Lemas fuertes de Van der Corput

(Trabajo de Fin de Máster)[1][2]

CARLOS A. CATALÁ DE LA TORRE
Departamento de Matemáticas

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Dirigido por Fernando Chamizo Lorente

junio 2015

[1]MSC:Primary 11L03, Secondary 42A99.
[2]Keywords: Sumas exponenciales. Integrales oscilatorias.

Índice general

Agradecimientos y una declaración previa

Quisiera agradecer a mi Tutor académico, Dr. Fernando Chamizo, su lectura paciente de anteriores versiones del presente trabajo de fin de Máster (TFM) así como sus comentarios, que han enriquecido notablemente el texto. También quisiera agradecer al Coordinador del Máster, Dr. Dragan Vukotic, por el apoyo que me ha brindado para la terminación del presente TFM.

Deseo también dar las gracias a María Jesús, mi esposa, por su apoyo incondicional, sin el cual nada de esto habría sido posible.

El trabajo presentado aquí está basado (parcialmente) en el capítulo segundo de la Tesis Doctoral [13] del Prof. K.M. Rogers (University of New South Wales, (2005)) (actualmente en el ICMAT-CSIC) y también está basado (en su totalidad) en el artículo[1] *A New Proof for a Sharp van der Corput´s Lemma*, Amer. Math. Monthly **122**, no. 02 (2015) publicado por el autor en febrero del año en curso. Por tanto, éste es el **único** contenido original presentado en este TFM. Todo lo demás es material estándar contenido en la Bibliografía.

Carlos A. Catalá de la Torre.

En Madrid, a 10 de junio de 2015.

[1] `http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.02.138.`

Resumen

En este trabajo se exponen los lemas de Van der Corput, que se usan para estimar sumas exponenciales en intervalos finitos de extremos enteros positivos.
En el **primer capítulo** se realiza una introducción a los principales métodos de sumación que se usan en teoría analítica de números (hay algunas omisiones importantes para no alargar excesivamente la introducción: sumación Euler-MacLaurin, método de Weyl y Van der Corput, ...).
En el **segundo capítulo** se enumeran (y se prueban) los dos teoremas de valor medio para integrales reales (Stieltjes y Riemann) que serán importantes para el siguiente capítulo. Especialmente interesante es la versión compleja. La finalidad de este capítulo es, fundamentalmente, para hacer la exposición lo más autocontenida posible.
El **tercer capítulo** es el más importante, pues en él se demuestra de tres modos distintos el **primer lema de Van der Corput**, que es la base de los siguientes lemas del mismo nombre. Una de las pruebas fue obtenida (y recientemente publicada [6]) por el autor del presente trabajo. Se exponen y se demuestran los demás lemas, enumerando brevemente alguna de las aplicaciones en el vasto campo de la Teoría Analítica de Números.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

En la Teoría Analítica de Números aparecen las sumas exponenciales (complejas) de manera bastante natural. Para ponerlo de manifiesto, consideremos una de las conjeturas más famosas de la Teoría de Números: la conjetura de los Primos Gemelos. Como es bien sabido, dicha conjetura afirma que hay infinitos pares de números primos que se diferencian en 2 unidades. Los matemáticos ingleses *Hardy* y *Littlewood* fueron capaces de dar una predicción heurística sobre la asintótica de la función $\pi_2(x)$ que da la cantidad de números primos gemelos $p, p+2 \leq x$. Lo hicieron mediante el *método del círculo*, que fue desarrollado por ellos y por Ramanujan en el primer tercio del siglo XX.
La idea básica de este método es que uno puede distinguir el número 0 de cualquier otro número entero n puesto que

$$\int_0^1 e(nt)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

donde, para cualquier número real t, se define $e(t) := e^{2\pi i t} = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t$, como es usual en Teoría Analítica de Números. Mantendré esta notación en aquellas secciones relacionadas explícitamente con Teoría de Números. Esta integral es, literalmente hablando, una integral sobre el círculo unidad, de aquí el nombre del método.
Para determinar si dos números primos p y q difieren en 2 unidades (!), simplemente hay que determinar cuánto vale la siguiente integral

$$\int_0^1 e((p-q-2)t)\,dt.$$

Ahora, si sumamos esta integral sobre todos los números primos p, q menores o iguales que x encontramos la siguiente fórmula **exacta** que da la cantidad de números primos gemelos $p, p+2 \leq x$:

$$\sum_{p,q \leq x} \int_0^1 e((p-q-2)t)\,dt = \int_0^1 |P(t)|^2 e(-2t)\,dt$$

donde

$$P(t) := \sum_{p \leq x} e(pt).$$

Éste es un ejemplo de suma de exponenciales (complejas) (o de sumas trigonométricas si separamos las partes real e imaginarias). La suma recorre todos los números primos $p \leq x$.
Las sumas de este tipo juegan un papel relevante en la búsqueda de demostraciones para ésta y otras conjeturas en Teoría de Números. La idea es cómo estimar estas sumas y otras similares en intervalos finitos.

1.2. Sumando con integrales

En algunas situaciones, es útil escribir una suma mediante una integral

Proposición 1.2.1. *Sean a y b dos números naturales ($a < b$) y una función real $f(x)$ de variable real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona en $[a, b]$. Entonces, hay algún número real c (que dependerá, en general, de a y b) con $|c| \leq 1$ para el cual se verifica:*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + c(f(b) - f(a)) \tag{1.1}$$

Demostración. Si suponemos que la función $f(x)$ es monótona decreciente, podemos ver geométricamente que

$$0 < \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{a<n\leq b} f(n) < \sum_{a\leq n\leq b-1} f(n) - \sum_{a<n\leq b} f(n) = f(a) - f(b).$$

Si $f(x)$ es monótona creciente, el argumento es análogo. □

Por ejemplo, si ponemos el logaritmo neperiano $f(x) = \log x$, podemos usar la fórmula anterior para estimar $\log n!$

$$\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k = \int_1^n \log t\,dt + c(\log n - \log 1) = n \log n - n + \mathcal{O}(\log n)$$

Aquí hemos utilizado la notación de *Landau* por la cual, dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$ definidas en $[a, +\infty)$ con $a \geq 0$ y $g(x) > 0$, escribiremos $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ si hay dos constantes $M > 0$ y x_0 tal que $|f(x)| < Mg(x)$ para todo $x \geq x_0$. (Una notación equivalente es la de *Vinogradov*, o sea $f(x) \ll g(x)$.)[1]
En el caso concreto de $\log n!$, la aproximación de *Stirling* (que se usará en el capítulo tercero) es aún mejor que ésta.
Sin embargo, es posible obtener una expresión asintótica más precisa [10] en el caso en que la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ sea *continua y decreciente* con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

[1]Por ejemplo, cuando $x \to +\infty$ se tiene $x = \mathcal{O}(x^2)$, $\operatorname{sen} x = \mathcal{O}(1)$, $\log x = \mathcal{O}(x^{1/10})$, $x^{-1} \operatorname{sen} x = \mathcal{O}(1)$, $x^4 = \mathcal{O}(e^x)$, $e^x \operatorname{sen} x = \mathcal{O}(e^x)$, $\frac{x^3}{x^3+x^2} + 7 = \mathcal{O}(1)$, $2x^2 + \frac{x}{3} \ll x^2$

Proposición 1.2.2. *Con las condiciones recién mencionadas, existe una constante A tal que*

$$\sum_{1\leq n\leq x} f(n) = \int_1^x f(t)\,dt + A + \mathcal{O}(f(x)). \tag{1.2}$$

Demostración. Para demostrar este resultado, comparamos las áreas correspondientes a las expresiones $\sum_{1\leq n\leq x} f(n)$ y $\int_1^x f(t)\,dt$. Hay que ver que la *Diferencia*

$$D(N) := \int_1^N f(t)\,dt - \sum_{2\leq n\leq N} f(n)$$

(con N entero positivo) tiende a una constante positiva cuando $N \to \infty$.

