left( T (a'b')^{-1/2} \left( \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) + 2\gamma - 1 - \log(a'b') \right) \right. \\ \left. + O(a'b' T^{8/9} \log^4 T) \right) = AT \left( \log \frac{T}{2\pi} + 2\gamma - 1 \right) - BT + E,$$

donde:

$$(4.76) \quad E \ll T^{8/9} (\log^4 T) \sum_d d^{-2} \sum_{a, b \leq D^2} |\alpha_a| a^{1/2} |\alpha_b| b^{1/2} \ll D^6 T^{8/9} \log^6 T,$$

lo cual se sigue de la cota  $\sum_{n \leq X} d(n) n^{1/2} \ll X^{3/2} \log X$  que a su vez se deduce de la estimación  $\sum_{n \leq X} d(n) \ll X \log X$  y sumación por partes. Por tanto, para tener lo que queremos basta con probar que:

$$(4.77) \quad A \ll (\log D)^{-1}, \quad B \ll 1.$$

Comenzaremos deduciendo la cota para  $A$  con todo detalle y luego modificaremos los argumentos para reducir el caso de  $B$  al de  $A$ . Empezamos diagonalizando la forma cuadrática  $A$ . Para ello, notemos que  $\sum_{\delta|a,b} \mu(\delta) = 0$ , salvo si  $(a, b) = 1$  en cuyo caso es 1. Así, en el caso en que  $\delta|a, b$ , escribiremos  $a = a'\delta$  y  $b = b'\delta$ . Por otro lado, tenemos la identidad elemental  $\sum_{\delta|k} \mu(\delta) \delta^{-1} = \varphi(k) k^{-1}$ . Con todo ello, se tiene que:

$$(4.78) \quad A = \sum_d d^{-1} \sum_{a,b} \alpha_{ad} \alpha_{bd} (ab)^{-1} \sum_{\delta|a,b} \mu(\delta) = \sum_d d^{-1} \sum_{\delta} \mu(\delta) \delta^{-2} \sum_{a', b'} \alpha_{a'\delta d} \alpha_{b'\delta d} (a'b')^{-1} \\ = \sum_d d^{-1} \sum_{\delta} \mu(\delta) \delta^{-2} \left( \sum_a \alpha_{a\delta d} a^{-1} \right)^2 \stackrel{(k=\delta d)}{=} \sum_k k^{-1} \left( \sum_{\delta|k} \mu(\delta) \delta^{-1} \right) \left( \sum_a \alpha_{ak} a^{-1} \right)^2 \\ = \sum_k \varphi(k) \left( \sum_a \alpha_{ak} (ak)^{-1} \right)^2 \stackrel{(d=k, n=ak)}{=} \sum_d \varphi(d) \left( \sum_{\substack{n \equiv 0 \\ (\text{mód } d)}} \alpha_n n^{-1} \right)^2 = \sum_d \varphi(d) A_d^2,$$

donde hemos definido  $A_d$  como sigue:

$$(4.79) \quad A_d = \sum_{\substack{n \equiv 0 \\ (\text{mód } d)}} \alpha_n n^{-1} = \sum_{\substack{d_1 d_2 \equiv 0 \\ (\text{mód } d) \\ d_1, d_2 \leq D}} \beta_{d_1} \beta_{d_2} (d_1 d_2)^{-1}, \quad \text{para } d \leq D^2.$$

A continuación, usamos que dado un número  $m$ , todo número se puede expresar como el producto de un entero  $n$ , cuyos factores primos dividen todos a  $m$ , y otro número coprimo con  $m$ . A la propiedad que verifica  $n$  la denotaremos como  $n|m^\infty$ . Aplicando

esto con  $m = d|d_1d_2$ , podemos escribir  $d_1 = \delta_1k$ ,  $d_2 = \delta_2l$  con  $\delta_1\delta_2|d^\infty$ ,  $(kl, d) = 1$ ,  $d|\delta_1\delta_2$  y  $\delta_1, \delta_2 \leq D$ . Entonces:

$$(4.80) \quad A_d = \sum_{d|\delta_1\delta_2} \sum_{\delta_1\delta_2|d^\infty} (\delta_1\delta_2)^{-1} A_d(\delta_1)A_d(\delta_2), \text{ con } A_d(\delta) = \sum_{(k,d)=1} \beta_{\delta k}k^{-1}.$$

De ahora en adelante tomamos  $h(x) = (1-x)_+$ , de manera que  $\beta_d = \gamma_d \frac{\log^+ D/d}{\log D}$ . Estos son los coeficientes originales de Selberg. Sin embargo, uno podría elegir  $h(x)$  casi arbitrario siempre y cuando esté sujeto a las condiciones (4.23) y (4.24). En nuestro caso concreto, si aplicamos la fórmula de inversión de Mellin, (A.2), a la función  $\log^+(1/x)$ , obtenemos lo siguiente:

$$(4.81) \quad \log^+ x = (2\pi i)^{-1} \int_{(\varepsilon)} x^s s^{-2} dx, \text{ donde } \int_{(c)} \text{ denota } \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}.$$

Además, si  $\delta|d^\infty$  y  $(k, d) = 1$  tenemos que  $(\delta, k) = 1$ , luego  $\gamma_{\delta k} = \gamma_\delta \gamma_k$  por ser los coeficientes multiplicativos. Así, tenemos que:

$$(4.82) \quad A_d(\delta) \log D = \sum_{(k,d)=1} \gamma_{\delta k} k^{-1} \log^+ \frac{D}{\delta k} = \frac{\gamma_\delta}{2\pi i} \int_{(\varepsilon)} M(s+1)(D/\delta)^s s^{-2} ds,$$

con  $M(s)$  la correspondiente función zeta, definida como sigue:

$$(4.83) \quad M(s) = \sum_{(k,d)=1} \gamma_k k^{-s} = \sum_k \chi_0(k) \gamma_k k^{-s} = \prod_{p|d} (1-p^{-s})^{1/2} = \zeta_d(s)^{1/2} \zeta(s)^{-1/2},$$

donde  $\chi_0$  denota el carácter trivial módulo  $d$  y, de aquí en adelante,  $\zeta_d(s) = \prod_{p|d} (1-p^{-s})^{-1}$ . Por un lado, tenemos que  $\zeta_d(s+1) \ll \zeta_d(1) = d/\varphi(d)$ ,  $\zeta(s+1) \gg |s|^{-1}$  y  $(D/\delta)^s \ll 1$  en la recta  $\Re(s) = \varepsilon$  con  $\varepsilon = (\log D)^{-1}$ . Por otro lado, se tiene que:

$$(4.84) \quad \int_{(\varepsilon)} |s|^{-3/2} ds \ll \varepsilon^{-1/2} = (\log D)^{1/2}.$$

Por tanto, deducimos que  $A_d(\delta) \ll |\gamma_\delta| d^{1/2} (\varphi(d) \log D)^{-1/2}$ . Sustituyendo en (4.80), se sigue que  $A_d \ll \lambda(\delta) d (\varphi(d) \log D)^{-1}$ , con  $\lambda(\delta)$  verificando que:

$$(4.85) \quad \begin{aligned} \lambda(d) &= \sum_{d|\delta_1\delta_2} \sum_{\delta_1\delta_2|d^\infty} |\gamma_{\delta_1} \gamma_{\delta_2}| (\delta_1\delta_2)^{-1} \leq \sum_{r|d^\infty, d|r} r^{-1} \sum_{\delta_1\delta_2=r} \tilde{\gamma}_{\delta_1} \tilde{\gamma}_{\delta_2} \\ &= \sum_{r|d^\infty, d|r} r^{-1} (\tilde{\gamma} * \tilde{\gamma})(r) = d^{-1} \sum_{m|d^\infty} m^{-1} = \varphi(d)^{-1}, \end{aligned}$$

porque  $|\gamma_\delta| \leq \tilde{\gamma}_\delta$ ,  $\tilde{\gamma} * \tilde{\gamma} = 1$ , donde  $*$  representa la convolución de Dirichlet (ver apéndice A.6), y si  $r = md$  con  $r|d^\infty$ , entonces  $m|d^\infty$ . Por consiguiente, se obtiene que:

$$(4.86) \quad A_d \ll d (\varphi(d))^{-2} (\log D)^{-1}.$$

Por último, poniendo esta estimación en la forma diagonal de  $A$  podemos argumentar como sigue:

$$(4.87) \quad \begin{aligned} A(\log D)^2 &\ll \sum_{d \leq D^2} d^2 \varphi^{-3}(d) = \sum_{d \leq D^2} d^{-1} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-3} \ll \sum_{d \leq D^2} d^{-1} \prod_{p|d} (1 + p^{-1/2}) \\ &\leq \sum_{d \leq D^2} d^{-1} \sum_{w|d} w^{-1/2} = \sum_{w=1}^{\infty} w^{-3/2} \sum_{k \leq D^2} k^{-1} \leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{k \leq D^2} k^{-1} \ll \log D, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de la cota para  $A$ . Para conseguir la estimación para  $B$ , escribimos  $\log ab = \log abd^2 - 2 \log d$  y separamos  $B$  de acuerdo a ello, digamos en la forma  $B = B' - 2B''$ . Por los mismos argumentos que nos llevaron a la diagonalización de  $A$ , deducimos expresiones similares para  $B'$  y  $B''$ . Así, tenemos que:

$$(4.88) \quad \begin{aligned} B' &= \sum_d \sum_{\delta} \sum_{a', b'} d \mu(\delta) \alpha_{a' \delta d} \alpha_{b' \delta d} (a' \delta d)^{-1} (b' \delta d)^{-1} \log(a' \delta d b' \delta d) \\ &\stackrel{(k=\delta d)}{=} \sum_k \sum_{\delta|k} \mu(\delta) \frac{k}{\delta} \sum_{a, b} \alpha_{ak} (ak)^{-1} \alpha_{bk} (bk)^{-1} \log(akbk) \\ &\stackrel{(d=k, a=ak, b=bk)}{=} \sum_d \varphi(d) \sum_{a, b \equiv 0 \pmod{d}} \alpha_a \alpha_b (ab)^{-1} \log ab = 2 \sum_d \varphi(d) A_d B_d, \end{aligned}$$

con:

$$(4.89) \quad B_d = \sum_{a \equiv 0 \pmod{d}} \alpha_a a^{-1} \log a = \sum_q \Lambda(q) \sum_{\substack{a \equiv 0 \pmod{d} \\ a \equiv 0 \pmod{q}}} \alpha_a a^{-1} = \sum_q \Lambda(q) A_{[d, q]},$$

donde  $[d, q] = \text{mcm}(d, q)$ , gracias a la fórmula  $\log a = (\Lambda * 1)(a) = \sum_{q|a} \Lambda(q)$ . Por tanto, usando (4.86) con  $[d, q] = dr_q$  y  $r_q = \frac{q}{(d, q)}$  y notando que  $r_q$  es potencia de primo cuando  $q$  lo es, lo que implica que  $\varphi(dr_q) \asymp \varphi(d)r_q$ , deducimos que:

$$(4.90) \quad \begin{aligned} B_d &\ll \frac{1}{\log D} \sum_{q \leq D^2} \Lambda(q) \frac{[d, q]}{(\varphi([d, q]))^2} \ll \frac{d}{\log D} \sum_{q \leq D^2} \frac{r_q \Lambda(q)}{(\varphi(dr_q))^2} \\ &\ll \left( \sum_{q \leq D^2} (d, q) \Lambda(q) q^{-1} \right) d \varphi^{-2}(d) (\log D)^{-1} \ll d \varphi^{-2}(d), \end{aligned}$$

donde hemos separado la última suma en dos casos: por un lado, si  $q = p^k$  y  $p \nmid d$ , entonces la suma correspondiente a esos términos está acotada por  $\sum_{p^k \leq D^2} p^{-k} \log p \ll \log D$  por el primer teorema de Mertens. Por otro lado, si  $q = p^k$  y  $p|d$ , tenemos que, si  $v_p(d)$  denota la valoración  $p$ -ádica de  $d$  y  $k \leq v_p(d)$ , entonces  $(d, p^k) p^{-k} = 1$ , así que dicha parte de la suma es igual a  $\log d$ , mientras que si  $v_p(d) < k$  entonces  $\sum_{p|d} (\log p) \sum_{k=v_p(d)+1}^{\infty} p^{v_p(d)-k} = \sum_{p|d} \frac{\log p}{p-1} \leq \log d$ . En definitiva, la suma sobre los  $p|d$  es  $\ll \log d \ll \log D$ . Como se puede observar, la cota conseguida en (4.90) es mayor que la de  $A_d$  por un factor  $\log D$ , luego los argumentos previamente realizados en (4.87) nos llevan a que  $B' \ll 1$ , como queríamos. Por otro lado, argumentando

exactamente igual que en (4.78), se tiene que:

$$(4.91) \quad B'' = \sum_d \sum \sum_{(a,b)=1} \alpha_{ad} \alpha_{bd} (abd)^{-1} \log d = \sum_d \psi(d) A_d^2,$$

con:

$$(4.92) \quad \begin{aligned} \psi(d) &= \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \frac{d}{\delta} \log \frac{d}{\delta} = \sum_{\delta|d} \mu(\delta) \frac{d}{\delta} \sum_{\delta q|d} \Lambda(q) = \sum_{q|d} \Lambda(q) q \sum_{\delta|d/q} \mu(\delta) \frac{d/q}{\delta} \\ &= \sum_{q|d} \Lambda(q) q \varphi(d/q) \leq 2\varphi(d) \sum_{q|d} \Lambda(q) = 2\varphi(d) \log d, \end{aligned}$$

para lo que hemos usado nuevamente que  $\log n = (\Lambda * 1)(n)$  y  $\varphi(n) = (\mu * N)(n)$ , con  $N(n) = n$ . Asimismo, también hemos usado que  $q\varphi(d/q) \leq 2\varphi(d)$ . En efecto, sea  $q = r^k$  con  $r$  primo. Dado que  $\varphi(d) = d \prod_{p|d} (1 - p^{-1})$  y  $q\varphi(d/q) = d \prod_{p|d/q} (1 - p^{-1})$ , basta con distinguir dos casos. Si la máxima potencia de  $r$  que divide a  $d$  es mayor que  $q$ , entonces  $r$  divide a  $d/q$  y se tiene que todos los primos que dividen a  $d$  también dividen a  $d/q$ , luego  $q\varphi(d/q) = \varphi(d)$ . En cambio, si la mayor potencia de  $r$  que divide a  $d$  es menor que  $q$ , entonces todos los primos que dividen a  $d$  dividen también a  $d/q$  salvo el propio  $r$ , luego se tiene que  $q\varphi(d/q) = \varphi(d)(1 - r^{-1})^{-1} \leq 2\varphi(d)$ . En definitiva, gracias a (4.92), se sigue que  $B'' \leq 4A \log D \ll 1$ . Esto termina la prueba de (4.70).  $\square$

**Teorema 4.10. Selberg (1942):** *Se verifica que:*

$$(4.93) \quad N_0(T) \gg T \log T.$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  el subconjunto de  $[0, T]$  en el cual  $|I(t)| < J(t)$ . Entonces:

$$(4.94) \quad A := \int_{\mathcal{T}} J(t) dt \geq \int_{\mathcal{T}} (J(t) - |I(t)|) dt = \int_0^T (J(t) - |I(t)|) dt := B - C.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.70), obtenemos:

$$(4.95) \quad \begin{aligned} A^2 &\leq |\mathcal{T}| \int_0^T J^2(t) dt = |\mathcal{T}| \int_0^T \left( \int_0^\Delta |Z(t+v)| dv \right)^2 dt \\ &\leq \Delta |\mathcal{T}| \int_0^T \int_0^\Delta |Z(t+v)|^2 dv dt \leq \Delta^2 |\mathcal{T}| \int_0^{T+\Delta} |Z(t)|^2 dt \ll \Delta^2 |\mathcal{T}| T. \end{aligned}$$

donde, en la penúltima desigualdad, hemos hecho el cambio de variable  $u = t + v$  y usado el teorema de Fubini el cual nos da  $\int_0^{T+\Delta} \int_{L(u)} |Z(u)|^2 dt du$  con  $|L(u)| = \min(T, u) - \max(0, u - \Delta) \leq \Delta$ . Por otro lado, por (4.28), tenemos la siguiente estimación:

$$(4.96) \quad B = \int_0^T \int_t^{t+\Delta} |Z(u)| du dt \geq \Delta \int_\Delta^T |Z(u)| du \gg \Delta T,$$

pues, con la notación anterior,  $|L(u)| = \Delta$  para  $\Delta < u < T$ . Por último, por (4.71), tenemos que:

$$(4.97) \quad C^2 \leq T \int_0^T |I(t)|^2 dt \ll \Delta T^2 (\log T)^{-1}.$$

Combinando todas las estimaciones obtenemos que  $\Delta T \ll \Delta^{1/2} T \log^{-1/2} T + \Delta |\mathcal{T}| T^{1/2}$ , y se sigue que  $|\mathcal{T}| \gg T$  si  $\Delta \log T$  es suficientemente grande. Por tanto, el conjunto  $\mathcal{T}$  contiene una sucesión de puntos  $\{t_1, \dots, t_R\}$ , que están  $\Delta$ -espaciados, de longitud  $R \geq \Delta^{-1} |\mathcal{T}| \gg T \log T$ . Además, para cada  $t_r$ , hay un cambio de signo de  $Z(u)$  en el intervalo  $(t_r, t_r + \Delta)$ , luego hay un cero de  $\zeta(\frac{1}{2} + iu)$  en este intervalo y se deduce que  $N_0(T) \gg T \log T$ .  $\square$

**Observación 4.11.** El método de Selberg funciona bien tanto para contar ceros en la línea crítica como para contar ceros cerca de ella. Él mismo probó que:

$$(4.98) \quad N\left(\frac{1}{2} + 4\delta, T\right) \ll T^{1-\delta} \log T,$$

uniformemente en  $\delta \geq 0$ . De ello se sigue que casi todos los ceros de  $\zeta(s)$  caen en la región:

$$(4.99) \quad \left| \sigma - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\eta(t)}{\log(|t| + 3)},$$

donde  $\eta(t)$  es cualquier función positiva que crece hasta infinito.

