



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# El teorema de Linnik

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

*Autor:* Carlos Cerviño Luridiana

*Tutores:* Fernando Chamizo Lorente  
Adrián Ubis Martínez

Curso 2025-2026



## Resumen

En 1944, Yuri V. Linnik publicó de uno de los resultados más sorprendentes de la teoría de los números primos en progresiones aritméticas: el primer primo en una progresión aritmética no puede ser más grande que una potencia de la diferencia. El objetivo del proyecto es desarrollar la teoría de las funciones  $L$  de Dirichlet necesaria para dar una demostración de este resultado. Para ello, primero estudiaremos los caracteres de Dirichlet que dan lugar a las funciones  $L$  y estableceremos las propiedades analíticas básicas de estas funciones, como las ecuaciones funcionales o los desarrollos en producto. Tras esto, expondremos resultados clásicos sobre la distribución de los ceros que nos permitirán demostrar teoremas de los números primos en progresiones aritméticas y nos darán una primera aproximación al teorema de Linnik. Por último, introduciremos los teoremas de densidad clásicos siguiendo una perspectiva histórica y presentaremos la estimación de densidad sin logaritmos y el fenómeno de Deuring-Heilbronn para concluir la prueba el teorema que da nombre a este trabajo.

## Abstract

In 1944, Yuri V. Linnik shared one of the most surprising results of the theory of prime numbers in arithmetic progressions: the least prime in an arithmetic progression cannot be larger than a power of the common difference. The purpose of this master's thesis is to develop the Dirichlet  $L$ -function theory needed to prove this theorem. To achieve this, we study Dirichlet characters and the basic analytic properties of the corresponding  $L$ -functions, such as the functional equations or the product formula. Afterward, we proceed with the classical results regarding the distribution of the zeros that will allow us to prove prime number theorems in arithmetic progressions and to make a first contact with Linnik's theorem. Finally, after an historical perspective of the zero density theorems, we present the log-free zero density estimate and the Deuring-Heilbronn phenomenon to conclude the proof of the celebrated theorem.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Caracteres y funciones <math>L</math></b>	<b>1</b>
1.1	Caracteres de Dirichlet . . . . .	1
1.2	Caracteres primitivos y sumas de Gauss . . . . .	3
1.3	Funciones $L$ de Dirichlet . . . . .	6
1.4	Ecuaciones funcionales . . . . .	9
1.5	Productos de Hadamard . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Distribución de los ceros I: resultados clásicos</b>	<b>19</b>
2.1	Número de ceros en la banda crítica . . . . .	19
2.2	Regiones libres de ceros . . . . .	22
2.3	Ceros excepcionales y el teorema de Siegel . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Primos en progresiones aritméticas</b>	<b>33</b>
3.1	Fórmulas explícitas . . . . .	33
3.2	El teorema de los números primos en progresiones aritméticas . . . . .	40
3.3	Primeros pasos hacia el teorema de Linnik . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Distribución de los ceros II: teoremas de densidad</b>	<b>49</b>
4.1	El teorema de Bohr-Landau . . . . .	49
4.2	Las sumas parciales de Carlson . . . . .	54
4.3	Estimaciones de densidad libres de logaritmos . . . . .	61
4.4	El teorema de Linnik para «la mitad de las progresiones» . . . . .	67
4.5	El fenómeno de Deuring-Heilbronn . . . . .	70
4.6	El teorema de Linnik . . . . .	74
	<b>Apéndice</b>	<b>75</b>



# Glosario

---

$\rho$	Cero no trivial
$\beta_1$	Cero excepcional
$\varphi(n)$	Función de Euler
$\mu(n)$	Función de Möbius
$\Lambda(n)$	Función de von Mangoldt
$\chi_1(n)$	Carácter asociado al cero excepcional
$n\#$	Primorial
$\tau(n)$	Número de divisores
$e(x)$	$e^{2\pi ix}$
$\text{Li}(x)$	$\int_2^x \frac{dt}{\log t}$
$\Re(s)$	Parte real de $s$ , también denotada como $\sigma$
$\Im(s)$	Parte imaginaria de $s$ , también denotada como $t$
$\Gamma(s)$	Función Gamma
$N(T, \chi)$	Número de ceros no triviales de $L(s, \chi)$ en $ t  \leq T$
$N(T, \alpha, \chi)$	Número de ceros no triviales de $L(s, \chi)$ en $\sigma \geq \alpha,  t  \leq T$
$\int_{(\sigma_0, T)}$	$\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT}$
$\int_{(\sigma_0)}$	$\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty}$
$f = O(g)$	$\limsup \frac{ f }{g} < \infty$
$f = o(g)$	$\lim \frac{f}{g} = 0$
$f \ll g$	$f = O(g)$
$f \gg g$	$g = O(f)$
$f \asymp g$	$f = O(g)$ y $g = O(f)$



# CAPÍTULO 1

## Caracteres y funciones $L$

---

### 1.1. Caracteres de Dirichlet

La idea de esta sección es introducir lo más básico de la teoría de caracteres en grupos finitos para aplicarlo a los caracteres de Dirichlet.

**Definición 1.1.** Sea  $A$  un grupo abeliano finito. Consideremos  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  con el producto complejo. Un *carácter* es un homomorfismo  $\chi : A \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Denotamos por  $\hat{A}$  al conjunto de todos los caracteres.

Podemos considerar en  $L^2(A) := \{f : A \rightarrow \mathbb{C}\}$  el siguiente producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)},$$

que hace de  $(L^2(A), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert.

**Proposición 1.2.** Se cumple  $|A| = |\hat{A}|$ . Además,  $\hat{A}$  forma una base ortonormal de  $(L^2(A), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

*Demostración.* Si  $A$  es cíclico con  $|A| = n$ , el homomorfismo queda completamente determinado por  $\chi(a)$  donde  $\langle a \rangle = A$ . Como  $\chi(a) \in \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ ,  $|\hat{A}| = n$ . El caso en el que  $A$  no es cíclico se demuestra de forma similar descomponiendo  $A$  en producto de grupos cíclicos.

Para la segunda parte, como  $\dim L^2(A) = |A|$ , basta demostrar que  $\hat{A}$  es un sistema ortonormal. Para ello, consideramos  $\chi_1, \chi_2 \in \hat{A}$  distintos y un  $b \in A$  tal que  $\chi_1(b) \neq \chi_2(b)$ . Vemos que, como  $bA = A$ , si  $x = \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ , tenemos

$$x = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \chi_1(a) \overline{\chi_2(a)} = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \chi_1(ba) \overline{\chi_2(ba)} = \chi_1(b) \chi_2(b)^{-1} x,$$

de modo que, como  $\chi_1(b) \chi_2(b)^{-1} \neq 1$ , tenemos  $x = 0$ . Por otro lado,

$$\langle \chi_1, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \chi_1(a) \overline{\chi_1(a)} = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} 1 = 1,$$

lo que demuestra que tienen norma 1. □

**Definición 1.3.** Sea  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Dado un carácter  $\chi \in ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)^\wedge$ , definimos su *carácter de Dirichlet asociado* como la función  $\tilde{\chi} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{\chi}(n) := \begin{cases} \chi(n + q\mathbb{Z}) & \text{si } (n, q) = 1, \\ 0 & \text{si } (n, q) > 1. \end{cases}$$

Con esta definición queda claro que los caracteres de Dirichlet son completamente multiplicativos y  $q$ -periódicos. A partir de ahora, abusando de notación, denotaremos por  $\chi$  al carácter de Dirichlet asociado.

El carácter de Dirichlet asociado al carácter trivial, es decir, la función

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n, q) = 1, \\ 0 & \text{si } (n, q) > 1, \end{cases}$$

se llama carácter principal y se representa con  $\chi_0$ .

De las relaciones de ortogonalidad de los caracteres, podemos deducir el siguiente resultado:

**Lema 1.4.** Sean  $a, b$  coprimos con  $q$ . Se tiene

$$\sum_{\chi(\bmod q)} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } a \equiv b \pmod{q}, \\ 0 & \text{si } a \not\equiv b \pmod{q}. \end{cases}$$

*Demostración.* Como  $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)^\wedge$  forma una base ortonormal de  $\mathcal{F}((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \mathbb{C})$ , podemos expresar  $\varphi(q)\mathbf{1}_{\{b\}}(a)$  como

$$\varphi(q) \sum_{\chi(\bmod q)} \chi(a)\langle \mathbf{1}_{\{b\}}, \chi \rangle = \sum_{\chi(\bmod q)} \chi(a) \sum_{c \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \mathbf{1}_{\{b\}}(c)\overline{\chi(c)} = \sum_{\chi(\bmod q)} \chi(a)\overline{\chi(b)},$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Además, para caracteres no principales tenemos la siguiente cota:

**Lema 1.5.** Sea  $\chi \neq \chi_0$  un carácter de Dirichlet. Entonces

$$\sum_{n=1}^N \chi(n) < \varphi(q).$$

*Demostración.* Para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{n=qk+1}^{q(k+1)} \chi(n) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \chi(a) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \chi(a)\overline{\chi_0(a)} = \varphi(q)\langle \chi, \chi_0 \rangle = 0,$$

pues los caracteres son ortogonales. Ahora, con  $k = \lfloor N/q \rfloor$ , vemos que

$$\left| \sum_{n=1}^N \chi(n) \right| = \left| \sum_{n=qk+1}^N \chi(n) \right| < \varphi(q)$$

porque hay menos de  $\varphi(q)$  términos no nulos.  $\square$

## 1.2. Caracteres primitivos y sumas de Gauss

Una pregunta natural que surge al compararlos con las  $q$ -ésimas raíces de la unidad es si los caracteres que son «de verdad» módulo  $q$  tienen alguna propiedad que los diferencie y los haga especiales, ya que, por ejemplo, las raíces primitivas forman un grupo abeliano y tienen suma importante en la teoría de Galois. En el contexto de los caracteres, la noción de *primitividad* es más sutil. Veámoslo con un ejemplo:

**Ejemplo A.** Estudiemos los siguientes caracteres módulo 8 y 12 respectivamente:

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1, 5 \pmod{8}, \\ -1 & \text{si } n \equiv 3, 7 \pmod{8}, \\ 0 & \text{si } (n, 8) > 1 \pmod{8}, \end{cases} \quad \text{y} \quad \chi_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1, 5 \pmod{12}, \\ -1 & \text{si } n \equiv 7, 11 \pmod{12}, \\ 0 & \text{si } (n, 12) > 1 \pmod{12}. \end{cases}$$

Está claro que  $\chi_1$ , definido como carácter módulo 8, no debería ser primitivo porque es idéntico al único carácter  $\chi$  no principal módulo 4. Decidir que  $\chi_2$ , definido como carácter módulo 12, tampoco debería ser primitivo está un poco menos claro. Sin embargo, si nos restringimos a los  $n, m$  coprimos con 12, vemos que  $\chi_2(n) = \chi_2(m) \iff n \equiv m \pmod{4}$ , lo que parece indicar que, en realidad,  $\chi_2$  es un carácter módulo 4 «disfrazado». Esto se hace explícito en la relación  $\chi_2 = \chi_0\chi$ , donde  $\chi_0$  es el carácter principal módulo 12 y  $\chi$  es el único carácter no principal módulo 4.

**Definición 1.6.** Sea  $\chi \neq \chi_0$  un carácter de Dirichlet módulo  $q$ . Se dice que  $d|q$  es un *módulo inducido* de  $\chi$  si  $\chi(n) = \chi(m)$  siempre que  $(n, q) = (m, q) = 1$  y  $n \equiv m \pmod{d}$ . El *conductor* de  $\chi$  es su menor módulo inducido.

**Definición 1.7.** Sea  $\chi \neq \chi_0$  un carácter de Dirichlet módulo  $q$ . Se dice que  $\chi$  es *primitivo* si su conductor es  $q$ , es decir, si no tiene módulos inducidos  $d < q$ . En caso contrario, el conductor es  $q' < q$  y se dice que  $\chi$  es *imprimitivo*.

El carácter principal  $\chi_0$  es a efectos prácticos un carácter imprimitivo con conductor  $q = 1$ , pero lo hemos excluido de la definición porque los objetos asociados a él los analizaremos por separado. Por ejemplo, veremos que las funciones  $L$  de caracteres no principales son enteras, mientras que la de  $\chi_0$  es esencialmente la función  $\zeta$  y tiene un polo en  $s = 1$ .

**Proposición 1.8.** Sea  $\chi$  un carácter imprimitivo módulo  $q$ . Sea  $q' < q$  el conductor de  $\chi$ . Entonces existe un carácter primitivo  $\chi'$  módulo  $q'$  tal que  $\chi(n) = \chi'(n)\chi_0(n)$ , donde  $\chi_0$  es el carácter principal módulo  $q$ .

*Demostración.* Si  $(n, q') = 1$ , elegimos como  $m$  cualquier número tal que  $(n + mq', q) = 1$ . Este número existe porque, si  $r$  es el producto de los primos que dividen a  $q$  pero no a  $q'$ , entonces  $(n + mq', r) = 1$  implica  $(n + mq', q) = 1$  y

$$n + mq' \equiv n + \tilde{m}q' \pmod{r} \iff m \equiv \tilde{m} \pmod{r},$$

por lo que habrá algún  $m$  que cumpla lo que queremos. Así, definimos

$$\chi'(n) := \begin{cases} \chi(n + mq') & \text{si } (n, q') = 1, \\ 0 & \text{si } (n, q') > 1. \end{cases}$$

Está bien definido y es un carácter módulo  $q'$  porque es  $q'$ -periódico,  $\chi'(n) = 0 \iff (n, q') > 1$  y es completamente multiplicativo. Además,  $\chi'$  es primitivo porque si para  $(n, q') = (m, q') = 1$  y  $n \equiv m \pmod{d}$  tenemos  $\chi'(n) = \chi'(m)$ , entonces en particular se cumple cuando  $(n, q) = (m, q) = 1$  y por la minimalidad de  $q'$  tenemos  $d \geq q'$ .  $\square$

Será útil recurrir también al grupo aditivo  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Notamos que, en este grupo, todos los caracteres están generados por el siguiente carácter:

$$e_q(n) := e\left(\frac{n}{q}\right).$$

**Definición 1.9.** La *suma de Gauss* de un carácter  $\chi$  es

$$\tau(\chi) := \sum_{n=1}^{q-1} \chi(n)e_q(n).$$

Esta herramienta es un puente entre los caracteres aditivos y los multiplicativos. En nuestro trabajo, su importancia se verá en la cuarta sección de este capítulo, pues queremos aplicar a una función que depende de los caracteres multiplicativos la fórmula de sumación de Poisson, que se expresa en términos de los aditivos.

**Proposición 1.10.** Sea  $\chi$  un carácter módulo  $q$ . Entonces

$$\overline{\tau(\chi)} = \chi(-1)\tau(\overline{\chi}).$$

*Demostración.* Como  $\chi$  es  $q$ -periódico y completamente multiplicativo,

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{n=1}^{q-1} \overline{\chi(n)}e_q(-n) = \sum_{n=1}^{q-1} \overline{\chi(-1)}\overline{\chi}(q-n)e_q(-n) = \overline{\chi}(-1)\tau(\overline{\chi}).$$

Además, como  $\chi(-1) \in \{-1, 1\}$ , es inmediato que  $\chi(-1) = \overline{\chi}(-1)$ .  $\square$

**Proposición 1.11.** Sea  $\chi$  un carácter módulo  $q$ . Si  $(n, q) = 1$ , entonces

$$(1.1) \quad \chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{k=1}^{q-1} \overline{\chi}(k)e_q(nk).$$

*Demostración.* Haciendo el cambio  $k \equiv nj \pmod{q}$ , biyectivo en el soporte de la suma,

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{k=1}^{q-1} \overline{\chi}(k)\chi(n)e_q(k) = \sum_{j=1}^{q-1} \overline{\chi}(j)e_q(jn),$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Para caracteres primitivos, podemos extender el resultado:

**Proposición 1.12.** Si  $\chi$  es primitivo, entonces (1.1) es cierto para todo  $n$ .

*Demostración.* Queremos probar que el lado derecho de (1.1) es 0 si  $(n, q) > 1$ . Sea  $d = (n, q)$  y  $Q = q/d$ . Podemos suponer  $Q \neq q$ , pues si no la conclusión se sigue de la ortogonalidad de  $\chi$  y  $\chi_0$ . Entonces, con el cambio  $\ell = k + Qj$ ,

$$\sum_{\ell=1}^{q-1} \bar{\chi}(\ell) e_q(n\ell) = \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{\ell=1+Qj}^{Q(j+1)} e_Q\left(\frac{n}{d}\ell\right) \bar{\chi}(\ell) = \sum_{k=1}^Q e_Q\left(\frac{n}{d}k\right) \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qj),$$

de modo que basta probar que para todo  $k$  se tiene

$$S(k) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qj) = 0.$$

Como  $\chi$  es  $q$ -periódica

$$\sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Q + Qj) = \sum_{j=1}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qj) + \bar{\chi}(k + q) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qj),$$

por lo que  $S$  es  $Q$ -periódica. Veamos que podemos obtener un  $m$  con  $a = 1 + Qm$  tal que  $(a, q) = 1$  y  $\chi(a) \neq 1$ . Si no pudiésemos, dados  $c_1 = b + Qm_1$ ,  $c_2 = b + Qm_2$  coprimos con  $q$ , podríamos multiplicar por un inverso  $c$  de  $b$  módulo  $Q$  que sea coprimo con  $q$ , y obtener  $c_1c = 1 + Qm'_1$ ,  $c_2c = 1 + Qm'_2$ . Con esto, tendríamos que  $\chi(c_1c) = 1 = \chi(c_2c)$  y cancelando el  $\chi(c)$  estaríamos demostrando que  $Q < q$  es un módulo inducido, contradiciendo que  $\chi$  es primitivo. Una vez encontrado este  $a$ , vemos que  $(a, d) = 1$ , por lo que

$$\bar{\chi}(a)S(k) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qmk + aQj) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qmk + Qj) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{\chi}(k + Qj).$$

Por tanto,  $(\bar{\chi}(a) - 1)S(k) = 0$ , es decir,  $S(k) = 0$ . □

**Proposición 1.13.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$ . Entonces*

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.12, como  $\bar{\chi}$  es primitivo, vemos que

$$\sum_{n=0}^{q-1} |\bar{\chi}(n)\tau(\chi)|^2 = \sum_{n=0}^{q-1} \sum_{k,j=1}^{q-1} \chi(k)\bar{\chi}(j)e_q(n(k-j)) = \sum_{k,j=1}^{q-1} \chi(k)\bar{\chi}(j) \sum_{n=0}^{q-1} e_q(n(k-j)).$$

Notamos que la suma interior es  $q$  si  $k = j$  y 0 si  $k \neq j$ , de modo que

$$\varphi(q)|\tau(\chi)|^2 = \sum_{n=0}^{q-1} |\bar{\chi}(n)\tau(\chi)|^2 = q \sum_{k=1}^{q-1} \bar{\chi}(k)\chi(k) = q\varphi(q).$$

Con esto, basta simplificar el  $\varphi(q)$  y tomar raíces cuadradas. □

**Corolario 1.14.** Sea  $\chi$  un carácter primitivo. Entonces

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{k=1}^{q-1} \bar{\chi}(k) e_q(nk).$$

Esta propiedad es fundamental en la construcción de la ecuación funcional de las funciones  $L$  de Dirichlet para los caracteres primitivos.

### 1.3. Funciones $L$ de Dirichlet

Si queremos estudiar primos en una progresión aritmética  $\{a + qn\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una forma de intentar abordar el tema es tratar de mezclar los caracteres de Dirichlet, que nos permiten restringirnos a clases de residuos módulo  $q$ , con la función  $\zeta$  de Riemann, protagonista de muchos resultados acerca de la distribución de los primos. Las series de Dirichlet asociadas a los  $\varphi(q)$  caracteres módulo  $q$  son la combinación de esos dos conceptos que nos permitirá estudiar los números primos en progresiones aritméticas.

**Definición 1.15.** Sea  $\chi$  un carácter de Dirichlet. La *serie de Dirichlet de  $\chi$*  se define como

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad \sigma > 1.$$

La *función  $L$  de Dirichlet asociada a  $\chi$*  será la extensión a  $\mathbb{C}$  de la serie de Dirichlet de  $\chi$ .

Es sencillo probar que la definición en serie y en producto son equivalentes y que  $L(s, \chi)$  es holomorfa en el semiplano  $\sigma > 1$  recurriendo a los clásicos teoremas de Weierstrass o de Morera y a la factorización única de los números naturales. Además, se puede probar mediante la expresión en producto y el teorema de Hurwitz que  $L(s, \chi)$  no se anula en  $\sigma > 1$ , aunque aquí vamos a apoyarnos en la *función de Möbius*  $\mu$ , la función multiplicativa dada por la siguiente expresión para potencias de primos:

$$\mu(p^k) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

La conexión viene dada por la siguiente observación:

$$(1.2) \quad \frac{1}{L(s, \chi)} = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \chi(n) n^{-s}, \quad \sigma > 1.$$

Aplicando a  $1/L$  los teoremas sobre convergencia de series y holomorfía antes mencionados, se deduce de forma inmediata que  $1/L$  no tiene polos en esta región, o, equivalentemente,  $L$  no se anula en  $\sigma > 1$ .

**Proposición 1.16.** Sea  $\chi_0$  el carácter principal módulo  $q$ . Se cumple

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}).$$

*Demostración.* Vemos que  $\chi_0(p) = 0$  para todo  $p|q$  y  $\chi_0(p) = 1$  para todo  $p \nmid q$ , de modo que

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p \nmid q} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p|q} (1 - p^{-s}) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}),$$

tal y como buscábamos.  $\square$

Estas expresiones solo son válidas para  $\sigma > 1$ , pues es donde  $L(s, \chi_0)$  y  $\zeta$  admiten las expresiones en producto. Sin embargo, esto nos da una extensión de  $L(s, \chi_0)$  a  $\mathbb{C}$ , pues ya sabemos que  $\zeta$  admite una extensión meromorfa a todo el plano complejo. Además, de las propiedades de  $\zeta$  y del producto involucrado podemos deducir que  $L(s, \chi_0)$  tiene un único polo en  $s = 1$ , simple y con residuo  $\prod_{p|q} (p-1)/p = \varphi(q)/q$ ; y que los ceros de nuestra  $L$  son los de  $\zeta$  y  $s = 2\pi ki/\log p$ , donde  $p|q$ .

Encontrar una extensión de  $L(s, \chi)$  al plano complejo para  $\chi \neq \chi_0$  es una tarea más laboriosa, ya que no podemos apoyarnos tan explícitamente en los resultados sobre  $\zeta$ . En esta dirección, tenemos los dos siguientes resultados:

**Proposición 1.17.** *Sea  $\chi \neq \chi_0$ ,  $A(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$ . Entonces, para  $\sigma > 1$  se tiene*

$$(1.3) \quad L(s, \chi) = s \int_1^\infty A(t) t^{-s-1} dt.$$

*En particular, la función  $L(s, \chi)$  admite una continuación holomorfa a  $\sigma > 0$ .*

*Demostración.* Por el Lema 1.5,  $A$  es acotada. Sumando por partes, vemos que

$$\sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-s} = A(x) x^{-s} + s \int_1^x A(t) t^{-s-1} dt.$$

Ahora, si  $\sigma > 1$ , tomando  $x \rightarrow \infty$  obtenemos (1.3). Como la integral converge localmente uniformemente en  $\sigma > 0$ , esta expresión define una extensión en ese abierto.  $\square$

**Proposición 1.18.** *Sea  $\chi$  un carácter imprimitivo y sea  $\chi'$  el carácter que lo induce. Entonces*

$$L(s, \chi) = L(s, \chi') \prod_{p|q} (1 - \chi'(p) p^{-s}).$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.8,  $\chi = \chi' \chi_0$ . Así, vemos que

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_p (1 - \chi'(p) \chi_0(p) p^{-s})^{-1} = \prod_{p \nmid q} (1 - \chi'(p) p^{-s})^{-1} = \\ &= \prod_p (1 - \chi'(p) p^{-s})^{-1} \prod_{p|q} (1 - \chi'(p) p^{-s}) = L(s, \chi') \prod_{p|q} (1 - \chi'(p) p^{-s}), \end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición.  $\square$

Este resultado, junto con la Proposición 1.16, muestra que para estudiar los ceros de las funciones  $L$  basta analizar los de la función  $\zeta$  y los de las funciones  $L$  de caracteres primitivos.

Antes de embarcarnos en la tarea de encontrar ecuaciones funcionales, vamos a explorar un poco la derivada y la derivada logarítmica de las funciones  $L$ .

**Proposición 1.19.** *Sea  $\chi$  un carácter de Dirichlet. Entonces para  $\sigma > 1$*

$$-L'(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} \quad y \quad -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s}.$$

*Demostración.* Para demostrar la primera identidad basta notar que la convergencia absoluta y uniforme de la serie que define  $L(s, \chi)$  permite derivar dentro de la serie.

Para la segunda, notamos que  $L(s, \chi) \neq 0$  en  $\sigma > 1$ , por lo que podemos aplicar el logaritmo a la expresión en producto:

$$-\log L(s, \chi) = \sum_p \log(1 - \chi(p)p^{-s}).$$

Derivando, llegamos a

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_p \frac{\chi(p)p^{-s} \log p}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \chi(p^n)p^{-ns} \log p = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}$$

identificando la serie geométrica y expandiéndola.  $\square$

**Proposición 1.20.** *Sea  $\chi \neq \chi_0$  un carácter módulo  $q$ . Para  $1 - 1/\log q < \sigma < 1$  se tiene*

$$|L(\sigma, \chi)| = O(\log q) \quad y \quad |L'(\sigma, \chi)| = O(\log^2 q).$$

*Demostración.* Para  $n \leq q$  tenemos

$$n^{-\sigma} \leq n^{-1 + \frac{1}{\log q}} \leq n^{-1} e^{\frac{\log n}{\log q}} \leq en^{-1}.$$

Con esto, vemos que

$$\left| \sum_{n=1}^q \chi(n) n^{-\sigma} \right| \leq e \sum_{n=1}^q n^{-1} = O(\log q).$$

y

$$\left| \sum_{n=1}^q \chi(n) n^{-\sigma} \log n \right| \leq e \sum_{n=1}^q n^{-1} \log n \leq e \sum_{n=1}^q n^{-1} \log q = O(\log^2 q).$$

Para acotar las colas, basta aplicar la sumación de Abel y desigualdades triangulares:

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \chi(n) n^{-\sigma} \right| \leq q^{\frac{1}{\log q}} + \sigma \int_q^{\infty} qt^{-\sigma-1} dt = e^{\frac{\log q}{\log q}} + q^{1-\sigma} \leq e + q^{\frac{1}{\log q}} = 2e$$

y

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \chi(n) n^{-\sigma} \log n \right| \leq q^{\frac{1}{\log q}} \log q + \sigma \int_q^{\infty} qt^{-\sigma-1} \log t dt \leq 3e \log q.$$

En los dos casos, el orden de la cola es menor que el del inicio de la serie.  $\square$

## 1.4. Ecuaciones funcionales

Como será costumbre a lo largo del trabajo, los resultados para  $L(s, \chi)$  tendrán formulaciones y demostraciones parecidas a las de la función  $\zeta$ , aunque aquí la primitividad de  $\chi$  es un requisito indispensable y la paridad nos obliga a separar el estudio. Primero estudiaremos el caso par.