Claramente, $D(N) \geq 0$ para cada entero $N \geq 2$, entonces basta probar que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \Big) = \mathcal{O}(f(N))$$

Para ello, observemos que para cada par de enteros positivos M y N con $M \geq N+3$ tenemos que

$$\sum_{n=N+1}^{M-1} f(n) + f(M) < \int_N^M f(t)\,dt < f(N) + \sum_{n=N+1}^{M-1} f(n)$$

de forma que

$$0 < \sum_{n=N+1}^{M} \Big(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \Big) < f(N) - f(M) < f(N).$$

De aquí se sigue que[2]:

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \Big) \leq f(N)$$

□

Por tanto vemos que es posible aproximar sumas de funciones por integrales de dichas funciones cuando éstas son monótonas. Si pedimos otro tipo de condiciones (en vez de monotonía) por ejemplo, que $f(x)$ tenga derivada continua, se puede usar la *fórmula de Euler-MacLaurin*, que **no** incluiremos aquí (véase [10],[7]). De todos modos, podemos decir, a la manera del gran Groucho Marx, “éstos son mis métodos de sumar, si no le gustan... tengo otros”.

[2]En rigor, casi todos los $<$ en esta página son $\leq$, pues f podría ser constantemente 1 en $[N, M]$ para ciertos N y M.

1.3. El lema de Abel

El siguiente lema [8] [10] es la conocida **fórmula de sumación de N.H. Abel**, que es fundamental en *Teoría Analítica de Números*:

Proposición 1.3.1. *Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión arbitraria de números complejos y $f:[1,+\infty)\to\mathbb{C}$ una función compleja de variable real con derivada continua para cada número real $x\geq 1$. Entonces se verifica*

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt \tag{1.3}$$

donde $A(x) := \sum_{n\leq x} a_n$

Demostración. Supongamos que $x = N$ es un número entero positivo. Entonces podemos escribir

$$\sum_{n\leq N} a_n f(n) = A(1)f(1) + \big(A(2)-A(1)\big)f(2) + \cdots + \big(A(N)-A(N-1)\big)f(N) =$$
$$= A(1)\big(f(1)-f(2)\big) + \cdots + A(N-1)\big(f(N-1)-f(N)\big) + A(N)f(N).$$

Como $f(k+1)-f(k) = \int_k^{k+1} f'(t)\,dt$ para $k = 1,...,N-1$, y $A(t)$ es constante en el intervalo $[k,k+1)$, se tiene

$$\sum_{n\leq N} a_n f(n) = A(N)f(N) - \sum_{k=1}^{N-1} A(k)\int_k^{k+1} f'(t)\,dt =$$
$$= A(N)f(N) - \sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1} A(t)f'(t)\,dt =$$
$$= A(N)f(N) - \sum_{k=1}^{N-1}\int_1^{N} A(t)f'(t)\,dt.$$

En el caso en que x **no** sea un entero positivo, pongamos $N = \lfloor x\rfloor$, es decir, el mayor entero menor o igual que x. **Como** $A(t)$ **es constante en el intervalo** $[N,x]$, el miembro derecho de la fórmula de Abel puede escribirse así

$$A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt = A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t)\,dt - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt =$$
$$= A(x)f(x) - A(N)\int_N^x f'(t)\,dt - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt =$$
$$= A(x)f(x) - A(N)\big(f(x)-f(N)\big) - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt =$$
$$= A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt = \sum_{n\leq N} a_n f(n)$$

□

1.4. Sumación de Poisson en intervalos finitos

En esta sección se incluye una interesante fórmula de sumación para funciones aritméticas gracias al Análisis Armónico. Dicha fórmula será útil en el tercer capítulo.
En efecto, si en la fórmula de sumación de Abel obtenida en la sección anterior ponemos $a_n = 1$ y $x = N$ es un número entero positivo, entonces $A(x) := \sum_{n\le x} a_n = \sum_{n\le x} 1 = \lfloor x \rfloor$, $A(N) = N$, y por ello

$$\sum_{n\le N} f(n) = Nf(N) - \int_1^N \lfloor x \rfloor f'(x)\,dx$$

Ahora, si expresamos la función *Parte Entera* $\lfloor x \rfloor$ de x en términos de $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, que es la *Parte fraccionaria de promedio nulo de* x obtenemos

$$\sum_{n\le N} f(n) = Nf(N) - \int_1^N (x - \frac{1}{2}) f'(x)\,dx + \int_1^N \{x\} f'(x)\,dx$$

que, mediante integración por partes es igual a

$$= Nf(N) - \big[(x-\frac{1}{2})f(x)\big]_1^N + \int_1^N f(x)\,dx + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + Nf(N) - (N-\frac{1}{2})F(N) + (1-\frac{1}{2})f(1) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx$$

por lo que obtenemos así una importante identidad:

$$\sum_{n\le N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \int_1^N \{x\}f'(x)\,dx \tag{1.4}$$

En este punto, recurrimos al Análisis Armónico [7] para incorporar a la identidad anterior el desarrollo de *Fourier* de la función $\{x\}$ (válido para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$) siguiente

$$\{x\} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{e(nx)}{n} = \frac{i}{2\pi}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(nx)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(-nx)}{-n}\Big) =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\big(e(nx) - e(-nx)\big) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\big(2i\,\mathrm{sen}\,(2\pi nx)\big) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2\pi nx)}{n}$$

entonces, suponiendo que $f \in C^2$ (para poder intercambiar suma e integral)

$$\sum_{n\le N} f(n) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \int_1^N \Big(-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2\pi nx)}{n}\Big)f'(x)\,dx =$$

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Big(\int_1^N f'(x)\,\mathrm{sen}\,(2\pi n x)\,dx\Big)$$

que, tras una integración por partes es igual a

$$= \int_1^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Big(\underbrace{\big[f(x)\,\mathrm{sen}\,(2\pi n x)\big]_1^N}_{0} - 2\pi n\int_1^N f(x)\cos(2\pi n x)\,dx\Big).$$

Al realizar las oportunas simplificaciones y tener en cuenta que $\cos(2\pi n x) = \big(e(nx)+e(-nx)\big)/2$ y que $e(0)=1$ obtenemos así la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(N)+f(1)\big) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_1^N f(x)e(nx)\,dx.$$

La convergencia de la serie anterior hay que entenderla como $\lim_{M\to\infty}\sum_{|n|<M}$. Si no se agrupan positivos y negativos, puede haber problemas.
Armados con esta identidad podemos enunciar una fórmula de sumación de Poisson para intervalos finitos.