**Observación 4.12.** Cabe destacar que el teorema de Selberg prueba que hay una proporción positiva de ceros de  $\zeta(s)$  de orden impar en la línea crítica  $\sigma = \frac{1}{2}$  (en particular, infinitos), así como el teorema de Hardy y Littlewood prueba que hay infinitos. Aunque este comentario parezca baladí, hay muy pocos resultados relativos a la multiplicidad de los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  y, estos dos teoremas, son prácticamente los únicos que nos dan resultados no condicionados a la veracidad de la hipótesis de Riemann, como sí sucede con la «pair correlation conjecture» que veremos en el capítulo siguiente.

A pesar de la visible potencia del teorema 4.10, posee una desventaja notable en que no nos proporciona un valor concreto para la constante, solo se limita a decirnos que esta es positiva. Con este resultado en mente, varios matemáticos se lanzaron a intentar obtener valores concretos para las posibles constantes para las cuales el teorema es válido. El primer resultado de este tipo llegó en 1974, cuando N. Levinson demostró que  $N_0(T) > \frac{1}{3} N(T)$  para  $T$  suficientemente grande, [35]. Le siguió B. Conrey que, en 1989, probó que  $N_0(T) > \frac{2}{5} N(T)$  para  $T$  suficientemente grande, [5]. A día de hoy se sabe que al menos un 41,72% de los ceros están en la línea crítica.

### 4.3. Consecuencias de la hipótesis de Riemann

Después de haber estudiado el orden de los ceros en la línea crítica, el siguiente paso natural es el de preguntarse por las consecuencias y equivalencias de la hipótesis de Riemann. Ya hemos visto algunas de ellas en el capítulo 1 en relación con el error en el teorema de los números primos en sus distintas formas equivalentes. En esta sección, nos vamos a centrar en dos resultados fundamentales: un resultado puramente analítico como es la hipótesis de Lindelöf, de la que ya hemos hablado y de la que hemos podido ver su relevancia en el estudio de los momentos de  $\zeta(s)$  y en los teoremas de

densidad en el capítulo 3, y un resultado con tintes más aritméticos como es el orden de crecimiento de la función de Mertens que introduciremos a continuación. Definimos la función de Mertens como  $M(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \mu(k)$ . Comenzaremos viendo que la hipótesis de Riemann es equivalente a que  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Nótese que  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$  es equivalente a decir que  $M(x) = o(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$ , ya que, si  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces fijado un  $\varepsilon > 0$  tenemos que  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon/2})$ , luego  $M(x) = o(x^{1/2+\varepsilon})$ . Por ello, en la literatura se prefiere usar la equivalencia con el símbolo  $O$ , dado que el símbolo  $o$  no aporta nada nuevo en este caso.

Para esta primera parte, seguiremos la sección 12.1 de [10]. Sea  $dM$  la medida de Stieltjes tal que la fórmula de (3.40) toma la forma:

$$(4.100) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \int_0^\infty x^{-s} dM(x), \text{ en } \Re(s) > 1.$$

Aplicando integración por partes obtenemos que, en  $\Re(s) > 1$ , se verifica lo siguiente:

$$(4.101) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \left( X^{-s} M(X) + s \int_1^X M(x) x^{-s-1} dx \right) = s \int_1^\infty M(x) x^{-s-1} dx,$$

pues la desigualdad trivial  $|M(x)| \leq x$  implica que  $x^{-s} M(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y que  $s \int_1^\infty M(x) x^{-s-1} dx$  converge, ambas en  $\Re(s) > 1$ . Ahora bien, si  $M(x)$  crece más lento que  $x^a$  para cierto  $a > 0$  entonces la integral de (4.101) converge en  $\Re(s) > a$  y, por consiguiente,  $1/\zeta(s)$  es holomorfa en dicho semiplano por continuación analítica. Así, como  $1/\zeta(s)$  tiene polos en  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ ,  $M(x)$  no puede crecer más lento que  $x^a$  para ningún  $a < \frac{1}{2}$ . De hecho, esto demuestra que la condición de que  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$  es suficiente para probar la hipótesis de Riemann. Por otra parte, en 1912, Littlewood probó el recíproco de la anterior afirmación, [36]. Por tanto, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.13. Littlewood (1912):** *La hipótesis de Riemann es equivalente a que  $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*

*Demostración.* Bajo la hipótesis de Riemann, podemos aplicar un teorema debido a Backlund, el cual se puede encontrar en la sección 9.4 de [10], y tenemos que, para todo  $\varepsilon, \delta > 0$  y  $\sigma_0 > 1$  existe un  $T_0$  tal que  $|\log \zeta(\sigma + it)| < \delta \log t$  para todo  $t \geq T_0$  y  $\frac{1}{2} + \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_0$ . Como  $|\log \zeta(s)|$  está acotado en el semiplano  $\Re(s) \geq \sigma_0$ , se tiene que existe una constante  $K$  tal que  $|1/\zeta(s)| \leq Kt^\delta$  en el conjunto  $\{s = \sigma + it : \sigma = \frac{1}{2} + \varepsilon, t \geq T_0\}$ . Este es el hecho clave de la prueba. Sea  $x$  igual a la mitad de un número entero impar de manera que  $x - [x] = \frac{1}{2}$ . Por la fórmula de Perron, lema 1.46, tenemos que el error en la aproximación:

$$(4.102) \quad M(x) \sim (2\pi i)^{-1} \int_{2-iT}^{2+iT} F(s) ds, \quad \text{donde } F(s) = \frac{x^s}{s\zeta(s)},$$

es a lo sumo:

$$(4.103) \quad \sum_{n < x} \frac{|\mu(n)|(x/n)^2}{T \log(x/n)} + \sum_{n > x} \frac{|\mu(n)|(x/n)^2}{T \log(n/x)} \leq \frac{x^2}{T} \left( \sum_{n < x} \frac{1}{n^2 \log(x/n)} + \sum_{n > x} \frac{1}{n^2 \log(n/x)} \right).$$

Ahora escribimos la primera suma como sigue:

$$\sum_{n \leq x/2} \frac{1}{n^2 \log(x/n)} + \sum_{x/2 < n < x} \frac{1}{n^2 \log(1 + (x-n)/n)}.$$

Puesto que  $\log(1+y) \geq y/2$  para  $0 \leq y \leq 1$ , lo anterior está acotado por:

$$(4.104) \quad \frac{\zeta(2)}{\log 2} + \frac{4}{x} \sum_{0 < x-n < x/2} \frac{1}{x-n} \leq \frac{\zeta(2)}{\log 2} + \frac{4}{x} \frac{1}{x-[x]} + \frac{4}{x} \sum_{0 < j < x/2} j^{-1}.$$

Esto muestra que es  $\ll 1$  para  $x$  suficientemente grande. La segunda suma de (4.103) se puede acotar de manera similar y se obtiene que el error cometido en (4.102) es  $O(x^2/T)$ . A continuación aplicamos el teorema de los residuos y tenemos que la integral de (4.102) es igual a  $(2\pi i)^{-1}(I_1 + I_2 + I_3)$  donde  $I_j$  son las integrales recorridas como corresponda en los segmentos restantes del rectángulo de vértices  $2 \pm iT$ ,  $1/2 + \varepsilon \pm iT$ . Por la estimación  $|1/\zeta(s)| \leq Kt^\delta$ , las integrales en los segmentos horizontales son  $\ll x^2 K T^{\delta-1}$ , mientras que la integral en el segmento vertical está acotada por:

$$(4.105) \quad (2\pi i)^{-1} \int_{1/2+\varepsilon-iT_0}^{1/2+\varepsilon+iT_0} F(s) + 2(2\pi)^{-1} \int_{T_0}^T x^{1/2+\varepsilon} t^{\delta-1} dt \ll x^{1/2+\varepsilon}(1+T^\delta).$$

Tomando  $T = x^2$ , se sigue que  $M(x) \ll x^{1/2+\varepsilon+2\delta}$  para todo  $x$  que sea la mitad de un número entero impar y suficientemente grande. Como  $M(x)$  cambia a lo sumo por  $\pm 1$  entre dichos números, lo mismo es cierto para todo  $x$  suficientemente grande, luego, como  $\varepsilon$  y  $\delta$  son arbitrarios, obtenemos el resultado.  $\square$

**Corolario 4.14.** *Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces en  $\Re(s) > \frac{1}{2}$ , la siguiente representación es válida:*

$$(4.106) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

*Demostración.* En primer lugar, tenemos que:

$$(4.107) \quad \sum_{n < x} \mu(n)n^{-s} = x^{-s}M(x) + s \int_0^x M(u)u^{-s-1} du.$$

Por el teorema anterior, si  $\Re(s) > \frac{1}{2}$ , entonces la expresión anterior converge cuando  $x \rightarrow \infty$  a  $s \int_0^\infty M(u)u^{-s-1} du$  y esta coincide con  $1/\zeta(s)$  en  $\Re(s) > 1$  luego, por continuación analítica, lo hace en  $\Re(s) > \frac{1}{2}$ .  $\square$

Pasemos a ver que la hipótesis de Lindelöf se sigue de la hipótesis de Riemann. Para esta segunda parte de la sección, seguiremos el capítulo 14 de [52].

**Teorema 4.15.** *Suponiendo que no hay ceros de  $\zeta(s)$  en la región  $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ , se tiene que:*

$$(4.108) \quad \log \zeta(s) = O((\log t)^{2-2\sigma+\varepsilon}),$$

*uniformemente en  $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ .*

*Demostración.* Apliquemos el teorema de Borel-Carathéodory, teorema 1.25, a la función  $\log \zeta(s)$  y las circunferencias de centro  $2 + it$  y radios  $\frac{3}{2} - \frac{\delta}{2}$ ,  $\frac{3}{2} - \delta$  para  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . En la circunferencia mayor tenemos que  $\Re(\log \zeta(s)) = \log |\zeta(s)| < A \log t$ . Por tanto, en la circunferencia menor tenemos que:

$$(4.109) \quad |\log \zeta(s)| \leq \frac{2(3-2\delta)}{\delta} A \log t + \frac{2(3-\frac{3}{2}\delta)}{\delta} |\log \zeta(2+it)| < A\delta^{-1} \log t.$$

Ahora aplicamos el teorema de los tres círculos de Hadamard a las circunferencias  $C_1, C_2, C_3$  con centros  $\sigma_1 + it$  ( $1 < \sigma_1 \leq t$ ) y que pasan por los puntos  $1 + \eta + it$ ,  $\sigma + it$  y  $\frac{1}{2} + \delta + it$ . Por tanto, los radios respectivos son  $r_1 = \sigma_1 - 1 - \eta$ ,  $r_2 = \sigma_1 - \sigma$  y  $r_3 = \sigma_1 - \frac{1}{2} - \delta$ . Si denotamos por  $M_1, M_2, M_3$  al máximo de  $|\log \zeta(s)|$  en las circunferencias respectivas, entonces se cumple que  $M_2 \leq M_1^{1-a} M_3^a$  donde:

$$(4.110) \quad a = \frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{\log \frac{r_3}{r_1}} = \frac{\log \left(1 + \frac{1+\eta-\sigma}{\sigma_1-1-\eta}\right)}{\log \left(1 + \frac{\frac{1}{2}+\eta-\delta}{\sigma_1-1-\eta}\right)} = \frac{1+\eta-\sigma}{\frac{1}{2}+\eta-\delta} + O\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) = 2 - 2\sigma + O(\delta) + O(\eta) + O\left(\frac{1}{\sigma_1}\right).$$

Por (4.109),  $M_3 < A\delta^{-1} \log t$  mientras que en  $C_1$  tenemos que  $\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_1(n)n^{-s}$ , donde  $\Lambda_1(n) = \Lambda(n)(\log n)^{-1} \leq 1$ , luego obtenemos que:

$$(4.111) \quad M_1 \leq \max_{\sigma \geq 1+\eta} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1-\eta} < \frac{A}{\eta}.$$

Por consiguiente:

$$(4.112) \quad |\log \zeta(\sigma + it)| < \left(\frac{A}{\eta}\right)^{1-a} \left(\frac{A \log t}{\delta}\right)^a < \frac{A}{\eta^{1-a}\delta^a} (\log t)^{2-2\sigma+O(\delta)+O(\eta)+O(\sigma_1^{-1})}.$$

Por tanto, el resultado se sigue de tomar  $\delta$  y  $\eta$  suficientemente pequeños y  $\sigma_1$  suficientemente grande. Más precisamente, podemos tomar  $\sigma_1 = \delta^{-1} = \eta^{-1} = \log \log t$  y se tiene que  $(\log t)^{O(\delta)} = e^{O(\delta \log \log t)} = e^{O(1)} = O(1)$ , luego se deduce que:

$$(4.113) \quad \log \zeta(s) = O(\log \log t (\log t)^{2-2\sigma}), \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \log t} \leq \sigma \leq 1.$$

□

Como el exponente de  $\log t$  en (4.108) es menor que uno si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, tenemos que, con un nuevo  $\varepsilon$ , se verifica que  $-\varepsilon \log t < \log |\zeta(s)| < \varepsilon \log t$ , para  $t > t_0(\varepsilon)$ , es decir, para todo  $\sigma > \frac{1}{2}$  se tiene que:

$$(4.114) \quad \zeta(s) = O(t^\varepsilon) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(t^\varepsilon).$$

Así, concluimos que la hipótesis de Lindelöf se sigue de la hipótesis de Riemann. Para finalizar este capítulo, resulta imprescindible mencionar la conjetura de Hilbert-Pólya. Esta postula que las partes imaginarias de los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  corresponden a los autovalores de un operador autoadjunto. Aunque su primera aparición en la literatura se dio en una publicación de Montgomery en 1973, [40], la conjetura

debe su nombre a George Pólya quien, en una carta a Andrew Odlyzko en 1982, relató que, durante su estancia en Gotinga entre 1912 y 1914, Edmund Landau le preguntó por alguna razón por la cual la hipótesis de Riemann debería ser cierta, a lo que él sugirió esta idea. La asociación con David Hilbert proviene de un seminario impartido a principios del siglo XX donde Hilbert expresó su expectativa de que la hipótesis de Riemann pudiera derivarse del incipiente trabajo de Fredholm en análisis funcional. Cabe destacar que, antes de los hallazgos de Montgomery, esta conjetura ganó cierta relevancia cuando Atle Selberg demostró, en 1956, su célebre fórmula de la traza. Tal fórmula permite obtener como corolario inmediato de la positividad de los autovalores del operador laplaciano que se cumple la hipótesis de Riemann para cierta función zeta «geométrica» en la que los primos vienen reemplazados por longitudes de geodésicas cerradas de una superficie de Riemann.

## CAPÍTULO 5

# Aplicaciones a la teoría de los números primos

---

### 5.1. Distancia entre primos

Esta sección está dirigida exclusivamente a mostrar cómo los teoremas de densidad se pueden utilizar para el estudio de los primos. A lo largo de todo este capítulo,  $p_n$  denota el  $n$ -ésimo número primo. El tipo de problemas en los cuales nos vamos a centrar se conoce en la literatura como problemas relativos a primos en intervalos cortos, pues dichos resultados fueron la inspiración para el desarrollo de los teoremas de densidad en primera instancia. Para esbozar un poco las ideas, comencemos notando que gracias al teorema de los números primos tenemos que  $\psi(x) = x + E(x)$  para un cierto error  $E(x)$ , luego se sigue directamente que:

$$(5.1) \quad \psi(x+h) - \psi(x) \sim h, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty,$$

suponiendo que  $h = h(x)$  crezca más deprisa que  $E(x)$ . Por tanto, estamos interesados en conocer condiciones para  $h$  de tal modo que se cumpla que:

$$(5.2) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = (1 + o(1))h, \quad h = o(x) \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

El teorema 2.18 nos muestra que esto es cierto si  $h \geq x \exp(-C \log^{3/5} x (\log \log x)^{-1/5})$  para cierta constante  $C > 0$ . Sin embargo, este resultado puede mejorarse y, el rango de  $h$  para el cual (5.2) es cierto será el tema principal que nos ocupe. Sin mejorar la región libre de ceros para  $\zeta(s)$ , G. Hoheisel logró demostrar, en 1930, que (5.2) es cierto para  $h = x^\theta$  para cierta constante absoluta  $\theta < 1$ . Este es un resultado sorprendente pues términos de error del estilo  $E(x) = x^\theta$  están muy lejos de conseguirse con la tecnología actual y recordemos que, por el teorema 1.55, este error se correspondería a la región libre de ceros  $\sigma > \theta$ . Para demostrarlo, Hoheisel necesitó solo dos resultados que tenía disponibles en la época, la región libre de ceros de Littlewood, teorema 2.7, y una estimación de densidad del tipo:

$$(5.3) \quad N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)} \log^D T,$$

para todo  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  con constantes  $c \geq 2$  y  $D \geq 1$ . Su resultado será el primer teorema que veamos en esta sección, pero antes, veamos qué tiene que ver todo esto

con los primos y es que, partiendo de cotas del tipo (5.2) se deduce que hay un primo en el intervalo corto  $(x, x+h]$  para  $x$  suficientemente grande y  $h \gg x^\theta (\log x)^{\theta'}$  con  $0 < \theta < 1$  y  $\theta' \geq 0$ , porque, de lo contrario, se tendría lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= \sum_{x < p^m \leq x+h, m \geq 2} \log p = \sum_{x < p^2 \leq x+h} \log p + \sum_{x < p^m \leq x+h, m \geq 3} \log p \\ &\ll (\log x) \sum_{x < n^2 \leq x+h} 1 + (\log^2 x) \left( 1 + \sum_{x < n^2 \leq x+h} 1 \right), \end{aligned}$$

dado que, si denotamos por  $N_m$  a la cantidad de números tales que  $x < n^m \leq x+h$ , entonces tenemos que  $m \leq \frac{\log(x+h)}{\log 2} \ll \log x$ ,  $\log p = m^{-1} \log p^m \leq m^{-1} \log(x+h) \ll \log x$  y  $N_m \leq (x+h)^{1/m} - x^{1/m} + 1 \leq \sqrt{x+h} - \sqrt{x} + 1 \leq \lfloor \sqrt{x+h} \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 2 = N_2 + 2 \leq 2(1 + N_2)$ , luego  $N_m \ll 1 + N_2$ . Por tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned} (5.4) \quad \psi(x+h) - \psi(x) &\ll (\log^2 x) \left( 1 + \sum_{x < n^2 \leq x+h} 1 \right) \ll (\log^2 x) (1 + (x+h)^{1/2} - x^{1/2}) \\ &\ll (\log^2 x) (1 + hx^{-1/2}) = o(h), \end{aligned}$$

si  $h \gg x^\theta (\log x)^{\theta'}$  con  $0 < \theta < 1$  y  $\theta' \geq 0$ , mientras que, para  $x \geq x_0$ , tenemos que  $\psi(x+h) - \psi(x) > h/2$  y dividiendo entre  $h$  se llega a contradicción. Luego  $(x, x+h]$  contiene al menos un primo y, tomando  $x = p_n$ , implica que  $p_{n+1} \in (p_n, p_n + Cp_n^\theta (\log p_n)^{\theta'})$ , de lo que se sigue que:

$$(5.5) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^\theta (\log p_n)^{\theta'}.$$

El siguiente resultado sigue el teorema 10.5 de [31].