**Lema 1.21.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = 1$ . Sea*

$$\phi(x, \chi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}}.$$

Entonces

$$\tau(\bar{\chi})\phi(x, \chi) = \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(x^{-1}, \bar{\chi}).$$

*Demostración.* Por el Corolario 1.14 y por la primera igualdad del Lema A.2 con  $x \rightarrow x/q$ ,  $\alpha \rightarrow m/q$ ,

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\chi})\phi(x, \chi) &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2 x}{q} + \frac{2\pi i m n}{q}} \\ &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(qn+m)^2 \pi}{qx}} \\ &= \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(qn+m) e^{-\frac{(qn+m)^2 \pi}{qx}} \\ &= \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \phi(x^{-1}, \bar{\chi}). \end{aligned}$$

Conectando los dos extremos, queda demostrada la igualdad.  $\square$

No es muy difícil convencerse de que estas  $\phi(x, \chi)$  son funciones de decaimiento rápido. Además, sustituyendo  $x \rightarrow x^{-1}$  y  $\chi \rightarrow \bar{\chi}$ , tenemos  $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q$ , aunque esto ya lo sabíamos por la Proposición 1.10. Con esto, ya podemos obtener la ecuación funcional para los caracteres pares a través de las siguientes *funciones  $L$  completadas*:

**Definición 1.22.** Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = 1$ . Definimos

$$\xi(s, \chi) := \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi).$$

Separándonos de la teoría general de funciones  $L$ , aquí denotamos la función completada por  $\xi$  en lugar de por  $\Lambda$ , de forma análoga a como lo hacíamos con  $\zeta$ . Nuestra estrategia ahora será expresar nuestras  $\xi$  en función de nuestras  $\phi$  con la esperanza de obtener una ecuación funcional análoga a la de  $\zeta$ .

**Teorema 1.23.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = 1$ . Entonces*

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi).$$

*Demostración.* Empezamos con la expresión

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \chi(n) n^{-s} = \int_0^\infty \chi(n) \left(\frac{qt}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}} e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \chi(n) x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}} \frac{dx}{x},$$

donde en la última igualdad hemos hecho el cambio  $qt = \pi n^2 x$ . Sumando en  $n \in \mathbb{N}$ , como tenemos convergencia absoluta, intercambiamos sumación e integración con el teorema de Fubini

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \chi) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}} \phi(x^{-1}, \chi) \frac{dx}{x}.$$

Usando el Lema 1.21, vemos que

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x}.$$

Esto ya nos da una continuación analítica a todo el plano complejo, y si sustituimos  $s \rightarrow 1-s$  y  $\chi \rightarrow \bar{\chi}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \xi(1-s, \bar{\chi}) &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\bar{\chi})} \left( \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} + \frac{\tau(\bar{\chi})}{2q^{\frac{1}{2}}} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \right) \\ &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\bar{\chi})} \left( \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} \phi(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \right). \end{aligned}$$

Identificando esta última expresión con  $\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi)$ , hemos acabado.  $\square$

Recordando la Proposición 1.18, esto ya nos permite deducir que  $L(s, \chi)$  admite una extensión entera cuando  $\chi$  es un carácter inducido por uno primitivo  $\chi_1$  con  $\chi_1(-1) = 1$ . Nos gustaría poder repetir el mismo argumento cuando  $\chi$  es un carácter primitivo e impar, pero si definimos  $\phi(x, \chi)$  como antes, tendríamos  $\phi(x, \chi) \equiv 0$ . Por tanto, vamos a tener que hacer un pequeño arreglo para solventar la imparidad de  $\chi$ .

**Lema 1.24.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = -1$ . Sea*

$$\phi_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}}.$$

*Entonces*

$$\tau(\bar{\chi}) \phi_1(x, \chi) = iq^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \phi_1(x^{-1}, \bar{\chi}).$$

*Demostración.* Por el Corolario 1.14 y por la segunda igualdad del Lema A.2 con  $x \rightarrow x/q$ ,  $\alpha \rightarrow m/q$

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{\chi})\phi_1(x, \chi) &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{\pi n^2 x}{q} + \frac{2\pi i m n}{q}} \\
&= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) i \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + m/q) e^{-\frac{(qn+m)^2 \pi}{qx}} \\
&= i \left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{3}{2}} q^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(qn + m)(qn + m) e^{-\frac{(qn+m)^2 \pi}{qx}} \\
&= i q^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \phi(x^{-1}, \bar{\chi}).
\end{aligned}$$

Conectando los dos extremos, queda demostrada la igualdad.  $\square$

Notamos que  $n\chi_1(n)$  ahora es una función par de  $n$  y que  $\phi_1$  es de decaimiento rápido. De forma análoga al caso par, podemos deducir  $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = -q$  sin apoyarnos en la Proposición 1.10.

**Definición 1.25.** Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = -1$ . Definimos

$$\xi(s, \chi) := \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi).$$

**Teorema 1.26.** Sea  $\chi$  un carácter primitivo tal que  $\chi(-1) = -1$ . Entonces

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi).$$

*Demostración.* Empezamos como antes, pero separando una  $n$  extra que será absorbida:

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n\chi(n)n^{-s-1} = \int_0^{\infty} n\chi(n)x^{\frac{s+1}{2}} e^{-\frac{\pi n^2 x}{q}} \frac{dx}{x}.$$

Sumando nuevamente en  $n \in \mathbb{N}$ , intercambiando sumación e integración y con la misma separación y cambio de variables que en el caso par,

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{\frac{s+1}{2}} \phi_1(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s+1}{2}} \phi_1(x^{-1}, \chi) \frac{dx}{x}.$$

Usando el Lema 1.24, vemos que

$$\xi(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^{\frac{s+1}{2}} \phi_1(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}+1} \phi_1(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x}.$$

Esto ya nos da la continuación analítica, y si sustituimos  $s \rightarrow 1 - s$  y  $\chi \rightarrow \bar{\chi}$ ,

$$\begin{aligned}\xi(1 - s, \bar{\chi}) &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\chi)} \int_1^\infty x^{\frac{s+1}{2}} \phi_1(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+1} \phi_1(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \left( \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s+1}{2}} \phi_1(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{\tau(\chi)}{2iq^{\frac{1}{2}}} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+1} \phi_1(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \right) \\ &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \left( \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{\frac{s+1}{2}} \phi_1(x, \chi) \frac{dx}{x} + \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{2\tau(\bar{\chi})} \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \phi_1(x, \bar{\chi}) \frac{dx}{x} \right).\end{aligned}$$

Identificando esta última expresión con  $\frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi)$ , hemos acabado.  $\square$

Recordando de nuevo la Proposición 1.18, tenemos extensiones a  $\mathbb{C}$  de todas nuestras series de Dirichlet. Los resultados y definiciones de esta sección se pueden resumir en el siguiente teorema:

**Teorema 1.27.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo y sea  $\kappa = 0$  si  $\chi(-1) = 1$ ,  $\kappa = 1$  si  $\chi(-1) = -1$ . Sea*

$$(1.4) \quad \xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) L(s, \chi).$$

Entonces

$$\xi(1 - s, \bar{\chi}) = \frac{i^\kappa q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi).$$

De forma similar al caso de la función  $\zeta$ , como  $\xi(s, \chi)$  es entera, los polos de la función  $\Gamma$  ya nos revelan una infinidad de ceros en los pares no positivos o en los impares negativos en concordancia con la paridad de  $\chi$ . En el contexto de los caracteres primitivos, estos son los conocidos *ceros triviales*. Además, la ecuación funcional nos permite deducir que, en caso de haber ceros *no triviales*, se encuentran todos en la clausura de la *banda crítica*, es decir, en

$$0 \leq \sigma \leq 1,$$

pues como las funciones  $L$  no se anulan en  $\sigma > 1$ , en  $\sigma < 0$  solo tenemos los ceros que ya hemos contado.

Si quisiésemos extender esto a los caracteres no primitivos, podríamos intentar añadir el término que necesita  $L(s, \chi')$  para convertirse en  $L(s, \chi)$  (ver Proposición 1.18), pero en este caso está claro que no obtendremos una expresión parecida porque el factor introducido no es invariante respecto a las reflexiones que estamos considerando. Repetir las ideas sin la hipótesis de primitividad tampoco parece muy alentador, pues los Lemas 1.21 y 1.24 se apoyan en el Corolario 1.14, que no es cierto sin esa hipótesis. Por último, podríamos multiplicar por los factores que le faltan a ambos lados, es decir, dado  $\chi = \chi' \chi_0$  un carácter imprimitivo módulo  $q$ , podemos definir

$$\tilde{\xi}(s, \chi) := \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) L(s, \chi) \prod_{p|q} \left(1 - \bar{\chi}'(p)p^{-(1-s)}\right).$$

Expresando esta función en términos de  $\xi(s, \chi')$ , está claro que

$$\tilde{\xi}(1-s, \bar{\chi}) = \xi(1-s, \bar{\chi}') \prod_{p|q} \left(1 - \bar{\chi}'(p)p^{-(1-s)}\right) (1 - \chi'(p)p^{-s}) = \frac{i^{\kappa} q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \tilde{\xi}(s, \chi).$$

Sin embargo, estas funciones se construyen para estudiar las funciones  $L$ , y, observando las relaciones entre todas estas funciones, parece mucho más conveniente traducir la información de  $\xi(s, \chi')$  a  $L(s, \chi)$  pasando por  $L(s, \chi')$  en lugar de por  $\tilde{\xi}(s, \chi)$ , además de que el estudio de  $L(s, \chi)$  necesitaremos hacerlo de todas formas. Por otro lado, no consideraremos que la infinidad de ceros de  $L(s, \chi)$  en la recta imaginaria son *no triviales*, es decir, para  $\chi$  imprimitivo, los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  serán, por definición, los ceros no triviales de  $L(s, \chi')$ . Por tanto, mientras que los ceros de  $\xi(s, \chi')$  son los ceros no triviales de  $L(s, \chi')$ , los ceros de  $\tilde{\xi}(s, \chi)$  incluyen dos infinitudes de ceros en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = 1$  que no son no triviales.

En resumidas cuentas, tratar de estudiar  $L(s, \chi)$  a través de  $\tilde{\xi}(s, \chi)$  no parece tener mucho sentido, de modo que trabajaremos a través de  $L(s, \chi')$ .

## 1.5. Productos de Hadamard

El estudio de los ceros que desarrollaremos en el siguiente capítulo se apoyará en la teoría de las funciones  $\xi(s, \chi)$  y de sus derivadas logarítmicas que mostraremos aquí. Vamos a seguir el tratamiento de [Iv] y de [Da].

**Definición 1.28.** Sea  $f$  una función entera. El *orden de  $f$*  se define como el ínfimo de los  $\alpha > 0$  tales que

$$f(s) \ll e^{|s|^\alpha}.$$

**Proposición 1.29.** Sea  $f$  una función entera de orden 1 y sea  $n(R)$  en número de ceros de  $f$  en  $|s| \leq R$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$

$$n(R) \ll R^{1+\varepsilon}.$$

*Demostración.* Podemos suponer que  $f(0) \neq 0$ . Por la fórmula de Jensen (ver A.3),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \int_0^R n(r)r^{-1} dr.$$

Por tanto,

$$n(R) \ll \int_R^{2R} n(r)r^{-1} dr \leq \int_R^{2R} n(r)r^{-1} dr \ll \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \ll R^{1+\varepsilon},$$

tal y como buscábamos.  $\square$

**Corolario 1.30.** Sea  $f$  una función entera de orden 1 que no se anula en 0 y sean  $r_1, r_2, \dots$  los módulos de los ceros de  $f$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\sum_n r_n^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

*Demostración.* Por sumación por partes, vemos que

$$\sum_{n \leq R} r_n^{-1-\varepsilon} = R^{-1-\varepsilon} n(R) + (1+\varepsilon) \int_0^R n(r) r^{-2-\varepsilon} dr \ll R^{-\frac{\varepsilon}{2}} + 1 + \int_1^R r^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} dr.$$

Tomando límites, obtenemos el resultado.  $\square$

**Proposición 1.31.** *Sea  $f$  una función entera que no se anula y sea  $(R_k)_{k=1}^{\infty}$  una sucesión creciente no acotada. Sea  $0 \leq \alpha < \infty$ . Si  $|f(s)| \leq C \exp(R_k^\alpha)$  en  $|s| = 2R_k$  para todo  $k$ , entonces  $f(s) = \exp(p(s))$  para algún polinomio  $p$  de grado menor o igual que  $\alpha$ . En particular, esto se cumple si y solo si  $f$  es de orden menor o igual que  $\alpha$ .*

*Demostración.* Como  $f$  no tiene ceros, tiene un logaritmo  $p(s) = \log f(s)$  bien definido. Por hipótesis,  $|f(s)| \leq C \exp(R_k^\alpha)$  en  $|s| = 2R_k$  de modo que  $\Re p(s) \leq R_k^\alpha + \log C = O(|s|^\alpha)$ . Por el teorema de Borel-Carathéodory A.4,

$$|p(s)| \leq 2(R_k^\alpha + \log C) + 3|p(0)|.$$

Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\frac{|p^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|s|=2R_k} \left| \frac{p(s)}{s^{n+1}} \right| 2\pi R_k \leq \frac{2(R_k^\alpha + \log C) + 3|p(0)|}{R_k^n} \rightarrow 0$$

si  $n > \alpha$ .  $\square$

**Teorema 1.32.** *Sea  $f$  una función entera de orden 1 que no se anula en 0 y sean  $\rho_1, \rho_2, \dots$  los ceros de  $f$  repetidos de acuerdo a sus multiplicidades. Entonces existen constantes  $A$  y  $B$  tales que*

$$f(s) = e^{A+Bs} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/\rho_n) e^{s/\rho_n}.$$

*Demostración.* Sea  $r_n = |\rho_n|$  y sea  $P(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s/\rho_n) e^{s/\rho_n}$ . Este producto converge porque, si  $|s| \leq R$  y  $r_n \geq R$ , entonces  $|s/\rho_n| \leq 1$  y

$$\left| 1 - (1 - s/\rho_n) e^{s/\rho_n} \right| \leq \frac{R^2}{r_n^2},$$

de modo que, como el Corolario 1.30 asegura que

$$\sum_{r_n \geq R} \frac{R^2}{r_n^2} < \infty,$$

el producto restringido a  $r_n \geq R$  define una función holomorfa en  $|s| < R$ . El otro producto está formado por un número finito de términos por el principio de la identidad. Así,

$$P(s) = \prod_{r_n < R} (1 - s/\rho_n) e^{s/\rho_n} \prod_{r_n \geq R} (1 - s/\rho_n) e^{s/\rho_n}$$

es holomorfa en  $|s| < R$  para cualquier  $R$ , por lo que es entera. De esta manera,

$$f(s) = F(s)P(s)$$

para cierta función entera  $F$  que no se anula. Nos gustaría poder asegurar que, como  $f$  es de orden 1,  $F$  también es de orden 1. Para ello, necesitamos acotar inferiormente  $P$  en, por ejemplo,  $|s| = R_k$  para  $R_k \rightarrow \infty$ , por lo que en un principio fijaremos  $R > 0$ . Si tomamos  $R = r_n$  para algún cero no podemos aspirar a una cota distinta de  $|P(s)| \geq 0$  en  $|s| = R$ , y el problema será similar si  $R$  está demasiado cerca del módulo de algún cero. Además, por esto mismo, parte de la dificultad está en acotar los términos correspondientes a ceros con módulo cercano a  $R$ . Con esto en mente, subordinaremos la elección de  $R$  a la condición *ad hoc*  $|r_n - R| > r_n^{-2}$  para todo  $n$ , que nos aporta la flexibilidad necesaria. Más adelante veremos que tal elección es posible.

En primer lugar, notamos que, para  $r_n < R/2$ ,

$$|(1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n}| > (|s/\rho_n| - 1)e^{-|s/\rho_n|} > e^{-R/r_n}.$$

Sumando por partes, vemos que

$$\sum_{r_n < \frac{R}{2}} r_n^{-1} = \frac{n(R/2)}{R/2} + \int_1^{R/2} n(r)r^{-2} dr \ll R^\varepsilon,$$

por lo que

$$\left| \prod_{r_n \leq \frac{R}{2}} (1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n} \right| > \exp \left( -R \sum_{|\rho_n| < \frac{R}{2}} r_n^{-1} \right) > \exp(-C_1 R^{1+\varepsilon}).$$

En segundo lugar, para  $R/2 < r_n < 2R$ , tenemos que

$$|(1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n}| \geq \frac{|\rho_n - s|}{|\rho_n|} e^{-2} \geq C_2 R^{-3},$$

por cómo hemos elegido  $R$ . Si  $R$  es suficientemente grande, como hay menos de  $R^{1+\varepsilon}$  términos llegamos a

$$\left| \prod_{\frac{R}{2} < r_n < 2R} (1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n} \right| \geq (C_2 R^{-3})^{R^{1+\varepsilon/2}} \geq \exp(-C_3 R^{1+\varepsilon}).$$

En tercer lugar, para  $r_n \geq 2R$  y para cierta  $C > 0$

$$|(1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n}| > \exp(-C_4 R^2 r_n^{-2}) \geq \exp(-C_4 R^{1+\varepsilon} r_n^{-1-\varepsilon}),$$

pues  $R < r_n/2$ , por lo que

$$\left| \prod_{r_n \geq 2R} (1 - s/\rho_n)e^{s/\rho_n} \right| > \exp \left( -C_4 R^{1+\varepsilon} \sum_{r_n \geq 2R} r_n^{-1-\varepsilon} \right) \geq \exp(-C_5 R^{1+\varepsilon}).$$

Juntando todo,

$$|P(s)| > \exp(-(C_1 + C_3 + C_5)R^{1+\varepsilon}).$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{f(s)}{P(s)} < \exp((1 + C_6)R^{1+\varepsilon}).$$

Por último, basta notar que, por el Corolario 1.30,

$$\sum_n r_n^{-2} < \infty,$$

por lo que podemos elegir una sucesión  $(R_k)_{k=1}^{\infty}$  lo suficientemente separada de todos los ceros ( $|r_n - R_k| > r_n^{-2}$ ) y que tienda a  $\infty$ . Así, tenemos que  $F$  es una función entera de orden 1 sin ceros, es decir,  $F(s) = e^{A+Bs}$ .  $\square$

Queremos aplicar esto a  $\xi(s, \chi)$ , para lo que necesitamos el siguiente teorema:

**Teorema 1.33.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo. La función  $\xi(s, \chi)$ , definida en (1.4), es una función entera de orden 1.*

*Demostración.* Por las ecuaciones funcionales, ya sabemos que es entera. Veamos que es de orden 1. Basta demostrar que

$$\xi(s, \chi) = O(\exp(|s|^{1+\varepsilon}))$$

en  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ . Por (1.3), para todo  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,

$$|L(s, \chi)| \leq \varphi(q)|s| \int_1^{\infty} t^{-\sigma-1} dt \leq 2\varphi(q)|s|.$$

Por la fórmula de Stirling (ver A.5), tenemos

$$\Gamma\left(\frac{s + \kappa}{2}\right) \leq \exp(C|s| \log |s|).$$

Por tanto, vemos que, en  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,

$$|\xi(s, \chi)| \leq \exp(C|s|) \exp(C|s| \log |s|) \exp(C \log |s|) = O(\exp(|s|^{1+\varepsilon}))$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .  $\square$

**Corolario 1.34.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo. Existe una constante  $B(\chi)$  tal que*

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -B(\chi) - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right),$$

donde  $\rho$  recorre los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$ . Además, se tiene

$$\Re B(\chi) = - \sum_{\rho} \Re \frac{1}{\rho}.$$

*Demostración.* En primer lugar, notamos que los ceros de  $\xi(s, \chi)$  son exactamente los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$ . Por el Teorema 1.32, como  $\xi(s, \chi)$  es una función entera de orden 1, sabemos que

$$\xi(s, \chi) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho}$$

para ciertos  $A = A(\chi)$ ,  $B = B(\chi)$ . Tomando derivadas logarítmicas a ambos lados,

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = B(\chi) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Si, por otro lado, recordamos la definición de  $\xi(s, \chi)$ , llegamos a

$$(1.5) \quad -\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} + \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = B(\chi) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Para evaluar  $B(\chi)$ , podemos recurrir a la ecuación funcional para ver que

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0, \chi)}{\xi(0, \chi)} = -\frac{\xi'(1, \bar{\chi})}{\xi(1, \bar{\chi})} = -B(\bar{\chi}) - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{1 - \bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right).$$

Ahora, como  $L(s, \bar{\chi}) = \overline{L(\bar{s}, \chi)}$ , tenemos  $\xi(s, \bar{\chi}) = \overline{\xi(\bar{s}, \chi)}$ , por lo que  $B(\bar{\chi}) = \overline{B(\chi)}$ , y por la ecuación funcional  $1 - \bar{\rho}$  también es un 0 de  $L(s, \chi)$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \Re B(\chi) &= -\frac{1}{4} \sum_{\rho} \left( \frac{1}{1 - \rho} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1 - \bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\rho} \left( \Re \frac{1}{\rho} + \Re \frac{1}{1 - \bar{\rho}} \right) \\ &= -\sum_{\rho} \Re \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

con lo que deducimos la segunda identidad que buscábamos.  $\square$



## CAPÍTULO 2

# Distribución de los ceros I: resultados clásicos

---

A lo largo de este capítulo, presentaremos una serie de resultados clásicos sobre la distribución de los ceros. Para convencerse de que estamos haciendo algo no trivial, lo primero es comprobar que todas nuestras funciones tienen infinitos ceros no triviales. Para ello, podemos apoyarnos en (1.5) y en la fórmula de Stirling si uno no está muy familiarizado con el comportamiento de  $\Gamma'/\Gamma$ : si suponemos que hay un número finito, podríamos tomar límites cuando  $s \rightarrow \infty$  por la recta real y tendríamos que el lado derecho es una suma finita (sobre los ceros) y el lado izquierdo tiende a  $\infty$ .

Nuestras siguientes tareas serán estudiar el **número de ceros** no triviales  $\rho = \beta + i\gamma$  de  $L(s, \chi)$  con  $|\gamma| \leq T$  y dar una **región libre de ceros**, donde nos encontraremos con los problemáticos *ceros de Siegel*.