Proposición 1.4.1. *Sean dos números enteros positivos N, M con $M > N$ y una función compleja de variable real $x \geq 1$ con $f \in C^2$. Entonces*

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(M)+f(N)\big) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_N^M f(x)e(nx)\,dx.$$

Demostración. Es suficiente con darse cuenta de que

$$\sum_{n=N}^{M} f(n) = \sum_{n=1}^{M} f(n) - \Big(\sum_{n=1}^{N} f(n) - f(N)\Big),$$

cambiar N por M en la identidad anterior, restar las identidades y usar la propiedad elemental $\int_1^M - \int_1^N = \int_N^M$ de integrales. □

Una aplicación de esta fórmula de sumación es el cálculo exacto (véase [7]) de las *sumas de Gauss*:

$$\sum_{n=1}^{N} e(n^2/N) = \frac{1+(-i)^N}{1-i}\sqrt{N},$$

donde N es un número entero positivo cualquiera. De esta evaluación, que costó muchos esfuerzos a Gauss, se puede deducir la ley de reciprocidad cuadrática [7].

1.5. Las integrales de Stieltjes

A veces, es conveniente escribir ciertas sumas finitas como integrales de Stieltjes. Recordemos que se define la *integral de Stieltjes* I de una función f sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ **respecto a la función** g como el siguiente límite [10]:

$$I = \int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,dg(t) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(g(t_k) - g(t_{k-1})\big)$$

con $\Delta = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$, $a = t_0$, $b = t_n$, $\|\Delta\| := \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$ y $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ para todo $k = 1, \cdots, n$.
Cuando $g(x) = x$, recuperamos la *integral de Riemann* usual de f

$$I = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Si ponemos la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \le x \le m \\ 1 & \text{si } m < x \le b \end{cases}$$

entonces $I = f(m)$.

Por tanto, si quisiésemos estimar la suma $\sum'_{a\le x} f(a)$, donde $\sum'$ indica que la suma se hace sobre valores $a \in A \subset \mathbb{N}$ y f es una función continua en $[1,x]$, sea entonces el número de elementos de A menores o iguales que x

$$A(x) := |\{a \le x : a \in A\}|,$$

entonces

$$\int_{1^-}^{x} f(t)\,dA(t) = \sum_{n\le x} \int_{n^-}^{n^+} f(t)\,dA(t) = \sum_{n\le x}{}' \int_{n^-}^{n^+} f(t)\,dA(t) = \sum_{n\le x}{}' f(n).$$

JOHANNES GUALTHERUS VAN DER CORPUT
1890–1975
hoogleraar 1923–1945

Figura 1.1: J.G. Van der Corput (© The University of Groningen)

1.6. Nota biográfica

El matemático holandés Johannes G. Van der Corput [4] nació en Rotterdam (Países Bajos) en 1890. Estudió Matemáticas en la Universidad de Leyden entre los años 1908 y 1914. En esta universidad enseñaba Teoría Analítica de Números J. Kluyver, quien fue el primer matemático en introducir el Análisis Matemático moderno en la Teoría de Números en los Países Bajos. Van der Corput tuvo que servir en el ejército como oficial en la Primera Guerra Mundial y desde 1917 hasta 1920 trabajó como profesor de Matemáticas en Institutos de Enseñanza Secundaria en Utrecht y otras localidades próximas. Durante este periodo trabajó en su tesis doctoral en la Universidad de Leyden bajo la supervisión de Kluyver. Trabajó también con E. Landau en Göttingen. Obtuvo diversos puestos de profesor en las universidades de Utrecht, Freiburg (Suiza) y Groningen. Permaneció en Groningen de 1923 hasta 1946, trasladándose a Amsterdam hasta 1953. Desde este momento, obtuvo varios puestos en universidades estadounidenses (Berkeley, Stanford, Madison). Como profesor emérito, regresó a Holanda y falleció en Amsterdam en 1975, a los 85 años de edad.
Realizó su tesis doctoral en el campo de la Teoría Analítica de Números. Su trabajo consistió en idear métodos para realizar estimaciones finas del número de puntos del retículo en un círculo. También trabajó en este mismo problema cambiando el círculo por recintos limitados por una hipérbola equilátera y sus asíntotas (Problema de Dirichlet). Sus resultados, por su gran precisión, llamaron la atención de E. Landau, quien era uno de los expertos en dicho campo de investigación en aquellos tiempos.

Sus estudios sobre sumas trigonométricas en Teoría de Números dieron lugar a sus famosos Lemas (1921), los cuales son fundamentales para estimar sumas de exponenciales (complejas) con integrales oscilatorias.
Estos lemas son el tema principal de este TFM, así como sus mejoras en los primeros años del siglo XXI.
Hasta 1940 aproximadamente, Van der Corput trabajó muy activamente en Aproximación diofántica, el método de Vinogradov para el problema de Goldbach, en sus variantes, y también en Geometría de Números. El problema del orden de crecimiento de la función zeta de Riemann fue uno de los problemas a los que se enfrentó con sus métodos. También trabajó en el método de la fase estacionaria, de gran interés no sólo en Teoría Analítica de Números, sino también en un campo tan alejado de las Matemáticas Puras como pueden ser la Mecánica Cuántica o la Cosmología en Física.
Como profesor, Van der Corput fue un profesor estimulante. Alentó a sus alumnos a colaborar con él en sus mejores ideas. Promovió también la creación en 1946 de un Instituto de investigación pura y aplicada en matemáticas con el objetivo de sentar las bases para el desarrollo industrial post-bélico en Holanda. Este centro de Matemáticas proporcionó dichas bases especialmente en las áreas de Estadística y Computación. Van der Corput fue su primer director durante siete años.
Fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Holandesa en 1929 y fue editor desde 1936 de *Acta Arithmetica*, una de las más importantes revistas de Teoría de Números.

Capítulo 2

Los teoremas de valor medio para integrales

2.1. El primer Teorema del Valor Medio

A lo largo de este capítulo[1] $J := [a, b]$ será un intervalo cerrado en la recta real $\mathbb{R}$; f, g serán funciones reales acotadas de variable real definidas en el compacto J. La mayoría de los resultados enumerados en este capítulo se refieren a la *integral de Riemann* usual en los cursos de Cálculo diferencial e integral. Algunos resultados se referirán a la *integral de Stieltjes*, algo más generales. Seguiremos fielmente la referencia clásica [2].

Veamos dos resultados previos sin demostración.

2.1.1. El teorema de integrabilidad

Teorema 2.1.1. *Si f es continua en J y g es monótona creciente entonces, f es integrable en J respecto a g, es decir, existe la integral de Stieltjes $\int_a^b f\,dg$.*

2.1.2. Lema de estimación de la integral

Con la notación $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in J\}$ y $|f|$ para la función cuyo valor absoluto en x es $|f(x)|$, se tiene el siguiente lema

Lema 2.1.2. *Sea f continua y g monótona creciente en J. Entonces*

$$\Big|\int_a^b f\,dg\Big| \leq \int_a^b |f|\,dg \leq \|f\|(g(b) - g(a))$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en J, entonces

$$m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f\,dg \leq M(g(b) - g(a)).$$

[1]Este capítulo es elemental, y se incluye aquí por razones de completitud, de modo que el presente trabajo sea lo más autocontenido posible. Se incluyen algunas demostraciones y otras quedarán referenciadas.