**Teorema 5.1. Hoheisel (1930): [24]** Sea  $\theta = 1 - (c + (A+1)/B)^{-1}$ . Entonces:

$$(5.6) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = x + O\left(\frac{h}{\log x}\right),$$

para todo  $h$  tal que  $x^\theta \log^3 x \leq h \leq x$ .

*Demostración.* Usando que  $h \geq x^\theta \log^3 x$  y la fórmula explícita truncada, teorema 1.45, con  $T = x^{1-\theta}$ , obtenemos que:

$$(5.7) \quad \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} - 1 = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho h} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Dado que  $(x+h)^\rho - x^\rho = \int_x^{x+h} \frac{d}{du} u^\rho du$ , se tiene que:

$$(5.8) \quad \left| \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho h} \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} u^{\rho-1} du \right| \leq x^{\beta-1}, \quad \text{donde } \beta = \Re(\rho).$$

Consideremos ahora  $S = \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\beta-1}$ . Si  $\beta > 1/2$  entonces  $\beta-1 > -\beta$  y, como  $x \geq 1$ ,  $x^{-\beta} \leq x^{\beta-1}$ , luego tenemos que:

$$S = \sum_{\beta < 1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1} + \sum_{\beta = 1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1} + \sum_{\beta > 1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1}$$

$$= \sum_{\beta > 1/2, |\gamma| \leq T} (x^{-\beta} + x^{\beta-1}) + \sum_{\beta=1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1} \leq 2 \sum_{\beta \geq 1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1}.$$

Además, si enumeramos como  $1/2 \leq \beta_1 < \dots < \beta_N < 1$  a las partes reales de los ceros con  $\beta \geq 1/2$  y  $|\gamma| \leq T$ , y por  $m(\beta_n)$  a sus respectivas multiplicidades, entonces se verifica que  $\sum_{\beta \geq 1/2, |\gamma| \leq T} x^{\beta-1} = \sum_{1/2 \leq \beta_n < 1} m(\beta_n) x^{\beta_n-1} = \int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} dA(\alpha)$  donde  $A(\alpha) = \sum_{1/2 \leq \beta_n \leq \alpha, |\gamma| \leq T} m(\beta_n) = N(1/2, T) - N(\alpha, T)$ . Por consiguiente, deducimos que:

$$\sum_{|\gamma| \leq T} x^{\beta-1} \leq -2 \int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} dN(\alpha, T).$$

Por tanto, aplicando integración por partes para integrales de Riemann-Stieltjes, obtenemos que la suma sobre los ceros está acotada por:

$$(5.9) \quad \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\beta-1} \leq -2 \int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} dN(\alpha, T) = 2x^{-1/2} N(1/2, T) + 2(\log x) \int_{1/2}^1 x^{\alpha-1} N(\alpha, T) d\alpha \\ \ll x^{-1/2} T \log T + (\log x)(\log^D T) \int_{1/2}^{1-\eta} (x/T^c)^{\alpha-1} d\alpha \\ = x^{-1/2} T \log T + (\log x)(\log^D T) \int_{\eta}^{1/2} (T^c/x)^{\alpha} d\alpha \ll x^{-1/2} T \log T + (T^c/x)^{\eta} \log^D T,$$

donde  $\eta = A \frac{\log \log T}{\log T}$  y  $\sigma > 1 - \eta$  es la región libre de ceros de Littlewood, (2.29). Para la última estimación hemos usado que, como  $c(1-\theta) < 1$ , se tiene que  $a = \frac{T^c}{x} = x^{-\delta} < 1$  con  $\delta > 0$ , luego  $\log a < 0$  y  $\int_{\eta}^{1/2} (T^c/x)^{\alpha} d\alpha = |\log a|^{-1} (a^{\eta} - a^{1/2}) \leq |\log a|^{-1} a^{\eta} \ll a^{\eta} (\log x)^{-1}$ . Finalmente, como:

$$(5.10) \quad (T^c/x)^{\eta} = (\log T)^{(c-(1-\theta)^{-1})B} = \log^{-D-1} T,$$

concluimos que la suma sobre los ceros es  $O((\log x)^{-1})$ , pues  $\theta \geq 1/2$  y el primer término del error en dicha suma es  $\ll x^{1/2-\theta} \log x$ , luego se obtiene el resultado.  $\square$

Como ya hemos dicho, Hoheisel utilizó la región libre de ceros de Littlewood pero, después de haber obtenido la región libre de ceros de Vinogradov-Korobov, podemos mejorar este resultado para que sea cierto para  $B$  arbitrariamente grande de manera que  $\theta = 1 - c^{-1} + \varepsilon$  satisface la condición del teorema. Nótese también que uno necesita que la cota (5.3) sea válida en todo el segmento  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  con el mismo  $c$ , luego una mejora en un cierto sub-rango no ayuda. En particular, la hipótesis de densidad implica que  $c = 2$ , lo que lleva a  $\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ . Los próximos resultados importantes que vamos a presentar en esta sección siguen los teoremas 12.8, 12.9 y 12.10 de [29].

**Teorema 5.2.** *Supongamos que se tiene, uniformemente en  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ , que:*

$$(5.11) \quad N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)} \log^D T,$$

para cierta  $D \geq 1$  y  $A(\sigma)(1-\sigma) \leq 1$ , donde para cierto  $\frac{1}{2} < u < 1$  tenemos que  $A(\sigma) \leq 2$  en  $\sigma \geq u$  y  $A(\sigma) \leq C$  para cierta constante  $C > 2$  en  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq u$ . Entonces (5.2) es válido si  $h \geq x^{1-C^{-1}} \log^M x$ , donde  $M$  es cualquier número que satisface que  $M > \frac{D+2}{C(1-u)}$ .

*Demostración.* De la fórmula explícita truncada, teorema 1.45, con  $x_0 \leq T \leq x$ , obtenemos que:

$$(5.12) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho) + O(xT^{-1} \log^2 x),$$

donde:

$$(5.13) \quad C(x, \rho) = \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} \ll \frac{1}{|\gamma|},$$

y

$$(5.14) \quad |C(x, \rho)| \leq \int_1^{1+h/x} t^{\beta-1} dt \leq hx^{-1}.$$

Por conveniencia en la escritura, escribimos  $U = x/h$  y suponemos que  $U < T$ . En ese caso, tenemos que:

$$(5.15) \quad \sum_{|\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho) = S_1 + S_2 + S_3,$$

con:

$$(5.16) \quad S_1 = \sum_{u \leq \beta < 1, |\gamma| \leq U} x^\rho C(x, \rho) \ll U^{-1} \sum_{u \leq \beta < 1, |\gamma| \leq U} x^\beta,$$

$$(5.17) \quad S_2 = \sum_{u \leq \beta < 1, U < |\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho) \ll \sum_{u \leq \beta < 1, U < |\gamma| \leq T} x^\rho / |\gamma|,$$

$$(5.18) \quad S_3 = \sum_{0 < \beta < u, |\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho).$$

Para estimar  $S_1$  y  $S_2$  necesitamos preparar las cotas de manera que podamos usar los teoremas de densidad posteriormente. En primer lugar, nótese que:

$$(5.19) \quad \sum_{u \leq \beta < 1, |\gamma| \leq U} (x^\beta - x^u) = \log x \sum_{u \leq \beta < 1, |\gamma| \leq U} \int_u^\beta x^\sigma d\sigma = \log x \int_u^1 N(\sigma, U) x^\sigma d\sigma,$$

por lo que, observando que  $\sum_{u \leq \beta < 1, |\gamma| \leq U} x^u = x^u N(u, U) \leq \max_{u \leq \sigma \leq 1} x^\sigma N(\sigma, U)$ , se deduce que:

$$(5.20) \quad S_1 \ll \log x \max_{u \leq \sigma \leq 1} x^\sigma N(\sigma, U) U^{-1} \ll \log x \max_{u \leq \sigma \leq 1} x^\sigma \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1},$$

Análogamente, se sigue, usando (5.19), que:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \sum_{\beta \geq u, U < |\gamma| \leq T} x^\beta (1/|\gamma| - 1/T) &= \sum_{\beta \geq u, U < |\gamma| \leq T} x^\beta \int_{|\gamma|}^T t^{-2} dt = \int_U^T t^{-2} \sum_{\beta \geq u, U < |\gamma| \leq t} x^\beta dt \\ &= \int_U^T t^{-2} x^u (N(u, t) - N(u, U)) dt + \int_U^T t^{-2} \log x \int_u^1 x^\sigma (N(\sigma, t) - N(\sigma, U)) d\sigma dt \\ &\leq x^u \int_U^T t^{-1} (N(u, t) t^{-1}) dt + \log x \int_u^1 x^\sigma \int_U^T t^{-1} (N(\sigma, t) t^{-1}) dt d\sigma \\ &\ll (\log x + \log^2 x) \max_{u \leq \sigma \leq 1} \max_{U \leq t \leq T} x^\sigma N(\sigma, t) t^{-1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando nuevamente (5.19) se deduce que:

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum_{\beta \geq u, U < |\gamma| \leq T} x^\beta &\leq T^{-1} \sum_{\beta \geq u, |\gamma| \leq T} x^\beta = \\ &= x^u N(u, T) T^{-1} + \log x \int_u^1 x^\sigma N(\sigma, T) T^{-1} d\sigma \ll \log x \max_{u \leq \sigma \leq 1} x^\sigma \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1}. \end{aligned}$$

Combinando todas estas estimaciones deducimos que:

$$(5.22) \quad S_1 + S_2 \ll \log^2 x \max_{u \leq \sigma \leq 1} x^\sigma \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1}.$$

A continuación, tomamos  $h = x^{1-C^{-1}} \log^M x$ , lo cual nos da  $U = x^{C^{-1}} \log^{-M} x$ , y  $T = x^{C^{-1}} \log^{3-M} x$ . Obsérvese que esta elección de los parámetros nos da que  $xT^{-1} \log^2 x = h(\log x)^{-1} = o(h)$ . Por otro lado, recuérdese que por el teorema 2.17, tenemos que  $N(\sigma, t) = 0$  para:

$$(5.23) \quad \sigma \geq 1 - Kg(x), \quad \text{con } g(x) := (\log x)^{-2/3} (\log \log x)^{-1/3}, \quad K > 0,$$

y que  $A(\sigma) \leq 2$  para  $\sigma \geq u$ , luego lo es en la región considerada en  $S_1 + S_2$ . Así, utilizando (5.11) y que  $A(\sigma)(1-\sigma) \leq 1$  (para que el máximo de  $N(\sigma, T)t^{-1}$  se alcance en  $t = U$ ), se tiene que:

$$\begin{aligned} (5.24) \quad S_1 + S_2 &\ll xU^{-1} \log^{D+2} x \max_{u \leq \sigma \leq 1-Kg(x)} (xU^{-A(\sigma)})^{(\sigma-1)} \\ &\ll xU^{-1} \log^{D+2} x \max_{u \leq \sigma \leq 1-Kg(x)} x^{(1-2C^{-1})(\sigma-1)} \\ &\ll h(\log^{D+2} x) \exp(-K(1-2C^{-1})(\log x)^{1/3} (\log \log x)^{-1/3}) = o(h), \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $xU^{-A(\sigma)} > x^{1-2C^{-1}}$  y  $1-2C^{-1} > 0$  (En lugar de la región (5.23), cualquier región libre de ceros de la forma  $\sigma \geq 1 - \log^{\varepsilon-1} t$  serviría para esta prueba). Finalmente, tenemos lo siguiente:

$$S_3 = \sum_{0 < \beta < 1/2, |\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho) + \sum_{1/2 \leq \beta < u, |\gamma| \leq T} x^\rho C(x, \rho).$$

Para acotar estas sumas usamos, para la primera, la estimación  $C(x, \rho) \ll U^{-1}$  y  $N(\sigma, T) \ll T \log T$  para  $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$  y, para la segunda, procedemos como en (5.22) cambiando  $u$  por  $1/2$  y  $1$  por  $u$ . Así, usando nuevamente (5.11) y la condición impuesta sobre  $M$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} (5.25) \quad S_3 &\ll x^{1/2} U^{-1} T \log T + \log^2 x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^\sigma \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1} \\ &\ll hx^{-1/2} T \log x + \log^{D+2} x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^\sigma U^{A(\sigma)(1-\sigma)-1} \\ &\ll hx^{-1/2} T \log x + x^{-C^{-1}} \log^{D+M+2} x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^\sigma \left( x^{C^{-1}} \log^{-M} x \right)^{C(1-\sigma)} \\ &= hx^{-1/2} T \log x + h(\log x)^{D+2-MC(1-u)} = o(h). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente:

**Corolario 5.3.** *Se verifica que:*

$$(5.26) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = (1 + o(1))h, \quad \text{para } x^{7/12} \log^{22} x \leq h \leq x,$$

y

$$(5.27) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^{7/12} \log^{22} p_n.$$

*Demostración.* Por lo que sabemos sobre los teoremas de densidad, en concreto, gracias a (3.77) y (3.88), basta tomar  $C = \frac{12}{5}$ ,  $D = 9$  y  $u = \frac{11}{14} + \varepsilon$  en el teorema 5.2.  $\square$

Para mejorar el teorema anterior necesitamos introducir un concepto que aparece frecuentemente en teoría analítica de números. Decimos que la propiedad (5.2) se cumple para casi todo  $x$  si la medida del conjunto de los  $x \in [X, 2X]$  para los cuales no se verifica dicha propiedad es  $o(X)$  cuando  $X \rightarrow \infty$ , es decir, que la proporción del intervalo donde no se cumple la propiedad es asintóticamente 0. Con esto en mente, probamos el siguiente teorema:

**Teorema 5.4.** *Supongamos que  $N(\sigma, T) \ll T^{C(1-\sigma)} \log^D T$  es válido uniformemente en el intervalo  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  para ciertas  $C \geq 2$  y  $D \geq 1$ . Entonces para casi todo  $x$  tenemos que  $\psi(x+h) - \psi(x) = (1 + o(1))h$ , supuesto que:*

$$(5.28) \quad h \geq x^{1-2C^{-1}} \log^B x, \quad h = o(x),$$

donde  $B = B(C, D)$  es una constante efectiva.

*Demostración.* Para  $\frac{1}{2} < u < 1$  fijo,  $x \leq y \leq 2x$ ,  $U = x^{2/C} \log^{-B} x$ ,  $T = U \log^3 x$  y  $e^\delta = 1 + U^{-1}$ , definimos:

$$(5.29) \quad \Delta(y) = \psi(y + y/U) - \psi(y) - y/U + \sum_{u \leq \beta \leq 1, |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1) / \rho.$$

La idea de esta demostración es la siguiente. Si podemos probar que, para  $u$  convenientemente elegido, se tiene que:

$$(5.30) \quad \sum_{u \leq \beta \leq 1, |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1) / \rho = o(x/U), \quad (x \rightarrow \infty).$$

Entonces el resultado se seguirá de probar que:

$$(5.31) \quad \int_x^{2x} |\Delta(y)|^2 dy = o(x^3 U^{-2}), \quad (x \rightarrow \infty).$$

En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , definimos  $E = \{y \in [x, 2x] : |\Delta(y)| \geq \varepsilon x/U\}$ . Por tanto, usando (5.31), tenemos que:

$$|E| \varepsilon^2 x^2 U^{-2} \leq \int_E |\Delta(y)|^2 dy \leq o(x^3 U^{-2}).$$

Por tanto, se sigue que  $|E| = o(x)$ , luego  $|\Delta(y)| < \varepsilon xU^{-1}$  para casi todo  $y$  y, como  $\varepsilon$  es arbitrario, se tiene que  $\Delta(y) = o(x/U)$  para casi todo  $y$ . Combinando esto con (5.30) tendríamos que:

$$\psi(y + y/U) - \psi(y) = y/U + o(x/U) = y/U + o(y/U),$$

para casi todo  $y$ , luego habríamos probado el resultado para todo  $h \geq x/U = x^{1-2C^{-1}} \log^B x$  como queríamos. Para obtener (5.30) elegimos  $u$  tal que  $1 - (C/4A)^2 < u < 1$ , de manera que, para  $\beta \geq u$ , tenemos que  $A(1 - \beta)^{3/2} < C(1 - \beta)/4$ , donde  $A = 1600$  es la constante que aparece en (3.85) del teorema 3.12. Nótese que si tomamos  $C = 2$ , entonces  $1 - (C/4A)^2 \approx 0,9999999$ , mientras que (3.85) solo nos exige que  $u \geq \frac{152}{155} \approx 0,9806$ , luego podemos usar dicho teorema de densidad pues estamos en un rango muy próximo a 1. Por consiguiente, usando que  $(e^{\delta\rho} - 1)/\rho \ll U^{-1}$  (lo cual se obtuvo en (5.14)), (3.85), (5.20) y (5.23), obtenemos:

$$(5.32) \quad \sum_{u \leq \beta \leq 1, |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1)/\rho \ll U^{-1} \sum_{u \leq \beta \leq 1 - Kg(x), |\gamma| \leq x^{2/C}} y^\beta \\ \ll U^{-1} \log x \max_{u \leq \sigma \leq 1 - Kg(x)} x^\sigma N(\sigma, x^{2/C}) \ll xU^{-1} \log^{16} x \max_{u \leq \sigma \leq 1 - Kg(x)} x^{2AC^{-1}(1-\sigma)^{3/2} + \sigma - 1} \\ \ll xU^{-1} (\log^{16} x) x^{-Kg(x)/2} = o(x/U),$$