### 2.1. Número de ceros en la banda crítica

Como en la sección anterior, nos centraremos en los caracteres primitivos y adaptaremos la demostración de [Iv] a  $\xi(s, \chi)$ . Aquí, para  $T \geq 2$  definimos  $N(T, \chi)$  como el número de ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  en  $|t| \leq T$ . Sea  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$  el rectángulo con vértices  $-\frac{1}{2} \pm iT$ ,  $\frac{3}{2} \pm iT$  orientado positivamente. Podemos suponer que  $\xi(s, \chi)$  no se anula en  $\mathcal{R}$  (hemos estrechado el contorno respecto al del [Iv] precisamente para evitar los ceros en  $-1$  de los caracteres impares), de modo que, por el teorema de los residuos, el número de ceros es,

$$N(T, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{R}} \frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} ds.$$

Por la ecuación funcional, si  $\mathcal{L}$  es  $[\frac{1}{2} - iT, \frac{3}{2} - iT] \cup [\frac{3}{2} - iT, \frac{3}{2} + iT] \cup [\frac{3}{2} + iT, \frac{1}{2} + iT]$ , entonces

$$N(T, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\xi'(s, \bar{\chi})}{\xi(s, \bar{\chi})} ds,$$

En primer lugar, vemos que

$$\int_{\mathcal{L}} -\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{q} ds = iT \log \frac{q}{\pi}.$$

En segundo lugar, tenemos

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} ds = - \int_{(\frac{1}{2}, -T)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} ds = 2i\Im \Gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{2} + \frac{iT}{2} \right).$$

Usando la fórmula de Stirling (Teorema A.5) y denotando  $K_1 = 1/4 + \kappa/2$ ,  $K_2 = K_1 - \frac{1}{2}$ , vemos que esto es

$$2\Im \left( K_2 \log \left( K_1 + \frac{iT}{2} \right) + \frac{iT}{2} \log \left( K_1 + \frac{iT}{2} \right) - \frac{iT}{2} \right) + O(1/T) = T \log \frac{T}{2} - T + O(1).$$

Por último, queremos acotar el término que depende de  $L(s, \chi)$ . Para ello, empezamos con la recta vertical. Como la convergencia es absoluta y uniforme, podemos cambiar sumación e integración:

$$\begin{aligned} \int_{(\frac{3}{2}, T)} -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds &= \sum_{n=2}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) \int_{(\frac{3}{2}, T)} n^{-s} ds \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{n^{iT} - n^{-iT}}{i \log n} \right) = O(1). \end{aligned}$$

Para acotar los otros dos segmentos, notamos que, por el Corolario 1.34 y por la fórmula de Stirling, tenemos

$$\begin{aligned} (2.1) \quad -\Re \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= -\Re B(\chi) - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + \frac{\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2} + \frac{\kappa}{2})} - \Re \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \\ &= -\sum_{\rho} \Re \frac{1}{s - \rho} + O(\log q(|t| + 2)). \end{aligned}$$

Como  $-\Re \frac{L'(2+iT, \chi)}{L(2+iT, \chi)} \ll 1$ , como se puede comprobar con la Proposición 1.19, tenemos que

$$(2.2) \quad \sum_{\rho} \Re \frac{1}{2 + iT - \rho} = O(\log qT).$$

Notamos que  $\Re \frac{1}{2+iT-\rho} \geq (4 + (T - \gamma)^2)^{-1}$ , donde  $\rho = \beta + i\gamma$  por lo que

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log qT).$$

Con esto, podemos notar que hay  $O(\log qT)$  ceros con  $T \leq \gamma \leq T + 1$ , pues de otro modo tendríamos más de  $O(\log qT)$  sumandos de orden 1. Para  $|\gamma - t| \geq 1$ , con  $s = \sigma + it$ ,

$$\left| \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right| = \frac{2 - \sigma}{|s - \rho||2 + it - \rho|} \leq \frac{3}{(\gamma - t)^2},$$

de modo que, recuperando (2.1) sin tomar partes reales y restando las evaluaciones en  $s$  y  $2 + it$  con  $t \neq \gamma$ ,

$$(2.3) \quad -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\frac{L'(2 + it, \chi)}{L(2 + it, \chi)} - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right) + O(\log q(|t| + 2))$$

$$= - \sum_{|\gamma - t| < 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log q(|t| + 2)),$$

pues la suma restringida a  $|\gamma - t| \geq 1$  es  $O(\log q(|t| + 2))$  por la discusión anterior. De esta manera, llegamos a

$$\int_{\frac{1}{2} + iT}^{2 + iT} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = \int_{\frac{1}{2} + iT}^{2 + iT} \sum_{|\gamma - T| < 1} \frac{1}{s - \rho} ds + O(\log qT).$$

Podemos obviar la parte real de la integral, ya que al dividir entre  $i$  contribuirá a la parte imaginaria de  $N(T, \chi)$ , que sabemos que es 0. Con esto en mente, para cada  $\rho$  en la suma vemos que

$$\Im \int_{\frac{1}{2} + iT}^{2 + iT} \frac{ds}{s - \rho} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{T - \gamma}{(\sigma - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} d\sigma = O(1),$$

pues es menor que  $\pi$  en valor absoluto (hay que recordar que estamos suponiendo que  $T$  no coincide con la ordenada de ningún cero). Por último, basta notar que hay  $O(\log qT)$  sumandos y que para el otro segmento los cálculos son análogos. Así, llegamos a

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = O(\log qT).$$

Juntando todo, como estos cálculos también valen para  $\bar{\chi}$ , hemos demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$  y sea  $N(T, \chi)$  el número de ceros de  $L(s, \chi)$  en el rectángulo  $0 < \sigma < 1$ ,  $|t| < T$ . Entonces*

$$N(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log qT).$$

Para el caso de caracteres imprimitivos, el análisis es esencialmente el mismo: como los ceros no triviales de  $L(s, \chi)$  son los de  $L(s, \chi')$  con  $\chi'$  el carácter que lo induce, basta sustituir el módulo  $q$  por el conductor  $q'$  en la fórmula. Si quisiésemos contar también los ceros que hay en la recta imaginaria, basta notar que los ceros extra vienen del factor

$$\prod_{p|q} (1 - \chi'(p)p^{-s}).$$

Para cada factor con  $p \nmid q'$ , hay ceros en  $s = 2\pi i(k + \alpha) / \log p$ , donde  $\chi'(p) = e(\alpha)$ , por lo que entre  $-T$  y  $T$  hay  $O(T \log p)$ . Sumando todos, el número de ceros extra es  $O(T \log q)$ , de modo que, cuando  $\chi$  es imprimitivo, el número de ceros  $N_{\text{imp}}(T, \chi)$  de  $L(s, \chi)$  en el rectángulo  $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ ,  $t \leq |T|$  es

$$N_{\text{imp}}(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi} + O(T \log q).$$

## 2.2. Regiones libres de ceros

La idea de fondo que puede servir para motivar los procedimientos viene explicada en detalle en [Mo-Val, p. 172]: si  $\zeta$  tuviese un cero  $\rho = 1 + i\gamma$ , entonces para  $\delta > 0$  pequeño tendríamos

$$(2.4) \quad \frac{\zeta'(1 + \delta + i\gamma)}{\zeta(1 + \delta + i\gamma)} = \frac{m}{\delta} + O(1)$$

donde  $m$  es la multiplicidad del cero. Sin embargo,

$$-\Re \frac{\zeta'(1 + \delta + i\gamma)}{\zeta(1 + \delta + i\gamma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-1-\delta} \cos(\gamma \log n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-1-\delta} = \frac{1}{\delta} + O(1),$$

de modo que  $m = 1$ , y para que se cumpla (2.4) será necesario que  $\cos(\gamma \log n)$  esté muy cerca de  $-1$  para la mayoría de valores de  $n$ . Sin embargo, esto llevaría a que  $\cos(2\gamma \log n) = 2\cos^2(\gamma \log n) - 1$  esté muy cerca de  $1$  para todos esos valores de  $n$ , haciendo que

$$\frac{\zeta'(1 + \delta + 2i\gamma)}{\zeta(1 + \delta + 2i\gamma)} = -\frac{1}{\delta} + O(1),$$

es decir,  $\zeta$  tendría un polo en  $s = 1 + 2\gamma$ , y esto es imposible porque sabemos que el único polo de  $\zeta$  está en  $s = 1$ . Todo esto está cuantificado en

$$3 \left[ -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right] + 4 \left[ -\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right] + \left[ -\Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right] \geq 0.$$

La demostración de esta fórmula se reduce a usar la siguiente desigualdad:

$$3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0, \quad \theta = t \log n.$$

Por variar un poco la demostración, vamos a usar la desigualdad

$$5 + 8 \cos \theta + 4 \cos 2\theta + \cos 3\theta = (1 + \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)^2 \geq 0,$$

ligeramente más complicada, que se convierte en

$$(2.5) \quad 5 \left[ -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right] + 8 \left[ -\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right] + 4 \left[ -\Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right] + \left[ -\Re \frac{\zeta'(\sigma + 3it)}{\zeta(\sigma + 3it)} \right] \geq 0.$$

Estas desigualdades, que en principio sirven para descartar ceros en  $\sigma = 1$ , permiten ir un poco más allá y estudiar posibles ceros  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\beta$  muy cercano a  $1$ . Empezaremos estudiando el caso de la función  $\zeta$  y después veremos cómo adaptar esto a nuestras  $L$ . Partimos de la siguiente expresión:

$$(2.6) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - B - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Aquí,  $\rho$  recorre los ceros no triviales de  $\zeta$  y  $B = \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{EM}$ , donde  $\gamma_{EM}$  es la constante de Euler-Mascheroni. Se puede encontrar una demostración de esta

identidad que no difiere mucho del tratamiento que hemos hecho para las funciones  $L$  en [Iv]. Ahora, todo se reduce a acotar de forma inteligente y a organizarlo todo de una forma presentable. En primer lugar, notamos que, si estamos lo suficientemente cerca de  $\sigma = 1$ ,

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Esto se puede comprobar observando que  $(s-1)\zeta(s) = 1 + (s-1)\gamma_{EM} + \dots$  (ver [TFG, Proposición A.2]) y derivando logarítmicamente.

En segundo lugar, por la fórmula de Stirling (ver Teorema A.5), vemos que

$$\left| \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \right| \leq \log \left| \frac{s}{2} + 1 \right| + \frac{1}{|s+2|} + \frac{1}{|s|^2} \leq \log t$$

para  $|t| \geq 14$ . Elegimos esta zona porque el cero no trivial más pequeño está en  $s = \frac{1}{2} + i14,1347\dots$  (ver [LMFDB]).

En tercer lugar, vemos que, al igual que en la sección anterior, la suma sobre los ceros  $\rho = \beta + i\gamma$  de las partes reales es una suma de términos positivos:

$$\Re \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\sigma - \beta}{|s - \rho|^2} + \frac{\beta}{|\rho|^2} \geq 0,$$

cuando  $\sigma > 1$ , por lo que podemos despreciarla total o parcialmente y las desigualdades seguirán siendo ciertas.

Ahora, dado  $\rho_* = \beta + i\gamma$  un cero de  $\zeta$ , elegimos  $t = \gamma > 14$  y hacemos las siguientes acotaciones: para  $s = \sigma + it$ , nos quedamos con el  $1/(s - \rho_*)$  en la serie, mientras que para  $s = \sigma + 2it$ ,  $s = \sigma + 3it$  despreciamos toda la serie. Así, sustituyendo todo esto en (2.5) y reuniendo todo apropiadamente, como  $s - \rho_* = \sigma - \beta$ , tenemos

$$\frac{5}{\sigma - 1} - \frac{8}{\sigma - \beta} + \frac{15}{2} \log t > 0,$$

donde  $8 + 4 + 1 = 13$  medios logaritmos vienen de las aproximaciones de Stirling y los restantes son para absorber el  $2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 < \log 14$  extra que obtenemos de los términos correspondientes a  $\sigma + 2it$  y a  $\sigma + 3it$ . El resto de términos son despreciables: las constantes suman un número negativo que además puede hacerse cargo de lo que corresponde a  $1/(s-1)$ , pues recordamos que  $t > 14$ . Tomando  $\sigma = 1 + \delta/\log t$  y reordenando,

$$\beta < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{8\delta}{(5 + \frac{15}{2}\delta) \log t}.$$

Por último, eligiendo  $\delta = 2/15$  y teniendo en cuenta que  $\zeta$  no tiene ceros en  $|t| \leq 2$ , podemos resumir el desarrollo en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.** *Existe una constante efectiva  $c > 0$  tal que  $\zeta$  no tiene ceros en*

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)}.$$

*En particular, podemos elegir  $c = 2/45$ .*

Veámoslo ahora para las funciones  $L$  replicando el argumento que hemos seguido hasta ahora. Para el análogo a (2.5), basta recordar que todo se reducía a aplicar la desigualdad  $5 + 8 \cos \theta + 4 \cos 2\theta + \cos 3\theta \geq 0$  en cada término de la serie, aunque usaremos la versión más simple  $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0$ . En este caso, vemos que el papel de la unidad lo toma  $\chi_0$  y el de  $\cos \theta$  lo toma la parte real de  $\chi(n)n^{it}$  (no sirve tomar solo la parte real de  $n^{it}$ , como también podría parecer natural). Así, sumando,

$$(2.7) \quad 3 \left[ -\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} \right] + 4 \left[ -\Re \frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} \right] + \left[ -\Re \frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)} \right] \geq 0.$$

De nuevo,

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)} \leq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Recordando (2.1), cuando  $\chi$  es primitivo,

$$-\Re \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\sum_{\rho} \Re \frac{1}{s - \rho} + O(\log q(|t| + 2)),$$

donde, como vimos, cuando  $\sigma > 1$  la suma es de términos positivos. Llegados a este punto, tenemos que distinguir el caso  $\chi$  real, *i.e.*,  $\chi^2 = \chi_0$ ; y  $\chi$  complejo, para el que  $\chi^2$  es no principal (aunque no necesariamente primitivo).

Empezando por el caso en el que  $\chi$  es complejo, vemos que, si  $\chi^2$  está inducido por  $\chi'$ , entonces, por la Proposición 1.18,

$$\left| \frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{L'(s, \chi')}{L(s, \chi')} \right| \leq \sum_{p|q} \frac{\log p}{p^\sigma - 1} \leq \log \left( \prod_{p|q} p \right) \leq \log q.$$

por lo que la acotación (2.1) es válida. Así, consideramos un cero  $\rho_* = \beta + i\gamma$ , elegimos  $t = \gamma$  y, al igual que con  $\zeta$ , nos quedamos solo con el término que le corresponde en la serie para acotar  $L'(\sigma + it, \chi)/L(\sigma + it, \chi)$  y despreciamos toda la serie para acotar  $L'(\sigma + 2it, \chi^2)/L(\sigma + 2it, \chi^2)$ . Así, obtenemos

$$\frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + C \log q(|t| + 2) > 0,$$

y repitiendo lo que hicimos antes, obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.** *Existe una constante efectiva  $c > 0$  tal que, si  $\chi$  es un carácter complejo,  $L(s, \chi)$  no tiene ceros en*

$$(2.8) \quad \sigma > 1 - \frac{c_1}{\log q(|t| + 2)}.$$

Hemos enunciado el teorema incluyendo el caso en el que  $\chi$  es complejo pero sin la hipótesis de que sea primitivo porque, cuando es imprimitivo, los ceros extra de  $L(s, \chi)$  están en  $\sigma = 0$ . Por tanto, como  $q' < q$  donde  $q'$  es el conductor de  $\chi$ , la región libre de ceros para caracteres no primitivos es válida. Un detalle fundamental es que la constante  $c$  **no depende de  $q$** .

El caso en el que  $\chi$  es real es, irónicamente, mucho más complejo. Usando la Proposición 1.16,

$$\left| \frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \log q.$$

Podríamos intentar seguir la demostración para  $\zeta$ . Sin embargo, al contrario que en el caso de  $\zeta$ , aquí no sabemos si hay ceros  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\gamma$  pequeño. Por tanto, aquí no podemos despreciar el polo en  $s = 1$  como hacíamos antes, por lo que, contándolo en nuestra aproximación, tenemos que

$$-\Re \frac{L'(\sigma + 2it, \chi_0)}{L(\sigma + 2it, \chi_0)} < \Re \frac{1}{\sigma - 1 + 2it} + O(\log q(|t| + 2)).$$

Sustituyendo en (2.7), repetimos el proceso: consideramos un cero  $\rho_* = \beta + i\gamma$  y tomamos  $t = \gamma$  y  $\sigma = 1 + \delta/(\log q(|t| + 2))$ .

No obstante, ahora nos vemos obligados a separar nuevamente en dos casos: si  $\gamma$  es suficientemente grande, *id est*, si estamos lo suficientemente lejos del polo, deberíamos poder aspirar estimaciones del tipo (2.8). Así, siguiendo el [Da], consideramos  $\gamma \geq \delta/(\log q(|t| + 2))$ . En este caso,

$$\frac{4}{1 - \beta + \delta/(\log q(|t| + 2))} < \left(3 + \frac{1}{5}\right) \frac{\log q(|t| + 2)}{\delta} + C \log q(|t| + 2).$$

Despejando

$$\beta < 1 - \frac{(4 - 5C\delta)\delta}{(16 + 5C\delta) \log q(|t| + 2)}.$$

Así, si  $\delta < 4/5C$  y  $\gamma \geq \delta/(\log q(|t| + 2))$ , tenemos una región libre de ceros como la del caso complejo.

Para el caso en el que  $\gamma$  es pequeño, notamos que, si hay al menos dos ceros (dos complejos conjugados o uno real doble), (2.7) debería capturar eso. Veámoslo:

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} < -\frac{1}{\sigma - \rho} - \frac{1}{\sigma - \bar{\rho}} + C \log q(|t| + 2) = -\frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} + C \log q(|t| + 2).$$

Por otro lado, como

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} > -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} > -\frac{1}{\sigma - 1},$$

tenemos que

$$-\frac{1}{\sigma - 1} < -\frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} + C \log q(|t| + 2).$$

Ahora, tomamos  $\sigma = 1 + 2\delta/\log q(|t| + 2)$  notamos que

$$|\gamma| \leq \frac{\delta}{\log q(|t| + 2)} = \frac{\sigma - 1}{2} < \frac{\sigma - \beta}{2}.$$

Por tanto,

$$-\frac{1}{\sigma - 1} < -\frac{8}{5(\sigma - \beta)} + C \log q(|t| + 2).$$

Despejando,

$$\beta < 1 - \frac{2\delta}{\log q(|t| + 2)} \frac{3 - 10C\delta}{5 + 10C\delta}.$$

Eligiendo  $\delta$  suficientemente y tomando  $c_2$  el mínimo entre  $c_1$  lo que salga aquí, podemos resumir estos resultados sobre regiones libres de ceros en un teorema:

**Teorema 2.4.** *Existe una constante efectiva  $c_2 > 0$  tal que, si  $\chi$  es un carácter módulo  $q$ ,  $L(s, \chi)$  tiene como mucho un cero en*

$$\sigma > 1 - \frac{c_2}{\log q(|t| + 2)}.$$

*Además, si este cero excepcional existe, es necesariamente un cero real y simple y  $\chi$  es un carácter real no principal.*

De nuevo, hemos enunciado el teorema sin hacer alusión a la primitividad de  $\chi$  porque se puede extender a caracteres no primitivos. El siguiente paso natural sería descartar la existencia de este cero real y simple. ¿Por qué no repetimos el final de la demostración anterior, cuando suponíamos que  $\gamma$  era pequeño, pero suponiendo que hay un cero real y simple? Si volvemos a hacer el desarrollo, obtendremos tenemos que

$$-\frac{1}{\sigma - 1} < -\frac{1}{\sigma - \beta} + C \log q.$$

que es una desigualdad más débil que la trivial  $\beta < 1$ . Aunque no seremos capaces de descartar su existencia, a lo largo de la siguiente sección demostraremos una serie de resultados que nos permitirán «limitar su comportamiento».

### 2.3. Ceros excepcionales y el teorema de Siegel

En la sección anterior, las limitaciones de las regiones libres de ceros clásicas no nos permitieron descartar la existencia de ciertos *ceros excepcionales* (también llamados *ceros de Siegel*) en las funciones  $L$  asociadas a ciertos caracteres reales primitivos, a los que nos referiremos como *caracteres excepcionales*. Este es un problema abierto que se hará presente en las aplicaciones de las estimaciones que queramos hacer a partir de los ceros, pues como no sabemos si existen o no tendremos que analizar las dos posibilidades para obtener resultados incondicionales. Con esto en mente, la idea de esta sección es presentar varios resultados que aseguran que, si existen ceros excepcionales, no puede haber demasiados ni pueden acercarse demasiado rápidamente a la recta  $\sigma = 1$ . El tratamiento que haremos en esta sección se puede encontrar en [Da] o en [Mo-Va1]. Empezamos con tres resultados de Landau:

**Teorema 2.5.** *Sean  $\chi_1, \chi_2$  dos caracteres reales módulo  $q_1, q_2$  respectivamente tales que  $\chi_1\chi_2$  no es principal. Existe una constante efectiva  $c_3 > 0$  tal que  $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$  tiene como mucho un cero en*

$$\sigma > 1 - \frac{c_3}{\log q_1 q_2}.$$

*Demostración.* Empezamos notando que, como  $(1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)) \geq 0$ , tenemos la desigualdad

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} - \frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1\chi_2)}{L(\sigma, \chi_1\chi_2)} \geq 0.$$

Ahora, como  $\chi_1\chi_2$  no es principal,

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_1\chi_2)}{L(\sigma, \chi_1\chi_2)} \leq a_1 \log q_1q_2,$$

de modo que nos encontramos con una situación parecida a la del doble cero real. Supongamos que  $L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$  tiene dos ceros reales  $\beta_1 \leq \beta_2$  cercanos a  $\sigma = 1$ . Entonces

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{2}{\sigma - \beta_1} + a_2 \log q_1q_2 > 0,$$

y siguiendo los pasos de antes deducimos el resultado.  $\square$

Con este resultado, ya vemos que no puede haber demasiados ceros excepcionales en los siguientes sentidos:

**Corolario 2.6.** *Podemos elegir la constante efectiva  $c_2 > 0$  del Teorema 2.4 de modo que para todo  $q$  como mucho hay un carácter excepcional módulo  $q$ .*

*Demostración.* Basta notar que podemos elegir  $q_1 = q_2$  y, como los caracteres reales son su propio inverso en el grupo de caracteres, si consideramos dos distintos del mismo módulo su producto no será el carácter principal. Tras esto, basta tomar  $c_2 \leq c_3/2$ .  $\square$

Aquí estamos modificando la definición de cero excepcional, pues obviamente depende de la constante que elijamos. Puede parecer que simplemente estamos «moviendo la portería», pero como en realidad lo que queremos es hablar de todos los módulos a la vez, estas redefiniciones no son problemáticas. En este sentido, la pregunta de si existen ceros de Siegel realmente es si existe una sucesión de ceros  $\beta_j$  tales que  $\lim_j (1 - \beta_j) \log q_j = 0$ , por lo que el Teorema 2.4 es «óptimo» en cierto sentido; o si, por el contrario, podemos conseguir una región realmente libre de ceros del tipo (2.8). En la práctica, asumiremos que  $c_2$  es como en este último corolario y que es menor que  $\frac{1}{4} \log 2 < \frac{1}{2}$ , pues tanto en el Teorema 3.12 como en los últimos resultados del trabajo será conveniente tener este control.

Otro corolario, esta vez con módulos variables, es el siguiente:

**Corolario 2.7.** *Dado  $A > 0$ , existe una constante efectiva  $c(A) > 0$  tal que, si existe una sucesión  $q_1, q_2, \dots$  de módulos con caracteres excepcionales definidos respecto a  $c(A)$ , es decir, que sus funciones  $L$  tienen ceros  $\beta_1, \beta_2, \dots$  respectivamente tales que*

$$\beta_j > 1 - \frac{c(A)}{\log q_j},$$

entonces

$$q_{j+1} > q_j^A.$$

*Demostración.* Eligiendo  $c(A) = c_3/(A + 1)$ , vemos que  $L(s, \chi_j)L(s, \chi_{j+1})$  (donde naturalmente  $\chi_k$  es el carácter excepcional módulo  $q_k$ ) tiene dos ceros excepcionales  $\beta_j$  y  $\beta_{j+1}$ . Entonces, naturalmente

$$1 - \frac{c(A)}{\log q_j} < \min\{\beta_j, \beta_{j+1}\} < 1 - \frac{c_3}{\log q_j q_{j+1}}.$$

Comparando los extremos y manipulando,  $q_j^A < q_{j+1}$ . □

Otra deducción que se puede hacer del Teorema 2.5 es el siguiente resultado, debido a Page:

**Teorema 2.8.** *Existe una constante efectiva  $c_4 > 0$  tal que para todo  $Q \geq 3$  hay como mucho un carácter primitivo real módulo  $q \leq Q$  tal que  $L(s, \chi)$  tiene un cero real  $\beta$  con*

$$\beta > 1 - \frac{c_4}{\log Q}.$$

*Demostración.* Nos restringimos a los caracteres primitivos para asegurarnos de que su producto no sea un carácter principal y así poder aplicar el teorema anterior. Con esto en mente, vemos que si  $\chi_1$  y  $\chi_2$  fuesen dos caracteres asociados a dos ceros excepcionales  $\beta_1, \beta_2$ , tendríamos que

$$\min\{\beta_1, \beta_2\} \leq 1 - \frac{c_3}{\log q_1 q_2} \leq 1 - \frac{c_4}{\log Q}$$

si elegimos  $c_4 = c_3/2$ , pues claramente  $Q^2 \geq q_1 q_2$ . □

Con este, tenemos cuatro resultados parecidos sobre cómo de comunes pueden ser estos ceros. Nuestro próximo objetivo será dedicarnos a la otra parte de esta sección, en la que la pregunta es cómo de «malos» pueden ser estos ceros, es decir, cómo de cerca pueden estar de  $s = 1$ .

**Teorema 2.9** (Teorema de Siegel). *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe una constante (inefectiva)  $C(\varepsilon)$  tal que todo carácter real principal  $\chi$  módulo  $q$  no tiene ceros reales en*

$$s > 1 - \frac{C(\varepsilon)}{q^\varepsilon}.$$

Deduciremos este resultado de la siguiente cota inferior para  $L(1, \chi)$ , también debida a Siegel:

**Teorema 2.10** (Siegel). *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe una constante (inefectiva)  $C'(\varepsilon)$  tal que para todo carácter primitivo real  $\chi$  se tiene*

$$L(1, \chi) > C'(\varepsilon)q^{-\varepsilon}.$$

Seguiremos la demostración de Estermann a través del original [Es] y de [Da]. Para hacerlo más digerible, lo separamos en tres:

**Lema 2.11.** Sean  $\chi_1, \chi_2$  dos caracteres reales primitivos distintos módulo  $q_1, q_2$  respectivamente. Consideramos la función

$$F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2),$$

que tiene un polo simple en  $s = 1$  con residuo  $K = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2)$ . Existe una constante  $k_3 > 0$  tal que

$$K > k_3(1-s)(q_1q_2)^{8(1-s)} \left( \frac{1}{2} - F(s) \right) \quad \text{para } \frac{7}{8} < s < 1.$$

Hemos reordenado un poco la expresión que se da en los documentos citados para facilitar su aplicación posterior.