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente *primer teorema del valor medio* (TVM1)

Teorema 2.1.3. *Si g es creciente en J y $f : J \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe un número c en J tal que*

$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b dg = f(c)\cdot(g(b)-g(a))$$

Demostración. Del teorema de integrabilidad se obtiene que f es integrable respecto a g y por el lema de estimación anterior

$$m(g(b)-g(a)) \leq \int_a^b f\,dg \leq M(g(b)-g(a))$$

donde $m = \inf\{f(x) : x \in J\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in J\}$.
Si $g(b) = g(a)$, la fórmula del TVM1 es trivial; pero si $g(b) > g(a)$, entonces por el teorema del valor intermedio de Bolzano existe un número $c \in J$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f\,dg}{g(b)-g(a)}.$$

□

2.2. El teorema de diferenciación

Teorema 2.2.1. *Supongamos que f es continua en J y que g es creciente en J con derivada en un punto $c \in J$. Entonces, la función F, definida para x en J mediante*

$$F(x) := \int_a^x f\,dg,$$

es derivable en $x = c$ y además $F'(c) = f(c)\cdot g'(c)$.

Demostración. Pongamos que $h > 0$ de manera que $c+h$ esté en J, como se verifica $\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg = \int_a^b f\,dg$, por el TVM1 podemos escribir

$$F(c+h)-F(c) = \int_a^{c+h} f\,dg - \int_a^c f\,dg = \int_a^{c+h} f\,dg + \int_c^a f\,dg = \int_c^{c+h} f\,dg = f(c_1)\cdot(g(c+h)-g(c)),$$

para algún $c_1 \in [c, c+h]$. Para $h < 0$ se cumple algo análogo. Como f es continua y g tiene derivada en c, entonces $F'(c)$ existe y vale $F'(c) = f(c)\cdot g'(c)$. □

En el caso especial e importante de la *integral de Riemann* ($g(x) = x$) el teorema recién probado conduce al *teorema fundamental del cálculo integral* ordinario.
Si una función f es continua en J, una función F en J satisface la relación $F(x)-F(a) = \int_a^x f\,dx$ para $x \in J$ si y sólo si $F' = f$ en J.
Se cumple también el *Teorema de reducción de integrabilidad de Stieltjes a Riemann* con las propiedades usuales como la integración por partes, cambios de variable, etc:

Teorema 2.2.2. *Si existe la derivada $g' = h$ y es continua en J y además f es integrable respecto a g, entonces el producto fh es integrable Riemann y se cumple $\int_a^b f\,dg = \int_a^b fh\,dx$*

A partir de aquí, las integrales se entienden en sentido Riemann.

2.3. El primer Teorema del Valor Medio (versión Riemann)

Enunciamos y probamos ahora el TVM1 ordinario.

Teorema 2.3.1. *Si f y h son continuas en J y h es no negativa, entonces existe un punto $c \in J$ tal que*

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(c)\int_a^b h(x)\,dx.$$

Demostración. Definamos la función $g(x) := \int_a^x h(t)\,dt$ para $x \in J$. Como $h \geq 0$, g es creciente, y por el teorema de diferenciación y el de reducción de integrabilidad, respectivamente, se tiene que $g' = h$ y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fh\,dx,$$

basta usar ahora el TVM1 visto anteriormente, por el cual hay un punto c en J tal que

$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b h\,dx.$$

□

2.4. El segundo Teorema del Valor Medio. Fórmula de Bonnet

El resultado de esta sección es importante para la siguiente y también para el próximo capítulo. Es el segundo Teorema del valor medio para integrales (TVM2).

Teorema 2.4.1. *(a) Si f es creciente y g es continua en J, entonces existe un punto c en J tal que*

$$\int_a^b f\,dg = f(a)\cdot\int_a^c dg + f(b)\cdot\int_c^b dg. \tag{2.1}$$

(b) Si f es creciente y h es continua en J, entonces existe un punto c en J tal que

$$\int_a^b fh\,dx = f(a)\cdot\int_a^c h\,dx + f(b)\cdot\int_c^b h\,dx. \tag{2.2}$$

(c) (Fórmula de Bonnet) Si f es no negativa, creciente y h es continua en J, entonces existe un punto c en J tal que

$$\int_a^b fh\,dx = f(b)\cdot\int_c^b h\,dx. \tag{2.3}$$

Demostración. Las hipótesis, junto al teorema de integrabilidad implican que g es integrable respecto a f en J. Por el primero de todos los TVM se cumple

$$\int_a^b g\, df = g(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

Tras una integración por partes, obtenemos que f es integrable respecto a g, y por tanto

$$\int_a^b f\, dg = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - g(c) \cdot (f(b) - f(a)) =$$

$$= f(a) \cdot (g(c) - g(a)) + f(b) \cdot (g(b) - g(c)) = f(a) \cdot \int_a^c dg + f(b) \cdot \int_c^b dg$$

que ya prueba (a).
Para probar (b), basta definir $g(x) := \int_a^x h\, dt$ en J, con $g' = h$ y aplicar (a) y el teorema de reducción de integrabilidad.
Para probar (c), definimos F como la función que coincide con f en $x \in J \backslash \{a\}$ y definimos $F(a) = 0$, entonces aplicaríamos (b) a F. Obviamente, hay un resultado correspondiente para el caso de funciones decrecientes, que es completamente análogo y se usará en el próximo capítulo (véase la sección 3.2). □

En este momento, quizá convenga señalar ([12], [13]) que es un problema abierto la extensión de estos resultados a dimensiones superiores. Se sabe poco al respecto.

2.5. Un teorema de valor medio complejo

El siguiente teorema es una versión compleja del *Segundo Teorema del Valor Medio* para integrales. Es uno de los resultados más importantes en este trabajo, junto al de la sección anterior. Como apunta K. Rogers en [13], sería imprudente sugerir que un resultado clásico como el siguiente es nuevo, pero *no* parece ser muy conocido:

Teorema 2.5.1. *Supongamos que la función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona y que la función compleja de variable real $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua. Sea además la integral compleja*

$$I = \int_a^b f(x)g(x)\, dx = |I|e^{i\theta}$$

entonces existe un número real $c \in [a, b]$ para el cual la integral anterior se puede escribir de este modo:

$$I = e^{i\theta}\Big[f(a)Re\Big(e^{-i\theta} \int_a^c g(x)\, dx\Big) + f(b)Re\Big(e^{-i\theta} \int_c^b g(x)\, dx\Big)\Big]$$

Por lo que, mediante desigualdades elementales entre la parte real y el módulo de números complejos se tiene además:

$$|I| \leq \Big|f(a) \int_a^c g(x)\, dx\Big| + \Big|f(b) \int_c^b g(x)\, dx\Big|$$

Además, si la función $f(x)$ es de signo constante y $|f(x)|$ es decreciente, entonces hay un número real $c \in [a,b]$ para el cual

$$|I| = f(a)Re\Big(e^{-i\theta}\int_a^c g(x)\,dx\Big) \leq \Big|f(a)\int_a^c g(x)\,dx\Big|.$$

Demostración. Descompongamos $g(x)$ en sus partes real e imaginaria $g(x) = w(x) + iv(x)$ de modo que

$$|I| = Ie^{-i\theta} = (\cos\theta)\int_a^b f(x)w(x)\,dx + (\operatorname{sen}\theta)\int_a^b f(x)v(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\big((\cos\theta)w(x) + (\operatorname{sen}\theta)v(x)\big)\,dx,$$

donde θ es el argumento del número complejo I.
Al ser $f(x)$ monótona y por ser $x \mapsto (\cos\theta)w + (\operatorname{sen}\theta)v$ continua, entonces se verifica por el *Segundo Teorema del Valor Medio* para integrales **reales** que existe un valor $c \in [a,b]$ tal que:

$$|I| = f(a)\int_a^c \big((\cos\theta)w + (\operatorname{sen}\theta)v\big)(x)\,dx + f(b)\int_c^b \big((\cos\theta)w + (\operatorname{sen}\theta)v\big)(x)\,dx =$$

$$= f(a)Re\Big(e^{-i\theta}\int_a^c g(x)\,dx\Big) + f(b)Re\Big(e^{-i\theta}\int_c^b g(x)\,dx\Big)$$

Para acabar con el último párrafo del teorema, si $f(x)$ es de signo constante y $|f(x)|$ es decreciente, definimos la función $h(x)$ de modo que coincida idénticamente con $f(x)$ en el intervalo semiabierto $[a,b)$ y que sea 0 en $x = b$. Basta aplicar el mismo argumento con la función $h(x)$ en vez de $f(x)$. □

Claramente, hay un resultado correspondiente cuando $|f(x)|$ es creciente.