Esto prueba (5.30). Para ver (5.31), primero usamos la fórmula explícita truncada para  $\psi(x)$ , teorema 1.45, para obtener que:

$$\Delta(y) = - \sum_{\beta < u, |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1)/\rho + O(xU^{-1}(\log x)^{-1}).$$

Por tanto:

$$(5.33) \quad |\Delta(y)|^2 \ll \left| \sum_{\beta < u, |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1)/\rho \right|^2 + o(x^2U^{-2}).$$

Elevando al cuadrado e integrando vemos que:

$$(5.34) \quad \int_x^{2x} \left| \sum_{\beta < u, |\gamma| \leq U} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1)/\rho \right|^2 dy = \sum_{\beta < u, |\gamma| \leq U} \sum_{\beta' < u, |\gamma'| \leq U} \frac{(2x)^{\bar{\rho} + \rho' + 1} - x^{\bar{\rho} + \rho' + 1}}{\bar{\rho}\rho'(\bar{\rho} + \rho' + 1)} (e^{\delta\bar{\rho}} - 1)(e^{\delta\rho'} - 1) \\ \ll U^{-2} \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} \sum_{\beta' \leq u, |\gamma'| \leq U} \frac{x^{\beta + \beta' + 1}}{1 + |\gamma - \gamma'|} \ll U^{-2} \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} x^{2\beta + 1} \sum_{\beta' \leq \beta, |\gamma'| \leq U} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|} \\ \ll U^{-2} \log^2 x \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} x^{2\beta + 1} \ll U^{-2} \log^3 x \max_{\sigma \leq u} x^{2\sigma + 1} N(\sigma, U).$$

En la anterior estimación hemos usado que  $(e^{\delta\rho} - 1)/\rho \ll U^{-1}$ , la simetría de la suma que nos aparece después del primer  $\ll$ , la estimación:

$$(5.35) \quad \sum_{\beta' \leq u, |\gamma'| \leq U} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|} \ll \log^2 x,$$

que se sigue del lema 1.53, y el mismo argumento que nos llevó a (5.19), es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} x^{2\beta+1} &= \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} x + 2(\log x) \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} \int_0^\beta x^{2\alpha+1} d\alpha \\ &= \sum_{\beta \leq u, |\gamma| \leq U} x + 2(\log x) \int_0^u x^{2\sigma+1} (N(\sigma, U) - N(u, U)) d\sigma \\ &\ll xN(U) + \log x \max_{\sigma \leq u} x^{2\sigma+1} N(\sigma, U) \ll \log x \max_{\sigma \leq u} x^{2\sigma+1} N(\sigma, U). \end{aligned}$$

En cambio, cuando  $U < |\gamma|$  procedemos análogamente, aunque ahora usando que  $(e^{\delta\rho} - 1)/\rho \ll |\gamma|^{-1}$  (lo cual se probó en (5.13)). Siguiendo los cálculos hechos en (5.21) obtenemos que:

$$(5.36) \quad \int_x^{2x} \left| \sum_{\beta < u, U < |\gamma| \leq T} y^\rho (e^{\delta\rho} - 1)/\rho \right|^2 dy \ll U^{-1} \log^4 x \max_{\sigma \leq u} x^{2\sigma+1} \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1}.$$

Por último, combinando todo lo anterior y observando que, en realidad, el máximo en  $\sigma \leq u$  se alcanza en  $1/2 \leq \sigma \leq u$ , conseguimos la estimación deseada:

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} |\Delta(y)|^2 dy &\ll U^{-1} \log^4 x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^{2\sigma+1} \max_{U \leq t \leq T} N(\sigma, t) t^{-1} + o(x^3 U^{-2}) \\ &\ll xU^{-2} \log^4 x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^{2\sigma} T^{C(1-\sigma)} \log^D T + o(x^3 U^{-2}) \\ (5.37) \quad &\ll xU^{-2} \log^{D+4} x \max_{1/2 \leq \sigma \leq u} x^{2\sigma} (x^{2/C} \log^{3-B} x)^{C(1-\sigma)} + o(x^3 U^{-2}) \\ &\ll x^3 U^{-2} \log^{D+4+C(3-B)(1-u)} + o(x^3 U^{-2}) = o(x^3 U^{-2}), \end{aligned}$$

supuesto que  $B > \frac{D+4}{C(1-u)} + 3$ . Esto completa la prueba. Nótese que el valor más pequeño de  $B$  que puede ser conseguido mediante este método ocurre cuando tomamos  $u = 1 - (C/4A)^2 + \varepsilon$ .  $\square$

**Corolario 5.5.** *Para casi todo  $x$  hay un primo en el intervalo:*

$$(5.38) \quad (x, x + x^{1/6} \log^B x],$$

donde uno puede tomar  $B = 4 \cdot 10^7$ .

*Demostración.* Gracias a (3.77), basta elegir  $C = \frac{12}{5}$  y  $D = 9$  luego, en vista de la demostración del teorema 5.4, obtenemos que  $B = 4 \cdot 10^7$  es válido.  $\square$

En los teoremas anteriores, hemos visto como los teoremas de densidad nos llevan a expresiones asintóticas del tipo (5.2). En particular, el método de la prueba del teorema 5.2 muestra que, la hipótesis de densidad en la forma:

$$(5.39) \quad N(\sigma, T) \ll T^{2-2\sigma+\varepsilon}, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

nos da:

$$(5.40) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = (1+o(1))h, \quad x^{1/2+\varepsilon} \leq h \leq x,$$

que, consecuentemente, nos lleva a:

$$(5.41) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2+\varepsilon}.$$

Cabe destacar que, mediante varios argumentos analíticos parecidos a los anteriores, combinados con métodos de criba conseguimos la estimación:

$$\psi(x+h) - \psi(x) \asymp h,$$

aunque en intervalos aún más cortos. Por ejemplo, R. Baker y G. Harman, [2], probaron que (5.41) se tiene para  $h = x^\theta$  con  $\theta = 0,534$ , del cual se sigue que  $p_{n+1} - p_n \ll p_n^\theta$ . El propósito del siguiente teorema, en el que supondremos la hipótesis de Riemann, es ver que, en principio, los teoremas de densidad no nos pueden dar mucho más que (5.41) en lo que a la diferencia de primos consecutivos se refiere. Cabe resaltar que el motivo para incluir «en principio» en lo anterior es que no tenemos garantizado que la mejor cota para la distancia entre primos consecutivos venga dada de suponer la hipótesis de Riemann. De hecho, se cree que la estimación que vamos a proporcionar a continuación es mejorable e incluso se podría mejorar únicamente suponiendo la hipótesis de Riemann.

**Teorema 5.6.** *Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces:*

$$(5.42) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log p_n.$$

*Demostración.* Supongamos que la hipótesis de Riemann es cierta, entonces  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$  para cualquier cero no trivial. Supongamos también que el intervalo  $[x, x+2h]$  no contiene primos para algún  $x^\varepsilon < h < x^{1-\varepsilon}$ . Nuestra idea con esto es que al final de la prueba vamos a tomar  $x = p_n$  y concluir el resultado. Usando (5.4) y la fórmula explícita con  $T = x$  tenemos que:

$$(5.43) \quad o(h^2) = \int_x^{x+h} (\psi(y+h) - \psi(y)) dy = h^2 - \sum_{|\gamma| \leq x} G(\rho) + O(h \log^2 x),$$

donde:

$$(5.44) \quad G(\rho) = \int_x^{x+h} \frac{(y+h)^\rho - y^\rho}{\rho} dy.$$

Para  $|\gamma| \leq U < x$ , usamos que  $N(T) \ll T \log T$ , teorema 1.39, para obtener:

$$(5.45) \quad \sum_{|\gamma| \leq U} G(\rho) = \int_x^{x+h} \int_y^{y+h} z^{-1/2} \left( \sum_{|\gamma| \leq U} z^{i\gamma} \right) dz dy \ll h^2 x^{-1/2} U \log U.$$

Para  $|\gamma| > U$  simplemente evaluamos la integral que define a  $G(\rho)$  y se tiene que:

$$(5.46) \quad G(\rho) = \frac{(x+2h)^{\rho+1} - 2(x+h)^{\rho+1} + x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \ll x^{3/2} |\gamma|^{-2},$$

lo cual nos da, usando el lema 1.53, lo siguiente:

$$(5.47) \quad \sum_{U < |\gamma| \leq x} G(\rho) \ll x^{3/2} \sum_{|\gamma| > U} |\gamma|^{-2} \ll x^{3/2} U^{-1} \log U.$$

De (5.43) y las estimaciones para  $\sum G(\rho)$  obtenemos:

$$(5.48) \quad h^2 + o(h^2) = O(h^2 x^{-1/2} U \log U) + O(x^{3/2} U^{-1} \log U).$$

A continuación, elegimos  $U = xh^{-1}$ , lo anterior se simplifica a:

$$(5.49) \quad h^2 + o(h^2) = O(hx^{1/2} \log x),$$

lo cual es imposible para  $h = Cx^{1/2} \log x$  y  $C > 0$  suficientemente grande. Luego el intervalo  $[x, x + 2Cx^{1/2} \log x]$  debe contener al menos un primo para  $x \geq x_0$  lo que significa que, para  $x = p_n$ , se verifica que::

$$(5.50) \quad p_{n+1} - p_n \ll x^{1/2} \log x.$$

□

El anterior teorema es el mejor resultado conocido que uno puede obtener a día de hoy asumiendo la hipótesis de Riemann. Sin embargo, suponiendo la conjetura de «pair correlation», que veremos en la siguiente sección, uno puede mejorar (5.42) ligeramente, pero todavía no hasta  $p_{n+1} - p_n = o(p_n^{1/2})$ . Suponiendo esta conjetura, D. Goldston y R. Heath-Brown, [16], demostraron que:

$$(5.51) \quad p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n \log p_n}.$$

Por otro lado, creando un modelo probabilístico, H. Cramér, [8], dedujo la siguiente conjetura:

$$(5.52) \quad p_{n+1} - p_n \ll \log^2 p_n.$$

Para finalizar con el problema sobre la distancia entre primos, es prácticamente obligatorio presentar uno de los resultados más famosos que conciernen a la teoría analítica de números moderna como es la conjetura de los primos gemelos. Esta nos dice que  $\liminf(p_{n+1} - p_n) = 2$ . Las aproximaciones modernas para intentar demostrar esta conjetura comenzaron con lo que se conoce como la criba GPY, por D. Goldston, J. Pintz y C. Yıldırım, cuyo trabajo original se encuentra en [17]. Integrando resultados de teoría de cribas clásica en el esquema de la criba GPY, Yitang Zhang demostró en 2013 que hay infinitos primos que difieren en un número menor que  $N$ , con  $N$  menor que 70 millones, un hito histórico que supuso un antes y un después en la teoría de números. Dos años después, J. Maynard introdujo los llamados pesos multidimensionales, que ofrecían una variante de la criba que simplificaba las demostraciones enormemente en comparación a los complicados métodos de Zhang. Gracias a ello, Maynard demostró que  $\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 600$  de manera incondicional y  $\leq 12$  asumiendo la conjetura de Elliott-Halberstam, [39]. Posteriormente, el grupo Polymath8b

dirigido por Terence Tao, demostró que  $\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 246$  de forma incondicional y  $\leq 6$  asumiendo la conjetura de Elliott-Halberstam generalizada. Por otro lado, hasta ahora, todos los resultados que hemos dado conciernen al  $\liminf(p_{n+1} - p_n)$ . Respecto a resultados sobre el límite superior y como último resultado de esta sección, presentamos a continuación un teorema obtenido en 2018 por K. Ford, B. Green, S. Konyagin, J. Maynard y T. Tao:

**Teorema 5.7.**

$$(5.53) \quad \max_{p_{n+1} \leq X} (p_{n+1} - p_n) \gg \frac{(\log X)(\log \log X)(\log \log \log \log X)}{\log \log \log X},$$

para  $X$  suficientemente grande.

## 5.2. La hipótesis de pair correlation

A lo largo de este capítulo, seguiremos el capítulo 25 de [31] y supondremos la validez de la hipótesis de Riemann. Esto último nos permite poner los ceros no triviales en la forma  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$  y ordenarlos en una sucesión creciente según sus ordenadas:  $\dots \leq \gamma_{-2} \leq \gamma_{-1} < 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$  donde  $\gamma_{-n} = -\gamma_n$ . Recordemos que, en el corolario 1.40, vimos que  $\gamma_n \sim 2\pi n(\log n)^{-1}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , de manera que los números  $\zeta_n = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log |\gamma_n|$  tienen lo que se conoce como espaciado medio unitario, es decir, que  $\zeta_n \sim n$  cuando  $|n| \rightarrow \infty$ . Cabe destacar que, aunque tenemos la fórmula para el número  $N(T)$ , (1.65), esta no es suficiente para entender las sutilezas de los  $\gamma_n$  en profundidad, en particular, nos dice bastante poco acerca de las distancias entre ceros consecutivos. De hecho, la hipótesis de Riemann solo mejora el error en (1.65) por un factor  $\log \log T$ . Nuestro primer objetivo será el de entender la sucesión de números  $\zeta_n$ . En primer lugar, se espera que los valores  $\delta_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n$  no sean puramente aleatorios, es decir, que no sigan un proceso de Poisson, como sí se espera para las distancias normalizadas entre primos o las distancias normalizadas entre los autovalores del operador de Laplace para el grupo modular (véase [46]). En este sentido, se anticipa que, por ejemplo, exista un fenómeno de repulsión entre los ceros no triviales de la función  $\zeta$  de Riemann que penalice los espaciamientos pequeños, como veremos más adelante. Esto representa un comportamiento completamente opuesto a lo que cabría esperarse para la distribución de las distancias normalizadas entre primos ya que, de hecho, uno imagina que las distancias cortas entre primos sean las más frecuentes. De esta manera, para comprender como se espera que se distribuyan las distancias normalizadas entre ordenadas consecutivas de los ceros no triviales de la función  $\zeta$ , debemos sumergirnos por un instante en el mundo de las matrices aleatorias. Consideremos el grupo de Lie,  $U(N)$ , de las matrices unitarias de dimensión  $N$ . Este grupo tiene una medida de Haar normalizada,  $d\mu$ , de manera que se pueden integrar funciones  $f : U(N) \rightarrow \mathbb{C}$ . Para integrar una función  $f$ , se calcula  $I(f) := \int_{U(N)} f d\mu$  mediante dos reglas. Por un lado, se define  $I(1) := 1$  y, por otro lado, se verifica que  $I(f) = \int_{U(N)} f(AX) d\mu(X)$  con  $A \in U(N)$ . Si  $f$  es una función constante en cada clase de conjugación, entonces se dice que es una función de clases. La clase de conjugación de  $U \in U(N)$  es  $\{C^{-1}UC : C \in U(N)\}$  y, como toda matriz unitaria es diagonalizable,

decir que una función es una función de clases es lo que mismo que decir que es una función de los autovalores. Además, como el orden de los autovalores es arbitrario, la función debe ser simétrica. De esta manera, puesto que los autovalores de una matriz unitaria,  $\lambda_j$ , tienen módulo 1, pongamos  $\lambda_j = e^{i\theta_j}$  con  $\theta_j \in [0, 2\pi)$ , se sigue que las funciones de clases dependen exclusivamente, y de forma simétrica, de los  $\theta_j$ . Para este tipo de funciones, Weyl demostró que:

$$I(f) = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \int_{[0, 2\pi]^N} f(\theta_1, \dots, \theta_N) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_N.$$

Mediante un argumento ingenioso se consiguió escribir la fórmula anterior en términos de un determinante real:

$$I(f) = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \int_{[0, 2\pi]^N} f(\theta_1, \dots, \theta_N) |A_N(\theta_1, \dots, \theta_N)| d\theta_1 \cdots d\theta_N,$$

donde  $A_N$  es la matriz  $N \times N$  que tiene  $a_{jj} = N$  y

$$a_{jk} = \frac{\sin(N(\theta_j - \theta_k)/2)}{\sin((\theta_j - \theta_k)/2)} \quad \text{para } j \neq k.$$

Una vez vistas estas fórmulas, ya podemos estudiar el espaciamiento entre los autovalores,  $\lambda_j$ , de matrices unitarias aleatorias. Dado que los  $\lambda_j$  están en la circunferencia unidad, lo natural es traducir el problema al espaciamiento de los  $\theta_j$ . Considerando  $N \frac{\theta_j}{2\pi}$ , tendremos  $N$  números en  $[0, N]$  y con ello hemos normalizado el espaciamiento esperado a 1. Supongamos ahora que deseamos saber cuántos de ellos tienen un espaciamiento normalizado menor que  $\delta$ . Resulta natural introducir una función regular,  $g$ , que aproxime la función característica de  $[-\delta, \delta]$ , de forma que:

$$C_N(g) = \frac{1}{2N!(2\pi)^N} \int_{[0, 2\pi]^N} \sum_{j \neq k} g\left(\frac{N(\theta_j - \theta_k)}{2\pi}\right) |A_N(\theta_1, \dots, \theta_N)| d\theta_1 \cdots d\theta_N$$

aproxima el número de pares con tal propiedad. Tras largos cálculos que omitiremos, se llega a que:

$$C_N(g) = \frac{1}{2} \int_{-N}^N g(x) \left(1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{N^2 \sin^2(\pi x/N)}\right) (N - |x|) dx.$$

Dado que, con  $N$  autovalores en una circunferencia hay  $N$  espaciamentos, si queremos estudiar la proporción límite con respecto a dicho número de espaciamentos, la cantidad a considerar es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_N(g)}{N} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}\right) dx.$$

Este límite es lo que se llama «pair correlation». Si quisiéramos estudiar en vez de espaciamentos menores que  $\delta$ , espaciamentos en un intervalo  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ , tomaríamos  $g$  que aproximase a la función característica de  $[\alpha, \beta] \cup [-\beta, -\alpha]$ . Si eliminamos la simetría, quitando el 1/2, se tendría que:

$$\left| \left\{ \theta_j, \theta_k : \frac{2\pi\alpha}{N} < \theta_j - \theta_k < \frac{2\pi\beta}{N} \right\} \right| \sim N \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right) dx.$$

Esto es formalmente análogo a lo que Montgomery había obtenido conjeturalmente sobre el espaciamiento de los ceros de la función  $\zeta$  con las normalizaciones adecuadas. Esta es la famosa observación que le hizo Freeman Dyson (un reputado físico teórico que había trabajado durante los años 60, junto a Eugen Wigner, en la teoría de matrices aleatorias) a Hugh Montgomery en 1972, durante la estancia de este último en Princeton, aparentemente en mitad de la hora del té. Esta idea dio lugar a una fructífera heurística basada en matrices aleatorias para la función  $\zeta$  que será el objetivo principal de esta sección, en la que introduciremos las ideas de Montgomery y sus consecuencias. Así, en lo que queda de sección, presentamos el trabajo original de Montgomery sobre la correlación de los ceros de la función  $\zeta$ , el cual se puede encontrar en [40].