*Demostración.* La función  $F$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  con un polo simple en  $s = 1$ , y para  $\sigma > 1$  admite la siguiente expansión:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde  $a_1 = 1$  y  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . En su artículo original, Estermann demuestra esta no negatividad a partir de la expansión de  $F$  en producto de Euler, analizando factores en función de los valores de  $\chi_1(p), \chi_2(p) \in \{-1, 0, 1\}$ . Otra estrategia posible es la siguiente: restringiéndonos a  $s > 1$ , con el producto de Euler, vemos que

$$\log F(s) = - \sum_p \log \left( (1-p^{-s})(1-\chi_1(p)p^{-s})(1-\chi_2(p)p^{-s})(1-\chi_1(p)\chi_2(p)p^{-s}) \right).$$

Separando en varios logaritmos y expandiéndolos,

$$\log F(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m} (1 + \chi_1(p^m))(1 + \chi_2(p^m)).$$

Tomando exponenciales a ambos lados y desarrollando en serie, obtenemos una suma triple en la que claramente el término que acompaña a  $n^{-s}$  es no negativo porque ningún término de la suma triple es negativo. Para ver que  $a_1 = 1$ , basta tomar límites en el infinito a lo largo de la recta real. Una vez nos hemos convencido de esto, expresamos  $F$  como una serie de potencias:

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(2)(s-2)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (2-s)^m, \quad |2-s| < 1,$$

donde  $b_0 = F(2) \geq 1$  por la expansión en serie de Dirichlet y  $b_m \geq 0$ , pues el signo de  $F^{(m)}(2)$  alterna con  $m$  y ha sido absorbido por el  $(2-s)^m$ . Con esto, podemos quitarle el polo a  $F$  y asimilarlo en la serie:

$$G(s) := F(s) - \frac{K}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - K)(2-s)^m.$$

Como ahora tenemos una función entera a la izquierda, el radio de convergencia de la serie de la derecha es  $\infty > 3/2$ . La función  $\zeta$  está acotada en  $|s-2| = 3/2$ , y, acotando  $L(s, \chi)$  con (1.3) porque  $\chi_1, \chi_2, \chi_1\chi_2$  son no principales, tenemos que

$$|G(s)| \leq |F(s)| + 2K < k_1 q_1^2 q_2^2 \quad \text{en } |s-2| = \frac{3}{2}.$$

para cierta  $k_1 > 0$ . Por tanto, por la fórmula integral de Cauchy,

$$|b_m - K| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s-2|=\frac{3}{2}} \frac{|G(s)|}{|s-2|^{m+1}} |ds| \leq k_1 q_1^2 q_2^2 (2/3)^m.$$

Con esto, para  $7/8 \leq s < 1$ ,

$$G(s) \geq \sum_{m=1}^{M-1} (b_m - K)(2-s)^m - \sum_{m=M}^{\infty} k_1 q_1^2 q_2^2 (2/3)^m (2-s)^m = A - B.$$

Para acotar  $A$ , vemos que, como  $b_0 \geq 1$  y  $b_m \geq 0$ ,

$$\sum_{m=0}^{M-1} (b_m - K)(2-s)^m \geq 1 - K \sum_{m=0}^{M-1} (2-s)^m = 1 - \frac{K((2-s)^M - 1)}{1-s},$$

mientras que para  $B$  basta notar que

$$B \leq k_1 q_1^2 q_2^2 \sum_{m=M}^{\infty} (2/3)^m (2-7/8)^m = k_2 q_1^2 q_2^2 (3/4)^M.$$

Elijiendo el mínimo  $M$  tal que  $B < 1/4$  y simplificando, esto se traduce en

$$(2.9) \quad F(s) > \frac{1}{2} - \frac{K(2-s)^M}{1-s}.$$

Además, usando  $(1+1-s)^M \leq \exp(M(1-s))$  y  $\log 4/3 > 1/4$ , vemos que

$$(2-s)^M \leq \exp(M(1-s)) < \left( \exp\left(8 \log\left(2\sqrt{k_2 q_1 q_2}\right) + 1\right) \right)^{1-s} \leq k_3 (q_1 q_2)^{8(1-s)}$$

para algún  $k_3 > 0$ . Sustituyendo en (2.9), llegamos a

$$F(s) > \frac{1}{2} - \frac{k_3 K}{1-s} (q_1 q_2)^{8(1-s)},$$

que es lo que buscábamos pero ordenado de otra manera.  $\square$

*Demostración del Teorema 2.10.* Sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Si existe un  $\chi_1$  con  $L(\beta_1, \chi_1) = 0$ , donde  $\beta_1 > 1 - \varepsilon/16$ , entonces  $F(\beta_1) = 0$  independientemente de la elección de  $\chi_2$ . Si no,  $F(\beta_1) < 0$  para todo  $\beta_1 \in (1 - \varepsilon/16, 1)$  independientemente de la elección de  $\chi_1$  y  $\chi_2$ , porque  $F$  no tiene ceros en  $(1 - \varepsilon/16, 1)$  y  $\lim_{\sigma \uparrow 1} F(s) = -\infty$ . Esta última afirmación es consecuencia de que, en el producto que define  $F$ , las  $L$  son funciones continuas que no se anulan en  $(1 - \varepsilon/16, \infty)$  con  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L(\sigma, \chi) = 1$  y por tanto

positivas; y de que la función  $\zeta$  es negativa en esa región. En cualquiera de los dos casos,  $F(\beta_1) \leq 0$  y, despejando  $L(1, \chi_2)$  en la desigualdad del lema anterior,

$$L(1, \chi_2) > \frac{1 - \beta_1}{2k_3 L(1, \chi_1) L(1, \chi_1 \chi_2)} (q_1 q_2)^{8(\beta_1 - 1)} \geq \frac{1 - \beta_1}{2k_4 \log q_1 \log q_2} (q_1 q_2)^{8(\beta_1 - 1)}.$$

En la última desigualdad hemos usado la Proposición 1.20. Aquí,  $q_1$  depende de  $\varepsilon$  y  $8(1 - \beta_1) < \varepsilon/2$ , por lo que absorbiendo todo en una constante,

$$L(1, \chi_2) > C'(\varepsilon) q_2^{-\frac{\varepsilon}{2}} (\log q_2)^{-1} > C'(\varepsilon) q_2^{-\varepsilon}$$

para todo  $q_2$  suficientemente grande.  $\square$

*Demostración del Teorema 2.9.* Como siempre, basta probarlo para caracteres primitivos. Sea  $\beta$  un cero de  $L(s, \chi)$ . Por el teorema del valor medio y por la Proposición 1.20, vemos que

$$C'(\varepsilon/2) q^{-\varepsilon/2} < L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\beta, \chi) < c(\log^2 q)(1 - \beta).$$

Comparando los extremos,

$$\beta < 1 - C'(\varepsilon/2) q^{-\varepsilon}$$

para  $q$  suficientemente grande.  $\square$

Es importante notar que aquí las constantes  $C(\varepsilon)$ ,  $C'(\varepsilon)$  **no son efectivas**, es decir, hemos probado que existen pero no tenemos un modo de calcularlas explícitamente. No podemos hacer un desarrollo como el previo al Teorema 2.2 y concluir que, si  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , entonces podemos tomar  $C(\varepsilon) = \frac{1}{1000}$  y  $C'(\varepsilon) = \frac{1}{100}$ . Para entender por qué es el caso, tenemos que volver a la demostración del Teorema 2.10. La constante depende de  $1 - \beta_1$  y de  $q_1$ , por lo que en principio deberíamos conocer ambos para determinar la constante, y es ahí donde aparece el problema: la elección de  $\beta_1$  y de  $q_1$  se divide en casos. Todavía no tenemos constancia de la existencia de ceros fuera de la línea crítica, por lo que, si quisiésemos dar una constante, nos tendríamos que situar en el segundo caso, pero para afirmar que estamos en el segundo caso necesitamos haber demostrado que no hay ceros en  $\sigma > 1 - \varepsilon/16$ , que es un resultado mucho más potente y que no sabemos si es cierto.

Esta «no efectividad» de la constante tiene su impacto en las aplicaciones. Por ejemplo, nos impide dar una versión completamente explícita del teorema de Siegel-Walfisz que demostraremos en el siguiente capítulo. Esto contrasta con el teorema de los números primos, que también demostraremos, para el cual es posible encontrar resultados sin constantes ocultas.



# Primos en progresiones aritméticas

---

## 3.1. Fórmulas explícitas

Nuestro objetivo es demostrar versiones fuertes del teorema de los números primos en progresiones aritméticas, es decir, no solo queremos demostrar que  $\{a + qn\}_{n \geq 0}$  contiene infinitos primos si  $(a, q) = 1$  sino también queremos obtener estimaciones sobre el número de estos menores que un cierto  $x$  y sobre el error con cierta uniformidad en  $q$ . Para ello, recurriremos a las *fórmulas explícitas*, que permiten relacionar funciones que codifican información sobre estos primos con los ceros de las funciones  $L$  asociadas a los distintos caracteres módulo  $q$ . El primer ejemplo de fórmula explícita aparece en la famosa memoria de Riemann de 1859, aunque la demostración es debida a von Mangoldt: si consideramos

$$\Pi(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n},$$

entonces para  $x > 1$ , si  $x$  no es la potencia de un primo,

$$\Pi(x) = \text{li}(x) - \sum_{\rho} \text{li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}.$$

La suma sobre los ceros no triviales no es absolutamente convergente sino que se interpreta como el límite de la suma restringida a  $|\gamma| < T$ .

Esta fórmula no es muy cómoda de exponer y en su lugar en los libros se suele presentar una para la *primera función de Chebyshev* o *función  $\psi$  de Chebyshev*, que es la que demostraremos aquí.

**Definición 3.1.** Definimos la *primera función de Chebyshev* para  $x \geq 0$  como

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

y, dado un carácter de Dirichlet  $\chi$ , la *primera función de Chebyshev de  $\chi$*  como

$$\psi(x, \chi) := \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n).$$

Por último, definimos

$$\psi_0(x) := \sum'_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{y} \quad \psi_0(x, \chi) := \sum'_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n),$$

donde  $\sum'$  toma el último término con peso  $\frac{1}{2}$  si  $x$  es entero.

Mientras que es relativamente fácil convencerse que  $\psi(x)$  sí carga con mucha información sobre los primos,  $\psi(x, \chi)$  por sí sola no parece que aporte demasiada información. Sin embargo, al sumar todas las de un módulo  $q$ , vemos que

$$\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} \left( \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \chi(n) \right) \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi).$$

La base de las fórmulas explícitas está en [Mo-Va1, Theorems 5.2 & 5.3]:

**Teorema 3.2** (Fórmula de Perron). *Sea  $D_a$  la serie de Dirichlet asociada a  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  con abscisa de convergencia absoluta  $\sigma_a$ . Sea  $\sigma_0 > \max(0, \sigma_a)$ ,  $x > 0$ . Entonces*

$$\sum'_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0, T)} D_a(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x, T),$$

donde

$$R(x, T) \ll \sum_{\substack{x/2 < n < 2x \\ n \neq x}} |a_n| \min\left(1, \frac{x}{T|n-x|}\right) + \frac{4^{\sigma_0} x^{\sigma_0}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma_0} + \mathbb{1}_{\{x=n\}} |a_n| \frac{\sigma_0}{T}.$$

*Demostración.* Queremos obtener una estimación de las integrales de línea para cada término  $a_n n^{-s}$  de  $D_a$ , por lo que escribiremos  $y = x/n > 0$ . En primer lugar, para  $y \leq \frac{1}{2}$ , definimos  $C$  como el contorno que va de  $\infty - iT$  a  $\sigma_0 - iT$  a  $\sigma_0 + iT$  a  $\infty + iT$ . Entonces vemos que

$$\int_{(\sigma_0, T)} \frac{y^s}{s} ds = \int_C \frac{y^s}{s} ds - \int_{\infty - iT}^{\sigma_0 - iT} \frac{y^s}{s} ds - \int_{\sigma_0 + iT}^{\infty + iT} \frac{y^s}{s} ds = \int_{\sigma_0 - iT}^{\infty - iT} \frac{y^s}{s} ds - \int_{\sigma_0 + iT}^{\infty + iT} \frac{y^s}{s} ds,$$

pues  $y^s/s$  no tiene polos en el interior del contorno. Para acotar estas integrales, vemos que

$$\int_{\sigma_0 \pm iT}^{\infty \pm iT} \frac{y^s}{s} ds = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{y^{\sigma \pm iT}}{\sigma \pm iT} d\sigma \ll \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{y^{\sigma}}{T} d\sigma \ll \frac{y^{\sigma_0}}{T}.$$

Por otro lado, para  $1 < y < 2$ , consideramos el contorno  $C$  que va de  $\sigma_0 - iT$  a  $\sigma_0 + iT$  a  $iT$  a  $-iT$  a  $\sigma_0 - iT$  con un semicírculo de radio  $\varepsilon$  centrado en cero que evite incluir el 0. De nuevo, la integral a lo largo del contorno es 0, y estimando el resto de integrales tenemos

$$\int_{\pm iT}^{\sigma_0 \pm iT} \frac{y^s}{s} ds = \int_0^{\sigma_0} \frac{y^{\sigma \pm iT}}{\sigma \pm iT} d\sigma \ll \int_0^{\sigma_0} \frac{y^{\sigma}}{T} d\sigma \ll \frac{2^{\sigma_0}}{T}.$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la integral a lo largo de las dos semirectas tiende a

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^T \frac{y^{is} - y^{-is}}{s} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^T \frac{\sin(s \log y)}{s} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{T \log y}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

y la integral a lo largo del semicírculo tiende a

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \sigma > 0}} \int_{|s|=\varepsilon} \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^{\varepsilon \exp(i\theta)} d\theta = \frac{1}{2}.$$

Además, notamos que

$$\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos x}{x} + \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = O\left(\min\left(1, \frac{1}{x}\right)\right),$$

y como  $|\log y| = |\log(1 + (y - 1))| \asymp |y - 1|$  en la región que estamos considerando, obtenemos lo que buscábamos. Para el resto de  $y \neq 1$ , los cálculos son análogos atendiendo al residuo correspondiente. Por último, para  $y = 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0, T)} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} + O\left(\int_{\frac{T}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr\right) = \frac{1}{2} + O(\sigma_0 T^{-1}).$$

Resumiendo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0, T)} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} O(y^{\sigma_0} T^{-1}) & \text{si } y \leq \frac{1}{2}, \\ O(\min(1, |y - 1|^{-1} T^{-1}) + 2^{\sigma_0} T^{-1}) & \text{si } \frac{1}{2} < y < 1, \\ \frac{1}{2} + O(\sigma_0 T^{-1}) & \text{si } y = 1, \\ 1 + O(\min(1, |y - 1|^{-1} T^{-1}) + 2^{\sigma_0} T^{-1}) & \text{si } 1 < y < 2, \\ 1 + O(y^{\sigma_0} T^{-1}) & \text{si } y \geq 2. \end{cases}$$

Como la convergencia de la serie es absoluta, el término de error es

$$R(x) \ll \sum_{\substack{x/2 < n < 2x \\ n \neq x}} |a_n| \min\left(1, \frac{x}{T|n - x|}\right) + \frac{4^{\sigma_0} x^{\sigma_0}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma_0} + \mathbb{1}_{\{x=n\}} |a_n| \frac{\sigma_0}{T}$$

que es lo que buscábamos.  $\square$

La idea es aplicar esto tanto a  $\psi_0(x)$  como a  $\psi_0(x, \chi)$  para aprovechar el estudio que hemos hecho sobre los ceros de  $\zeta$  y  $L$ , o, equivalentemente, de las singularidades de sus derivadas logarítmicas. Antes de empezar, necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 3.3.** *Para cualquier subconjunto cerrado de  $\sigma \leq -1$  que no contenga ceros triviales se tiene*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O(\log 2|s|).$$

*Demostración.* Sustituyendo  $s \rightarrow 1 - s$  en [TFG, Corolario 2.12], obtenemos

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s} \left( \cos \frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(s) \zeta(s).$$

Tomando derivadas logarítmicas,

$$-\frac{\zeta'(1 - s)}{\zeta(1 - s)} = -\log 2\pi - \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi s}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Como queremos acotar el lado izquierdo para  $1 - \sigma \leq -1$  podemos considerar el lado derecho para  $\sigma \geq 2$ . Para el termino tangente, lo reescribimos de la siguiente manera:

$$\tan \frac{\pi s}{2} = -i \frac{e^{\pi i s} - 1}{e^{\pi i s} + 1} = -i \left( 1 - \frac{2}{e^{\pi i s} + 1} \right).$$

La función es 2-periódica, está acotada lejos de la recta real y, por como hemos elegido el dominio, también cerca de la recta real, por lo que está acotada. La derivada logarítmica de  $\zeta$  y  $\log 2\pi$  también están acotados. Por último, por la fórmula de Stirling, el término de  $\Gamma$  es  $O(\log |s|)$ .  $\square$

Analizaremos primero la relación entre  $\zeta$  y  $\psi_0(x)$  y después pasaremos a las funciones  $L$ , para las cuales podremos reciclar la mayor parte del trabajo y de las ideas.

**Teorema 3.4.** *Sea  $x \geq c > 1$ ,  $T \geq 2$ . Denotemos por  $\langle x \rangle$  la distancia de  $x$  a la potencia de un primo más cercana (distinta de  $x$  si es que es una). Entonces*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) + R(x, T),$$

donde  $\rho$  recorre los ceros no triviales de  $\zeta$  y

$$R(x, T) \ll \frac{x \log^2 x T}{T} + \min \left( 1, \frac{x}{T \langle x \rangle} \right) \log x.$$

*Demostración.* Para cada  $x$ , elegimos  $\sigma_0 = 1 + 1/\log x$  de forma que  $x^{\sigma_0} = ex$  y definimos

$$I(x, T) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0, T)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

Aplicando la fórmula de Perron, obtenemos

$$\psi_0(x) = I(x, T) + O \left( \sum_{\substack{x/2 < n < 2x \\ n \neq x}} \Lambda(n) \min \left( 1, \frac{x}{T|n - x|} \right) + \frac{x}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma_0} + \Lambda(x) \frac{\sigma_0}{T} \right),$$

donde el último término solo aparece si  $x$  es la potencia de un primo. Para la segunda serie del término de error, notamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma_0} = -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0 - 1} = \log x,$$

por lo que el término está controlado por  $xT^{-1} \log x$ . Para el primer término, separamos en dos: para acotar los dos posibles valores de  $n$  para los que  $|x - n| < 1$ , sustituimos  $\Lambda(n) \ll \log x$  y  $|x - n| \geq \langle x \rangle > 0$ ; para acotar el resto, vemos que

$$\sum_{x+1 \leq n < 2x} \frac{1}{n-x} = \sum_{n=\lceil x \rceil+1}^{2x} \frac{1}{n-x} = \sum_{k=1}^{2x-\lceil x \rceil} \frac{1}{k+\lceil x \rceil-x} \leq \sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} \ll \log x,$$

de modo que, operando de forma similar para  $x/2 < n \leq x-1$ , tenemos la siguiente cota para el primer término:

$$\sum_{\substack{x/2 < n < 2x \\ n \neq x}} \Lambda(n) \min\left(1, \frac{x}{T|n-x|}\right) \ll \frac{x \log^2 x}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right) \log x.$$

Como el resto de términos de error son de orden menor, este es nuestro término de error por ahora. El objetivo ahora es trabajar con  $I(x, T)$  a través del teorema de los residuos. Para ello, tomamos un  $K$  grande e impar, consideramos el contorno rectangular con vértices en  $\sigma_0 + iT$ ,  $-K + iT$ ,  $-K - iT$  y  $\sigma_0 - iT$  y sustituimos nuestra integral de línea por las otras teniendo en cuenta los residuos que toquen. Queremos evitar que nuestro contorno se acerque demasiado a algún cero. Elegir  $K$  impar lo garantiza para  $\sigma \leq -1$ , y, como  $N(T+1) - N(T) = O(\log T)$ , empezaremos tomando  $T$  de forma que  $|T - \gamma| \gg (\log T)^{-1}$  para todo cero  $\rho = \beta + i\gamma$ . Así, para  $s = \sigma + iT$  con  $-1 \leq \sigma \leq 2$ ,

$$\sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} = \sum_{|\gamma-T|<1} O(\log T) = O(\log^2 T).$$

Con un análogo a (2.3) para  $\zeta$ , tenemos que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T), \quad s = \sigma + iT, \quad -1 \leq \sigma \leq 2.$$

Con esta estimación, vemos que

$$\int_{\sigma_0+iT}^{-1+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log^2 T}{T} \int_{-\infty}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma \ll \frac{x \log^2 T}{T \log x}$$

porque  $x^{\sigma_0} = ex$ , y la misma estimación sirve para su reflejada. Además, por el Lema 3.3, podemos acotar el resto de la integral en las rectas horizontales por

$$\int_{-1+iT}^{-K+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log 2T}{T} \int_{-K}^{-1} x^\sigma d\sigma \ll \frac{\log 2T}{Tx \log x},$$

que es de orden menor que el anterior. Por último, para la integral sobre la recta vertical, vemos que

$$\int_{(-K, T)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log 2K}{K} \int_{-T}^T x^{-K} d\sigma = \frac{2T \log 2K}{Kx^K}.$$

Tomando  $K \rightarrow \infty$ , vemos que este último término de error desaparece y

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n} + R(x, T),$$

donde  $x$  viene del polo de  $\zeta$ , la última suma corresponde a los ceros triviales y

$$R(x, T) \ll \frac{x \log^2 x}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right) \log x + \frac{x \log^2 T}{T \log x},$$

que, salvo por un  $(\log x)^{-1} \ll 1$ , es menor que lo que buscábamos.

Por tanto, hemos probado el resultado para los valores de  $T$  tales que  $|T - \gamma| \gg (\log T)^{-1}$ . Para concluir, notamos que, dado un  $T$  podemos elegir un  $\tilde{T} \geq T$  con  $|\tilde{T} - \gamma| \gg (\log \tilde{T})^{-1}$  y tal que  $\tilde{T} - T < 1$ . Con esto,  $R(x, T) \asymp R(x, \tilde{T})$  y

$$\sum_{T < |\gamma| \leq \tilde{T}} \frac{x^\rho}{\rho} \ll \frac{x}{T} \log T,$$

que es de orden menor que el error que ya teníamos.  $\square$

Como corolario inmediato, dado que  $R(x, T) \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}).$$

Para  $\psi(x, \chi)$ , como es habitual, vamos a centrar nuestros esfuerzos en los primitivos para después extenderlo a imprimitivos, aunque daremos una aproximación no muy fina de estos segundos. Al igual que con las ecuaciones funcionales, tendremos que diferenciar entre pares o impares, aunque, curiosamente, aquí es el caso par el que difiere con el tratamiento de la función  $\zeta$ . Para repetir lo anterior necesitaremos una cota para la derivada logarítmica de  $L(s, \chi)$  en  $\sigma \leq -1$ :

**Lema 3.5.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$ . Para  $\sigma \leq -1$  y excluyendo círculos de radio  $\frac{1}{4}$  centrados en los ceros triviales  $s = 0 + \kappa, 2 + \kappa, \dots$ , se tiene*

$$\left| \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| = O(\log q|s|).$$

La demostración es parecida a la de  $\zeta$ .

**Teorema 3.6.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$ . Sea  $x \geq c > 1$  y sea  $T \geq 2$ . Sea  $b(\chi)$  el residuo en 0 de  $\frac{L'(s, \chi)}{sL(s, \chi)}$ . Entonces,*

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - (1 - \kappa) \log x - b(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\kappa-2n}}{2n - \kappa} + R(x, T, \chi),$$

donde

$$R(x, T, \chi) \ll \frac{x \log^2 x q T}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right) \log x.$$

En particular, haciendo  $T \rightarrow \infty$ , para cada  $x > 1$  tenemos

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - (1 - \kappa) \log x - b(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\kappa-2n}}{2n - \kappa}.$$

*Demostración.* La demostración es muy parecida a la anterior: la primera cota del error es válida también para nuestras  $L$ , es decir,

$$(3.1) \quad \psi_0(x, \chi) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0, T)} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T \langle x \rangle}\right) \log x\right).$$

donde  $\sigma_0 = 1 + (\log x)^{-1}$ .

Para  $\chi$  impar, tomamos  $K$  grande y par. Considerando el contorno con la misma forma que el anterior y con una restricción análoga sobre  $T$ , con el Lema 3.5 y los resultados de la sección anterior, tenemos que

$$R(x, T, \chi) \ll \frac{x \log^2 x}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T \langle x \rangle}\right) \log x + \frac{x \log^2 qT}{T \log x}.$$

La restricción sobre  $T$  se quita de forma análoga.

Para el caso par, la principal diferencia viene del cero de  $L(s, \chi)$  en  $s = 0$ , que hace del polo del integrando en  $s = 0$  un polo doble. Solo necesitamos comprobar que el residuo de  $L'/L$  en 0 es 1, pues con eso tendremos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{x^s}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} ((b(\chi) + o(1)) x^s + (1 + o(1)) x^s \log x) = b(\chi) + \log x.$$

Para verificar esto, recurrimos a la relación dada por el Corolario 1.34:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = - \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} - \frac{1}{s} \right) = 1,$$

donde la penúltima igualdad se deduce tomando derivadas logarítmicas en la ecuación funcional  $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ .  $\square$

Como ya comentamos, podemos intentar obtener resultados parecidos para caracteres primitivos, ya que, por ejemplo, el Lema 3.5 se puede adaptar a caracteres imprimitivos sin demasiada dificultad: como

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{L'(s, \chi')}{L(s, \chi')} + \sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q'}} \frac{\log p}{\overline{\chi'}(p)p^s - 1},$$

el primer término es  $O(\log q|s|)$  por el caso primitivo, y el segundo es  $O\left(\sum_{p|q} \log p\right) \leq O(\log q)$  debido a que

$$|\overline{\chi'}(p)p^s - 1| \geq 1 - 2^\sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Una vez llegados a este punto, lo más complicado es trabajar con los ceros extra, pues el resto es idéntico al caso primitivo o directamente se apoya en él.

**Teorema 3.7.** *Sea  $\chi$  un carácter módulo  $q$ . Sea  $x \geq c > 1$  y sea  $T \geq 2$ . Sea  $b(\chi)$  el residuo en 0 de  $\frac{L'(s, \chi)}{sL(s, \chi)}$ . Entonces,*

$$\psi_0(x, \chi) = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{|\iota| \leq T \\ |\iota| \neq 0}} \frac{x^\iota}{\iota} - (1 - \kappa + \omega) \log x - b(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\kappa-2n}}{2n - \kappa} + R(x, T, \chi),$$

donde  $\iota$  recorre los ceros extra,  $\omega$  es el número de factores primos de  $q$  que no son factores de  $q'$  para los que  $\chi'(p) = 1$  y

$$R(x, T, \chi) \ll \frac{xq \log^2 xqT}{T} + \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right) \log x + q \log^2 q.$$

El término de error que damos aquí es ligeramente peor que el del Teorema 3.6 y con un pequeño cambio se podría mejorar. Esto no nos preocupa porque en las aplicaciones del siguiente capítulo no usaremos este teorema, sino que deduciremos los resultados a través de los de los caracteres primitivos como hemos hecho en el resto del proyecto.

*Demostración.* La ecuación (3.1) sigue siendo válida y, de nuevo, eligiendo  $T$  de forma que  $|T - \gamma| \gg (\log qT)^{-1}$ , tenemos

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O(\log^2 qT) + \sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q'}} \frac{\log p}{\bar{\chi}'(p)p^s - 1}.$$

Para acotar esa segunda suma, vemos que los ceros extra que puede haber en un intervalo unitario son de la forma  $\iota = 2\pi i(k + \alpha) \log p$  con  $p \nmid q'$ , de modo que hay  $O(\sum_{p|q} \log p) = O(\log q)$  ceros. Restringiéndonos nuevamente a  $T$  tal que  $iT$  está a  $\gg (\log q)^{-1}$  de cualquier cero extra, el segundo sumando aporta  $O(q \log^2 q)$  al integrar.

Por otro lado, ahora la cantidad de polos es mucho mayor: a parte de los términos que hemos contado, hay que considerar los ceros extra  $\iota$ . Para  $\iota \neq 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow \iota} (s - \iota) \left( \frac{L'(s, \chi')}{L(s, \chi')} + \sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q'}} \frac{\log p}{\bar{\chi}'(p)p^s - 1} \right) \frac{x^s}{s} = \lim_{s \rightarrow \iota} (s - \iota) \left( \frac{\log p_\iota}{\bar{\chi}'(p_\iota)p_\iota^s - 1} \right) \frac{x^s}{s} = \frac{x^\iota}{\iota},$$

mientras que para  $\iota = 0$  tenemos  $(1 - \kappa + \omega) \log x$ . □

## 3.2. El teorema de los números primos en progresiones aritméticas

En [TFG, Cap. 4], dimos la escueta demostración de Donald J. Newman del teorema de los números primos. La rapidez con la que su método llega al resultado tiene un coste: no da información sobre el término de error. En este trabajo, seguiremos un esquema más clásico que nos dará un término de error.