Capítulo 3

Los lemas fuertes

3.1. El primer lema de van der Corput y la cota más fuerte

3.1.1. Preliminares.

Los conocidos lemas de van der Corput [3] son de especial interés principalmente en Teoría Analítica de Números. Dichos lemas fueron formulados para ser útiles en la teoría de sumas trigonométricas así como en el campo más amplio de la estimación asintótica de integrales oscilatorias, ya en el contexto del Análisis Armónico. El propósito de este capítulo consiste en proporcionar una nueva y sencilla demostración, por métodos elementales, de una versión mejorada del primer lema de Van der Corput debida a K. Rogers [12] en 2005. El llamado "segundo lema"de Van der Corput se sigue del primero. Por ello el primer lema mejorado, más fuerte, conduce a cotas óptimas en el segundo lema y sus generalizaciones.
Tal como aparece en [9], enunciemos el conocido "primer lema"de Van der Corput:

Lema 3.1.1. *Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces*

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

Demostración. Se puede dar una demostración mediante el Segundo Teorema del Valor Medio para integrales reales [9]. También podemos intentar una prueba más directa [14] mediante integración por partes del siguiente modo:
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $F'(x) > 0$ puesto que el complejo conjugado de $\int_a^b e^{iF(x)}\,dx$ es $\int_a^b e^{-iF(x)}\,dx$. Entonces, si usamos la monotonía de $F'(x)$, se obtiene[1]:

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|\int_a^b \frac{1}{iF'(x)} iF'(x)e^{iF(x)}\,dx\Big| =$$

$$= \Big|\Big[\frac{1}{iF'(x)}e^{iF(x)}\Big]_a^b - \frac{1}{i}\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)' e^{iF(x)}\,dx\Big|$$

[1] Esta demostración necesita, en principio, más regularidad que ser derivable, pues hay que usar $(1/F')'$.

Figura 3.1: J.G. van der Corput, ca. 1952 (© The Dolph Briscoe Center for American History, UT-Austin)

$$\leq \frac{2}{\lambda} + \int_a^b \Big|\Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)'\Big|\, dx = \frac{2}{\lambda} + \Big|\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)'\, dx\Big| =$$
$$= \frac{2}{\lambda} + \Big|\Big[\frac{1}{F'(x)}\Big]_a^b\Big| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

□

Hay que señalar aquí que la constantes dadas por *Van der Corput* [3], *Zygmund* [15] y *Stein* [14] son, respectivamente $2\sqrt{2}, 4$ y 3.

3.1.2. La acotación más fuerte.

Es fácil comprobar que la parte izquierda de la desigualdad en el lema anterior puede llegar a tomar el valor $\frac{2}{\lambda}$. Es suficiente elegir la función

$$F(x) = \frac{\pi x}{b-a}$$

Sin embargo, K. Rogers [12] fue capaz de mostrar que el 4 en la cota superior se podía rebajar hasta 2 sin hipótesis adicionales. Así, podríamos enunciar un nuevo lema mejorado, más fuerte, el **nuevo lema de Van der Corput-Rogers** con esta acotación más fuerte (the "sharp bound").

Lema 3.1.2. *Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \geq \lambda > 0$ o $F'(x) \leq -\lambda < 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces*

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\, dx\Big| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

En la próxima sección presentamos una nueva prueba de este lema mejorado mediante el segundo teorema del valor medio para integrales reales, con un ingrediente extra...

3.2. Una nueva demostración

La prueba que vamos a dar aquí está basada en la referencia [6].
Repasemos (ahora sin demostración) la siguiente versión (fórmulas de *Bonnet*) del Segundo Teorema del Valor Medio para integrales **reales** [9].

Teorema 3.2.1. *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y decreciente (creciente) y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces hay un número real c con $a < c < b$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx = \Big(f(b)\int_c^b g(x)\,dx\Big).$$

Demostración. (del primer lema fuerte de Van der Corput) Como ya se explicó anteriormente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F'(x) > 0$.
Sea t una **constante real arbitraria**. Éste es el *ingrediente extra* al que hicimos referencia anteriormente. Como el número complejo e^{it} es de módulo uno y $|zw| = |z||w|$ para cualquier par de números complejos, podemos reescribir el miembro izquierdo de la desigualdad del lema de la siguiente manera:

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|e^{it}\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|\int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx\Big|.$$

Esta ecuación es válida para **todo número** $t \in \mathbb{R}$. Esta observación será útil posteriormente.
Expresemos la última integral en sus partes real e imaginaria mediante la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ y $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\Big|\int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx\Big|^2 = \Big|\int_a^b \cos(F(x)+t)\,dx + i\int_a^b \sin(F(x)+t)\,dx\Big|^2 =$$

$$= \Big(\int_a^b \cos(F(x)+t)\,dx\Big)^2 + \Big(\int_a^b \sin(F(x)+t)\,dx\Big)^2. \tag{3.1}$$

Consideremos primeramente la siguiente integral, que define una función diferenciable

$$U(t) := \int_a^b \cos(F(x)+t)\,dx.$$

Podemos intentar una prueba directa como en la última sección. Sólo para simplificar, consideremos que $F'(x)$ es **monótona creciente**, (después veremos qué pasa si es monótona decreciente) entonces

$$U(t) := \int_a^b \frac{1}{F'(x)}F'(x)\cos(F(x)+t)\,dx = \int_a^b \frac{1}{F'(x)}d(\sin(F(x)+t)).$$

$F'(x)$ es positiva y monótona creciente, luego $1/F'(x)$ es también positiva y decreciente, por tanto según el Segundo Teorema del Valor Medio hay un número real (posiblemente dependiente de t) $c(t)$ con $a < c(t) < b$ tal que

$$U(t) = \frac{1}{F'(a)}\int_a^{c(t)} d(\sin(F(x)+t)) =$$

$$= \frac{1}{F'(a)}\Big[\sin(F(c(t))+t) - \sin(F(a)+t)\Big] = \frac{1}{F'(a)}\Big[\sin(u(t)) - \sin(F(a)+t)\Big] \tag{3.2}$$

donde $u(t) := F(c(t)) + t$.
Consideremos ahora la segunda integral, que también define una función diferenciable

$$V(t) := \int_a^b \sin(F(x)+t)\,dx.$$

Si repetimos el mismo proceso para $V(t)$, obtenemos

$$V(t) := \int_a^b \frac{1}{F'(x)} F'(x)\sin(F(x)+t)\,dx = \int_a^b \frac{1}{F'(x)} d(-\cos(F(x)+t)).$$

$F'(x)$ es positiva y monótona creciente, luego $1/F'(x)$ es también positiva y decreciente, así por el Segundo Teorema del Valor Medio hay un número real (posiblemente dependiente de t) $\widetilde{c}(t)$ con $a < \widetilde{c}(t) < b$ tal que

$$V(t) = \frac{1}{F'(a)}\int_a^{\widetilde{c}(t)} d(-\cos(F(x)+t)) =$$

$$= \frac{1}{F'(a)}\Big[-\cos(F(\widetilde{c}(t))+t) + \cos(F(a)+t)\Big] = \frac{1}{F'(a)}\Big[-\cos(v(t)) + \cos(F(a)+t)\Big] \tag{3.3}$$

donde $v(t) := F(\widetilde{c}(t)) + t$.
reuniendo (2) y (3) en la ecuación (1), obtenemos

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big|^2 = \Big|U(t) + iV(t)\Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{(F'(a))^2}\Big[\Big(\sin(u(t)) - \sin(F(a)+t)\Big)^2 + \Big(-\cos(v(t)) + \cos(F(a)+t)\Big)^2\Big]. \tag{3.4}$$

Obviamente, este valor no puede depender de t.