La idea de Montgomery es bastante interesante y original y se sigue usando a día de hoy pues su elección de la función test es bastante natural. Montgomery introdujo la siguiente función:

$$(5.54) \quad F(\alpha, T) = \frac{2\pi}{T \log T} \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') T^{i\alpha(\gamma - \gamma')},$$

para cualquier número real  $\alpha$  y  $T \geq 2$ , donde  $w(u)$  es una función que nos va a servir para localizar. En particular, se toma:

$$(5.55) \quad w(u) = 4(4 + u^2)^{-1}.$$

Nótese que la transformada de Fourier de  $w$  es positiva, en concreto,  $\hat{w}(v) = 2\pi e^{-2|v|}$ , luego tenemos que:

$$(5.56) \quad F(\alpha, T) = \frac{2\pi}{T \log T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|v|} \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} e^{i\gamma v} T^{i\gamma\alpha} \right|^2 dv,$$

de lo que se sigue que  $F(\alpha, T)$  es real y  $F(\alpha, T) = F(-\alpha, T) \geq 0$ . Ahora, para  $\alpha = 0$  y fijado  $\gamma$ , separamos la suma de (5.54) sobre los  $\gamma'$  tales que  $k \leq |\gamma - \gamma'| < k+1$ . En cada uno de estos intervalos hay  $O(\log T)$  ceros, luego obtenemos que  $\sum_{0 < \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') \ll \log T$ . A continuación, usando el teorema 1.39, se deduce que:

$$F(0, T) = \frac{2\pi}{T \log T} \sum_{0 < \gamma \leq T} \sum_{0 < \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') \ll \frac{1}{T \log T} \sum_{0 < \gamma \leq T} \log T \ll \log T,$$

luego:

$$(5.57) \quad F(\alpha, T) \leq F(0, T) \ll \log T.$$

Nuestro objetivo es obtener una fórmula asintótica para  $F(\alpha, T)$  cuando  $T \rightarrow \infty$  que sea uniforme en  $\alpha$  en rangos cuanto mayores mejor. Para ello, Montgomery utilizó la siguiente fórmula explícita:

**Lema 5.8. Montgomery: [40]** Si  $1 < \sigma < 2$  y  $x \geq 1$  entonces:

$$(5.58) \quad (2\sigma - 1) \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{(\sigma - \frac{1}{2})^2 + (t - \gamma)^2} = x^{-1/2} \left( \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right) + x^{1/2-\sigma+it} (\log \tau + O_{\sigma}(1)) + O_{\sigma}(x^{1/2}\tau^{-1}),$$

donde  $\tau = |t| + 2$  y las constantes implícitas dependen solo de  $\sigma$ .

*Demostración.* Para esta demostración necesitamos la siguiente identidad:

$$(5.59) \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n)n^{-s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{\rho-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s},$$

la cual es válida para  $x > 1$ ,  $x \neq p^n$  y  $s \neq 1, \rho, -2n$ . Esta fórmula se deduce de manera similar al teorema 1.45. La idea es aplicar la fórmula de Perron, lema 1.46, a  $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s-w} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)$ . Aplicando la fórmula de inversión de Perron, todo se reduce a evaluar una integral de contorno de la forma  $(2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\right) \frac{x^w}{w} dw$ . A continuación, se desplaza la región de integración a la izquierda y se aplica el teorema de los residuos, que nos da los términos de la derecha de (5.59). Los detalles de la prueba se pueden encontrar en las páginas 348-353 de [34]. Si suponemos la hipótesis de Riemann, entonces podemos escribir (5.59) como:

$$(5.60) \quad \sum_{\rho} \frac{x^{i\gamma-it}}{\sigma - \frac{1}{2} + it - i\gamma} = x^{\sigma-1/2} \left( \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{n \leq x} \Lambda(n)n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s} \right).$$

Ahora sustituimos  $s$  por  $1 - \sigma + it$  en (5.60) y se lo restamos a (5.60). Usando la identidad:

$$(5.61) \quad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s},$$

la cual es válida para  $\sigma > 1$ , obtenemos que:

$$(5.62) \quad (2\sigma - 1) \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{(\sigma - \frac{1}{2})^2 + (t - \gamma)^2} = -x^{-1/2} \left( \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \sigma + it) x^{1/2-\sigma+it} + \frac{x^{1/2}(2\sigma - 1)}{(\sigma - 1 + it)(\sigma - it)} - x^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\sigma - 1)x^{-2n}}{(\sigma - 1 - it - 2n)(\sigma + it + 2n)}.$$

Nótese que ambos miembros de (5.62) son continuos para todo  $x \geq 1$ . En efecto, si  $x$  cruza una potencia de primo,  $m = p^k$ , el sumando correspondiente a  $n = m$  simplemente se transfiere de la suma sobre los  $n > x$ , cuando  $x \rightarrow m^-$ , a la suma sobre los  $n \leq x$  cuando  $x \rightarrow m^+$ . En ambos límites, la aportación de dicho término a la expresión global es exactamente  $\Lambda(m)$ , así que no necesitamos seguir excluyendo a  $x = 1$  y  $x = p^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $1 < \sigma < 2$  entonces, de la ecuación funcional de  $\zeta(s)$ , tomando derivadas logarítmicas y aplicando (A.16), se tiene que:

$$(5.63) \quad -\frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \sigma + it) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma - it) + \log \tau + O_{\sigma}(1).$$

Como  $\sigma > 1$ , nuevamente por (5.61) vemos que  $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma - it) = O_{\sigma}(1)$ , luego el lado derecho de (5.63) es igual a  $\log \tau + O_{\sigma}(1)$ . Por consiguiente, el miembro derecho de (5.62) es:

$$(5.64) \quad -x^{-1/2} \left( \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right) + x^{1/2-\sigma+it} (\log \tau + O_{\sigma}(1)) + O_{\sigma}(x^{1/2}\tau^{-2}) + O_{\sigma}(x^{-2}\tau^{-1}),$$

lo cual completa la prueba.  $\square$

**Teorema 5.9. Montgomery:** [31] Para  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $T \geq 2$ , se tiene que:

$$(5.65) \quad F(\alpha, T) = \alpha + T^{-2\alpha} \log T + O(\alpha T^{\alpha-1} + T^{-\alpha} \log 2T^\alpha + (\log T)^{-1}),$$

donde la constante implícita es absoluta.

*Demostración.* En primer lugar, tomamos  $\sigma = \frac{3}{2}$  en el lema 5.8 para obtener la fórmula explícita:

$$(5.66) \quad L(x, t) = R(x, t),$$

donde  $L(x, t)$  es una suma sobre los ceros de  $\zeta(s)$  de la siguiente forma:

$$(5.67) \quad L(x, t) = 2 \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{1 + (t - \gamma)^2},$$

y  $R(x, t)$  es la siguiente suma:

$$(5.68) \quad R(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{n}\right)^{it} \min\left(\frac{n}{x}, \frac{x}{n}\right) + x^{-1+it} \log \tau + E(x, t),$$

con  $E(x, t) \ll x^{-1} + x^{1/2} \tau^{-1}$  si  $x \geq 1$  y  $t > 0$ , donde la constante implícita es absoluta. Elevamos al cuadrado la ecuación (5.66) e integramos (esta es una forma de elegir las diferencias  $\gamma - \gamma'$  pequeñas) obteniendo:

$$(5.69) \quad \int_0^T |L(x, t)|^2 dt = \int_0^T |R(x, t)|^2 dt.$$

Comenzamos con  $L(x, t)$ . El lado izquierdo es igual a:

$$(5.70) \quad \int_0^T |L(x, t)|^2 dt = 4 \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'} x^{i(\gamma-\gamma')} \int_0^T (1 + (t - \gamma)^2)^{-1} (1 + (t - \gamma')^2)^{-1} dt,$$

donde ambas sumas son sobre los ceros en la línea crítica,  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ ,  $\rho' = \frac{1}{2} + i\gamma'$ , con  $\gamma, \gamma'$  positivos y negativos. Dado que el término integral en (5.70) es pequeño cuando  $|t - \gamma|$  es grande, lo cual sucede para la mayoría del rango de  $\gamma$ , queremos excluir de la suma los términos  $\gamma \notin [0, T]$  y quedarnos solo con los  $0 < \gamma \leq T$ , que son los que realmente aportan. Para ello, usamos que en los intervalos  $T + k \leq \gamma \leq T + k + 1$  y  $-k - 1 \leq \gamma \leq -k$  hay  $\ll \log T$  ceros para todo  $k \in \mathbb{N}$ , de manera que para  $0 \leq t \leq T$  se tiene lo siguiente:

$$(5.71) \quad \sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} = \sum_{\gamma > T} + \sum_{\gamma < 0} \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log T}{1 + (T - t + k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log T}{1 + (t + k)^2} \\ \ll \left( \frac{1}{t+1} + \frac{1}{T-t+1} \right) \log T,$$

donde en la última estimación hemos acotado cada serie por la integral correspondiente. Por otro lado, separando la siguiente suma en  $k \leq |t - \gamma'| < k + 1$ , se tiene que:

$$(5.72) \quad \sum_{\gamma'} \frac{1}{1 + (t - \gamma')^2} \ll \log T.$$

Por tanto, deducimos que:

$$(5.73) \quad \int_0^T \left( \sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \right) \left( \sum_{\gamma'} \frac{1}{1 + (t - \gamma')^2} \right) dt \ll \log^3 T.$$

Argumentando análogamente obtenemos que:

$$(5.74) \quad \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} \int_T^\infty (1 + (t - \gamma)^2)^{-1} (1 + (t - \gamma')^2)^{-1} dt \ll \log^2 T \int_T^\infty (t - T + 1)^2 dt \ll \log^2 T,$$

y lo mismo sucede con la integral entre  $-\infty$  y  $T$ , luego se sigue que podemos reducir la expresión (5.70) a:

$$(5.75) \quad \begin{aligned} & 4 \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} x^{i(\gamma - \gamma')} \int_0^T (1 + (t - \gamma)^2)^{-1} (1 + (t - \gamma')^2)^{-1} dt + O(\log^3 T) \\ & = 4 \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} x^{i(\gamma - \gamma')} \int_{-\infty}^\infty (1 + (t - \gamma)^2)^{-1} (1 + (t - \gamma')^2)^{-1} dt + O(\log^3 T) \\ & \quad = 2\pi \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} x^{i(\gamma - \gamma')} w(\gamma - \gamma') + O(\log^3 T), \end{aligned}$$

donde la última integral se ha calculado usando el teorema de los residuos, lo cual justifica nuestra elección de  $w$ . Ahora, tomamos  $x = T^\alpha$  con  $\alpha \geq 0$  y llegamos a lo siguiente:

$$(5.76) \quad \int_0^T |L(T^\alpha, t)|^2 dt = F(\alpha, T) T \log T + O(\log^3 T),$$

donde la constante implícita es absoluta. A continuación, tratamos el otro lado de (5.69). Con este fin, queremos usar el teorema 3.6:

$$(5.77) \quad \int_0^T \left| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-it} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^\infty (T + O(n)) |a_n|^2.$$

Por simplicidad, escribimos (5.68) como  $R(x, t) = C(t) + D(t) + E(t)$  para cada término respectivamente. Entonces:

$$(5.78) \quad |R(x, t)|^2 = |C(t)|^2 + |D(t)|^2 + |E(t)|^2 + O(|C(t)D(t)| + |D(t)E(t)| + |E(t)C(t)|).$$

Integrando en  $0 < t \leq T$  y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deducimos que:

$$(5.79) \quad \int_0^T |R(x, t)|^2 dt = C^2 + D^2 + E^2 + O(CD + DE + EC),$$

con  $C^2 = \int_0^T |C(t)|^2 dt$  y  $D^2$  y  $E^2$  definidos análogamente. Por (5.77), obtenemos que:

$$(5.80) \quad C^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (T + O(n)) \frac{\Lambda^2(n)}{n} \left( \min \left( \frac{n}{x}, \frac{x}{n} \right) \right)^2.$$

Ahora nótese que:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n + O(x^{1/2} \log^2 x),$$

pues si  $n = p^k$ , entonces  $\Lambda(n) \log n = k\Lambda^2(n)$ , luego:

$$\sum_{p^k \leq x, k \geq 2} (k-1) \log^2 p \ll (\log^2 x) \sum_{p^k \leq x, k \geq 2} 1 \ll x^{1/2} \log^2 x.$$

Por tanto, aplicando sumación por partes y el teorema de los números primos en la forma  $\psi(x) = x + O(x/(\log 2x))$ , deducimos que:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n = \psi(x) \log x - \int_2^x \frac{\psi(t)}{t} dt = x \log x + O(x) + O(\text{Li}(x)) = x \log x + O(x).$$

Por consiguiente, separando (5.80) en  $n \leq x$  y  $n > x$ , aplicando sumación por partes para las cuatro sumas obtenidas y usando la cota para  $\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n)$  deducimos que:

$$(5.81) \quad \begin{aligned} C^2 &= \frac{T}{x^2} \sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) + O\left(\frac{1}{x^2} \sum_{n \leq x} n^2 \Lambda^2(n)\right) + T x^2 \sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3} + O\left(x^2 \sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^2}\right) \\ &\ll \frac{1}{2} T \log x + O(T) O(x \log x) + \frac{1}{2} T \log x + O(T) + O(x \log x), \end{aligned}$$

luego se tiene que:

$$(5.82) \quad C^2 = T \log x + O(T + x \log x).$$

Para  $D^2$  tenemos que:

$$(5.83) \quad D^2 = x^{-2} \int_0^T \log^2(t+2) dt = x^{-2} T \log^2 T + O(x^{-2} T \log T),$$

mientras que del término de error  $E(x, t)$  obtenemos lo siguiente:

$$(5.84) \quad E^2 \ll \int_0^T x^{-2} dt + \int_0^T x \tau^{-2} dt \ll x^{-2} T + x.$$

Por tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned} CD &\ll x^{-1} T (\log 2x)^{1/2} \log T + x^{-1/2} T^{1/2} (\log 2x)^{1/2} \log T, \\ CE &\ll x^{-1} T (\log 2x)^{1/2} + T^{1/2} x^{1/2} (\log 2x)^{1/2} + x^{-1/2} T^{1/2} (\log 2x)^{1/2} + x (\log 2x)^{1/2}, \\ DE &\ll x^{-2} T \log T + x^{-1/2} T^{1/2} \log T. \end{aligned}$$

Combinando las estimaciones (5.82), (5.83) y (5.84) en (5.79) y tomando  $x = T^\alpha$ , concluimos que:

$$(5.85) \quad \int_0^T |R(T^\alpha, t)|^2 dt = T \log x + x^{-2} T \log^2 T + B(x, T),$$

donde:

$$(5.86) \quad B(x, T) \ll T + x \log x + x^{-1} (\log 2x) T \log T.$$

uniformemente para  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $T \geq 2$ . Así, comparando (5.85) con (5.76) completamos la prueba del teorema.  $\square$

**Observación 5.10.** Si  $0 < \alpha < 1$  está fijo entonces el teorema anterior nos da trivialmente que  $F(\alpha, T) \sim \alpha$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Sin embargo, si permitimos que  $\alpha = \alpha(T)$ , entonces tomando  $\alpha$  tal que  $2(\log \log T)/\log T \leq \alpha \leq 1 - (\log \log T)/(\log T)$  en el teorema 5.9, tenemos que:

$$(5.87) \quad F(\alpha, T) \sim \alpha, \text{ cuando } T \rightarrow \infty.$$

Además, la fórmula (5.65) sigue siendo válida para  $\alpha \geq 1$ , pero pierde el sentido pues el término  $O(\alpha T^{\alpha-1})$  excede al término principal  $\alpha$ .

A continuación, vamos a deducir algunas consecuencias del teorema 5.9. Comenzamos con un resultado general:

**Teorema 5.11.** Sea  $f(x) \in S(\mathbb{R})$  tal que su transformada de Fourier,

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-xy) dx,$$

sea de clase  $C^1$  con soporte contenido en  $(-1, 1)$ . Entonces:

$$(5.88) \quad \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) = \left( \int_{-1}^1 \hat{f}(\alpha) |\alpha| d\alpha + \hat{f}(0) \right) \frac{T}{2\pi} \log T + O(T),$$

donde la constante implícita depende solo de  $f$ .