**Definición 3.8.** Definimos la *función contadora de primos* y la *función contadora de primos en*  $\{a + qn\}_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$\pi(x) := \#\{p \leq x\} \quad \text{y} \quad \pi(x; q, a) := \#\{p \leq x : p \equiv a \pmod{q}\}.$$

Definimos la *segunda función de Chebyshev* y la *segunda función de Chebyshev en*  $\{a + qn\}_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{y} \quad \vartheta(x; q, a) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} \log p.$$

Desarrollaremos la teoría para  $\psi$  y al final de la sección veremos como deducir resultados para  $\vartheta$  y  $\pi$  a partir de lo obtenido para  $\psi$ . Empezaremos con el clásico teorema de los números primos:

**Teorema 3.9** (Teorema de los números primos). *Sea  $x \geq 2$ . Existe una constante  $C$  tal que*

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-C\sqrt{\log x}\right)\right).$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.4, dado  $T \ll x$ , como  $\psi(x) = \psi_0(x) + O(\log x)$  podemos llegar a

$$\psi(x) - x = - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x T}{T}\right).$$

Veamos como acotar la suma: por el Teorema 2.2, para  $|\gamma| \leq T$  tenemos que

$$(3.2) \quad |x^\rho| = x^\beta < x^{1-c(\log T)^{-1}} = x \exp\left(-\frac{c \log x}{\log T}\right).$$

Además, vemos que

$$\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{\rho} \ll \sum_{0 < \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} \ll \sum_{n \leq T} \sum_{n < \gamma \leq n+1} \frac{1}{n} \ll \sum_{n \leq T} \frac{\log n}{n} \ll \log^2 T.$$

Con esto, llegamos a

$$(3.3) \quad \psi(x) - x \ll x(\log T)^2 \exp\left(-\frac{c \log x}{\log T}\right) + \frac{x \log^2 x T}{T}.$$

Una elección natural de  $T$  es la que hace que ambos términos tengan más o menos el mismo orden, pues uno crece y otro decrece con  $T$ . Tomando  $\log^2 T = \log x$ ,  $T = \exp(\sqrt{\log x})$ , como  $\log^2 x T \ll \log^2 x$  tenemos

$$\psi(x) - x \ll x(\log x) \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right) + x(\log^2 x) \exp\left(-\sqrt{\log x}\right).$$

Por último, como  $\log^2 x \ll \exp(\varepsilon\sqrt{\log x})$ , tenemos el resultado para cierta  $C > 0$ .  $\square$

Nos gustaría repetir esto para  $\psi(x, \chi)$ . Trabajando con cada módulo por separado no tendríamos problemas, pero buscamos cierto grado de uniformidad, y aquí nos encontramos con la problemática posible aparición del cero excepcional  $\beta_1$ : mientras que para el resto de ceros tenemos una cota mínimamente robusta dada por la región libre de ceros, para  $\beta_1$  tendríamos un número excepcionalmente cercano a 1 en el exponente de uno de los términos y un número cercano a 0 en el denominador de otro. Curiosamente, la clave para tratar este segundo problema reside en el molesto  $b(\chi)$  del que no hemos dado demasiada información.

**Lema 3.10.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$  y sea  $b(\chi)$  el residuo en 0 de  $\frac{L'(s, \chi)}{sL(s, \chi)}$ . Entonces*

$$b(\chi) = -\frac{1}{1 - \beta_1} + O(\log^2 q),$$

donde  $-1/(1 - \beta_1)$  solo se tiene en cuenta si  $\beta_1$  existe.

*Demostración.* Recordando el Corolario 1.34,

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -B(\chi) - \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{q} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Evaluando en  $s$  y en 2 y restando ambas expresiones,

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\frac{L'(2, \chi)}{L(2, \chi)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s+\kappa}{2})}{\Gamma(\frac{s+\kappa}{2})} + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 - \rho} \right) + O(1).$$

Ahora, basta notar que  $\frac{L'(2, \chi)}{L(2, \chi)} \ll \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} = O(1)$ . Así, si  $\chi$  es impar, evaluamos en 0 y tenemos

$$(3.4) \quad b(\chi) = -\sum_{\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right) + O(1).$$

Si  $\chi$  es par, expandiendo las series correspondientes en  $s = 0$  observamos que

$$\frac{1}{s} + b(\chi) + o(1) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + o(1) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 - \rho} \right) + O(1).$$

Restando  $\frac{1}{s}$  a ambos lados y tomando el límite, obtenemos la estimación (3.4) para caracteres pares.

Tras esto, vamos a separar los términos correspondientes al posible cero excepcional  $\beta_1$  y su pareja  $1 - \beta_1$ . Vemos que

$$\sum_{\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right) = \frac{1}{1 - \beta_1} + \sum'_{\rho} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right) + O(1).$$

Aquí,  $\sum'$  excluye los términos correspondientes a  $\beta_1$  y a  $1 - \beta_1$  si existen. Separemos la suma en fragmentos que podamos analizar mejor. Empezando por  $|\gamma| \geq 1$ , vemos que, usando (2.2),

$$\sum_{|\gamma| \geq 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right) = \sum_{|\gamma| \geq 1} \frac{2}{\rho(2 - \rho)} \ll \sum_{|\gamma| \geq 1} \frac{1}{|2 - \rho|^2} \ll \sum_{|\gamma| \geq 1} \Re \frac{1}{2 - \rho} = O(\log q).$$

Para  $|\gamma| < 1$ , notamos que hay  $O(\log q)$  ceros y  $(2 - \rho)^{-1} \ll 1$ . Además, como ahora queremos que los ceros no sean demasiado pequeños, reflejamos la región libre de ceros para obtener  $\rho^{-1} \ll \log q$  para todo cero  $\rho$  tal que  $1 - \rho$  no es el excepcional, de forma que

$$\sum'_{|\gamma| < 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2 - \rho} \right) = O(\log^2 q).$$

En conclusión, como  $\beta_1^{-1} = O(1)$ , juntando todo deducimos el resultado.  $\square$

Con este resultado, podemos separar el posible cero excepcional y obtener el siguiente resultado:

**Teorema 3.11.** *Sea  $\chi$  un carácter primitivo módulo  $q$  y sea  $2 \leq T \leq x$ . Entonces*

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 qx}{T} + x^{\frac{c_2}{\log q}} \log x\right),$$

donde tanto el término que involucra el cero excepcional  $\beta_1$  como  $x^{\frac{c_2}{\log q}} \log x$  solo se tienen en cuenta si  $\beta_1$  existe,  $\sum'$  excluye los términos correspondientes a  $\beta_1$  y a  $1 - \beta_1$  si existen y  $c_2$  es la constante que determina la región libre de ceros.

*Demostración.* En primer lugar, notamos que  $\psi(x, \chi) = \psi_0(x, \chi) + O(\log x)$  y que el segundo término en la cota del error es también  $O(\log x)$ , por lo que, dado que  $x \geq T$ , el primer término es de orden mayor. Por tanto,

$$\psi(x, \chi) = -\sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - b(\chi) + O\left(\frac{x \log^2 qx}{T}\right).$$

Sustituyendo la estimación dada por el lema anterior, obtenemos

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 qx}{T}\right).$$

Para deshacernos del término que involucra a  $1 - \beta_1$ , usamos el teorema del valor medio:

$$\frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1 - \beta_1} = x^\sigma \log x \leq x^{1-\beta_1} \log x \leq x^{\frac{c_2}{\log q}} \log x.$$

Combinando todo, llegamos a lo que queríamos demostrar.  $\square$

El siguiente paso es extender esto a los caracteres imprimitivos y obtener algún resultado parecido para el principal. Como ya adelantamos, seguiremos el camino clásico en lugar de intentar deducir cotas a partir del aún más aparatoso Teorema 3.7.

**Teorema 3.12.** *Sea  $\chi$  un carácter no principal módulo  $q$  y sea  $2 \leq T \leq x$ . Entonces*

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum'_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 qx}{T} + x^{\frac{1}{4}} \log x\right),$$

donde tanto el término que involucra el cero excepcional  $\beta_1$  como  $x^{\frac{1}{4}} \log x$  solo se tienen en cuenta si  $\beta_1$  existe y  $\sum'$  excluye los términos correspondientes a  $\beta_1$  y a  $1 - \beta_1$  si existen.

*Demostración.* Como comentamos en el capítulo anterior, en este trabajo asumimos  $c_2 \leq \frac{1}{4} \log 2$ , y aquí está la razón: hemos elegido esta cota para que  $c_2 / \log q \leq \frac{1}{4}$ . Además, vemos que, si  $\chi$  está inducido por  $\chi'$

$$|\psi(x, \chi) - \psi(x, \chi')| = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) = \sum_{p|q} \sum_{p^k \leq x} \log p \ll \log x \sum_{p|q} \log p \ll (\log x)(\log q),$$

que es de orden menor que el término de error que ya teníamos. El único punto que nos falta considerar es la disparidad entre la definición del cero excepcional para diferentes módulos: es posible que  $\beta_1$  sea un cero excepcional para  $\chi'$  pero no para  $\chi$ . Si este es el caso, basta acotarlo como hemos acotado el resto de ceros e incluirlo en la suma.  $\square$

**Teorema 3.13** (Teorema de los números primos en progresiones aritméticas). *Sea  $x \geq 2$ ,  $C_1 > 0$ . Existe una constante  $C_2$  tal que para todo  $a$  coprimo con  $q$  y para todo  $q \leq \exp(C_1 \sqrt{\log x})$  se tiene*

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\chi_1(a)x^{\beta_1}}{\varphi(q)\beta_1} + O\left(x \exp\left(-C_2 \sqrt{\log x}\right)\right),$$

donde el término que involucra al cero excepcional  $\beta_1$  solo se tiene en cuenta si  $\beta_1$  existe.

*Demostración.* En primer lugar, notamos que

$$|\psi(x, \chi_0) - \psi(x)| \leq (\log x)(\log q),$$

de modo que

$$\psi(x, \chi_0) = x + O\left(x \exp\left(-C \sqrt{\log x}\right) + \log^2 qx\right).$$

Al igual que en el Teorema 3.9, tenemos que

$$|x^\rho| = x^\beta < x \exp\left(-\frac{c_2 \log x}{\log qT}\right).$$

Para estimar la suma de los recíprocos de los ceros, separamos en  $|\gamma| \geq 1$  y  $|\gamma| < 1$ . La primera se estima como lo hicimos para  $\zeta$ :

$$\sum_{1 \leq |\gamma| \leq T} \frac{1}{\rho} \ll \sum_{1 \leq \gamma \leq T} \frac{1}{\gamma} \ll \sum_{n \leq T} \sum_{n < \gamma \leq n+1} \frac{1}{n} \ll \sum_{n \leq T} \frac{\log qn}{n} \ll \log^2 qT.$$

La segunda se estima como hicimos en el Lema 3.10 y es  $O(\log^2 q)$ . Por tanto,

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(x (\log^2 qT) \exp\left(-\frac{c_2 \log x}{\log qT}\right) + \frac{x \log^2 qx}{T} + x^{\frac{1}{4}} \log x\right).$$

Seguindo los pasos del Teorema 3.9, podemos tomar  $T = \exp(C_1\sqrt{\log x})$  y, recordando que

$$(3.5) \quad \psi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi),$$

obtenemos el resultado para cierta  $C_2 > 0$ .  $\square$

El Teorema 3.13, aunque tiene un término de error efectivo, tiene el defecto de que depende del posible cero excepcional  $\beta_1$ . Restringiendo aún más el rango de  $q$  que admitimos, podemos aplicar el teorema de Siegel para obtener un resultado que, aunque es inefectivo, no depende de  $\beta_1$ .

**Teorema 3.14** (Teorema de Siegel-Walfisz). *Sea  $x \geq 2$ ,  $C_1 > 0$ . Existe una constante inefectiva  $C_3$  tal que, si  $(a, q) = 1$ , entonces*

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\left(x \exp\left(-C_3\sqrt{\log x}\right)\right)$$

para todo  $q \leq (\log x)^{C_1}$ . Además, si no imponemos ninguna restricción sobre  $q$ ,

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_{C_1}\left(x (\log x)^{-C_1}\right).$$

Para la segunda formulación vamos a necesitar un pequeño resultado:

**Proposición 3.15.** *Se tiene*

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \gg (\log x)^{-2}.$$

*Demostración.* Por el teorema de los números primos para  $\vartheta$ , tenemos que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p \log p} = \frac{\vartheta(x)}{x \log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)(1 + \log t)}{t^2 \log^2 t} dt = \log \log x + O(1).$$

Acotar la integral correspondiente al término de error no es inmediato pero no es el tema de interés aquí. Con esto, como  $1 - x \geq e^{-\frac{3}{2}x}$  para  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , tenemos que

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \exp\left(-\frac{3}{2} \sum_{p < x} \frac{1}{p}\right) \gg \exp(-2 \log \log x) = (\log x)^{-2},$$

tal y como buscábamos.  $\square$

Aunque esto nos valdrá, esta estimación no es muy fina. Un tratamiento más preciso ([Mo-Va1, Theorem 2.7e], por ejemplo) permite ver que el orden del producto es  $(\log x)^{-1}$ .

*Demostración del teorema de Siegel-Walfisz.* Si tomamos  $\varepsilon = (2C_1)^{-1}$  en el Teorema 2.9, como  $q^\varepsilon \leq \sqrt{\log x}$ , tenemos que

$$x^{\beta_1} < x \exp\left(-C(\varepsilon\sqrt{\log x})\right)$$

para  $C(\varepsilon)$  una constante inefectiva. Así, el término del cero excepcional  $\beta_1$  tiene una cota parecida a la del error, por lo que, absorbiéndolo, llegamos al primer resultado.

Para el segundo, notamos que, si  $q \leq (\log x)^{C_1+1}$ , entonces podemos aplicar el resultado que acabamos de probar, que tiene un error de orden menor. Si  $q > (\log x)^{C_1+1}$ ,

$$\varphi(q) = q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq q \prod_{p < q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \gg \frac{q}{\log^2 q},$$

por lo que el término principal es de orden

$$\ll \frac{x \log^2 q}{q} \ll \frac{x \log^2 \log x}{(\log x)^{C_1+1}} \ll \frac{x}{(\log x)^{C_1}}.$$

Para concluir, basta darse cuenta de que

$$\psi(x; q, a) \leq \frac{x \log x}{q} < x(\log x)^{-C_1}$$

por lo que el lado izquierdo también es  $O\left(x(\log x)^{-C_1}\right)$ . □

Para concluir, tal y como prometimos, veremos cómo obtener estimaciones parecidas para  $\vartheta$  y  $\pi$  a partir de lo que ya sabemos.

**Proposición 3.16.** *Se cumple*

$$\vartheta(x) = \psi(x) + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right) \quad y \quad \vartheta(x; q, a) = \psi(x; q, a) + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right).$$

*En particular, los Teoremas 3.9, 3.13 y 3.14 son válidos sustituyendo  $\psi$  por  $\vartheta$ .*

*Demostración.* Claramente  $\psi(x; q, a) \geq \vartheta(x; q, a)$ . Para acotar su diferencia, basta recurrir a las siguientes identidades:

$$\psi(x; q, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta\left(x^{\frac{1}{n}}; q, a\right) = \sum_{n \leq \log_2 x} \vartheta\left(x^{\frac{1}{n}}; q, a\right).$$

Ambas son prácticamente inmediatas, y con ellas vemos que

$$\psi(x; q, a) - \vartheta(x; q, a) = \sum_{2 \leq n \leq \log_2 x} \vartheta\left(x^{\frac{1}{n}}; q, a\right) \leq \log_2(x) \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} \log x\right) = \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{2 \log 2}.$$

La demostración para  $\vartheta(x)$  es idéntica. □

Está claro que podríamos afinar un poco más en el error, pero con eso nos basta. Para  $\pi$ , tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.17.** *Sea  $x \geq 2$ . Si  $C$  es la constante del Teorema 3.9, entonces*

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x \exp\left(-\frac{C}{2}\sqrt{\log x}\right)\right).$$

El resto de resultados análogos se pueden deducir siguiendo la misma estrategia.

*Demostración.* Siguiendo la idea del final de [Da, Chapter 18], lo primero que haremos es sumar  $\vartheta$  por partes:

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Sustituyendo  $\vartheta$  por su cota e integrando por partes, vemos que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + \frac{2}{\log 2} + O\left(x \exp\left(-C\sqrt{\log x}\right) + \int_2^x \exp\left(-C\sqrt{\log x}\right) dt\right).$$

En el término integral, la contribución hasta  $x^{\frac{1}{4}}$  es menor que  $x^{\frac{1}{4}}$ , y para el resto de la integral tenemos  $-\sqrt{\log t} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\log x}$ , de lo que deducimos el resultado.  $\square$

### 3.3. Primeros pasos hacia el teorema de Linnik

Con el desarrollo que hemos hecho, estamos en condiciones de formular el teorema de Linnik y de deducir varios resultados menos potentes. Dados  $(a, q) = 1$  con  $1 \leq a \leq q - 1$ , denotemos por  $p_{\min}(a, q)$  al primer primo de la progresión aritmética  $\{a + qn\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , que ahora sabemos que es un conjunto no vacío. El teorema de Linnik afirma que existe una constante efectiva  $L$  tal que, para todo  $a, q$  con estas condiciones,

$$p_{\min}(a, q) \leq cq^L.$$

Veamos cómo de lejos estamos. Por la Proposición 3.16 aplicada al Teorema 3.14,

$$\vartheta(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O\left(x (\log x)^{-C_1}\right).$$

Si  $\vartheta(x) > 0$ , entonces necesariamente  $p_{\min}(a, q) \leq x$ , de modo que, si  $K_1$  es la constante de la  $O$ , basta ver que

$$\left(\frac{x}{\varphi(q)} >\right) \frac{x}{q} > K_1 x (\log x)^{-C_1}.$$

Despejando, como  $\varphi(q) < q$ , con  $\varepsilon > 1/C_1$  obtenemos

$$p_{\min}(a, q) \ll \exp(q^\varepsilon).$$

Si asumimos que no existen ceros excepcionales, o que existen y todos cumplen  $\chi_1(a) = -1$ , podemos usar el Teorema 3.13 y, confiando en que  $q$  estará en el rango adecuado (que lo estará), podemos reducirnos a comprobar que

$$\frac{x}{\varphi(q)} > K_1 x \exp\left(-C_3\sqrt{\log x}\right) \iff -\log \varphi(q) > \log K_1 - C_3\sqrt{\log x}.$$

Reordenando, sustituyendo  $\varphi(q) < q$  y elevando al cuadrado, vemos que basta con

$$x > q^{K_2 \log q},$$

donde  $K_2$  es suficientemente grande, es decir,  $p_{\min}(a, q) \leq q^{K_2 \log q}$ .

Si suponemos que la hipótesis de Riemann generalizada (de ahora en adelante, HRG) es cierta, es decir, si sabemos que toda función  $L$  de Dirichlet tiene todos sus ceros no triviales en  $\sigma = \frac{1}{2}$ , podemos obtener resultados mucho más potentes:

**Teorema 3.18.** *Supongamos HRG. Sea  $q \leq x$ . Entonces*

$$(3.6) \quad \psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

En particular,

$$(3.7) \quad p_{\min}(a, q) \ll \varphi(q)^2 \log^4 q.$$

*Demostración.* En primer lugar, debemos notar que HRG implica la hipótesis de Riemann y que no hay ceros de Siegel. Con esto, repasando la demostración del Teorema 3.9, vemos que (3.2) se convierte en

$$|x^\rho| = x^\beta = \sqrt{x},$$

de modo que ahora (3.3) luce así:

$$\psi(x) - x \ll \sqrt{x} \log^2 T + \frac{x \log^2 x T}{T}.$$

Tomando ahora  $T = \sqrt{x}$ , llegamos a

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

En la demostración del Teorema 3.13, también tomamos  $T = \sqrt{x}$  y procedemos de forma similar, de forma que

$$\psi(x, \chi) = O(\sqrt{x} \log^2 qx).$$

Metiendo todo en (3.5), obtenemos (3.6). Podemos pasar de  $\psi$  a  $\vartheta$  mediante la Proposición 3.16 y repetir el juego del principio de la sección para obtener la condición suficiente  $x > C\varphi(q)^2 \log^4 x$ . Tomando  $x = 81C\varphi(q)^2 \log^4 q < q^3$  para  $q$  suficientemente grande, vemos que

$$C\varphi(q)^2 \log^4 x < C\varphi(q)^2 \log^4 q^3 = x,$$

por lo que  $p_{\min}(a, q) \ll \varphi(q)^2 \log^4 q$ . □

Si uno analiza estas demostraciones, no es difícil notar que, para demostrar el teorema de Linnik, bastaría asumir que, por ejemplo, todos los ceros de las funciones  $L$  no tienen parte real menor que  $1 - \varepsilon$  para algún  $\varepsilon > 0$  fijo. El siguiente paso será demostrar aproximaciones de esto, es decir queremos ver que, para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  no puede haber muchos ceros con parte real mayor que  $1 - \varepsilon$ .

## CAPÍTULO 4

# Distribución de los ceros II: teoremas de densidad

---

Los teoremas de densidad buscan acotar el número de ceros con parte real grande. En particular, dados  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  y  $T \geq 2$ , queremos contar cuántos ceros hay en

$$(4.1) \quad \sigma \geq \alpha, \quad |t| \leq T.$$

Para ello, definimos  $N(\alpha, T)$  como el número de ceros de  $\zeta$  en (4.1) y, dado un carácter  $\chi$  módulo  $q$ , definimos  $N(\alpha, T, \chi)$  como el número de ceros de  $L(s, \chi)$  en esa región. También estaremos interesados en obtener estimaciones para un módulo  $q$  en su conjunto, por lo que denotaremos

$$N(\alpha, T, q) = \sum_{\chi \pmod{q}} N(\alpha, T, \chi)$$

que también puede interpretarse como el número de ceros de  $\prod_{\chi \pmod{q}} L(s, \chi)$ . De forma análoga, definimos  $N^*(\alpha, T, \chi)$  y  $N^*(\alpha, T, q)$  de la misma forma pero excluyendo el posible cero excepcional. Por supuesto, esta notación es redundante en la mayoría de los casos porque no hay demasiados caracteres excepcionales, pero la usaremos para no complicar los enunciados.

Las cotas que daremos son de la forma

$$N^*(\alpha, T, q) \ll (qT)^{A(\alpha)(1-\alpha)} (\log qT)^B$$

para ciertas constantes  $A \geq 2$ ,  $B \geq 0$ . Estos resultados pueden ser considerados como versiones débiles de la hipótesis de Riemann generalizada, ya que nos dicen que cerca de  $\sigma = 1$  no puede haber muchos ceros y, si las cotas son lo suficientemente buenas (por ejemplo, si  $A = 2$ ,  $B = 1$ ), que la mayor parte de los ceros está arbitrariamente cerca de  $\sigma = \frac{1}{2}$ . En este capítulo, daremos una perspectiva histórica en lugar de abrazar el tratamiento moderno.

### 4.1. El teorema de Bohr-Landau

Los primeros resultados en esta dirección son debidos a Bohr y Landau.

**Teorema 4.1** (Teorema de Bohr-Landau). *Sea  $\delta > 0$  y sea  $\chi$  un carácter módulo  $q$ . Entonces*

$$N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = o_\delta(T) \quad y \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T, \chi\right) = o_{\delta, q}(T).$$

En lugar de dar una demostración completa, comentaremos la esencia del teorema y trataremos de dar una versión cuantitativa adaptando los métodos del artículo original [Bo-La] para motivar el desarrollo posterior de Carlson. Uno de los pilares de la estrategia que siguen es el siguiente lema:

**Lema 4.2.** *Sean  $0 < r < R$ ,  $A > 0$ . Toda función  $f$  holomorfa en  $|s| \leq R$  con  $|f(0)| > A$  tiene  $O_{r, R, A}\left(\iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt\right)$  ceros en  $|s| < r$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $f$  no es constante y que tiene algún cero en  $|s| \leq r$ . Sea  $r < \rho < R$ . Usando la fórmula de Jensen (Teorema A.3) y las desigualdades  $\log|x| \leq |x - 1| \leq \frac{1}{2}(1 + |x - 1|^2)$ ,

$$\begin{aligned} n \log \frac{\rho}{r} + \log A &< \log \frac{\rho^n}{|z_1| \dots |z_n|} + \log |f(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - 1| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\rho$  e integrando en  $r < \rho < R$ , podemos deducir que

$$(4.2) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{i\theta}) - 1| d\theta + \int_r^R \rho \left(\frac{1}{2} - \log A\right) d\rho \geq \int_r^R n \rho \log \frac{\rho}{r} d\rho \gg n.$$

Ahora queremos una cota inferior para la integral protagonista de este lema. Sea  $s_0$  uno de los ceros de  $f$  en  $|s| \leq r$ . Manipulando la integral y aplicando la desigualdad de Jensen y la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt &\geq \iint_{|s - s_0| \leq R - r} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt \\ &= \int_0^{R-r} \int_0^{2\pi} \rho |f(s_0 + \rho e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta d\rho \\ &\geq 2\pi \int_0^{R-r} \rho \left| \int_0^{2\pi} (f(s_0 + \rho e^{i\theta}) - 1) \frac{d\theta}{2\pi} \right|^2 d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{R-r} \rho d\rho \gg 1. \end{aligned}$$

Por tanto, como la segunda integral del lado derecho de (4.2) es  $O_{r, R, A}(1)$ , también es  $O_{r, R, A}\left(\iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt\right)$ , lo que demuestra lo que buscábamos.  $\square$

Con este lema, podemos reducir el problema de contar ceros a estimar la integral de nuestras funciones  $L$  en círculos. Uno de los principales obstáculos de este método es que las funciones  $L$  tienen una estructura mucho más vertical: convergen (condicional o absolutamente) en semiplanos de la forma  $\sigma > \alpha$ , en rectas  $\sigma = \sigma_0 > 1$  son esencialmente una transformada de Fourier con frecuencias logarítmicas, etc... Como consecuencia, al cubrir bandas verticales con círculos, tendremos pérdidas. Nosotros nos centraremos en el siguiente «Plancherel asintótico» atribuido a M. Schnee en el artículo original [Bo-La]: dada una serie de Dirichlet  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  convergente para  $\sigma > 0$ , para cada  $\sigma > \frac{1}{2}$  tenemos el siguiente límite puntual:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma}.$$

Si los primeros  $M$  términos de la serie son nulos, el límite será pequeño. Dicho esto, podemos dar un boceto de la demostración original de Bohr y Landau que nos permitirá ver cuál es la idea y las limitaciones de su desarrollo.

*Boceto de la demostración del Teorema 4.1.* El tratamiento de  $\zeta$  o de  $L(s, \chi_0)$  es ligeramente distinto y lo desarrollaremos en el Teorema 4.7, aquí supondremos que  $\chi$  es no principal. Denotemos

$$L_M(s) = \prod_{p>M} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} = 1 + \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

La función  $L_M$  tendrá los mismos ceros que nuestra función  $L$  en la región en la que las estudiaremos, pero estamos eliminando las oscilaciones bajas con la esperanza de obtener más cancelación.