3.2.1. Continuidad.

Por el Teorema de la Convergencia Dominada, ambas funciones $U(t)$ y $V(t)$ son continuas y diferenciables en $\mathbb{R}$. Si calculamos sus derivadas respecto a t (denotadas por un punto), obtenemos $\dot{U}(t) = \int_a^b \partial_t(\cos(F(x)+t))\,dx = -V(t)$ y análogamente $\dot{V}(t) = U(t)$.En consecuencia, $U(t)$ y $V(t)$ tienen derivadas continuas , es decir, pertenecen a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Por iteración, resultan ser diferenciables en cualquier orden. Por ello, tanto $U(t)$ como $V(t)$ son de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Por otra parte, si tomamos en cuenta (3.2) y (3.3), resulta que $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ se pueden escribir respectivamente como combinación lineal de dos funciones diferenciables con continuidad en $\mathbb{R}$. En consecuencia, **las funciones compuestas** $\cos(v(t))$ **y** $\sin(u(t))$ **son también diferenciables con continuidad en $\mathbb{R}$, sin importar cuán discontinuas puedan ser** $v(t)$ **y** $u(t)$.

3.2.2. Un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Tras sustituir (3.2) y (3.3) en las ecuaciones $\dot{U}(t) = -V(t)$ y $\dot{V}(t) = U(t)$, obtenemos el siguente sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\Big(\sin(u(t)) \Big) = \cos(v(t)) \\ \\ \dfrac{d}{dt}\Big(\cos(v(t)) \Big) = -\sin(u(t)) \end{array} \right. \tag{3.5}$$

donde $(\cos(v(t)), \sin(u(t))) \in [-1,1] \times [-1,1]$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Señalemos que ambas funciones *coordenadas* $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ toman valores en el intervalo cerrado $[-1,1]$. La solución más general del sistema (3.5), válida para todo $t \in \mathbb{R}$, está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(u(t)) = r\sin(t+k) \\ \\ \cos(v(t)) = r\cos(t+k) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

donde r y k son constantes reales.

3.2.3. La Continuidad, a escena.

Si consideramos $\cos(v(t))$ and $\sin(u(t))$ como funciones coordenadas cartesianas,vemos que las ecuaciones (3.6) **por sí mismas** describen paramétricamente circunferencias centradas en el origen de coordenadas $(0,0)$ con radio $|r|$. El hecho resaltado anteriormente de que $\cos(v(t))$ y $\sin(u(t))$ toman valores en el intervalo cerrado $[-1,1]$, obliga a $|r|$ a satisfacer la desigualdad $0 \leq |r| \leq \sqrt{2}$. Sin embargo, la validez de

$$\Big| \int_a^b e^{iF(x)}\,dx \Big| = \Big| \int_a^b e^{i(F(x)+t)}\,dx \Big|$$

para **todo** $t \in \mathbb{R}$ y la **ya probada** continuidad de las funciones coordenadas para todo t en $\mathbb{R}$, implican una notable reducción en el campo de validez para $|r|$ desde $0 \leq |r| \leq \sqrt{2}$ hasta $0 \leq |r| \leq 1$. En efecto, para cada valor r que satisfaga $1 < |r| \leq \sqrt{2}$, las ecuaciones en (3.6) describen **cuatro arcos de circunferencia desconexos** dentro de un cuadrado centrado en $(0,0)$ y con vértices en $(1,\pm 1)$ y $(-1,\pm 1)$,**violando así la continuidad de** $\cos(v(t))$ **y** $\sin(u(t))$ **en todo** $\mathbb{R}$. Sólo cuando $|r| \leq 1$ tenemos realmente **circunferencias completas** dentro del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

3.2.4. El paso final.

Tenemos, pues, la solución general (3.6) para el sistema (3.5). El número real r está en el intervalo cerrado $[-1,1]$ y k es un número real arbitrario. Si introducimos la solución general (3.6) en (3.4) obtenemos la interesante fórmula:

$$\Big| \int_a^b e^{iF(x)}\,dx \Big|^2 = \frac{1}{(F'(a))^2}\Big[r^2 + 1 - 2r\cos(F(a)-k) \Big] \tag{3.7}$$

sin dependencia explícita de t, como era de esperar.
Observemos que k en $\cos(F(a)-k)$ puede ser siempre elegido apropiadamente de modo que se obtenga cualquier número del intervalo cerrado $[-1,1]$. De hecho, la cota más fuerte obtenida por K. Rogers [12] se obtiene poniendo (respectivamente) $r=\pm 1$ y k de forma que $\cos(F(a)-k)=\mp 1$.
Podemos entonces hallar el máximo absoluto de la función $r^2+1-2r\cos(F(a)-k)$ para demostrar esa cota superior más fuerte.
Así, dadas las restricciones $-1\leq r\leq 1$, $-1\leq\cos(F(a)-k)\leq 1$, y la desigualdad triangular, obtenemos

$$|r^2+1-2r\cos(F(a)-k)|\leq|r^2+1|+2|r||\cos(F(a)-k)|\leq 4.$$

El máximo absoluto se alcanza respectivamente en $r=\pm 1$ y $\cos(F(a)-k)=\mp 1$ con el mismo resultado 4.
Concluimos, por tanto, que

$$r^2+1-2r\cos(F(a)-k)\leq 4$$

que, a su vez, implica que:

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big|^2=\frac{1}{(F'(a))^2}\Big[r^2+1-2r\cos(F(a)-k)\Big]\leq\frac{4}{(F'(a))^2}\leq$$
$$\leq\frac{4}{\lambda^2}.$$

Si suponemos que $F'(x)$ es positiva y **monótona decreciente**, la conclusión sigue siendo la misma. Para ver que eso es así, basta coger la otra versión del Segundo Teorema del Valor Medio. Sencillamente, intercambiamos $F'(a)$ y $F'(b)$ y tenemos en cuenta la conocida propiedad

$$\int_c^b g(x)\,dx=-\int_b^c g(x)\,dx. \tag{3.8}$$

Luego a y b son intercambiables en las fórmulas anteriores. El signo negativo en el miembro derecho de (3.8) no afecta en absoluto a las ecuaciones (3.4) ni (3.5). □

3.3. La primera prueba del lema

K. Rogers, en su tesis doctoral [13] defendida en 2005, expone la primera prueba del primer lema con la constante 2 en la cota superior. Dicha demostración se basa en una versión compleja del Segundo Teorema de Valor Medio para integrales del que hablamos en el capítulo anterior. Es interesante presentar esta prueba, pues aunque es más concisa que la expuesta en la sección anterior, su concisión se debe fundamentalmente a un teorema casi desconocido. Tanto es así que este autor, en su tesis doctoral, no llega a decir que esa versión compleja sea nueva sino que es poco conocida incluso entre los propios expertos. En este sentido, la demostración dada en la sección anterior sí se basa **explícitamente** en el Segundo teorema del Valor Medio para integrales reales haciéndose la prueba algo más larga pero también un poco más sencilla.