*Demostración.* Para cualquier  $f \in S(\mathbb{R})$  tenemos que:

$$f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha(\gamma - \gamma') \log T} d\alpha,$$

luego:

$$(5.89) \quad \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) = \frac{T \log T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha.$$

Por otro lado, debido a la paridad de  $F(\alpha, T)$ , que el soporte de  $\hat{f}$  está contenido en  $(-1, 1)$  y el teorema 5.9, tenemos que la última integral es igual a:

$$(5.90) \quad \int_0^1 (\hat{f}(\alpha) + \hat{f}(-\alpha)) (\alpha + T^{-2\alpha} \log T + O(T^{\alpha-1} + T^{-\alpha} \log 2T^\alpha + (\log T)^{-1})) d\alpha.$$

El primer término de (5.90) es igual al primer término del lado derecho de (5.88). Para el segundo término de (5.90), usamos el desarrollo en serie de Taylor de  $\hat{f}$  para tener que  $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}(0) + O(\alpha)$ , de lo que se deduce que:

$$(5.91) \quad 2(\log T) \int_0^1 (\hat{f}(0) + O(\alpha)) T^{-2\alpha} d\alpha = \hat{f}(0) + O(T^{-2}) + O((\log T)^{-1}) = \hat{f}(0) + O((\log T)^{-1}),$$

mientras que el término de error de (5.90) se estima trivialmente por  $O((\log T)^{-1})$ . Esto termina la prueba.  $\square$

En particular, eligiendo  $f(x) = \left(\frac{\sin(\pi\alpha x)}{\pi\alpha x}\right)^2$ , es un resultado clásico ver que:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right) & \text{si } |x| \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha. \end{cases}$$

Nótese que, aunque esta función es continua, no es de clase  $C^1$  pues tiene picos en  $x = 0, \alpha$  y  $-\alpha$ , sin embargo, el teorema anterior se sabe que aplica para funciones absolutamente continuas así que lo podemos usar. Por otro lado, obsérvese que  $\hat{f}$  tiene soporte contenido en  $[-\alpha, \alpha] \subset (-1, 1)$  pues  $0 < \alpha < 1$ . Por último,  $\hat{f}(0) = \frac{1}{\alpha}$  y  $\int_{-1}^1 \hat{f}(y) |y| dy = \frac{\alpha}{3}$ , luego obtenemos que:

**Corolario 5.12.** *Si  $0 < \alpha < 1$  está fijo, entonces, cuando  $T \rightarrow \infty$ , se tiene que:*

$$(5.92) \quad \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') \left( \frac{\sin((\gamma - \gamma') \frac{\alpha}{2} \log T)}{(\gamma - \gamma') \frac{\alpha}{2} \log T} \right)^2 \sim \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

De este hecho, Montgomery dedujo una cota inferior para el número de ceros simples de  $\zeta(s)$ . Para ello, introducimos la siguiente notación (recuérdese que estamos asumiendo la hipótesis de Riemann):

$$(5.93) \quad N_1(T) = \left| \left\{ 0 < \gamma \leq T : \rho = \frac{1}{2} + i\gamma \text{ es simple} \right\} \right|.$$

**Corolario 5.13. *Montgomery:***

$$(5.94) \quad N_1(T) > \left( \frac{2}{3} + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T, \text{ cuando } T \rightarrow \infty.$$

*Es decir, en vista de que  $N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T$ , se sigue que al menos  $\frac{2}{3}$  de los ceros de  $\zeta(s)$  son simples.*

*Demostración.* Descartando todos los términos en (5.92) exceptuando los términos con  $\gamma = \gamma'$ , obtenemos que:

$$(5.95) \quad \sum_{0 < \gamma \leq T} m_\gamma^2 < \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

donde  $m_\gamma$  es la multiplicidad de  $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$  y ahora la suma en  $\gamma$  es sobre ceros distintos. Esto es válido para cualquier  $\alpha$  fijado tal que  $0 < \alpha < 1$ , donde la mejor cota es  $\frac{4}{3} + o(1)$ , conseguida cuando  $\alpha \rightarrow 1^-$ . Por tanto, deducimos que:

$$(5.96) \quad N_1(T) \geq \sum_{0 < \gamma \leq T} (2 - m_\gamma)m_\gamma > \left(2 - \frac{4}{3} + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

lo cual completa la demostración.  $\square$

**Observación 5.14.** La función test usada en el corolario 5.12 no es óptima para el propósito de estimar  $N_1(T)$  tal y como lo hemos hecho, es decir, el porcentaje de  $\frac{2}{3}$  de ceros simples puede ser ligeramente mejorado.

A su vez, la fórmula (5.87) es válida uniformemente para  $\varepsilon \leq \alpha \leq 1 - \varepsilon$ , como se deduce directamente del teorema 5.9. Con un poco más de esfuerzo se puede mostrar que es, de hecho, válida uniformemente en  $\varepsilon \leq \alpha \leq 1$ . Lo siguiente que cabría preguntarse es cuál es el comportamiento de  $F(\alpha, T)$  si  $\alpha \geq 1$ . Montgomery también demostró que (5.87) no puede ser cierto para  $\alpha > 1$ . De hecho, mostró argumentos heurísticos que llevan a la siguiente conjetura:

**Conjetura 5.15. Strong pair correlation conjecture (SPCC):**

$$(5.97) \quad F(\alpha, T) \sim 1, \text{ cuando } T \rightarrow \infty,$$

uniformemente en intervalos acotados  $1 \leq \alpha \leq A$ . Nótese que, incluso probándose este resultado, seguiría siendo un misterio la velocidad a la que la función  $A = A(T)$  puede tender a infinito.

Teniendo esta hipótesis en mente, parece natural aplicarla en (5.89) con una función de Schwartz adecuada. Para entender la función elegida por Montgomery, hagamos el cálculo en general primero y luego veamos la función que nos conviene tomar. Sea  $f \in S(\mathbb{R})$ , entonces, por la demostración del teorema 5.11 y (5.97), tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha &\sim \int_{-1}^1 \hat{f}(\alpha) |\alpha| d\alpha + \hat{f}(0) + \int_{|\alpha| > 1} \hat{f}(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) (1 - \Delta(\alpha)) d\alpha + \hat{f}(0), \end{aligned}$$

donde  $\Delta(\alpha) = \max(0, 1 - |\alpha|)$ , cuya transformada de Fourier es  $\hat{\Delta}(u) = \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2$ . De esta manera, aplicando la identidad de Parseval en  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \Delta(\alpha) d\alpha$  y notando que  $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) d\alpha$ , se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha \sim f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) f(u) du.$$

Por otro lado, se verifica que:

$$\sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) = f(0) N(T) + \sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma \neq \gamma'}} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right).$$

Por tanto, gracias al teorema 1.39 y (5.89), deducimos que:

$$(5.98) \quad \sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma \neq \gamma'}} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) \sim \frac{T \log T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) f(u) du.$$

A continuación, definimos, para  $\alpha < \beta$ , lo siguiente:

$$(5.99) \quad N(\alpha, \beta; T) = \left| \left\{ m \neq n; 0 < \gamma_m, \gamma_n \leq T, \frac{2\pi\alpha}{\log T} < \gamma_m - \gamma_n < \frac{2\pi\beta}{\log T} \right\} \right|.$$

Este número contabiliza el número de pares de ordenadas distintas de zeros no triviales de  $\zeta(s)$  que se encuentran a una distancia entre  $\alpha$  veces y  $\beta$  veces el espaciamiento promedio. Si queremos conocer la relación entre este número y  $N(T)$ , la idea natural es aplicar (5.98) con la característica del intervalo  $(\alpha, \beta)$ ,  $f(u) = \chi_{(\alpha, \beta)}(u)$ . Pese a que esta función no está en la clase de Schwartz, se puede aproximar por arriba y por abajo por funciones que sí lo sean y pasar al límite, lo que nos da la validez de (5.98) también para esta  $f$  en particular. Por consiguiente, notando que  $w(\gamma - \gamma') \rightarrow 1$  cuando  $T \rightarrow \infty$  para los pares  $\gamma, \gamma'$  para los cuales no se anula  $f$ , se verifica que:

$$N(\alpha, \beta; T) \sim \sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma \neq \gamma'}} w(\gamma - \gamma') f\left((\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}\right) \sim \frac{T \log T}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) du.$$

Así, Montgomery llegó a la conclusión que da el título a esta sección, una conjetura que dejamos enunciada a continuación.

**Conjetura 5.16. Pair correlation conjecture (PCC):** Para  $\alpha < \beta$  definamos  $N(\alpha, \beta; T)$  como en (5.99). Entonces, cuando  $T \rightarrow \infty$ , tenemos que:

$$(5.100) \quad N(\alpha, \beta; T) \sim N(T) \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) du.$$

Es por esta última fórmula que se entiende la relación con la teoría de matrices aleatorias.

**Observación 5.17.** Cabe resaltar que, como su propio nombre indica y como ya hemos visto, SPCC implica PCC. En cambio, tenemos una especie de recíproco y es que el enunciado (5.97) para  $\alpha \geq 1$  junto con (5.87) para  $0 < \alpha \leq 1$  es esencialmente equivalente a (5.100).

Observemos que la función de densidad conjeturada por Montgomery nos da información muy relevante acerca de cómo se comportan los zeros no triviales. Por ejemplo, si tomamos  $\alpha = 0$  y  $\beta$  positivo pero muy pequeño, es decir, queremos contar los pares de zeros que están muy próximos el uno del otro, entonces  $\left(1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2\right) \sim \frac{\pi^2 u^2}{3}$ , de manera que la integral correspondiente está muy cercana a 0. En particular, tomando  $\beta = 0, 1$ , se obtiene que la integral es  $\approx 0, 001$ , de forma que esperaríamos que solo el 0, 1% de las parejas estuvieran a una distancia menor que la décima parte del espaciamiento promedio. Esto nos dice que la probabilidad de encontrar pares de zeros a

distancias cortas es baja, un fenómeno que se conoce como repulsión. Por otro lado, debido a (5.97), la fórmula asintótica (5.92) se extiende para todo  $\alpha \geq 1$  reemplazando  $\alpha^{-1} + \alpha/3$  por  $1 + 1/3\alpha^2$ . Por tanto, haciendo  $\alpha \rightarrow \infty$  se deduce, siguiendo el mismo argumento que hemos utilizado anteriormente en el corolario 5.13, que casi todos los ceros de  $\zeta(s)$  son simples, lo cual es también una conjetura que dejamos enunciada a continuación:

**Conjetura 5.18. Simple Zeros Conjecture:** [15]

$$(5.101) \quad N^*(T) := \left( \frac{T}{2\pi} \log T \right)^{-1} \sum_{0 < \gamma \leq T} m_\gamma^2 \sim 1,$$

donde la suma en  $\gamma$  es sobre ceros distintos.

Otra consecuencia del teorema 5.9, que no vamos a probar aquí, pero que se puede encontrar en el corolario 3 del artículo [40], es que  $\gamma_{n+1} - \gamma_n$  puede ser más pequeño que su promedio,  $2\pi/\log \gamma_n$ , por un factor  $\lambda < 1$  «infinitamente a menudo», es decir,  $\liminf \delta_n \leq \lambda$ . Nótese que, si  $\zeta(s)$  tuviese infinitos ceros múltiples, entonces tendríamos  $\lambda = 0$ . Montgomery consiguió demostrar que  $\lambda = 0,68$ . Un resultado destacado en este sentido es  $\lambda = 0,5171$ , el cual se debe a Conrey, Ghosh y Gonek, [6], mientras que el mejor resultado publicado hasta la fecha en este aspecto es  $\lambda = 0,5154$ , obtenido en [13]. A su vez, Montgomery también demostró, mediante un argumento más complicado, que  $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leq 2\pi\lambda/\log \gamma_n$  para una proporción positiva de  $n$ . Esto, combinado con el hecho de que  $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim 2\pi/\log \gamma_n$ , le permitió deducir que  $\limsup_n (\gamma_{n+1} - \gamma_n)(\log \gamma_n/2\pi) \geq \lambda' > 1$ . Por otro lado, cabe destacar que, en [7], se demostró que, si  $\delta_n \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$  ocurre suficientemente a menudo, entonces el número de clases  $h(-D)$  del cuerpo cuadrático imaginario  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  está acotado inferiormente por  $c(\varepsilon)D^{1/2} \log^{-2} D$  para cierta constante  $c(\varepsilon)$  que es efectiva, es decir, computable en términos de  $\varepsilon$ . Para finalizar esta sección, acabamos con otra conjetura a este respecto también formulada por Montgomery que, de ser cierta, nos daría inmediatamente la tan codiciada cota anteriormente mencionada para el número de clases de cuerpos cuadráticos imaginarios. Esta conjetura nos dice que:

**Conjetura 5.19. Small Gaps Conjecture:** [15]

$$(5.102) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \frac{\log \gamma_n}{2\pi} = 0.$$

Es importante recalcar que esta conjetura se sigue inmediatamente de la PCC sin más que tomar  $\alpha = 0$  y  $\beta = \varepsilon$ . En efecto, tomando dichos parámetros tendríamos que  $N(0, \varepsilon; T) \sim C(\varepsilon)N(T)$  con  $C(\varepsilon) > 0$ , por lo que  $N(0, \varepsilon; T) \rightarrow \infty$  cuando  $T \rightarrow \infty$ , lo que nos da el resultado deseado. Además, nótese que el fenómeno de repulsión de ceros provocado por la PCC no impide que se puedan encontrar ordenadas consecutivas de ceros no triviales arbitrariamente cercanas con respecto a su espaciamento promedio.

# APÉNDICE A

## Conceptos analíticos básicos

---

### A.1. La transformada de Mellin

Sea  $f(x)x^{\sigma-1} \in L^1(0, \infty)$  donde  $f(x)$  es una función de variación acotada en cada intervalo de  $x$  finito. Entonces:

$$(A.1) \quad F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx, \quad s = \sigma + it,$$

se define como la transformada de Mellin de  $f(x)$ , usualmente denotada como  $\mathcal{M}\{f\}(s)$ . De (A.1) podemos recuperar  $f(x)$  en términos de  $F(s)$  mediante la fórmula de inversión de Mellin:

$$(A.2) \quad f(x) = (2\pi i)^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} F(s) x^{-s} ds.$$

En el caso en que  $f(x)$  es continua, (A.2) se puede deducir de manera directa desde (A.1). En el caso general, es más conveniente escribir (A.1) como una transformada de Fourier mediante un cambio de variable y apelar a resultados clásicos del análisis de Fourier, [51]. Cabe destacar que la relación dada por (A.1) y (A.2) es inversa una de la otra, es decir, si:

$$(A.3) \quad f(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds,$$

donde  $F(\sigma + iu)$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$  y es de variación acotada en un entorno del punto  $u = t$ , entonces:

$$(A.4) \quad F(\sigma + it) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{1/a}^a f(x) x^{\sigma+it-1} dx.$$

Nótese que la transformada de Mellin puede ser vista como integrar  $f(x)$  usando el kernel  $x^s$  con respecto a la medida de Haar en el grupo  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$  dada por  $\frac{dx}{x}$ . Obsérvese que, dado que  $\frac{d(ax)}{x} = \frac{dx}{x}$  para todo  $a > 0$ , dicha medida es efectivamente invariante bajo dilataciones. Algunos ejemplos importantes son los siguientes:

**Ejemplo A.1. La integral de Cahen-Mellin:**

Consideremos la función Gamma de Euler:

$$(A.5) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \text{en } \Re(s) > 0.$$

Gracias a (A.2), si tomamos la rama principal de  $x^{-s}$ , obtenemos una fórmula de gran utilidad conocida como la integral de Cahen-Mellin:

$$(A.6) \quad e^{-x} = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds, \quad c, x > 0.$$

**Ejemplo A.2. Función zeta de Riemann:**

Sea  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > 1$ . Consideremos ahora la función  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ . Entonces tenemos que:

$$\mathcal{M}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \Gamma(s) = \Gamma(s) \zeta(s).$$

donde el intercambio de suma e integral está justificado porque, si  $f_n(x) = x^{s-1} e^{-nx}$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\sigma) n^{-\sigma} = \Gamma(\sigma) \zeta(\sigma) < \infty$ . Así, hemos obtenido la siguiente fórmula:

$$(A.7) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{1}{e^x - 1} dx.$$

**A.2. Las desigualdades de Halász-Montgomery**

Supongamos que  $\xi, \varphi_1, \dots, \varphi_R$  son vectores arbitrarios en un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con un producto escalar denotado por  $(a, b)$  y norma  $\|a\|^2 = (a, a)$ . Entonces:

$$(A.8) \quad \sum_{r \leq R} |(\xi, \varphi_r)| \leq \|\xi\| \left( \sum_{r, s \leq R} |(\varphi_r, \varphi_s)| \right)^{1/2}.$$

$$(A.9) \quad \sum_{r \leq R} |(\xi, \varphi_r)|^2 \leq \|\xi\|^2 \max_{r \leq R} \sum_{s \leq R} |(\varphi_r, \varphi_s)|.$$

Ambas desigualdades se deducen de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz ingeniosamente. Observemos primero que  $\sum_{r \leq R} c_r (\xi, \varphi_r) = (\xi, \sum_{r \leq R} \bar{c}_r \varphi_r)$  para escalares  $c_r$  arbitrarios. Por tanto:

$$(A.10) \quad \left| \sum_{r \leq R} c_r (\xi, \varphi_r) \right|^2 \leq \|\xi\|^2 \left\| \sum_{r \leq R} \bar{c}_r \varphi_r \right\|^2 = \|\xi\|^2 \sum_{r, s \leq R} \bar{c}_r c_s (\varphi_r, \varphi_s).$$

Si ahora tomamos  $c_r = \exp(-i \arg(\xi, \varphi_r))$ , entonces  $|c_r| = 1$  y  $\sum_{r \leq R} c_r (\xi, \varphi_r) = \sum_{r \leq R} |(\xi, \varphi_r)|$ , luego (A.8) se sigue directamente de (A.10). Por último, para conseguir (A.9) usamos la desigualdad elemental  $|\bar{c}_r c_s| \leq \frac{1}{2} |c_r|^2 + \frac{1}{2} |c_s|^2$ , obteniendo:

$$(A.11) \quad \sum_{r, s \leq R} \bar{c}_r c_s (\varphi_r, \varphi_s) \leq \sum_{r \leq R} |c_r|^2 \sum_{s \leq R} |(\varphi_r, \varphi_s)| \leq \sum_{r \leq R} |c_r|^2 \max_{r \leq R} \sum_{s \leq R} |(\varphi_r, \varphi_s)|,$$

de manera que, combinando (A.10) con (A.11), se tiene (A.9) tomando  $c_r = \overline{(\xi, \varphi_r)}$ .