Queremos integrar en

$$\frac{1}{2} + \delta \leq \sigma \leq S, \quad -T \leq t \leq T$$

para algún  $S > 1$ . El Lema 4.2 solo nos sirve al integrar en círculos, por lo que nos daremos un poco de margen y nos conformaremos con la cota para  $\frac{1}{2}(1 + \delta)$  de la siguiente manera: para cada  $k = -T, \dots, T - 1$ , tomamos círculos concéntricos  $\Gamma_r^k$  y  $\Gamma_R^k$  de radio  $r$  y  $R > r$  que pasen por

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} + \delta + ik, \quad \frac{1}{2} + \delta + i(k+1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} + \delta + i(k-1), \quad \frac{1}{2} + \delta + i(k+2)$$

con  $R$  suficientemente grande (respecto a  $\delta$ ) para que los círculos no toquen el semiplano  $\sigma \leq (1 + \delta)/2$ . Así, el dominio que queremos estudiar está contenido en los círculos pequeños  $\Gamma_r^k$ .

Sea  $S > \frac{7}{2}$  el extremo derecho de los círculos. Como  $S > \frac{7}{2}$ , los centros  $s_k$  de  $\Gamma_R^k$  cumplen  $\Re s_k = \sigma' > 2$ , por lo que tenemos la siguiente cota inferior para  $L_M(s_k)$ :

$$|L_M(s_k)| \geq 1 - \left| \sum_{n \geq M} a_n n^{-\sigma'} \right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Por otro lado, dado que esto es tan solo un esbozo de demostración, vamos a permitirnos asumir que existe una elección del parametro  $M = M(T)$  de forma que

$$(4.4) \quad I_P(T) := \int_{-T}^T |L_M(\sigma + it) - 1|^2 dt = o_{\sigma,q}(T)$$

para todo  $\sigma > \frac{1}{2}$ . Continuando con esta pequeña asunción,

$$\int_{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}}^S \int_{-T}^T |L_M(\sigma + it) - 1|^2 dt d\sigma \ll o_\delta(T).$$

Ahora, como los  $\Gamma_R^k$  con  $|k| < T - 2S$  están contenidos en el dominio sobre el que hemos integrado y para cada punto en el dominio el número de círculos que lo contienen es finito e independiente de  $T$ , tenemos que

$$(4.5) \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T, \chi\right) \ll \sum_{|k| < T - 2S} \iint_{\Gamma_R^k} |L_M(s) - 1|^2 dt d\sigma \\ \ll \int_{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}}^S \int_{-T}^T |L_M(s) - 1|^2 dt d\sigma \ll o_\delta(T),$$

que es lo que buscábamos.

Con esto, esperamos haber convencido al lector de que la clave de este método es lograr obtener una estimación del tipo (4.4). También será importante afinar en (4.5), ya que ahí hay dependencias en  $\delta$  que no hemos especificado. El siguiente lema trata de dar una versión cuantitativa de (4.4):

**Lema 4.3.** Sean  $T \geq 2$ ,  $M = 2 \log_{256} T$  y  $\chi$  un carácter no principal módulo  $q < M$ . Para  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  tenemos la siguiente cota:

$$I_P(T) \ll \frac{T(\log T)^{1-2\sigma}}{2\sigma - 1} + T^{4(1-\sigma)} \log T.$$

*Demostración.* En primer lugar, notamos que  $a_n = \chi_2(n) := \chi(n)\chi_0(n)$ , donde  $\chi_0$  es el carácter principal módulo  $M\# := \prod_{p \leq M} p$ . Se puede deducir que  $M\# \leq 16^M$  de, por ejemplo, [TFG, Proposición 4.4]. Por tanto, como  $a_n$  es un carácter de Dirichlet,

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n \quad \text{cumple} \quad |A(x)| < 16^M.$$

Separemos la serie  $L_M$  en una parte principal y en una cola: para cualquier  $J > M$ ,

$$I_P(T) \leq 2 \int_{-T}^T \left| \sum_{M < n \leq J} a_n n^{-\sigma - it} \right|^2 dt + 2 \int_{-T}^T \left| \sum_{n > J} a_n n^{-\sigma - it} \right|^2 dt =: I_{P,1}(T) + I_{P,2}(T).$$

Para  $I_{P,1}$ , tomamos  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  una función de la clase de Schwartz no negativa tal que  $\phi \geq 1$  en  $[-1, 1]$  y  $\text{sop } \hat{\phi} \subset [-1, 1]$ <sup>1</sup>. Demostrar que función existe es sencillo: dada

<sup>1</sup>Nos acogemos a la convención  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$ .

una función  $\phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  no nula con soporte en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , podemos tomar  $\phi_2 := \widetilde{\phi_1} * \overline{\phi_1}$ , donde  $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ , de forma que

$$\widehat{\phi_2} = \widehat{\phi_1} \cdot \widehat{\phi_1} = \widetilde{\widehat{\phi_1}} \cdot \widehat{\phi_1} = \left| \widehat{\phi_1} \right|^2$$

por cómo se comporta la transformada de Fourier respecto a la convolución, a la reflexión y a la conjugación. Tras esto, como  $\text{sop } \phi_2 \subset [-1, 1]$  y  $\widehat{\phi_2}(0) > 0$  con una dilatación podemos reducir su soporte para asegurar que  $\widehat{\phi_2}(\xi) > 0$  en  $[-1, 1]$ . Elijiendo  $\phi := C\widehat{\phi_2}$  para una constante  $C$  lo suficientemente grande, conseguimos una función con las propiedades que buscábamos.

Denotamos  $\phi_T(t) = \phi(t/T)$ , con  $\widehat{\phi_T}(\xi) = T\widehat{\phi}(T\xi)$  y acotamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_{P,1} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(t) \left| \sum_{M < n \leq J} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \\ &= \sum_{M < n \leq J} \sum_{M < m \leq J} a_n \overline{a_m} (nm)^{-\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(t) e^{-it \log \frac{n}{m}} dt \\ &\ll T \sum_{M < n \leq J} n^{-2\sigma} + T \sum_{M < m < n \leq J} (nm)^{-\sigma} \left| \widehat{\phi} \left( T \log \frac{n}{m} \right) \right|. \end{aligned}$$

La primera suma corresponde a los términos diagonales y la segunda a los no diagonales.

De aquí en adelante, las constantes pueden depender de  $\phi$ , pero como la asumiremos fija esto no supone ningún problema. Con esto, por cómo hemos elegido  $\widehat{\phi}$ , es inmediato que

$$\begin{aligned} (4.6) \quad I_{P,1} &\ll T \sum_{M < n \leq J} n^{-2\sigma} + T \sum_{\substack{M < m < n \leq J \\ n < me^{\frac{1}{T}}}} (nm)^{-\sigma} \\ &\ll T \frac{M^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} + \sum_{M < n \leq J} n^{1-2\sigma} \\ &\ll T \frac{M^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} + \frac{J^{2(1-\sigma)} - M^{2(1-\sigma)}}{2(1-\sigma)} \\ &\ll T \frac{M^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} + \frac{J^{2(1-\sigma)} - 1}{2(1-\sigma)} \\ &\ll T \frac{M^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} + J^{2(1-\sigma)} \log J. \end{aligned}$$

Para acotar  $I_{P,2}$ , aplicamos sumación de Abel a la serie del interior y usamos  $|x+y|^2 \ll |x|^2 + |y|^2$  para separar los términos resultantes:

$$I_{P,2}(T) \ll \int_{-T}^T |A(J)J^{-s}|^2 dt + \int_{-T}^T \left| s \int_J^\infty A(x) x^{-\sigma-1-it} dx \right|^2 dt.$$

La primera integral se acota fácilmente por  $2T (256^M) J^{-2\sigma}$ . Para la segunda, expandimos y repetimos las ideas usando Fubini:

$$\begin{aligned}
& \int_{-T}^T |s|^2 \left| \int_J^\infty A(x) x^{-\sigma-1-it} dx \right|^2 dt \\
& \ll T^2 \int_{-\infty}^\infty \phi_T(t) \int_J^\infty \int_J^\infty A(x) \overline{A(y)} (xy)^{-\sigma-1} e^{-it \log \frac{x}{y}} dy dx dt \\
& \ll T^2 \int_J^\infty \int_J^\infty A(x) \overline{A(y)} (xy)^{-\sigma-1} \int_{-\infty}^\infty \phi_T(t) e^{-it \log \frac{x}{y}} dt dy dx \\
& \ll T^2 \max_{x \geq 1} |A(x)|^2 \int_J^\infty \int_J^\infty (xy)^{-\sigma-1} \left| \int_{-\infty}^\infty \phi_T(t) e^{-it \log \frac{x}{y}} dt \right| dy dx \\
& \leq T^3 (256^M) \int_J^\infty \int_J^\infty (xy)^{-\sigma-1} \left| \widehat{\phi} \left( T \log \frac{x}{y} \right) \right| dy dx \\
& \ll T^2 (256^M) \int_J^\infty x^{-2\sigma-1} dx \\
& \ll T^2 (256^M) J^{-2\sigma}.
\end{aligned}$$

Juntando todos los términos y tomando  $J = T^2$ , llegamos al resultado.  $\square$

Esta versión cuantitativa nos permite demostrar el teorema de Bohr-Landau cuando  $\sigma > \frac{3}{4}$ . Sin embargo, el principal problema es que las estimaciones que hemos obtenido de la cola de la serie son malas porque la cota que podemos dar para  $\max_{x \geq 1} |A(x)|$  es mala. Si pudiésemos mejorar la dependencia en  $M$  de  $A$ , podríamos escoger un  $M$  mucho más grande.

## 4.2. Las sumas parciales de Carlson

La esencia de la táctica de Bohr y Landau se puede resumir en que queremos que  $L_M(s, \chi) - 1$  sea pequeño. Si escribimos

$$L_M(s, \chi) = L(s, \chi) P_M(s, \chi), \quad \text{donde } P_M(s, \chi) = \prod_{p \leq M} (1 - \chi(p) p^{-s}),$$

vemos que  $L_M(s, \chi) - 1$  debería ser pequeño porque  $P_M(s, \chi)$  es una aproximación de  $L(s, \chi)^{-1}$ . En 1920, Carlson introdujo en [Ca] otro método de aproximación de  $L(s, \chi)^{-1}$  bastante natural: usar  $M(s, \chi) = \sum_{m \leq M} \chi(m) \mu(m) m^{-s}$ , es decir, usar sumas parciales en lugar de productos parciales. En el método de Bohr y Landau, podíamos asegurar que  $L_M$  tenía los mismos ceros que  $L$ . Por el contrario, con este estamos sobreestimando el número de ceros porque, como  $M(s, \chi)$  no tiene polos,  $L(s, \chi) M(s, \chi)$  tiene, en general, más ceros que  $L(s, \chi)$ .

La motivación de Carlson era demostrar que los resultados de Bohr y Landau no dependen de la información aritmética que esconden sino que es un resultado que abarca series de Dirichlet más generales. De forma colateral, este método permite refinar el análisis de la sección anterior:

**Lema 4.4.** *Sea  $\chi$  un carácter no principal módulo  $q$  y sean  $T \geq 2$ ,  $M = \sqrt{q}T$ . Para  $\sigma > \frac{3}{4}$ . Se cumple*

$$I(T) := \int_{-T}^T |L(s, \chi)M(s, \chi) - 1|^2 dt \ll (qT)^{4(1-\sigma)} \log^3 qT.$$

*Demostración.* Analicemos la expresión en serie de Dirichlet de nuestro producto:

$$L(s, \chi)M(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \text{donde } a_n = \sum_{\substack{k\ell=n \\ \ell \leq M}} \chi(k)\chi(\ell)\mu(\ell).$$

Recordando que

$$\sum_{k|n} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

vemos que  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 0$  para  $2 \leq n \leq M$  y  $|a_n| \ll \tau(n)$  para  $n > M$ . Además, por la desigualdad triangular y la desigualdad de Pólya-Vinogradov (ver A.8),

$$|A(x)| = \left| \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{k\ell=n \\ \ell \leq M}} \chi(k)\chi(\ell)\mu(\ell) \right| = \left| \sum_{\ell \leq \min(M, x)} \chi(\ell)\mu(\ell) \sum_{k \leq \frac{x}{\ell}} \chi(k) \right| \leq M\sqrt{q} \log q.$$

Continuamos como en el Lema 4.3 con  $J = (qT)^2$ :

$$I(T) \ll \int_{-T}^T \left| \sum_{M < n \leq J} a_n n^{-s} \right|^2 dt + \int_{-T}^T \left| \sum_{n > J} a_n n^{-s} \right|^2 dt =: I_1(T) + I_2(T).$$

Queremos aprovechar que  $|a_n|$  es pequeño en promedio, por lo que, repitiendo las ideas de la demostración anterior,

$$\begin{aligned} I_1(T) &\ll T \sum_{M < n \leq J} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + T \sum_{M < n \leq J} |a_n| n^{-2\sigma} \sum_{ne^{-1/T} < m < n} |a_m| \\ &\ll T \sum_{M < n \leq J} |a_n| n^{-2\sigma} \sum_{ne^{-1/T} < m \leq n} |a_m|. \end{aligned}$$

Acotamos la suma interior como acotaríamos la suma de la función divisor:

$$\begin{aligned} \sum_{ne^{-1/T} < m \leq n} |a_m| &\leq \sum_{ne^{-1/T} < m \leq n} \sum_{\substack{k\ell=m \\ k \leq M}} 1 \\ &= \sum_{k \leq M} \sum_{ne^{-1/T}/k < \ell \leq n/k} 1 \\ &= \sum_{k \leq M} \left( \lfloor n/k \rfloor - \lfloor ne^{-1/T}/k \rfloor \right) \ll \frac{n}{T} \log M. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
I_1(T) &\ll T \sum_{M < n \leq J} |a_n| n^{-2\sigma} \sum_{ne^{-1/T} < m \leq n} |a_m| \\
&\ll \sum_{M < n \leq J} |a_n| n^{1-2\sigma} \log M \\
&\ll \sum_{k \leq M} k^{1-2\sigma} \sum_{M/k < \ell \leq J/k} \ell^{1-2\sigma} \log M \\
&\ll \sum_{k \leq M} k^{1-2\sigma} \left( \frac{(J/k)^{2(1-\sigma)} - (M/k)^{2(1-\sigma)}}{2(1-\sigma)} \right) \log M \\
&\ll \frac{J^{2(1-\sigma)} - M^{2(1-\sigma)}}{2(1-\sigma)} \log^2 M.
\end{aligned}$$

Para quitar el molesto denominador, sustituimos los valores de  $M$  y  $J$  y aplicamos el teorema del valor medio para obtener

$$\frac{(qT)^{4(1-\sigma)} - (qT^2)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \leq \frac{(qT)^{4(1-\sigma)} - (qT)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \ll (qT)^{4(1-\sigma)} \log qT.$$

Para  $I_2$ , repetimos las ideas del Lema 4.3:

$$\begin{aligned}
I_2(T) &\ll \int_{-T}^T |A(J)J^{-s}|^2 dt + \int_{-T}^T \left| s \int_J^\infty A(x)x^{-\sigma-1-it} dx \right|^2 dt \\
&\ll \max_{x \geq 1} |A(x)|^2 (TJ^{-2\sigma} + T^2J^{-2\sigma}) \ll T^2M^2q(\log q)^2J^{-2\sigma}.
\end{aligned}$$

Juntando todo, el segundo término en la estimación de  $I_1$  es el que domina.  $\square$

Como consecuencia de este lema, podemos demostrar una versión cuantitativa del Teorema 4.1 cuando estamos cerca de  $\sigma = 1$ :

**Teorema 4.5.** *Sea  $\chi$  un carácter no principal módulo  $q$  y sean  $\frac{8}{9} < \alpha < 1$ ,  $T \geq 2$ . Entonces,*

$$(4.7) \quad N^*(\alpha, T, \chi) \ll (qT)^{9(1-\alpha)} \log^7 qT.$$

Como ya no estamos haciendo un boceto, necesitaremos una versión más explícita del Lema 4.2:

**Proposición 4.6.** *Si  $A < \sqrt{e}$  en el Lema 4.2, entonces*

$$n \ll \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^4} \iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt,$$

donde la constante depende únicamente de  $A$ .

*Demostración.* Solo hay que mirar con más cuidado la demostración del lema: en (4.2), podemos sustituir  $\gg n$  por

$$= \frac{R^2}{2} \left( \log \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \right) n \geq \frac{(R-r)^2 n}{4}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{1}{4\pi(R-r)^2} \iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt + \frac{R^2 - r^2}{4(R-r)^2} (1 - 2 \log A) \\ &\ll \left( \frac{1}{4\pi(R-r)^2} + \frac{R^2 - r^2}{8\pi(R-r)^4} (1 - 2 \log A) \right) \iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt \\ &\ll \left( \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^4} (1 - 2 \log A) \right) \iint_{|s| \leq R} |f(s) - 1|^2 d\sigma dt, \end{aligned}$$

que es lo que habíamos afirmado.  $\square$

Ahora, podemos demostrar el teorema:

*Demostración del Teorema 4.5.* Podemos asumir que  $\alpha \leq 1 - c_2/\log qT$ . Repetimos la idea de antes, pero ahora tomamos los círculos grandes de forma que no toquen el semiplano  $\sigma < 2\alpha - 1 = \alpha - \varepsilon$ , donde  $\varepsilon := 1 - \alpha$ . En particular, tomamos  $R = (1 + \varepsilon^2)/2\varepsilon$ ,  $r = \sqrt{R^2 - 3}$ , de forma que los círculos cumplen (4.3). Así, en primer lugar, vemos que

$$R - r = \frac{3}{R+r} \gg \frac{1}{R} \implies \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^4} \ll R^4 \ll \frac{1}{(1-\alpha)^4} \ll \log^4 qT.$$

En segundo lugar, notamos que cada círculo interseca con  $O(R) = O(\log qT)$  otros círculos.

En tercer lugar, por el Lema 4.4,

$$\int_{2\alpha-1}^S \int_{-T}^T |L(s, \chi)M(s, \chi) - 1|^2 dt d\sigma \ll (qT)^{8(1-\alpha)} \log^2 qT.$$

Por último, si juntamos todo, vemos que

$$\begin{aligned} N(\alpha, T, \chi) &\ll \sum_{|k| \leq T} (\log qT)^4 \iint_{\Gamma_R^k} |L(s, \chi)M(s, \chi) - 1|^2 dt d\sigma \\ &\ll (\log qT)^5 \int_{2\alpha-1}^S \int_{-T-R}^{T+R} |L(s, \chi)M(s, \chi) - 1|^2 dt d\sigma \\ &\ll (\log qT)^5 (q(T + \log qT))^{8(1-\alpha)} \log^2 q(T + \log qT) \\ &\ll (qT)^{9(1-\alpha)} \log^7 qT, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

Aunque el teorema es cierto sin la restricción  $\alpha \geq \frac{8}{9}$ , no es muy interesante fuera de esa región porque es trivial que, con el Teorema 2.1, para  $\alpha < \frac{8}{9}$ ,

$$N(\alpha, T, \chi) \leq N(T, \chi) \ll T \log qT \ll (qT)^{9(1-\alpha)} \log^5 qT.$$

Además, si imponemos alguna restricción sobre el tamaño de  $q$  respecto al de  $T$ , podemos bajar el exponente a  $8(1-\alpha)$  y simplificar las últimas dos líneas de la demostración.

Tras esto, vamos a estudiar el número de ceros de la función  $\zeta$  o, equivalentemente, el de  $L(s, \chi_0)$  para cualquier carácter principal. Con este método, este caso es ligeramente más complicado que el de las funciones  $L$  de caracteres no principales porque las series no convergen en  $0 < \sigma < 1$  y hay un polo simple en  $s = 1$ . ¿Cuál es la solución? Introducir cancelaciones para quitar el polo, como hace, por ejemplo, la función  $\eta$  de Dirichlet:

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

A pesar de que podemos introducir cancelaciones, la potencia de este método es limitada y no podremos acercarnos demasiado a  $s = 1$  por el polo, lo que motiva a trabajar de forma diádica:

**Teorema 4.7.** *Para  $T \geq 2$  y  $\sigma > \frac{7}{8}$ , tenemos*

$$N(\alpha, T, 2T) \ll T^{8(1-\alpha)} \log^9 T,$$

donde  $N(\alpha, T_1, T_2)$  es el número de ceros con  $\beta \geq \alpha$  y  $T_1 \leq \gamma \leq T_2$ . En particular,

$$N(\alpha, T) \ll T^{8(1-\alpha)} \log^{10} T.$$

Como aquí no hay ningún módulo  $q$  que nos pueda molestar, tenemos el exponente  $8(1-\alpha)$ , aunque en este caso pagamos en forma de logaritmos la introducción artificial de la cancelación.

*Demostración.* Empezamos definiendo

$$Z_M(s) := 1 + (1 - 2^{1-s}) (\zeta(s)M(s) - 1) \quad \text{donde} \quad M(s) = \sum_{m \leq M} \mu(m)m^{-s}.$$

En primera instancia, puede parecer que la estructura de esta función no tiene nada que ver con los ceros de  $\zeta$ . Sin embargo, de esta forma introducimos la cancelación necesaria y podemos recuperar información de la función que nos interesa, ya que, lejos de los ceros de  $1 - 2^{1-s}$ ,

$$|\zeta(s)M(s) - 1| \ll |Z_M(s) - 1|.$$

Continuando con la demostración, observamos que

$$(1 - 2^{1-s}) (\zeta(s)M(s) - 1) = \eta(s)M(s) - (1 - 2^{1-s}),$$

de forma que, salvo por los dos primeros términos, nuestra serie de Dirichlet es  $\eta(s)M(s)$ . En particular, el tamaño de las sumas parciales y la abscisa de convergencia son las de  $\eta(s)M(s)$ . Con esto, para  $\sigma > 1$  tenemos que

$$(4.8) \quad \eta(s)M(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}, \quad \text{donde } b_n = \sum_{\substack{k\ell=n \\ k \leq M}} (-1)^{\ell-1} \mu(k).$$

Cuando  $n \leq M$ , podemos expresar  $b_n$  como una convolución de Dirichlet:

$$b_n = \mu \star (-1)^{\cdot-1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ -2 & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

Esto es inmediato si uno escribe  $\zeta(s)^{-1}\eta(s) = 1 - 2^{1-s}$  o si desarrolla  $\zeta(s)M(s) - 1$  y después multiplica por el factor que quita el polo. Para  $n > M$ ,  $b_n \ll \tau(n)$  como en el resto de ocasiones. Siguiendo el camino marcado por las demostraciones anteriores, buscamos controlar las sumas parciales. En este caso,

$$B(x) = \sum_{n \leq x} b_n = \sum_{k \leq M} \mu(k) \sum_{\ell \leq x/k} (-1)^{\ell-1}$$

por lo que  $|B(x)| \leq M$ . Emulando los resultados de la Proposición 1.17, es inmediato que (4.8) converge para  $\sigma > 0$ .