3.3.1. Una versión compleja

Recordemos aquí el enunciado de esta versión compleja (visto en el capítulo anterior) del Segundo Teorema del Valor medio para integrales, sin la demostración, con propósito de consulta:

Teorema 3.3.1. *Supongamos que la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona y que la función compleja de variable real $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua. Sea además la integral compleja*

$$I = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = |I|e^{i\theta}$$

entonces hay un número real $c \in [a,b]$ para el cual la integral anterior se puede escribir de este modo:

$$I = e^{i\theta}\Big[f(a)Re\Big(e^{-i\theta}\int_a^c g(x)\,dx\Big) + f(b)Re\Big(e^{-i\theta}\int_c^b g(x)\,dx\Big)\Big]$$

Por lo que, mediante desigualdades elementales entre la parte real y el módulo de números complejos se tiene además:

$$|I| \leq \Big|f(a)\int_a^c g(x)\,dx\Big| + \Big|f(b)\int_c^b g(x)\,dx\Big|$$

Además, si la función $f(x)$ es de signo constante y $|f(x)|$ es decreciente, entonces hay un número real $c \in [a,b]$ para el cual

$$|I| = f(a)Re\Big(e^{-i\theta}\int_a^c g(x)\,dx\Big) \leq \Big|f(a)\int_a^c g(x)\,dx\Big|.$$

Demostración. (del primer lema fuerte) *(Rogers, 2005)* Ahora, siguiendo la referencia [13] se tiene que, reemplazando $F(x)$ por $-F(x)$ si es preciso, puede suponerse que $F'(x) \geq \lambda > 0$ donde $F(x)$ es diferenciable con función derivada monótona. Igualmente, se puede suponer por sencillez, que la función $F'(x)$ es monótona creciente (pues el argumento para monótona decreciente sería similar). Después realiza el cambio de variable $y = F(x)$:

$$I = \int_a^b e^{iF(x)}\,dx = \int_{F(a)}^{F(b)} \frac{e^{iy}}{F'(F^{-1}(y))}\,dy$$

Ahora bien, como $\frac{1}{F'(F^{-1}(y))}$ es de signo positivo (constante) y es obviamente monótona decreciente, el teorema anterior nos permite garantizar que existe un número real $c \in [a, b]$ tal que:

$$I = \frac{1}{F'(F^{-1}(F(a)))} Re\Big(e^{-i\theta} \int_{F(a)}^{c} e^{iy}\,dy\Big) = \frac{1}{F'(a)}(\operatorname{sen}(c-\theta) - \operatorname{sen}(F(a)-\theta))$$

y por tanto se sigue de aquí que:

$$|I| \le \frac{1 + \operatorname{sen}(\theta - F(a))}{\lambda} \le \frac{2}{\lambda} \tag{3.9}$$

□

3.3.2. Una extensión sencilla

Es posible extender, según [9], el primer lema para incluir una función real $G(x)$ positiva y monótona en el intervalo $[a, b]$ tal que $|G(x)| \le G$ en dicho intervalo:

Proposición 3.3.2. *Sea $F(x)$ una función real diferenciable con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x) \ge \lambda > 0$ o $F'(x) \le -\lambda < 0$ para $a \le x \le b$. Sea también una función real $G(x)$ positiva, monótona con $|G(x)| \le G$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces*

$$\Big|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}\,dx\Big| \le \frac{4G}{\lambda}.$$

La prueba es completamente idéntica a la dada para el caso $G(x) = 1$. Por otra parte, nótese que la amplitud $G(x)$ siempre puede ser eliminada porque en un intervalo $[a, b]$ puede extraerse mediante el *Segundo Teorema del Valor Medio* para integrales o mediante integración por partes[2].

3.4. El n-ésimo lema de Van der Corput y la cota más fuerte

Tomando como base el primer lema se puede enunciar [13] el llamado *n-ésimo lema de Van der Corput* como sigue:

Lema 3.4.1. *(Rogers, 2005) Supongamos que $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función real n veces diferenciable, con $n \ge 2$ y con $|F^{(n)}(x)| \ge \lambda > 0$ en (a, b). Entonces*

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| \le \frac{n \cdot C_n}{\lambda^{1/n}}, \tag{3.10}$$

donde $C_n \le 2^{5/3}$ para todo $n \ge 2$ y además $C_n \to 4e^{-1}$ cuando $n \to \infty$.

[2]Sin embargo, como en este trabajo sólo nos interesan acotaciones fuertes en intervalos finitos, no está claro cuál sería el resultado óptimo al aplicar esto, pues podrían perderse constantes.

Este lema es una versión aún más precisa de lo que se conoce como (n-ésimo) *lema de Van der Corput*, siendo el *primer lema* la "piedra angular" de todos ellos. En la referencia [1] de 1980 se publicó la mejor cota $\frac{n \cdot C_n}{\lambda^{1/n}}$ hasta 2005 con valor $C_n = 2^{5/2}\pi^{1/n}(1 - n^{-1})$. La prueba dada por K. Rogers en 2005 requiere el siguiente resultado previo sobre tamaños de conjuntos de subniveles en intervalos ("sublevel sets"):

Proposición 3.4.2. *(Estimación de conjuntos de subniveles)*
Sea una función real $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable n veces, con $n \geq 1$ y con $|f^{(n)}(x)| \geq \lambda > 0$ en (a, b). Entonces

$$|\{x \in (a, b) : |f(x)| \leq \alpha\}| \leq K_n(\alpha/\lambda)^{1/n}$$

donde $K_n = (n!2^{2n-1})^{1/n}$.

Para ver una prueba, consúltese [13].
Nótese que $K_n \leq 2n$ para todo $n \geq 1$, y por la fórmula de Stirling[3] tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!2^{2n-1})^{1/n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}2^{2n-1})^{1/n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{1/2n} 4e^{-1} = 4e^{-1}$$

Ahora ya se puede probar el lema de esta sección utilizando el *primer lema fuerte de Van der Corput* y la proposición anterior:

Demostración. (del "lema fuerte n-ésimo de Van der Corput")
En efecto, siguiendo a [13], realizamos la integración separadamente sobre los conjuntos complementarios en (a, b) siguientes

$$E_1 := \{x \in (a, b) : |F'(x)| \leq \alpha\}$$

y

$$E_2 := \{x \in (a, b) : |F'(x)| > \alpha\}$$

Si ponemos $f(x) = F'(x)$, entonces $|f^{(n-1)}(x)| \geq \lambda$, y por la proposición anterior se verifica

$$|E_1| \leq ((n-1)!2^{2(n-1)-1})^{1/(n-1)}(\alpha/\lambda)^{1/(n-1)}$$

por lo que obtenemos

$$\Big|\int_{E_1} e^{iF(x)}\, dx\Big| \leq ((n-1)!2^{2n-3})^{1/(n-1)}(\alpha/\lambda)^{1/(n-1)}$$

Por otra parte, el conjunto E_2 está compuesto de, como mucho, $2(n-1)$ intervalos en cada uno de los cuales $F'(x) \geq \alpha$ y $F'(x)$ es monótona en cada uno, por lo que según el "primer lema de Van der Corput" tenemos que

$$\Big|\int_{E_2} e^{iF(x)}\, dx\Big| \leq 2(n-1)\frac{2}{\alpha}$$

[3] $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{r_n}$ con $r_n \in ((12n+1)^{-1}, (12n)^{-1})$ para $n = 1, 2, ...$ De modo que, cuanto más grande sea n, el factorial se aproxima cada vez mejor a $\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. Véase [11].