### A.3. La función Gamma de Euler

La función Gamma definida en (A.5) para  $\Re(s) > 0$  es una función que se puede extender de manera meromorfa a todo el plano complejo, cuyos únicos polos ocurren en  $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ , son simples y en  $s = -n$  tiene residuo  $\frac{(-1)^n}{n!}$ . Algunas de las propiedades más útiles que verifica son las siguientes:

$$(A.12) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s).$$

Además, la función  $\Gamma(s)$  no tiene ceros luego  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  es una función entera cuyo producto de Weierstrass viene dado por:

$$(A.13) \quad \frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + s/n)e^{-s/n},$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni. Otra fórmula que nos va a ser de gran utilidad es la famosa fórmula de Stirling, en una de sus muchas variantes, que dice lo siguiente:

$$(A.14) \quad \Gamma(\sigma + it) = (2\pi)^{1/2} (it)^{\sigma-1/2} (t/e)^{it} e^{-\frac{\pi}{2}t} (1 + O(t^{-1})), \quad \text{para } t \geq t_0 > 0.$$

$$(A.15) \quad |\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{1/2} |t|^{\sigma-1/2} e^{-\pi|t|/2} (1 + O(|t|^{-1})), \quad \text{para } |t| \geq t_0 > 0.$$

Estas igualdades son válidas para  $C_1 \leq \Re(s) \leq C_2$  y la constante implícita en el término  $O$  depende solo de  $C_1$  y  $C_2$ . Además, para  $\delta > 0$  fijo,  $|\arg(s)| \leq \pi - \delta$ ,  $|s| \geq \delta$ , tenemos que:

$$(A.16) \quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + O(|s|^{-2}).$$

### A.4. La teoría de pares de exponentes

El objetivo de la teoría de pares de exponentes es obtener buenas cotas para la suma:

$$(A.17) \quad S = \sum_{B < n \leq B+h} e(f(n)), \quad B \geq 1, 1 < h \leq B.$$

Este tipo de sumas son muy comunes en teoría analítica de números y ser capaces de estimar su orden es de vital importancia para obtener resultados precisos en diversas áreas de interés como son las regiones libres de ceros o los teoremas de densidad de ceros. En primer lugar, tenemos los siguientes lemas generales, conocidos en la literatura como los lemas de van der Corput, que fue pionero en el estudio de este tipo de problemas, [54] y [55].

**Lema A.3.** Sea  $F(x)$  una función real, derivable y tal que  $F'(x)$  es monótona y satisface que  $|F'(x)| \geq m > 0$  para  $a \leq x \leq b$ . Entonces:

$$(A.18) \quad \left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \leq 4m^{-1}.$$

**Lema A.4.** Sea  $F(x)$  una función real, dos veces derivable en  $[a, b]$  tal que  $|F''(x)| \geq m > 0$ . Entonces:

$$(A.19) \quad \left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \leq 8m^{-1/2}.$$

Los anteriores lemas nos muestran que las estimaciones para integrales de exponenciales son cotas superiores que no dependen explícitamente de la longitud del intervalo de integración. Esto no sucede en las estimaciones para sumas de exponenciales que pasamos a estudiar a continuación. De ahora en adelante usaremos la notación  $e(x) = e^{2\pi ix}$ .

**Lema A.5.** Sea  $f(x)$  una función real para  $a \leq x \leq b$  tal que  $f(x) \in C^2[a, b]$  y  $f''(x) < 0$  en  $[a, b]$ . Sean  $\alpha = f'(b)$  y  $\beta = f'(a)$ . Entonces para cualquier  $0 < \eta < 1$  tenemos que:

$$(A.20) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \eta < m < \beta + \eta} \int_a^b e(f(x) - mx) dx + O(\log(\beta - \alpha + 2)).$$

**Lema A.6.** Sea  $f(x)$  una función real para  $a \leq x \leq b$  y sea  $H > 0$ . Entonces:

$$(A.21) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \ll (b-a)H^{-1/2} + H \left( (b-a)H^{-1} \sum_{h=1}^{H-1} \left| \sum_{a < n \leq b-h} e(f(n+h) - f(n)) \right| \right)^{1/2}.$$

**Lema A.7.** Sea  $f(x) \in C^4[a, b]$ ,  $f'(x)$  monótona decreciente en  $[a, b]$ ,  $\alpha = f'(b)$  y  $\beta = f'(a)$ . Si  $x_\nu$  se define como  $f'(x_\nu) = \nu$ , donde  $\alpha < \nu \leq \beta$  y  $\nu$  es un entero, y además se satisface que:

$$|f''(x)| \asymp m_2, \quad f^{(3)}(x) \ll m_3, \quad f^{(4)}(x) \ll m_4, \quad m_3^2 = m_2 m_4,$$

entonces:

$$(A.22) \quad \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = e\left(-\frac{1}{8}\right) \sum_{\alpha < \nu \leq \beta} |f''(x_\nu)|^{-1/2} e(f(x_\nu) - \nu x_\nu) \\ + O(m_2^{-1/2}) + O((b-a)m_3^{1/3}) + O(\log((b-a)m_2 + 2)).$$

Ahora tenemos a nuestra disposición los lemas A.6 y A.7 que nos ayudan a convertir sumas de exponenciales en otras sumas de exponenciales más términos de error, normalmente, manejables. Nótese que, a diferencia del lema A.6, el lema A.7 es mucho más restrictivo con  $f(x)$  y añade términos de error, aunque sigue siendo tremendamente útil. Respecto a la suma  $S$ , una condición natural que podemos suponer es que:

$$(A.23) \quad |f'(x)| \asymp A, \quad \text{con } A \geq \frac{1}{2}, \quad \text{cuando } B \leq x \leq 2B,$$

pues como hemos visto en los lemas anteriores, las cotas no dependen del orden de  $f'(x)$ . Sin embargo, la anterior condición es muy general, así que para obtener cotas útiles y que esta condición no sea casi vacía, se exige que además se verifique lo siguiente:

$$(A.24) \quad AB^{1-r} \ll_r |f^{(r)}(x)| \ll_r AB^{1-r}, \quad \text{para } B \leq x \leq 2B \text{ y } r = 1, 2, \dots,$$

Aún así, si solo pedimos estas condiciones, se pueden encontrar contraejemplos a los lemas que vamos a ver después. A este respecto, presentaremos alguna de estas objeciones que nos obligan a tomar la siguiente definición de par de exponentes propuesta por Graham y Kolesnik, [18].

**Definición A.8.** Sea  $N, y, s$  y  $\varepsilon$  números positivos con  $\varepsilon < 1/2$  y sea  $P \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Definimos  $\mathcal{F}(N, P, s, y, \varepsilon)$  como el conjunto de funciones  $f$  tales que:

1.  $f$  está definida y tiene  $P$  derivadas continuas en algún intervalo  $[a, b]$  con  $[a, b] \subseteq [N, 2N]$ .
2. Si  $0 \leq p \leq P - 1$  y  $a \leq x \leq b$  entonces  $|f^{(p+1)}(x) - (-1)^p (s)_p y x^{-s-p}| < \varepsilon (s)_p y x^{-s-p}$ , donde  $(s)_p = s(s+1) \cdots (s+p-1)$ .

**Definición A.9.** Sea  $(\kappa, \lambda)$  un par de números reales tales que  $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ . Supongamos que para todo  $s > 0$ , existe un  $P = P(\kappa, \lambda, s)$  y un  $\varepsilon = \varepsilon(\kappa, \lambda, s) < 1/2$  tales que para todo  $N, y > 0$  y todo  $f \in \mathcal{F}(N, P, s, y, \varepsilon)$  definida en  $[a, b]$ :

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \ll_{\kappa, \lambda, s} (yN^{-s})^\kappa N^\lambda + y^{-1} N^s,$$

se cumple. Entonces decimos que  $(\kappa, \lambda)$  es un par de exponentes.

Nótese que dicha definición se puede adaptar a nuestro tipo de sumas, (A.17), y nuestra condición (A.24), sin más que observar que, en dicho caso,  $B = N$  y  $A = yx^{-s}$ , luego la condición sería que  $S \ll_{\kappa, \lambda, s} A^\kappa B^\lambda + A^{-1}$ , que se reducirá a  $\ll A^\kappa B^\lambda$  en muchos casos. Asimismo, obsérvese que  $(\kappa, \lambda) = (0, 1)$  es, evidentemente, un par de exponentes. Por otro lado, el conjunto de pares de exponentes forman un conjunto convexo en el siguiente sentido: si  $(\kappa_1, \lambda_1)$  y  $(\kappa_2, \lambda_2)$  son pares de exponentes cualesquiera y  $0 \leq t \leq 1$  entonces se tiene que:

$$(A.25) \quad S = S^t S^{1-t} \ll A^{\kappa_1 t + (1-t)\kappa_2} B^{\lambda_1 t + (1-t)\lambda_2},$$

luego  $(\kappa_1 t + (1-t)\kappa_2, \lambda_1 t + (1-t)\lambda_2)$  es también un par de exponentes. En cualquier caso, dado que verificar que las transformaciones obtenidas al aplicar los lemas A.6 y A.7 preservan la clase  $\mathcal{F}$  es realmente técnico y delicado, vamos a desarrollar la teoría exigiendo solo la condición (A.24). Como veremos, uno de los procesos para generar pares de exponentes sigue siendo válido, mientras que para el otro, con motivo de ilustrar las sutilezas de requerir condiciones más severas, presentaremos una posible argumentación errónea acerca de su validez para posteriormente dar el contraejemplo que la invalida. Pasemos pues con ello. En primer lugar, nótese que podemos considerar solo el caso  $f'(x) > 0$  para  $B \leq x \leq 2B$ , pues en caso contrario podemos tomar

simplemente  $\bar{S}$ . Para obtener el primer par de exponentes no trivial aplicamos el lema A.5 a  $S$ , estimando cada integral por  $\ll m_2^{-1/2} \ll (A/B)^{-1/2}$  por el lema A.4. Esto nos da que:

$$(A.26) \quad S \ll (\beta - \alpha)A^{-1/2}B^{1/2} + A^{-1/2}B^{1/2} + \log(A + 2) \ll (AB)^{1/2},$$

debido a que  $\beta - \alpha = f'(a) - f'(b) \ll A$  y  $A \gg 1$ , donde hemos usado (A.24) únicamente con  $r = 1, 2$ . Por consiguiente,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  es un par de exponentes. Así, de momento solo tenemos los pares de exponentes  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y los que obtenemos mediante combinación convexa de ambos. Llamamos a este conjunto de pares de exponentes,  $E_1$ . Para obtener más pares de exponentes recurrimos al siguiente resultado:

**Lema A.10. Proceso A:** [29] Si  $(\kappa, \lambda)$  es un par de exponentes, entonces también lo es:

$$(A.27) \quad (k, l) = \left( \frac{\kappa}{2\kappa + 2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa + 2} \right).$$

*Demostración.* En primer lugar, notemos que  $0 \leq k \leq \frac{1}{2} \leq l \leq 1$  por verificarlo  $(\kappa, \lambda)$ . Aplicando el lema A.6 obtenemos que:

$$(A.28) \quad S^2 \ll B^2H^{-1} + H^2 + BH^{-1} \sum_{j=1}^{H-1} \left| \sum_{B < n \leq B+h-j} e(f(n+j) - f(n)) \right|,$$

donde  $H$  será elegido adecuadamente. Fijado  $j$ , definimos  $g(n) := f(n+j) - f(n)$ , luego cumple que  $g^{(r)}(x) = f^{(r)}(x+j) - f^{(r)}(x) = jf^{(r+1)}(x+\theta j)$  para todo  $r \geq 1$  y algún  $0 < \theta < 1$ . De esta manera, para  $B \leq x \leq B+h-j$  tenemos, por (A.24), que  $jAB^{-r} \ll |g^{(r)}(x)| \ll jAB^{-r}$  para todo  $r \geq 1$ . A continuación, distinguimos dos casos: si  $A \leq B^{1/2}$  entonces usando el hecho de que  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  y que  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  es un par de exponentes, obtenemos que:

$$(A.29) \quad S \ll (AB)^{1/2} = A^{1/2}B^{1/2+\lambda/(2\kappa+2)}B^{-\lambda/(2\kappa+2)} \ll A^{(1+\kappa-2\lambda)/(2\kappa+2)}B^l \ll A^k B^l.$$

Ahora supongamos que  $A > B^{1/2}$ . Esta condición se necesita en el caso de que, para una constante  $c > 0$ , tengamos que  $j < cBA^{-1}$ , de manera que  $|g'| < 1/2$ ,  $g'' \asymp jAB^{-2} \ll 1$ . Por tanto, por los lemas 1.31 y A.4, tenemos que:

$$(A.30) \quad BH^{-1} \sum_{j < cB/A} \left| \sum_n g(n) \right| \ll BH^{-1}A^{-1/2}B \sum_{j < cB/A} j^{-1/2} \ll B^2H^{-1}.$$

Para el resto de  $j$ 's en (A.28), usamos el par de exponente que ya tenemos,  $(\kappa, \lambda)$ , y el orden de las derivadas de  $g$ , para obtener:

$$(A.31) \quad \sum_{B < n \leq B+h-j} e(f(n+j) - f(n)) \ll (jAB^{-1})^\kappa B^\lambda.$$

Por tanto, por (A.28):

$$(A.32) \quad S^2 \ll B^2H^{-1} + H^2 + A^\kappa B^{1-\kappa+\lambda} H^\kappa.$$

Así, tomando  $H = B^{(1+\kappa-\lambda)/(\kappa+1)} A^{-\kappa/(\kappa+1)}$ , reduce la anterior estimación a:

$$(A.33) \quad S^2 \ll A^{\kappa/(1+\kappa)} B^{(1+\kappa+\lambda)/(1+\kappa)} + B^{2(1+\kappa-\lambda)/(1+\kappa)} A^{-2\kappa/(1+\kappa)}.$$

Por consiguiente, como  $\frac{1+\kappa+\lambda}{1+\kappa} = 1 + \frac{\lambda}{1+\kappa} \geq \frac{4}{3} \geq 2\left(1 - \frac{\lambda}{1+\kappa}\right) = \frac{2(1+\kappa-\lambda)}{1+\kappa}$  y  $A > 1/2$ , tenemos que el segundo término en (A.33) no supera al primero y se sigue el resultado.  $\square$

Nótese que para demostrar este resultado solo hemos necesitado que se cumpla (A.24) para  $r \leq 3$ . Además, por cómo hemos tomado  $g$ , sus derivadas cumplen prácticamente lo mismo que las de  $f$  y no involucran restas de derivadas de  $f$ , lo cual garantiza que el lema A.6 preserva la clase  $\mathcal{F}$ , véase el lema 3.7 de [18]. Ahora denotemos por  $E_2$  al conjunto de pares de exponentes que se pueden obtener de  $E_1$ , convexidad e iteración del lema anterior (que siempre produce un nuevo par de exponentes respecto al original) un conjunto finito de veces. Entonces para cualquier par de exponentes  $(\kappa, \lambda) \in E_2$  se verifica la siguiente condición:

$$(A.34) \quad \kappa + 2\lambda \geq \frac{3}{2}.$$

Por una parte, está claro que lo verifican los  $(\kappa, \lambda) \in E_1$  y que la condición se preserva por convexidad. Para el par  $(k, l)$ , obtenido mediante aplicación del lema A.10, un simple cálculo, teniendo en cuenta que  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ , nos da lo que queremos. Finalmente, presentamos la última manera de obtener pares de exponentes, que se puede encontrar probada correctamente en el teorema 3.10 de [18].

**Lema A.11. Proceso B:** Si  $(\kappa, \lambda)$  es un par de exponentes para el cual se verifica (A.34), entonces:

$$(A.35) \quad (k, l) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}\right)$$

es un par de exponentes.

Antes de ir con el contraejemplo y, en vista de todo el trabajo hecho hasta aquí, pasamos a formalizar aún más el concepto de pares de exponentes introduciendo el conjunto  $E$ , que denota todos los pares de exponentes  $(\kappa, \lambda)$  que se pueden obtener mediante  $E_2$ , convexidad y el lema anterior aplicado un número finito de veces. Por otro lado, en los lemas A.10 y A.11 no se asume que el par de exponentes del que partimos pertenezca a  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente. Por tanto, es razonable definir los 3 procesos que tenemos para generar pares de exponentes, es decir, definimos las funciones  $A$ ,  $B$  y  $C(t)$  con  $0 \leq t \leq 1$  (estas letras no tienen nada que ver con las usadas anteriormente), de manera que, si  $(\kappa, \lambda)$  y  $(\kappa_1, \lambda_1)$  son dos pares de exponentes, entonces:

$$(A.36) \quad A(\kappa, \lambda) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa+2}\right),$$

$$(A.37) \quad B(\kappa, \lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}\right),$$

$$(A.38) \quad C(t)(\kappa, \lambda)(\kappa_1, \lambda_1) = (\kappa t + (1-t)\kappa_1, \lambda t + (1-t)\lambda_1).$$

Ahora sí, ya tenemos toda la notación necesaria para abordar el problema del proceso B. Como ya hemos comentado, este es un resultado válido con la definición A.9, pero no lo es si solo pedimos (A.24). Para ver dónde se encuentra el error, sigamos la demostración que propone Ivic en el capítulo 2 de [29]:

La condición  $0 \leq k \leq \frac{1}{2} \leq l \leq 1$  es trivial. Vamos a aplicar el lema A.7 con  $a = B, b = B + h, m_2 = AB^{-1}, m_3 = AB^{-2}$  y  $m_4 = AB^{-3}$  de manera que se cumple que  $m_3^2 = m_2 m_4$ . Además, podemos suponer que  $f''(x) < 0$ , pues el caso  $f''(x) > 0$  da la misma estimación del lema. Por consiguiente, tenemos que:

$$(A.39) \quad S = e\left(-\frac{1}{8}\right) \sum_{\alpha < \nu \leq \beta} |f''(x_\nu)|^{-1/2} e(f(x_\nu) - \nu x_\nu) + O(A^{-1/2} B^{1/2}) \\ + O(\log(A+2)) + O((AB)^{1/3}).$$

Así, hemos reducido el problema a estimar la suma:

$$(A.40) \quad S_1 = \sum_{\alpha < \nu \leq \beta} |f''(x_\nu)|^{-1/2} e(g(\nu)), \quad g(\nu) = f(x_\nu) - \nu x_\nu.$$

Si denotamos por  $y = f'(x)$  y a su inversa como  $x = h(y)$ , entonces  $g(y) = f(h(y)) - yh(y)$ , lo cual nos da que  $g'(y) = f'(h(y))h'(y) - h(y) - yh'(y) = yh'(y) - h(y) - yh'(y) = -h(y)$  y  $g''(y) = -h'(y) = -1/f''(h(y))$ . Análogamente, se obtiene que  $g^{(3)}(y) = f^{(3)}(h(y))(f''(h(y)))^{-3}$ . En general,  $g^{(r)}(y)$  se obtiene aplicando la regla de Leibniz a la identidad  $g''(y)f''(h(y)) = -1$ . Tenemos que  $h(y) \asymp B$ , luego:

$$(A.41) \quad BA^{1-r} \ll |g^{(r)}(y)| \ll BA^{1-r}, \quad (r \leq 3),$$

y, por inducción, se puede ver que la estimación anterior es también válida para  $r \geq 4$ . Eliminando el término  $f''$  mediante sumación por partes en  $S_1$ , se ve que  $S_1$  es del mismo tipo que  $S$ , excepto porque  $A$  y  $B$  están intercambiados. Por tanto:

$$(A.42) \quad S_1 \ll A^{-1/2} B^{1/2} B^\kappa A^\lambda \quad \text{y} \quad S \ll A^k B^l + (AB)^{1/3},$$

donde  $k = \lambda - \frac{1}{2}, l = \kappa + \frac{1}{2}$ . Esto terminaría la prueba si tuviésemos que  $(AB)^{1/3} \leq A^k B^l$ . Dado que  $l \geq \frac{1}{2}$ , dicha condición es obvia si  $k \geq \frac{1}{3}$ . Supongamos por el contrario que  $k < \frac{1}{3}$ . Gracias a la condición  $\kappa + 2\lambda \geq \frac{3}{2}$  tenemos que  $B \geq A^{(1-3k)/(3l-1)}$ , luego se verifica que  $(AB)^{1/3} = A^k B^{1/3} A^{1/3-k} \leq A^k B^{1/3} B^{(3l-1)/3} = A^k B^l$ , lo que finaliza la demostración.