Continuando con el esquema clásico, con los mismos argumentos que en los resultados pasados, para  $M < J$ ,

$$\int_{-T}^T |Z_M(s) - 1|^2 dt \ll \frac{J^{2(1-\sigma)} - M^{2(1-\sigma)}}{2(1-\sigma)} \log^2 M + T^2 M^2 J^{-2\sigma},$$

y escogiendo  $M = T$ ,  $J = T^2$ , tenemos la estimación

$$\int_{-T}^T |Z_M(s) - 1|^2 dt \ll T^{4(1-\sigma)} \log^3 T.$$

Tras esto, lo que debemos hacer es eliminar el factor  $(1 - 2^{1-s})$ . Este factor se anula en  $s_k = 1 + 2\pi i k / \log 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Como antes, tomamos  $\varepsilon = 1 - \alpha \gg (\log T)^{-1}$ . Fuera de círculos de tamaño  $\varepsilon/2$  centrados en estos ceros,  $1 - 2^{1-s} \gg \varepsilon$ , por lo que

$$|\zeta(s)M(s) - 1| \ll |Z_M(s) - 1| \varepsilon^{-1} \ll |Z_M(s) - 1| \log T.$$

Como  $|f(s)|^2$  es una función subarmónica en el dominio en el que  $f$  es holomorfa, sus medias en circunferencias son una función no decreciente del radio. Con esto, podemos acotar la integral en esos círculos (salvo en el correspondiente a  $s = 1$ ) de la siguiente manera:

$$\iint_{|s-s_k| \leq \varepsilon/2} |\zeta(s)M(s) - 1|^2 dt d\sigma \leq \iint_{\varepsilon/2 \leq |s-s_k| \leq \varepsilon} |\zeta(s)M(s) - 1|^2 dt d\sigma.$$

Esta corona está contenida en la región en la que vamos a integrar, por lo que no contribuirán más que un factor 2. Repitiendo lo que hicimos en la demostración del Teorema 4.5,

$$\begin{aligned}
N(\sigma_0, T, 2T) &\ll \sum_{T \leq |k| \leq 2T} (\log T)^4 \iint_{\Gamma_R^k} |\zeta(s)M(s) - 1|^2 dt d\sigma \\
&\ll (\log T)^5 \int_{2\sigma_0-1}^S \int_{T-R}^{2T+R} |\zeta(s)M(s) - 1|^2 dt d\sigma \\
&\ll (\log T)^7 \int_{2\sigma_0-1}^S \int_{-3T}^{3T} |Z_M(s) - 1|^2 dt d\sigma \\
&\ll T^{8(1-\sigma)} \log^9 T.
\end{aligned}$$

Por último, iterando en subdivisiones diádicas de  $T$ , podemos extender este resultado a  $N(\alpha, T)$  pagando con otro logaritmo más.  $\square$

Con esto, hemos finalizado el estudio individualizado de las funciones  $L$ . El siguiente paso, como se puede intuir por la introducción del capítulo, es extender el estudio a todo un módulo en su conjunto. Podemos combinar las estimaciones que hemos demostrado hasta el momento para obtener la siguiente cota:

$$N(\alpha, T, q) \ll \varphi(q)(qT)^{9(1-\alpha)} \log^{10} qT.$$

El principal problema de esta estimación es claramente la dependencia en  $q$ , por lo que cabe preguntarse si se puede obtener un resultado más fino. Por suerte para nosotros, las relaciones de ortogonalidad entran en juego al sumar todos los caracteres y suavizan el resultado:

**Teorema 4.8.** Sean  $q, T \geq 3$  y  $\alpha > \frac{8}{9}$ . Tenemos

$$N^*(\alpha, T, q) \ll (qT)^{9(1-\alpha)} \log^{10} qT.$$

*Demostración.* En este caso, querremos estudiar

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} |L(s, \chi)M(s, \chi) - 1|^2.$$

Hemos excluido el carácter principal porque no tiene cancelación y ya sabemos controlar el número de ceros de su función  $L$ . Al expandir las series, usar Cauchy-Schwarz para separar la parte principal y la cola e integrar entre  $-T$  y  $T$ , la cola (definida como antes, *i.e.*,  $n, m > J$ ) contribuye  $O(T^2 M^2 q^2 (\log q)^2 J^{-2\sigma})$ , que es la cota que obtuvimos en el Lema 4.4 multiplicada por  $q \geq \varphi(q)$ . En el rango  $M < n \leq J$ , sumamos también el carácter principal para aprovechar toda la potencia de las relaciones de ortogonalidad. Denotemos

$$P(s, \chi) = \sum_{M < n \leq J} \sum_{M < m \leq J} \chi(n) \bar{\chi}(m) c_n c_m (nm)^{-\sigma} e^{-it \log \frac{n}{m}},$$

donde

$$c_n = \sum_{\substack{k|n \\ k \leq M}} \mu(k).$$

La notación puede resultar un poco engañosa aquí: esta función controla el módulo al cuadrado de la parte principal, no es una modificación holomorfa de nuestras funciones  $L$ . Si comparamos con los  $a_n$  definidos en el Lema 4.4, está claro que  $\chi(n)c_n = a_n$ , pero en este caso es preferible separar la dependencia en  $\chi$ , ya que, al sumar todos,

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \pmod{q}} P(s, \chi) &= \sum_{M < n \leq J} \sum_{M < m \leq J} \sum_{\chi \pmod{q}} \chi(n) \bar{\chi}(m) c_n c_m (nm)^{-\sigma} e^{-it \log \frac{n}{m}} \\ &= \varphi(q) \sum_{M < n \leq J} \sum_{\substack{M < m \leq J \\ m \equiv n \pmod{q}}} c_n c_m (nm)^{-\sigma} e^{-it \log \frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

Repetiendo la misma idea que en el Lema 4.4,

$$\int_{-T}^T \sum_{\chi \pmod{q}} P(s, \chi) dt \ll qT \sum_{M < n \leq J} |c_n| n^{-2\sigma} \sum_{\substack{ne^{-1/T} < m \leq n \\ m \equiv n \pmod{q}}} c_m,$$

y volvemos a acotar la suma interior:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{ne^{-1/T} < m \leq n \\ m \equiv n \pmod{q}}} |a_m| &\leq \sum_{\substack{ne^{-1/T} < m \leq n \\ m \equiv n \pmod{q}}} \sum_{\substack{k\ell=m \\ k \leq M}} 1 \\ &\ll \sum_{k \leq M} \sum_{\substack{ne^{-1/T}/k < \ell \leq n/k \\ \ell \equiv k^{-1} \pmod{q}}} 1 \\ &\ll \frac{1}{q} \sum_{k \leq M} [n/k] - [ne^{-1/T}/k] \ll \frac{n}{qT} \log M. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\int_{-T}^T \sum_{\chi \pmod{q}} P(s, \chi) dt \ll \frac{J^{2(1-\sigma)} - M^{2(1-\sigma)}}{2(1-\sigma)} \log^2 M.$$

Llegados a este punto, basta repetir el desarrollo de los teoremas anteriores y notar que el exponente del logaritmo corresponde a la contribución del carácter principal.  $\square$

### 4.3. Estimaciones de densidad libres de logaritmos

Aunque las estimaciones de densidad anteriores dan lugar a resultados potentes y por lo general el objetivo es reducir la constante de la potencia, el teorema de Linnik necesita un resultado un poco más fino cerca de  $\sigma = 1$ : buscamos estimaciones libres de logaritmos, es decir,

$$(4.9) \quad N^*(\alpha, T, q) \ll (qT)^{A(1-\sigma)}$$

para alguna constante  $A$ . La región libre de ceros clásica se queda corta para demostrar un resultado así y, de hecho, de este resultado de densidad es sencillo deducir una región libre de ceros clásica.

Una de las ideas fundamentales de esta sección es trabajar al revés de como lo hemos hecho hasta ahora: queremos obtener información de los ceros a través de sumas sobre primos. Esto se puede ver en, por ejemplo, los últimos comentarios de [Da, Chapter 18], donde argumenta que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \psi(x) = x + O(x^{\alpha+\varepsilon}) \implies \text{todo cero } \rho = \beta + i\gamma \text{ de } \zeta \text{ cumple } \beta \leq \alpha,$$

es decir, información sobre cómo de bien se puede aproximar una suma sobre primos (y sus potencias) nos permite deducir resultados sobre los ceros de  $\zeta$ . En el caso del teorema que veremos, la información sobre las sumas de primos se apoya en la desigualdad de Brun-Titchmarsh, que tiene su origen en la teoría de cribas. Aunque puede desilusionar el uso de tecnología que no hemos mencionado hasta ahora, no sería sensato esperar alguna mejora usando resultados que ya hemos introducido, pues estos se apoyan de forma bastante explícita en la distribución de los ceros.

El otro pilar fundamental de la demostración es la idea de «aislar» los ceros, de sumarlos sin que haya cancelación. Una suma sobre ceros puede ser pequeña porque hay pocos ceros o porque, aunque hay muchos, se están cancelando de alguna manera. El segundo teorema principal de Turán, recogido en el apéndice, nos da una forma de evitar la cancelación en la medida de lo posible.

Antes de enunciar el teorema principal de la sección, que será una estimación del tipo (4.9), demostraremos el siguiente lema:

**Lema 4.9.** *Sea  $n(r, t, \chi)$  el número de ceros  $\rho$  de  $L(s, \chi)$  con  $|\rho - (1 + it)| \leq r$ . Dados  $T \geq 2$ ,  $q > 2$  y  $(\log qT)^{-1} \leq r \leq 1$ , para  $t \ll T$  se tiene  $n(r, t, \chi) \ll r \log qT$ .*

*Demostración.* Sea  $s_0 = 1 + r + it$ , de forma que, como  $1 + r > 1$ ,  $\Re(s_0 - \rho)^{-1} \geq 0$  para todo cero  $\rho = \beta + i\gamma$ . Si  $|\rho - (1 + it)| \leq r$ , entonces

$$\Re \frac{1}{s_0 - \rho} = \frac{1 - \beta + r}{|\rho - (1 + it) - r|^2} \geq \frac{1}{4r}.$$

Por otro lado, recordando (2.1),

$$\begin{aligned} \Re \sum_{|\rho - (1 + it)| \leq r} \frac{1}{s_0 - \rho} &\leq \Re \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} + O(\log qT) \\ &\leq -\frac{\zeta'(1 + r)}{\zeta(1 + r)} + O(\log qT) \ll \frac{1}{r} + O(\log qT) \ll \log qT. \end{aligned}$$

Juntando estas dos cosas, el número de ceros que estamos contando

$$\sum_{|\rho - (1 + it)| \leq r} 1 \ll r \sum_{|\rho - (1 + it)| \leq r} \Re \frac{1}{s_0 - \rho} \ll r \log qT,$$

tal y como buscábamos. □

Ahora, pasamos al teorema:

**Teorema 4.10** (Linnik). *Sea  $N^*(\alpha, T, q)$  el número de ceros en (4.1) de todas las funciones  $L(s, \chi)$ ,  $\chi$  módulo  $q$ , distintos al excepcional, con  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  y  $T \geq 2$ . Existe una constante  $d > 2$  tal que*

$$N^*(\alpha, T, q) \ll (qT)^{d(1-\alpha)}.$$

La demostración es técnica, por lo que conviene tener en cuenta las dos ideas que hemos comentado al principio de la sección para no perderse en los detalles. Hemos adaptado la demostración dada en el borrador del libro [Mo-Va3]. Para evitar usar las notaciones de  $O$  y  $\ll$ , que entorpecerían el desarrollo del principio de la demostración, denotaremos por  $a_1, a_2, \dots$  constantes absolutas que solo dependen de las constantes anteriores.

*Demostración.* En primer lugar, vemos que

$$1 - \alpha < c_2(\log qT)^{-1} \implies N^*(\alpha, T, q) = 0,$$

por lo que podemos suponer que  $1 - \alpha \geq c_2(\log qT)^{-1}$ . Recordamos que, en este trabajo, la constante  $c_2$  con la que se definen los ceros excepcionales es  $< \frac{1}{2}$ . Sea  $r = c_2^{-1}(1 - \alpha)$ , de forma que  $(\log qT)^{-1} \leq r$ . Podemos restringirnos a  $r \leq \frac{1}{128e^2}$  porque solo nos interesa estudiar el caso en el que  $\alpha$  está arbitrariamente cerca de 1. La elección de esa constante se debe al Teorema A.9 y quedará claro a lo largo de la demostración por qué se elige así.

Supongamos que  $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$  es un cero distinto al posible cero excepcional con  $\beta_0 \geq \alpha$  y  $|\gamma_0| \leq T$ . Tomemos  $v$  tal que  $|\gamma_0 - v| \leq \frac{r}{2}$ , de forma que  $|v| \leq T + 1$  y  $|\rho_0 - w| \leq r$ , donde  $w = 1 + iv$ . Partimos de (2.3) con  $|t| \ll T$ :

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{|\rho-s|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log qT).$$

Si  $|s - w| \leq \frac{3}{4}$ , entonces para cada  $|\rho - w| \geq 1$  se tiene que  $|\rho - s| \geq \frac{1}{4}$ , por lo que podemos escribir

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{|\rho-s|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log qT) = \sum_{|\rho-w|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log qT).$$

Así, para cierta constante  $a_1$  tenemos que

$$g(s, \chi) := \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} - \sum_{|\rho-w|<1} \frac{1}{s-\rho} \quad \text{cumple} \quad |g(s, \chi)| \leq a_1 \log qT.$$

Por la fórmula integral de Cauchy, si  $|s - w| \leq \frac{1}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu!} \left| g^{(\nu)}(s, \chi) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\frac{3}{4}} \frac{g(z, \chi)}{(z-s)^{\nu+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{4^{\nu+1}}{2\pi} \int_{|w-z|=\frac{3}{4}} |g(z, \chi)| |dz| \leq a_3 4^\nu \log qT. \end{aligned}$$

Sea  $s_0 = w + r$ . Es trivial que, por definición,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{d^\nu}{ds^\nu} \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} - \sum_{|\rho-w| \leq 32e^2r} \frac{1}{(s_0 - \rho)^{\nu+1}} \right| \\ \leq \frac{1}{\nu!} \left| g^{(\nu)}(s_0, \chi) \right| + \left| \sum_{32e^2r < |\rho-w| \leq 1} \frac{1}{(s_0 - \rho)^{\nu+1}} \right|. \end{aligned}$$

Como  $|s_0 - w| = r \leq \frac{1}{2}$  y  $4 \leq (32e^2r)^{-1}$ , podemos acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu!} \left| g^{(\nu)}(s_0, \chi) \right| + \left| \sum_{32e^2r < |\rho-w| \leq 1} \frac{1}{(s_0 - \rho)^{\nu+1}} \right| \\ \leq a_2 4^\nu \log qT + a_4 (32e^2r)^{-\nu} \log qT \leq a_5 (32e^2r)^{-\nu} \log qT. \end{aligned}$$

Esta cota en la segunda suma se deduce con sumación de Abel en lugar de acotar sin cuidado. El número de ceros con  $|\rho - w| \leq r$  es  $n(r, v, \chi) \leq a_6 r \log qT$  por el Lema 4.9. Por el segundo teorema principal de Turán (ver Teorema A.9), para  $K \geq n(r, v, \chi) + 1$  existe un número  $\nu$ ,  $K \leq \nu \leq 2K - 1$  tal que

$$\left| \sum_{|\rho-w| \leq r} \frac{1}{(s_0 - \rho)^{\nu+1}} \right| \geq 2(16e)^{-\nu-1} \max_{|\rho-w| \leq r} |s_0 - \rho|^{-\nu-1} \geq 2(32er)^{-\nu-1},$$

donde la segunda desigualdad se debe a que  $|s_0 - \rho_0| \leq |s_0 - w| + |w - \rho_0| \leq 2r$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{d^\nu}{ds^\nu} \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} \right| &\geq 2(32er)^{-\nu-1} - a_3 (32e^2r)^{-\nu} \log qT \\ &= 2(32er)^{-\nu-1} \left( 1 - \frac{a_7 r \log qT}{e^\nu} \right). \end{aligned}$$

Si  $K \geq a_8 r \log qT \geq a_8$  para cierto  $a_8 \geq \max(a_6 + 1, 2000)^2$  suficientemente grande tendremos que

$$1 - \frac{a_7 r \log qT}{e^\nu} \geq \frac{1}{2},$$

de forma que

$$\frac{1}{\nu!} \left| \frac{d^\nu}{ds^\nu} \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} \right| \geq (32er)^{-\nu-1} \geq (100r)^{-\nu-1}.$$

Por otro lado, como  $s_0$  tiene parte real mayor que 1, la función que estamos acotando admite la siguiente expresión:

$$\frac{r^\nu}{\nu!} \frac{d^\nu}{ds^\nu} \frac{L'(s_0, \chi)}{L(s_0, \chi)} = (-1)^{\nu+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r \log n)^\nu \Lambda(n) \chi(n)}{\nu! n^{s_0}}.$$

<sup>2</sup>La cota  $a_6 + 1$  se toma para que  $K \geq n(r, v, \chi) + 1$  y la cota 2000 se toma porque después querremos que  $X$ , definido posteriormente, sea  $\geq (qT)^2$ .

Esta es la suma de la que hablábamos al principio de la sección. Para poder trabajar con ella en varios ceros y varios caracteres a la vez, debemos pulirla eliminando la cola, el inicio y la dependencia en  $\nu$ . Sea  $h_\nu(x) := \frac{1}{\nu!} x^\nu e^{-x}$ . Vemos que, ahora,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\nu(r \log n) \Lambda(n) \chi(n)}{n^w} \right| = \frac{r^\nu}{\nu!} \left| \frac{d^\nu}{ds^\nu} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right| \geq \frac{1}{100^{\nu+1} r}.$$

La función  $h_\nu$  tiene su máximo en  $x = \nu$ . Si  $\nu \geq 900x$ , entonces

$$h_\nu(x) = \frac{x^\nu e^{-x}}{\nu!} \leq \left( \frac{ex}{\nu} \right)^\nu e^{-x} \leq 300^{-\nu}.$$

Por otro lado,  $\tilde{h}_\nu(x) := \frac{1}{\nu!} x^\nu e^{-\frac{x}{2}}$  es decreciente para  $x \geq 2\nu$ , de modo que para  $x \geq 20\nu$  se tiene

$$h_\nu(x) = \tilde{h}_\nu(x) e^{-\frac{x}{2}} \leq \tilde{h}_\nu(20\nu) e^{-\frac{x}{2}} \leq \left( \frac{20e}{e^{10}} \right)^\nu e^{-\frac{x}{2}} \leq 300^{-\nu} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Sea  $x = (qT)^{a_8}$ , y tomemos  $K = \lceil r \log x \rceil > n(r, t, \chi)$ . Así,

$$r \log x \leq \nu \leq 2r \log x,$$

por lo que, para  $n \leq x^{1/900} =: X$  tenemos  $900r \log n \leq \nu$  y para  $n \geq x^{40} =: Y$  tenemos  $r \log n \leq 20\nu$ . Con esto, como  $h_\nu \leq 1$ , la contribución del inicio y de la cola es

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq X \vee n \geq Y} \frac{h_\nu(r \log n) \Lambda(n) \chi(n)}{n^w} \right| &\leq \sum_{n \leq X} \frac{\Lambda(n)}{n} (300)^{-\nu} + \sum_{n \geq Y} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\frac{r}{2}}} (300)^{-\nu} \\ &\leq a_9 (\log x + r^{-1}) (300)^{-\nu} \\ &\leq \frac{2a_9 \nu \cdot 3^{-\nu}}{100^\nu r} \end{aligned}$$

porque  $r \log x + 1 \leq 2r \log x \leq 2\nu$ . La constante  $a_9$  no depende de  $a_8$ , por lo que si a  $a_8$  le exigimos también que  $2a_9 \nu \cdot 3^{-\nu} \leq \frac{1}{200}$ , entonces

$$(4.10) \quad \left| \sum_{X \leq n \leq Y} \frac{h_\nu(r \log n) \Lambda(n) \chi(n)}{n^w} \right| \geq \frac{1}{200r 100^\nu}.$$

Además, sumando por partes, podemos separar la dependencia en  $\nu$

$$\sum_{X \leq n \leq Y} \frac{h_\nu(r \log n) \Lambda(n) \chi(n)}{n^w} = \Delta(Y, \nu, \chi) h_\nu(r \log Y) - r \int_X^Y \Delta(y, \nu, \chi) h'_\nu(r \log y) \frac{dy}{y},$$

donde  $\Delta(x, \nu, \chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) n^{-w}$ . Por un lado,

$$|\Delta(Y, \nu, \chi)| \leq \sum_{n \leq Y} \Lambda(n) n^{-1} \leq a_{10} \log x,$$

de forma que, aumentando nuevamente el valor de  $a_8$  si fuese necesario,

$$|\Delta(Y, v, \chi)h_\nu(r \log Y)| \leq a_{10}(\log x)300^{-\nu}e^{-\frac{r \log Y}{2}} \leq \frac{a_{10}\nu 3^{-\nu}}{100^\nu r} \leq \frac{1}{400r100^\nu}.$$

Juntando esto con (4.10),

$$\left| r \int_X^Y \Delta(y, v, \chi)h'_\nu(r \log y) \frac{dy}{y} \right| \geq \frac{1}{400r100^\nu}.$$

Tras esto, dado que  $|h'_\nu(x)| \leq 1$ , tomando valores absolutos,

$$\int_X^Y |\Delta(y, v, \chi)| \frac{dy}{y} \geq \frac{1}{400r^2100^\nu},$$

y con Cauchy-Schwarz, dado que la medida (respecto a  $\frac{dy}{y}$ ) del conjunto donde integramos es  $\ll \log x$ ,

$$\int_X^Y |\Delta(y, v, \chi)|^2 \frac{dy}{y} \gg \frac{1}{100^{2\nu}r^4 \log x} \geq \frac{\log^3 x}{100^{4r \log x} (r \log x)^4} \geq x^{-20r} \log^3 x.$$

Ahora, integrando en los valores de  $v$  que cumplen  $|\gamma_0 - v| \leq \frac{r}{2}$ , tenemos que

$$\int_X^Y \int_{\gamma_0 - \frac{r}{2}}^{\gamma_0 + \frac{r}{2}} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y} \gg rx^{-20r} \log^3 x.$$

Con esto, hemos terminado la primera mitad de la demostración, que consiste en eliminar la dependencia en  $\nu$  de nuestra suma para obtener una expresión que detecte ceros.

El siguiente paso es sumar la expresión sobre todos los ceros (salvo el posible cero excepcional) y sobre todos los caracteres:

$$\begin{aligned} N^*(\alpha, T, q) &\ll \frac{x^{20r}}{r \log^3 x} \int_X^Y \sum_{\chi \pmod{q}} \sum_{\beta \geq \alpha, |\gamma| \leq T} \int_{\gamma - \frac{r}{2}}^{\gamma + \frac{r}{2}} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y} \\ &\leq \frac{x^{20r}}{\log^3 x} \int_X^Y \sum_{\chi \pmod{q}} \int_{-T-r}^{T+r} \sum_{|\gamma-v| \leq r} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y} \\ &\ll \frac{x^{20r}}{\log^2 x} \int_X^Y \sum_{\chi \pmod{q}} \int_{-T-r}^{T+r} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

La última acotación se debe a que el número de ceros en la suma que hemos eliminado es  $\ll r \log T \ll r \log x$ . Lo último que nos falta es estudiar la suma sobre los caracteres. Repetiremos la estrategia que hemos usado a lo largo del capítulo:

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \pmod{q}} \int_{-2T}^{2T} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv &\leq \sum_{\chi \pmod{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(v) \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \\ &\ll \varphi(q)T \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ m \equiv a \pmod{q}}} \sum_{\substack{X \leq m \leq Y \\ m \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)\Lambda(m)}{nm} \left| \hat{\phi} \left( T \log \frac{n}{m} \right) \right| =: I_d + I_r, \end{aligned}$$

donde  $I_d$  corresponde a los términos diagonales e  $I_r$  corresponde al resto. Por un lado, como  $n \geq X \geq (qT)^2$ ,

$$I_d \ll \varphi(q)T \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)^2}{n^2} \leq \sum_{X \leq n \leq Y} \frac{\Lambda(n)^2}{n^{\frac{3}{2}}} \ll 1.$$

Por otro lado, cuando los términos son distintos, tenemos

$$\begin{aligned} I_d &\ll T\varphi(q) \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \sum_{\substack{n < m \leq Y \\ m \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)\Lambda(m)}{nm} \left| \hat{\phi} \left( T \log \frac{n}{m} \right) \right| \\ &\ll T\varphi(q) \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)}{n} \sum_{\substack{n < m \leq n + \frac{n}{T} \\ m \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(m)}{m} \\ &\ll T\varphi(q) \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^2} \left( \pi \left( n + \frac{n}{T}; q, a \right) - \pi(n; q, a) \right). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Brun-Titchmarsh (ver Teorema A.10),

$$\begin{aligned} I_2 &\ll T\varphi(q) \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^2} \left( \pi \left( n + \frac{n}{T}; q, a \right) - \pi(n; q, a) \right) \\ &\ll T\varphi(q) \sum_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X \leq n \leq Y \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^2} \left( \frac{n}{T\varphi(q) \log \frac{n}{qT}} \right) \\ &\ll \sum_{X \leq n \leq Y} \frac{\Lambda(n)}{n} \\ &\ll \log x. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} N^*(\alpha, T, q) &\ll \frac{x^{20r}}{\log^2 x} \int_X^Y \sum_{\chi \pmod{q}} \int_{-T-r}^{T+r} \left| \sum_{X \leq n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y} \\ &\ll \frac{x^{20r}}{\log^2 x} \int_X^Y (\log x) \frac{dy}{y} \ll x^{20r}, \end{aligned}$$

que, dado que  $x = (qT)^{as}$ , es lo que buscábamos.  $\square$

#### 4.4. El teorema de Linnik para «la mitad de las progresiones»

Como se puede intuir con los intentos de demostración de este teorema que dimos en la última sección del capítulo anterior, la existencia del cero puede jugar a nuestro

favor o en contra de nosotros dependiendo de qué residuo estemos analizando. Los casos del teorema de Linnik en los que juega a nuestro favor y los casos en los que no existe este complicado cero son bastante más sencillos y podemos demostrarlos ahora:

**Teorema 4.11** (Linnik). *Existe una constante efectiva  $L$  tal que*

$$p_{\min}(a, q) \leq q^L$$

para todo  $a$  coprimo con  $q$  para el que el posible carácter excepcional  $\chi_1$  módulo  $q$  cumple  $\chi_1(a) = -1$ . En particular, el resultado es cierto para todo  $(a, q) = 1$  cuando no hay cero excepcional módulo  $q$ .

Esto demuestra el teorema de Linnik para (al menos) la mitad de las progresiones aritméticas, ya que, si existe el carácter excepcional, la ortogonalidad de los caracteres nos muestra que

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q-1 \\ (a, q)=1}} \chi_1(a) = 0,$$

y, como  $\chi_1$  es real, la mitad de los residuos tendrán esa propiedad.

Por otro lado, en las demostraciones modernas que he visto ([Iw-Ko, Chapter 18] y [Mo-Va3, §28.8], por ejemplo), no se hace esta distinción del valor de  $\chi_1(a)$  que sí hace la demostración original de Linnik: en el primer artículo [Li1], demuestra este mismo resultado y finaliza con comentarios sobre las distintas caracterizaciones de la propiedad  $\chi_1(a) = -1$ , como ser residuo no cuadrático; y en el segundo [Li2], refina el análisis del caso en el que se asume la existencia del cero de Siegel para demostrar el caso restante, que es el que nos falta.

Pasemos a los resultados. La estrategia es la misma que usamos la última vez: usar las fórmulas explícitas y confiar en poder mejorar el término de error. Vamos a readaptar lo que hemos hecho para poder aplicarles mejor los teoremas de densidad.