Para ver dónde se encuentra el error en esta deducción, veamos el contraejemplo presentado por Liu en [38]. Sean  $S_f(N, 2N) := \sum_{N \leq n \leq 2N} e(f(n))$ ,  $f(x) = Cx^{3/2}$  y  $C = 2(27)^{-1/2}$ . Por un lado, Liu probó que  $S_f(N, 2N) \gg N^{3/4}$ . Por otro lado, si tomamos el par de exponentes  $BA^2 B(0, 1) = (2/7, 4/7)$ , el proceso B nos diría que  $S_f(N, 2N) \ll N^{5/7} = o(N^{3/4})$ , lo cual supone una contradicción. El problema del proceso B reside en la elección de  $g$ , ya que aquí se toma la transformada de Legendre de  $f$ . Si calculamos una derivada más de  $g$  de lo que lo hace Ivic nos daremos cuenta de que  $g^{(4)}(x) = \frac{F(x)}{(f''(x))^5}$  donde  $F(x) = 3(f^{(3)}(x))^2 - f^{(4)}(x)f''(x)$ . Ahora bien, podemos

tener una  $f$  que verifique que  $|f^{(r)}| \asymp AB^{1-r}$  pero tal que  $F(x)$  se anule, como sucede precisamente con el contraejemplo de Liu, ocasionando que no podamos aplicar la teoría de pares de exponentes a  $S_1$ .

Para finalizar esta sección, aplicaremos la teoría de pares de exponentes a uno de los ejemplos más relevantes en la teoría de las funciones zeta, lo que se conoce como la cota de subconvexidad de Weyl. Esta cota nos dice que:

$$(A.43) \quad \zeta_T(s) = \sum_{n \leq T} n^{-s} \ll |s|^{1/6} \log 3|s|,$$

para  $\sigma = \frac{1}{2}$  y  $T \leq 4|s|^2$ . Esta estimación fue fundamental porque mejoró la que hasta entonces era la mejor estimación de  $\zeta(s)$  en la línea crítica, la «convexity bound», (1.49), y su demostración es un ejemplo clásico de la teoría que hemos desarrollado hasta ahora.

Para probar (A.43), definamos  $f(x) := \frac{t}{2\pi} \log x$ . Sea  $N > 0$ , entonces esta función verifica las condiciones de la definición A.8 en el intervalo  $[N, 2N]$ . En efecto,  $f^{(p+1)}(x) = (-1)^p \frac{t}{2\pi} p! x^{-p-1}$ , luego tomando  $s = 1$  e  $y = \frac{t}{2\pi}$  tenemos lo que queremos. Por otro lado, nótese que  $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}) = AB(0, 1)$ , por lo que es un par de exponentes. Por tanto, gracias a la definición A.9, sabemos que:

$$\sum_{N < n \leq 2N} n^{-it} \ll t^{1/6} N^{1/2} + t^{-1} N.$$

Por consiguiente:

$$\sum_{N < n \leq 2N} n^{-s} \ll N^{-1/2} (t^{1/6} N^{1/2} + t^{-1} N) = t^{1/6} + t^{-1} N^{1/2}.$$

Ahora bien, sabemos que  $N \ll T \ll t^2$ , así que  $\sum_{N < n \leq 2N} n^{-s} \ll t^{1/6}$ . Sumando sobre todos los intervalos diádicos, que son un total de  $O(\log t)$ , se concluye el resultado. Nótese que la razón para poner  $\log 3|s|$  es simplemente para garantizar que la cota final sea positiva, pues  $3|s| \geq 3/2$ . Finalmente, para obtener la correspondiente estimación para  $\zeta(s)$  a partir de (A.43), basta con usar el teorema 1.32. De manera que, si  $\sigma = \frac{1}{2}$  y  $T \ll |s| \leq \pi T$ , entonces se cumple que:

$$(A.44) \quad \zeta(s) = \zeta_T(s) + O(T^{-1/2}),$$

y se obtiene que  $\zeta(\frac{1}{2} + it) \ll t^{1/6} \log t$  aplicando (A.43).

## A.5. Sumación por partes

La sumación por partes es una técnica estándar, muy usada en teoría analítica de números, a la que recurriremos constantemente. A continuación, dejamos algunas fórmulas útiles al respecto. Sea  $\{a_n\}_n$  una sucesión de números complejos y  $\{b_n\}$  una sucesión de números reales. Si  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$  y  $M \geq 1$  es un entero, entonces:

$$(A.45) \quad \left| \sum_{M < n \leq N} a_n b_n \right| \leq b_M \max_{M < n \leq N} \left| \sum_{M < m \leq n} a_m \right|,$$

mientras que si  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$ , entonces:

$$(A.46) \quad \left| \sum_{M < n \leq N} a_n b_n \right| \leq 2b_N \max_{M < n \leq N} \left| \sum_{M < m \leq n} a_m \right|.$$

Estas dos desigualdades muestran que las sucesiones monótonas pueden ser «eliminadas» de las sumas a la hora de realizar estimaciones. Ambas se prueban análogamente. Para obtener (A.45) definimos  $A_n = \sum_{M < m \leq n} a_m$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{M < n \leq N} a_n b_n \right| &= \left| \sum_{M < n \leq N} (A_n - A_{n-1}) b_n \right| \\ &\leq |A_N| b_N + \sum_{M < n \leq N-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}) \leq b_M \max_{M < n \leq N} |A_n|. \end{aligned}$$

Pasemos a enunciar los dos lemas que más se utilizan cuando se menciona esta técnica.

**Lema A.12. Sumación por partes:** Sean  $\{a_n\}_n$  y  $\{b_n\}_n$  sucesiones de números complejos y sea  $S_m = \sum_{n \leq m} b_n$  entonces se verifica que:

$$(A.47) \quad \sum_{n \leq N} a_n b_n = a_N S_N + \sum_{n \leq N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n.$$

**Lema A.13. Lema de Abel:** Sea  $\{a_n\}_n$  una sucesión de números complejos,  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  una función de clase  $C^1$  y  $S(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ . Entonces:

$$(A.48) \quad \sum_{n \leq x} a_n f(n) = S(x) f(x) - \int_1^x S(t) f'(t) dt.$$

## A.6. Funciones aritméticas

Una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  se denomina aritmética. Un ejemplo clásico es la función de Möbius,  $\mu(1) = 1$ , mientras que si  $n > 1$  con  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , entonces  $\mu(n) = (-1)^k$  si  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$ , y 0 en otro caso.

**Lema A.14.** Si  $n \geq 1$ , entonces  $\sum_{d|n} \mu(d) = [n^{-1}]$ . Es decir, dicha suma se anula salvo si  $n = 1$ , en cuyo caso vale 1.

De ello se deduce el siguiente resultado importante:

**Lema A.15.** Si  $n \geq 1$  y  $\varphi$  es la función de Euler, entonces se tiene que:

$$(A.49) \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \quad \text{y} \quad \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Sumas del tipo (A.49) ocurren muy frecuentemente en teoría de números y es por ello que merece la pena estudiarlas con más generalidad. En particular, estas identidades aparecen naturalmente al estudiar series de Dirichlet, que son series del

tipo  $\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$  donde  $f$  es una función aritmética con crecimiento a lo sumo polinómico. Así, dadas dos funciones aritméticas  $f$  y  $g$ , definimos su convolución de Dirichlet, denotada por  $f * g$ , de la siguiente forma  $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ . Esta operación es asociativa, conmutativa y tiene como elemento identidad  $I(n) = \lfloor n^{-1} \rfloor$ . De esta manera, las funciones aritméticas forman un álgebra, conocida como el álgebra de Dirichlet, en la que la suma es la suma usual y el producto es la convolución de Dirichlet. Nótese que si definimos  $u(n) = 1$  y  $N(n) = n$  entonces, por el lema A.14, tenemos que  $\mu * u = I$ , luego  $\mu$  y  $u$  son inversas la una de la otra y, por (A.49), se cumple que  $\varphi(n) = (\mu * N)(n)$ . A su vez, la multiplicación en el álgebra se corresponde al producto de las series de Dirichlet asociadas, de forma que  $\zeta_f(s)\zeta_g(s) = \zeta_{f * g}(s)$ . Si además  $f$  es multiplicativa, es decir, verifica que  $f(mn) = f(m)f(n)$  si  $(m, n) = 1$ , entonces tenemos que  $\zeta_f(s) = \prod_p (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \dots)$ , y si  $f$  y  $g$  son ambas multiplicativas, entonces también lo es  $f * g$ . Asimismo, si  $f$  es completamente multiplicativa, es decir,  $f(mn) = f(m)f(n)$  para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ , entonces se sigue de lo anterior que  $\zeta_f(s) = \prod_p (1 - f(p)p^{-s})^{-1}$ , de lo que se deduce que  $\zeta_{\mu f}(s) = \zeta_f(s)^{-1}$ . De hecho, dada una función aritmética y multiplicativa,  $f$ , se puede comprobar que  $f$  es completamente multiplicativa si y solo si  $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$  para todo  $n \geq 1$ . A continuación, presentamos la herramienta más potente de esta teoría:

**Lema A.16. Fórmula de inversión de Möbius:** Si  $f$  y  $g$  son funciones aritméticas entonces:

$$(A.50) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad y \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

son equivalentes.

En particular, este resultado nos sirve para deducir una identidad muy útil. Sea la función de von Mangoldt,  $\Lambda(n) = \log p$  si  $n = p^k$  con  $p$  primo y  $k \geq 1$ , y 0 en otro caso, se verifica que:

**Lema A.17.** Si  $n \geq 1$ , entonces se tiene que:

$$(A.51) \quad \log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \quad y \quad \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right).$$



# Bibliografía

---

- [1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976.
- [2] R. C. Baker and G. Harman. The difference between consecutive primes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 72(2):261–280, 1996.
- [3] J. Bourgain, C. Demeter, and L. Guth. Proof of the main conjecture in Vinogradov’s mean value theorem for degrees higher than three. *Annals of Mathematics*, 184(2):633–682, 2016.
- [4] F. Chamizo. *Ocho Lecciones de Teoría de Números*. Universidad Autónoma de Madrid, 2011.
- [5] J. B. Conrey. More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 399:1–26, 1989.
- [6] J. B. Conrey, A. Ghosh, and S. M. Gonek. A note on gaps between zeros of the zeta function. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 16(4):421–424, 1984.
- [7] J. B. Conrey and H. Iwaniec. Spacing of zeros of Hecke  $L$ -functions and the class number problem. *Acta Arithmetica*, 103(3):259–312, 2002.
- [8] H. Cramér. On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 45:51–74, 1937.
- [9] H. Davenport. *Multiplicative Number Theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [10] H. M. Edwards. *Riemann’s Zeta Function*. Academic Press, 1974.
- [11] W. J. Ellison and M. Mendès France. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975.
- [12] T. Estermann. On Dirichlet’s  $L$ -functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 23:275–279, 1948.
- [13] S. Feng and X. Wu. On gaps between zeros of the Riemann zeta-function. *Journal of Number Theory*, 132(7):1385–1397, 2012.
- [14] J. B. Friedlander and A. Granville. Limitations to the equi-distribution of primes I. *Annals of Mathematics*, 129(2):363–382, 1989.

- 
- [15] D. A. Goldston. Notes on pair correlation of zeros and prime numbers. *arXiv*, abs/math/0412313, 2004.
- [16] D. A. Goldston and D. R. Heath-Brown. A note on the differences between consecutive primes. *Mathematische Annalen*, 266:317–320, 1984.
- [17] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yıldırım. Primes in tuples I. *Annals of Mathematics*, 170(2):819–862, 2009.
- [18] S. W. Graham and G. Kolesnik. *van der Corput's method of exponential sums*, volume 126 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [19] L. Guth and J. Maynard. New large value estimates for Dirichlet polynomials. *arXiv*, abs/2405.20552, May 2024.
- [20] G. H. Hardy. Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 158:1012–1014, 1914.
- [21] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Mathematica*, 41:119–196, 1918.
- [22] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. *Mathematische Zeitschrift*, 10:283–317, 1921.
- [23] D. R. Heath-Brown. The twelfth power moment of the Riemann-zeta function. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 29(2):443–462, 1978.
- [24] G. Hoheisel. Primzahlprobleme in der analysis. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, pages 580–588, 1930.
- [25] M. N. Huxley. *The Distribution of Prime Numbers: Large Sieves and Zero-Density Theorems*. Oxford University Press, 1972.
- [26] M. N. Huxley. On the difference between consecutive primes. *Inventiones Mathematicae*, 15:155–164, 1972.
- [27] A. E. Ingham. Mean value theorems in the theory of the Riemann zeta-function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 27(1):273–300, 1926.
- [28] A. E. Ingham. On the estimation of  $N(\sigma, T)$ . *The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series)*, 11:291–292, 1940.
- [29] A. Ivić. *The Riemann zeta-function: Theory and Applications*. Dover Publications, Inc., 2003.
- [30] M. N. Huxley & A. Ivić. Subconvexity for the Riemann zeta-function and the divisor problem. *Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences Mathématiques*, 32:13–32, 2007. also arXiv:math/0611809v3.

- [31] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*. Colloquium publications, v. 53. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2004.
- [32] A. A. Karatsuba. On the distance between adjacent zeros of the Riemann zeta-function lying on the critical line. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 157:49–63, 1981. English translation in Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1983, no. 2(157), 49-63.
- [33] A. A. Karatsuba. On the zeros of the Riemann zeta-function on short intervals of the critical line. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 272(6):1312–1314, 1983. English translation in Soviet Mathematics Doklady, 28 (1983), 758-760.
- [34] E. Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, volume 1. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.
- [35] N. Levinson. More than one third of zeros of the Riemann’s zeta-function are on  $\sigma = 1/2$ . *Advances in Mathematics*, 13:383–436, 1974.
- [36] J. E. Littlewood. Quelques conséquences de l’hypothèse que la fonction  $\zeta(s)$  n’a pas de zéros dans le demi-plan  $\Re(s) > 1/2$ . *C. R. Acad. Sci. Paris*, 154:263–266, 1912.
- [37] J. E. Littlewood. Two notes on the Riemann zeta-function. *Cambridge Philos. Soc.*, 22:pp. 234–242, 1924.
- [38] Hong-Quan Liu. On van der Corput’s method for exponential sums. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 60(1):7–20, 2019.
- [39] J. Maynard. Small gaps between primes. *Annals of Mathematics*, 181(1):383–413, 2015.
- [40] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In *Analytic Number Theory*, volume 24 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 181–193. American Mathematical Society, 1973.
- [41] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [42] J. Moser. Sharpening of the Hardy-Littlewood theorem on the density of zeros of the function  $\zeta(1/2 + it)$ . *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 42/43:41–50, 1983.
- [43] F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, et al. NIST digital library of mathematical functions. <http://dlmf.nist.gov/>.
- [44] S. Ramanujan. Some formulæ in the analytic theory of numbers. *Messenger of Mathematics*, 45:81–84, 1916.
- [45] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Education, 1966.
- [46] P. Sarnak. *Arithmetic Quantum Chaos*, volume 8 of *Israel Mathematical Conference Proceedings*. Bar-Ilan University, 1995.

- 
- [47] L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$  II. *Mathematics of Computation*, 30(134):337–360, 1976.
- [48] A. Selberg. On the zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line. *Skrifter Norske Vid. Akad. Oslo I.*, 10:1–59, 1942.
- [49] C. L. Siegel. On the zeros of the Dirichlet L-functions. *Annals of Mathematics*, 46(3):pp. 409–422, 1945.
- [50] The LMFDB Collaboration. The L-functions and modular forms database. <https://www.lmfdb.org>.
- [51] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, 2 edition, 1948.
- [52] E. C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford University Press, 1987.
- [53] P. Turán. On the remainder term of the prime number theorem formula II. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1:155–166, 1950.
- [54] J. G. van der Corput. Zahlentheoretische abschätzungen. *Mathematische Annalen*, 84:53–79, 1921.
- [55] J. G. van der Corput. Verschärfung der abschätzung beim teilerproblem. *Mathematische Annalen*, 87:39–65, 1922.
- [56] B. M. Wilson. Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-21(1):235–255, 1922.
- [57] T. D. Wooley. The cubic case of the main conjecture in Vinogradov’s mean value theorem. *Advances in Mathematics*, 294:532–561, 2016.