*Demostración.* Sea  $x > q^{4d}$ ,  $T = x^{1/2d}$ . En la demostración del Lema 3.10 obtuvimos la expresión (3.4). Partiendo de ahí, vemos que

$$b(\chi) = - \sum_{|\gamma| \leq 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2-\rho} \right) - \sum_{|\gamma| \geq 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2-\rho} \right) + O(1).$$

Como en la demostración original, ese segundo sumatorio es  $O(\log q)$ . En el primer sumatorio, volvemos a separar:

$$\sum_{|\gamma| \leq 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2-\rho} \right) = \sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} \frac{1}{\rho} + \sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} \frac{1}{2-\rho} + \sum_{\beta \geq \frac{3}{4}, |\gamma| \leq 1} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2-\rho} \right),$$

y ahora el segundo y el tercer subsumatorios están formados por  $O(\log q)$  términos de tamaño  $\ll 1$ . Por tanto,

$$b(\chi) = - \sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} \frac{1}{\rho} + O(\log q).$$

Ahora, en la demostración del Teorema 3.11, sustituyendo lo que acabamos de deducir, obtenemos que, para caracteres primitivos,

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} \frac{x^\rho - 1}{\rho} - \sum_{|\gamma| < T}^* \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 qx}{T} + \log q\right),$$

donde ahora  $\sum^*$  excluye los términos de la primera suma y el correspondiente al posible cero de Siegel. Para esa primera suma, volvemos a aplicar el teorema del valor medio, esta vez en su versión compleja:

$$\sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} \frac{x^\rho - 1}{\rho} \ll \sum_{\beta < 1/4, |\gamma| \leq 1} x^{\frac{1}{4}} \log x \ll x^{\frac{1}{4}} \log qx.$$

Teniendo en cuenta estas observaciones y extendiéndolas a los caracteres imprimitivos de la forma habitual,

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_x \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\chi_1(a) x^{\beta_1}}{\varphi(q) \beta_1} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{x \pmod{q}} \bar{\chi}(a) \sum_{|\gamma_x| \leq T}^* \frac{x^{\rho_x}}{\rho_x} + R(x, q, T),$$

donde

$$R(x, q, T) \ll \frac{x \log^2 qx}{T} + x^{\frac{1}{4}} \log qx.$$

Hemos deducido esta formulación para evitar denominadores muy cercanos a 0. Del resto de los ceros con  $\beta < \frac{1}{2}$  nos podemos olvidar porque estarán dominados por los correspondientes ceros reflejados, así que, como no aprovecharemos ninguna posible cancelación, como mucho pueden duplicar el tamaño de la suma. Con esto en mente,

$$\frac{x^{\rho_x}}{\rho_x} \ll \frac{1}{|\rho_x|} \left( x^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_x} x^\alpha \log x \, d\alpha \right) \ll \min\left(1, \frac{1}{|\gamma_x|}\right) \left( x^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_x} x^\alpha \log x \, d\alpha \right).$$

Aplicando esta acotación a los ceros con  $|\gamma_x| \leq q$  y usando el Teorema 4.10,

$$\begin{aligned} (4.11) \quad \sum_{x \pmod{q}} \sum_{|\gamma_x| \leq q}^* \frac{x^{\rho_x}}{\rho_x} &\ll \sum_{x \pmod{q}} \sum_{\beta_x \geq \frac{1}{2}, |\gamma_x| \leq q} \left( x^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_x} x^\alpha \log x \, d\alpha \right) \\ &\ll N\left(\frac{1}{2}, q, q\right) x^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1-c_2/2 \log q} x^\alpha N(\alpha, q, q) \log x \, d\alpha \\ &\ll x^{\frac{1}{2}} q^d + \frac{x^{1-c_2/2 \log q} \log x}{\log x - 2d \log q} \ll x^{\frac{3}{4}} + x^{1-c_2/2 \log q}. \end{aligned}$$

Para el resto de los ceros, aprovechamos que el denominador es grande y repetimos lo anterior:

$$\sum_{x \pmod{q}} \sum_{q \leq |\gamma_x| \leq T}^* \frac{x^{\rho_x}}{\rho_x} \ll \frac{1}{q} \sum_{x \pmod{q}} \sum_{\beta_x \geq \frac{1}{2}, |\gamma_x| \leq T} \left( x^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_x} x^\alpha \log x \, d\alpha \right) \ll \frac{x}{q}.$$

Juntando todo,

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} \left( 1 - \frac{\chi_1(a)x^{\beta_1-1}}{\beta_1} + O\left(\frac{1}{q} + \exp\left(-\frac{c_2 \log x}{2 \log q}\right)\right) \right).$$

Hemos omitido los elementos correspondientes al término de error porque, al sacar factor común  $x/\varphi(q)$ , son despreciables y podemos hacer que dependan únicamente de  $x$ , por lo que no nos interesarán cuando  $q$  sea lo suficientemente grande. Por la misma razón, con la Proposición 3.16 podemos sustituir  $\psi$  por  $\vartheta$  y obtener

$$(4.12) \quad \vartheta(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} \left( 1 - \frac{\chi_1(a)x^{\beta_1-1}}{\beta_1} + O\left(\frac{1}{q} + \exp\left(-\frac{c_2 \log x}{2 \log q}\right)\right) \right).$$

Por último, si  $C$  es la constante oculta, como  $\chi_1(a) = -1$ , para  $q > 2C$  suficientemente grande y para  $x \geq q^L$ , donde  $L > \max(4d, 2c_2^{-1} \log 2C)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \vartheta(x; q, a) &\geq \frac{x}{\varphi(q)} \left( 1 + \frac{x^{\beta_1-1}}{\beta_1} - C \left( \frac{1}{q} + \exp\left(-\frac{c_2 \log x}{2 \log q}\right) \right) \right) \\ &> \frac{x}{\varphi(q)} \left( 1 + \frac{x^{\beta_1-1}}{\beta_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

En resumen, como  $\vartheta(x; q, a) > 0$ , necesariamente se tiene que  $p_{\min}(a, q) \leq q^L$ .  $\square$

## 4.5. El fenómeno de Deuring-Heilbronn

Para completar el teorema de Linnik necesitaremos un resultado más fuerte, conocido como el fenómeno de Deuring-Heilbronn (en inglés, «Deuring-Heilbronn phenomenon» o «exceptional zero repulsion»), acerca de la distribución de los ceros en el caso en el que asumimos que el cero excepcional existe. Esta mejora es debida a Linnik y se basa en la observación de Deuring y Heilbronn de que, cuando asumimos que hay un cero excepcional, el resto de ceros se alejan de la recta  $\sigma = 1$ , por lo que tenemos una región libre de ceros más amplia.

Una de las formas de justificar por qué podría ser razonable esperar mejoras cuando hay un carácter excepcional  $\chi_1$  es la siguiente: dado que  $1 - \beta_1$  es (en cierta medida) comparable con  $L(1, \chi_1)$ , para  $\sigma > 1$  lo suficientemente cercano a 1 tendremos que  $L(\sigma, \chi_1) = \prod_p (1 - \chi_1(p)p^{-\sigma})^{-1}$  es muy pequeño, por lo que  $\chi_1(p) = -1$  para muchos primos  $p$  no muy grandes. Por tanto,  $\chi_1$  emula relativamente bien a la función  $\mu$  y sigue teniendo las ventajas de los caracteres como la periodicidad. Aunque estas ideas se modifican un poco al inicio de la demostración, al final vuelven a aparecer de forma bastante explícita. Aquí presentaremos el resultado en forma de teorema de densidad:

**Teorema 4.12.** *Supongamos que existe un cero excepcional  $\beta_1$ . Denotemos por  $q_1$  el módulo del correspondiente carácter excepcional  $\chi_1$  y  $\delta_1 = 1 - \beta_1$ . Sean  $N^*(\alpha, T, q)$ ,  $\alpha$  y  $T$  como en el Teorema 4.10. Existe una constante efectiva  $d' > 2$  tal que*

$$N^*(\alpha, T, q_1) \leq \delta_1 (\log q_1 T) (q_1 T)^{d'(1-\alpha)}.$$

El primer instinto que uno puede tener es preguntarse por qué este teorema es mejor si hemos vuelto a hacer aparecer un logaritmo. La respuesta es sencilla:  $\delta_1 \log q_1 T$  será pequeño cuando  $T \leq q_1^A$  para cualquier potencia  $A$  fija porque, por la definición de los ceros de Siegel,  $\delta_1 \log q_1$  se hace arbitrariamente pequeño cuando consideramos módulos excepcionales cada vez más grandes.

Este teorema es posterior y más potente que el que demostró Linnik, que era una región libre de ceros parecida a la del futuro Corolario 4.13. Gran parte de esta demostración es, en esencia, igual que la del teorema de densidad libre de logaritmos.

*Demostración.* Repetimos el desarrollo inicial del teorema de densidad anterior salvo porque asumimos  $r < 1/20000 (< 1/128e^2)$  y estudiamos la suma

$$D(s, \chi) := \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + \frac{L'(s + \delta_1, \chi\chi_1)}{L(s + \delta_1, \chi\chi_1)}.$$

En lo respectivo a este segundo sumando, los términos estarán desplazados porque el desarrollo lo hacemos con  $s + \delta_1$  en lugar de con  $s$ . La expresión en serie de la derivada  $\nu$ -ésima de esta función ahora es

$$\frac{d^\nu}{ds^\nu} D(s_0, \chi) = (-1)^{\nu+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^\nu \Lambda(n) \chi(n)}{n^{s_0}} \left(1 + \chi_1(n) n^{-\delta_1}\right).$$

Aquí hay que tener en cuenta la contribución de los ceros de  $L(s, \chi\chi_1)$ , pero la cota es parecida. En este caso, será más conveniente deshacernos de la contribución de las potencias de los primos. Partiendo del análogo de (4.10), como  $h_\nu \leq 1$ , la suma sobre estas potencias es, en valor absoluto,

$$\begin{aligned} \leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{X \leq p^m \leq Y} \frac{\log p}{p^m} &\leq 2 \sum_{m=2}^{\infty} X^{-m+1} \sum_{X^{1/m} \leq p \leq Y^{1/m}} \frac{\log p}{p} \\ &\leq 4 \sum_{m=2}^{\infty} X^{-m+1} \frac{\log Y}{m} \ll X^{-\frac{1}{2}} = x^{-1/1800}. \end{aligned}$$

Aumentando el valor de  $a_8$  si fuese necesario, podemos suponer que la contribución es  $< x^{-1/2000}$ . Por otro lado,

$$400r100^\nu \leq 100^{2r \log x} = x^{2r \log 100} < x^{10/20000} = x^{1/2000},$$

por lo que la contribución de los primos ahora es

$$\left| \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{h_\nu(r \log p) \chi(p) \log p}{p^w} \left(1 + \chi_1(p) p^{-\delta_1}\right) \right| \geq \frac{1}{400r100^\nu}.$$

Imitando los razonamientos y la notación y haciendo los cambios oportunos, podemos demostrar que

$$\int_X^Y \int_{\gamma_0 - \frac{r}{2}}^{\gamma_0 + \frac{r}{2}} \left| \sum_{X \leq p \leq y} \frac{\chi(p) \log p}{p^{1+iv}} \left(1 + \chi_1(p) p^{-\delta_1}\right) \right|^2 dv \frac{dy}{y} \gg r x^{-20r} \log^3 x,$$

de forma que ahora, con  $b(p) := 1 + \chi_1(p)p^{-\delta_1}$ ,

$$\begin{aligned} N^*(\alpha, T, q_1) &\ll \frac{x^{20r}}{\log^2 x} \int_X^Y \sum_{\chi \pmod{q_1}} \int_{-T-r}^{T+r} \left| \sum_{X \leq p \leq y} \frac{b(p)\chi(p) \log p}{p^{1+iv}} \right|^2 dv \frac{dy}{y} \\ &\ll \frac{x^{20r}}{\log x} \max_{X \leq y \leq Y} \sum_{\chi \pmod{q_1}} \int_{-T-r}^{T+r} \left| \sum_{X \leq p \leq y} \frac{b(p)\chi(p) \log p}{p^{1+iv}} \right|^2 dv. \end{aligned}$$

Podemos repetir ideas parecidas a las de la demostración anterior para deducir que la suma interior ahora es

$$\begin{aligned} \varphi(q_1)T \sum_{\substack{(a, q_1)=1 \\ p_1 \equiv a \pmod{q_1}}} \sum_{\substack{X \leq p_1 \leq Y \\ p_1 \equiv a \pmod{q_1}}} \sum_{\substack{X \leq p_2 \leq Y \\ p_2 \equiv a \pmod{q_1}}} \frac{b(p_1)(\log p_1)b(p_2)(\log p_2)}{p_1 p_2} \left| \hat{\phi} \left( T \log \frac{p_1}{p_2} \right) \right| \\ \ll \sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ (p, q_1)=1}} \frac{b(p) \log p}{p} \ll \left( \sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ \chi_1(p)=1}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ \chi_1(p)=-1}} \frac{b(p)}{p} \right) \log Y. \end{aligned}$$

Cuando  $\chi(p) = -1$ , la cota necesaria es casi inmediata: como  $1 - p^{-\delta_1} \leq \delta_1 \log p$ , está claro que

$$\sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ \chi_1(p)=-1}} \frac{b(p)}{p} \leq \delta_1 \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{\log p}{p} \ll \delta_1 \log Y.$$

Cuando  $\chi_1(p) = 1$ , hay que trabajar un poco más. Empezamos observando que

$$\sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ \chi_1(p)=1}} \frac{1}{p} \leq \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{1 + \chi_1(p)}{p} = \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{c(p)}{p},$$

donde  $c(n) = \chi_1 \star 1(n) = \sum_{k|n} \chi_1(k)$ . Separémonos momentáneamente de esta ecuación. Usando la aproximación  $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma_{EM} + O(x^{-1})$  y sumación de Abel,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{c(n)}{n} &= \sum_{k \leq X} \frac{\chi_1(k)}{k} \sum_{\ell \leq X/k} \frac{1}{\ell} \\ &= L(1, \chi_1) (\log X + \gamma_{EM}) + L'(1, \chi_1) + O(q_1 X^{-1} \log X) \\ &= L(1, \chi_1) \left( \log X + \gamma_{EM} + \frac{L'(1, \chi_1)}{L(1, \chi_1)} \right) + O(q_1 X^{-1} \log X). \end{aligned}$$

Dado que  $\frac{L'(1, \chi_1)}{L(1, \chi_1)} = \delta_1^{-1} + O(\log q_1)$ ,  $L(1, \chi_1) \gg \delta_1$  y  $\delta_1 \log q_1 \gg q_1^{-\frac{1}{2}} (\log q)^{-1}$  (ver [Mo-Va1, Theorem 11.4 y Corollary 11.12]), aumentando el valor de  $a_8$  si fuese necesario podemos escribir

$$\sum_{n \leq X} \frac{c(n)}{n} \gg L(1, \chi_1) \delta^{-1}.$$

Además, repitiendo argumentos para  $X$  y para  $XY$ , podemos deducir que

$$\sum_{X \leq n \leq XY} \frac{c(n)}{n} \ll L(1, \chi_1) \log Y.$$

Por otro lado, como  $c(n) \geq 0$  y es multiplicativa,

$$\sum_{m \leq X} \frac{c(m)}{m} \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{c(p)}{p} \ll \sum_{X \leq n \leq XY} \frac{c(n)}{n}.$$

La explicación de esta cota es la razón por la que nos queríamos restringir a los números primos: cada número  $X \leq n \leq XY$  tiene como mucho  $900 \cdot 40 + 1 = 36001$  factores primos  $p \geq X$ , pues si no  $n > X^{36001} = XY$ , por lo que el número de veces que puede aparecer cada  $X \leq n \leq XY$  está controlado.

Sustituyendo las cotas y reordenando, obtenemos lo que buscábamos:

$$\sum_{\substack{X \leq p \leq Y \\ \chi_1(p)=1}} \frac{1}{p} \leq \sum_{X \leq p \leq Y} \frac{c(p)}{p} \ll \delta_1 \log Y,$$

de lo que deducimos

$$\max_{X \leq y \leq Y} \sum_{\chi \pmod{q_1}} \int_{-T-r}^{T+r} \left| \sum_{X \leq p \leq y} \frac{b(p)\chi(p) \log p}{p^{1+iv}} \right|^2 dv \ll \delta_1 \log^2 Y,$$

y, sustituyendo cotas y definiciones,

$$N^*(\alpha, T, q_1) \ll \delta_1 (\log x) x^{20r} \ll \delta_1 (\log q_1 T) (q_1 T)^{\tilde{d}(1-\alpha)}$$

para cierta constante  $\tilde{d}$ .

Por último, para deshacernos de la constante oculta  $c_d$  si esta fuese mayor que 1, solo necesitamos hacer la siguiente observación: hemos demostrado

$$N^*(\alpha, T, q_1) \leq c_d \delta_1 (\log q_1 T) (q_1 T)^{\tilde{d}(1-\alpha)}.$$

Razonando con los rangos de  $\alpha$  que estamos considerando, si  $C = c_2^{-1} \log c_d$ ,

$$c_d \leq (q_1 T)^{(\log c_d)/\log q_1 T} \leq (q_1 T)^{C(1-\alpha)},$$

por lo que hemos demostrado el teorema con  $d' = \tilde{d} + C$ .  $\square$

Un corolario inmediato es la región libre de ceros que prometimos:

**Corolario 4.13.** *Sea  $T \geq 2$ . Existe una constante  $D$  tal que, si en un módulo  $q_1$  existe el cero excepcional  $\beta_1$ , entonces es el único cero de  $\prod_{\chi \pmod{q_1}} L(s, \chi)$  en*

$$\sigma > 1 - \frac{|\log \delta_1 \log q_1 T|}{d' \log q_1 T}.$$

*Demostración.* No hay ceros cuando  $N^*(\alpha, T, q_1) < 1$ , por lo que, por el teorema anterior, basta reordenar  $\delta_1 (\log q_1 T) (q_1 T)^{d'(1-\alpha)} < 1$ .  $\square$

Con este corolario, podemos finalizar la demostración del teorema de Linnik.

## 4.6. El teorema de Linnik

El siguiente teorema abarca los casos que nos quedan para terminar:

**Teorema 4.14** (Linnik). *Existe una constante efectiva  $L'$  tal que*

$$p_{\min}(a, q_1) \leq q_1^{L'}$$

para todo  $a$  coprimo con  $q_1$  para el que el posible carácter excepcional  $\chi_1$  módulo  $q_1$  cumple  $\chi_1(a) = 1$ .

*Demostración.* Ahora, en (4.11) podemos usar el corolario anterior para deducir que

$$\sum_{\chi \pmod{q_1}} \sum_{|\gamma_\chi| \leq q_1}^* \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} \ll x \exp\left(-\frac{|\log 2\delta_1 \log q_1| \log x}{2d' \log q_1}\right).$$

Si insertamos esto en los razonamientos posteriores, en lugar de (4.12) obtenemos

$$\vartheta(x; q_1, a) = \frac{x}{\varphi(q_1)} \left(1 - \frac{x^{-\delta_1}}{\beta_1} + O\left(\frac{1}{q_1} + \exp\left(-\frac{|\log 2\delta_1 \log q_1| \log x}{2d' \log q_1}\right)\right)\right).$$

De esta manera, cuando  $x = q_1^\ell$ , si además exigimos  $\ell \geq c_2^{-1}$ , por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^{-\delta_1}}{\beta_1} &\geq \beta_1 - x^{-\delta_1} \geq 1 - q_1^{-\ell\delta_1} - \delta_1 \geq \ell\delta_1 q_1^{-\ell\delta_1} \log q_1 - \delta_1 \\ &\geq \frac{\ell\delta_1 \log q_1}{1 + \ell\delta_1 \log q_1} - \delta_1 \geq \frac{\ell\delta_1 \log q_1}{1 + \ell c_2} - \delta_1 \geq \frac{\delta_1 \log q_1}{2c_2} - \delta_1 \geq \frac{\delta_1 \log q_1}{4c_2} \end{aligned}$$

cuando  $q_1$  es lo suficientemente grande, mientras que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{|\log 2\delta_1 \log q_1| \log x}{2d' \log q_1}\right) &\leq \exp\left(-\frac{\ell |\log 2\delta_1 \log q_1|}{2d'}\right) \\ &= (2\delta_1 \log q_1)^{\ell/2d'} \leq 2(2c_2)^{\ell/2d-1} \delta_1 \log q_1. \end{aligned}$$

Como hemos asumido  $c_2 < \frac{1}{2}$  a lo largo de estas dos últimas secciones, tomando  $\ell \geq L'$  suficientemente grande deducimos el resultado.  $\square$

Juntando los Teoremas 4.11 y 4.14, podemos concluir con el teorema que da nombre al trabajo:

**Teorema 4.15** (Teorema de Linnik). *Existe una constante efectiva  $L$  tal que, para todo  $a$  coprimo con  $q$ ,*

$$p_{\min}(a, q) \leq q^L.$$

# Apéndice

---

**Proposición A.1.** Para  $y \in \mathbb{R}$  se cumple la siguiente igualdad:

$$(A.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi ixy} dx = e^{-\pi y^2}.$$

*Demostración.* Sea  $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi ixy} dx$ . Vemos que  $h(0) = 1$ , mientras que

$$h'(y) = -i \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} dx = -2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi ixy} dx = -2\pi y h(y),$$

donde la segunda igualdad viene de integrar por partes. Por tanto,  $h(y) = e^{-\pi y^2}$ .  $\square$

**Lema A.2.** Para  $x \in \mathbb{R}^+$  se tienen las siguientes igualdades

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha} = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+\alpha)^2/x}$$

y

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha} = i x^{-\frac{3}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n + \alpha) e^{-\pi(n+\alpha)^2/x}.$$

*Demostración.* Como  $F(x) := \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2/t}$  es continua y 1-periódica, coincide con  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2\pi i n x}$ , su serie de Fourier. Para calcular  $\hat{F}(n)$ , como todo converge absolutamente, usamos Fubini y cambiamos  $x + n \rightarrow x$  para llegar a

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{-\pi x^2/t} e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2 - 2\pi i n \sqrt{t} w} dw = e^{-\pi n^2 t},$$

donde  $w = \frac{x}{\sqrt{t}}$  y usamos (A.1). Con eso, ya tenemos la primera igualdad, y la segunda se obtiene derivando respecto a  $\alpha$  y despejando lo que sea necesario.  $\square$

**Teorema A.3** (Fórmula de Jensen). Sea  $f$  una función holomorfa en un entorno de  $|s| \leq R$  y sin ceros en  $|s| = R$  ni en  $s = 0$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \int_0^R r^{-1} n(r) dr,$$

donde  $n(r)$  denota el número de ceros en  $|s| < r$ .

*Demostración.* Remitimos al lector a [Iv, Lemma 1.1].  $\square$

**Teorema A.4** (Teorema de Borel-Carathéodory). *Sea  $f$  una función analítica en un  $|z| \leq R$  y sea  $r < R$ . Entonces*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z| \leq R} \Re f(z) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

En particular, si  $R = 2r$ ,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq 2 \max_{|z| \leq 2r} \Re f(z) + 3|f(0)|.$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [Ti, Chapter 5].  $\square$

**Teorema A.5** (Fórmula de Stirling). *Sea  $\delta > 0$ . Para  $|\arg s| \leq \pi - \delta$ ,  $|s| \geq \delta$  se tiene*

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(|s|^{-1})$$

y

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + O(|s|^{-2}).$$

Más precisamente,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} - 2 \int_0^\infty \frac{t}{(t^2 + z^2)(e^{2\pi t} - 1)} dt.$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [Wh-Wa, Example 12.3.7].  $\square$

**Teorema A.6** (Ecuación funcional no simétrica para  $L(s, \chi)$ ). *Sea  $\chi$  un carácter primitivo y sea  $\kappa = 0$  si  $\chi(-1) = 1$ ,  $\kappa = 1$  si  $\chi(-1) = -1$ . Entonces*

$$L(1-s, \chi) = 2^{1-s} \pi^{-s} q^{s-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-\kappa)\right) \Gamma(s) L(s, \bar{\chi}).$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [TFG, Capítulo 2], donde se encuentra la demostración para  $\zeta$ . La demostración para las funciones  $L$  es esencialmente la misma.  $\square$

**Teorema A.7** (Análogos para  $\zeta$ ). *La función  $\zeta$  tiene una extensión meromorfa a  $\mathbb{C}$  con un único polo en  $s = 1$ , simple y con residuo 1. Admite la siguiente ecuación funcional simétrica*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad s \in \mathbb{C},$$

y la siguiente ecuación funcional no simétrica

$$(A.2) \quad \zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Tiene ceros (conocidos como ceros triviales) en los pares negativos  $s = -2, -4, \dots$ . Además, su derivada logarítmica se puede expresar como

$$(A.3) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - B - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} - \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right),$$

donde  $\rho$  recorre los ceros no triviales de  $\zeta$  y  $B = \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{EM}$ , con  $\gamma_{EM}$  la constante de Euler-Mascheroni.

*Demostración.* Remitimos al lector a [TFG, Capítulo 2] y a [Iv, Chapter 1].  $\square$

**Teorema A.8** (Desigualdad de Pólya-Vinogradov). Sea  $\chi$  un carácter no principal módulo  $q$ . Para  $N > M > 0$  se tiene

$$\sum_{M \leq n < N} \chi(n) \ll \sqrt{q} \log q.$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [Da, Chapter 23].  $\square$

**Teorema A.9** (Segundo teorema principal de Turán). Sean  $z_1, \dots, z_N, b_1, \dots, b_N$  números complejos tales que  $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_N|$ . Para todo  $M \geq 0$  existe un entero  $\nu$ ,  $M + 1 \leq \nu \leq M + N$  tal que

$$s_\nu = \sum_{n=1}^N b_n z_n^\nu \quad \text{cumple} \quad |s_\nu| \geq 2 \left( \frac{N}{8e(M+N)} \right)^N |z_1|^\nu \min_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{n=1}^j b_n \right|.$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [Mo, Chapter 5].  $\square$

**Teorema A.10** (Teorema de Brun-Titchmarsh). Sean  $x \geq 0$ ,  $q \leq y$  y  $(a, q) = 1$ . Se tiene

$$\pi(x+y; q, a) - \pi(x; q, a) \leq \frac{2y}{\varphi(q) \log \frac{y}{q}} \left( 1 + O \left( \frac{1}{\log \frac{y}{q}} \right) \right).$$

*Demostración.* Remitimos al lector a [Iw-Ko, Theorem 6.6].  $\square$



# Bibliografía

---

- [Bo-La] H. Bohr and E. Landau. Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann. *Compte Rendus de l'Acad. des Sciences*, 158:106–110, 1914. doi:<https://doi.org/10.1112/jlms/s1-23.4.275>.
- [Ca] F. Carlson. Sur les zéros des séries de Dirichlet. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 171:339–341, 1920.
- [Da] H. Davenport. *Multiplicative number theory. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.*, volume 74 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer, 3rd edition, 2000.
- [Es] T. Estermann. On Dirichlet's L Functions. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-23(4):275–279, 1948. doi:<https://doi.org/10.1112/jlms/s1-23.4.275>.
- [Iv] A. Ivić. *The Riemann zeta-function. Theory and applications.* Mineola, NY: Dover Publications, reprint of the 1985 original edition, 2003.
- [Iw-Ko] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory.* Colloquium publications, v. 53. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2004.
- [Li1] Y. V. Linnik. On the least prime in an arithmetic progression. I: The basic theorem. *Mat. Sb., Nov. Ser.*, 15:139–178, 1944. URL <https://eudml.org/doc/65260>.
- [Li2] Y. V. Linnik. On the least prime in an arithmetic progression. II: The Deuring–Heilbronn theorem. *Mat. Sb., Nov. Ser.*, 15:347–368, 1944. URL <https://eudml.org/doc/65266>.
- [LMFDB] The LMFDB Collaboration. The  $L$ -functions and modular forms database. Datasets: Zeros of  $\zeta(s)$ . <https://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>, 2025. [Online; accessed 23 November 2025].
- [Mo-Va1] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge University Press, reprint of the 2007 hardback edition, 2012. doi:[10.1017/CBO9780511618314](https://doi.org/10.1017/CBO9780511618314).

- 
- [Mo-Va3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. III*. Pennsylvania State University, unpublished.
- [Mo] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *Reg. Conf. Ser. Math.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1994.
- [TFG] C. Cerviño Luridiana. TFG: La función zeta de Riemann. [https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/past/memoirs/TFG\\_carlos\\_cervinno.pdf](https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/past/memoirs/TFG_carlos_cervinno.pdf), 2025. Dirigido por F. Chamizo y E. Tourís.
- [Ti] E. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 2nd edition, 1939. URL <https://personal.math.ubc.ca/~gor/ModularForms/titchmarsh.pdf>.
- [Wh-Wa] E. Whittaker and G. Watson. *A Course of Modern Analysis*. A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions, with an Account of the Principal Transcendental Functions. Cambridge University Press, 1996.