Para finalizar basta optimizar respecto a la variable α y así se obtiene lo que queríamos demostrar:

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| \le \Big(\frac{(n-1)!2^{2n-1}}{(n-1)^{n-2}}\Big)^{1/n}\frac{n}{\lambda^{1/n}} = \frac{n\cdot C_n}{\lambda^{1/n}}$$

Ya sólo es una simple comprobación, desde los primeros términos de la sucesión C_n, que siempre son menores o iguales que $2^{5/3}$. Además, si usamos la fórmula de Stirling, $\lim_{n\to\infty} C_n = 4e^{-1}$, como ya se ha visto antes. □

3.5. La definitiva integración por partes

Acabaremos el presente capítulo con la prueba (¿¡otra más!?)[4] del *primer lema fuerte de Van der Corput* que puede verse en [5]. Acabará como empezamos, con una prueba directa mediante integración por partes, sólo que en esta referencia se exige (en realidad se necesita C^2) que $F(x)$ sea infinitamente diferenciable.

Lema 3.5.1. *Sea $F(x)$ una función real $F(x)\in C^\infty(a,b)$ con función derivada $F'(x)$ monótona tal que $F'(x)\ge\lambda>0$ o $F'(x)\le-\lambda<0$ para $a\le x\le b$. Entonces*

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| \le \frac{2}{\lambda}.$$

Demostración. Fijamos $\lambda>0$ y suponemos, sin pérdida de generalidad que $F'(x)$ es creciente y que $F'(x)\ge\lambda>0$ con $x\in[a,b]$, por continuidad. Integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b e^{iF(x)}\,dx = \int_a^b \frac{1}{iF'(x)} iF'(x)e^{iF(x)}\,dx =$$

$$= \Big[\frac{1}{iF'(x)}e^{iF(x)}\Big]_a^b - \frac{1}{i}\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)' e^{iF(x)}\,dx$$

de aquí se tiene, por un lado

$$\Big|\Big[\frac{1}{iF'(x)}e^{iF(x)}\Big]_a^b\Big| \le \frac{1}{F'(b)} + \frac{1}{F'(a)}$$

y por otro

$$\Big| -\frac{1}{i}\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)' e^{iF(x)}\,dx\Big| \le \int_a^b \Big|\Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)'\Big|\,dx =$$

$$= \Big|\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)'\,dx\Big| = \Big|\frac{1}{F'(b)} - \frac{1}{F'(a)}\Big| =$$

$$= \frac{1}{F'(a)} - \frac{1}{F'(b)}$$

[4] Obtuve esta prueba justo después de la publicación del artículo [6]... para posteriormente (oh!) descubrir que **ya** aparecía en [5]. Probablemente K. Rogers pensó en esta demostración cuando nos propuso en clase probar el primer lema fuerte de Van der Corput en el curso 2012-2013.

ya que si $F'(x)$ es una función monótona, $1/F'(x)$ también lo es, y entonces $(1/F')'$ tiene signo constante. Reuniendo ambas partes se obtiene una cancelación, pues

$$\Big|\int_a^b e^{iF(x)}\,dx\Big| = \Big|\Big[\frac{1}{iF'(x)}e^{iF(x)}\Big]_a^b - \frac{1}{i}\int_a^b \Big(\frac{1}{F'(x)}\Big)' e^{iF(x)}\,dx\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{F'(a)} - \frac{1}{F'(b)} + \frac{1}{F'(b)} + \frac{1}{F'(a)} = \frac{2}{F'(a)} \le \frac{2}{\lambda}.$$

$\square$

3.6. Algunas consecuencias

Lo normal en muchas aplicaciones en teoría de números es que las sumas trigonométricas o exponenciales aparezcan sin regularizar, es decir, **no** suelen ser del tipo $\sum_n g(n)e(f(n))$ con g infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ con soporte compacto. Hay toda una teoría de regularización y tratamiento de integrales oscilatorias en $\mathbb{R}$ (transformadas de Fourier, principio de la fase estacionaria, etc) que no trataremos aquí por su enorme extensión (véase [5], para un estudio detallado).

Por tanto, con la referencia [7] como guía, enumeramos brevemente algunas consecuencias útiles (para sumas no regularizadas, en intervalos finitos) que se derivan de la fórmula de sumación de Poisson para intervalos finitos y también de los lemas de Van der Corput.

Proposición 3.6.1. *Sea f una función dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo $[a,b]$, con a,b,α,β enteros*[5] *tal que $\alpha < f' < \beta$; entonces*

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) = \sum_{\alpha\le n\le\beta}\int_a^b e(f(x)-nx)\,dx + \mathcal{O}(\log(\beta-\alpha+1)).$$

Demostración. Podemos suponer $\alpha = 0$, pues se puede cambiar $f(n)$ por $f(n)-\alpha n$. Este cambio no altera el valor de la suma.

Si integramos por partes en la fórmula de sumación de Poisson para sumas finitas (cambiando n por $-n$), resulta

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))\,dx + \sum_{n\ne 0} n^{-1}\int_a^b f'(x)e(g(x))\,dx + \mathcal{O}(1), \tag{3.11}$$

donde $g(x) := f(x)-nx$.

Si $n > \beta$ o $n < \alpha = 0$, $g'(x) \ne 0$ en $[a,b]$ y es posible realizar una integración por partes para conseguir

$$2\pi\Big|\int_a^b f'(x)e(f(x)-nx)\,dx\Big| \le \Big|\frac{f'(a)}{g'(a)}\Big| + \Big|\frac{f'(b)}{g'(b)}\Big| + \int_a^b |(\frac{f'}{g'})'|\,dx \le \frac{2\beta}{|\beta-n|}.$$

[5] en el caso de α,β; sólo para simplificar.

En la última desigualdad hemos utilizado el hecho de que f'/g' es monótona por ser composición de f' y una función monótona, y por ello se puede meter la integral del final dentro del valor absoluto (como en la prueba de los lemas de Van der Corput). De este modo aseguramos la convergencia absoluta de la serie de esta Proposición. En efecto, la contribución de los términos con $n > \beta$ y $n < 0$ está acotada por

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\beta}{n(n-\beta)} + \sum_{n=\beta+1}^{\infty} \frac{\beta}{n(n-\beta)} \ll \sum_{|n|>2\beta} \beta n^{-2} + \sum_{0\neq |n|\leq 2\beta} |n|^{-1} \ll \log{(\beta+2)},$$

donde se han aproximado sumas por integrales. Al sustituir más arriba se obtiene

$$\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))\, dx + \sum_{0<n\leq\beta} n^{-1} \int_a^b f'(x) e(g(x))\, dx + \mathcal{O}(\log{(\beta+2)}).$$

Como

$$\int_a^b f'(x)e(g(x))\, dx - n\int_a^b e(g(x))\, dx = \frac{1}{2\pi i}\big(e(g(b)) - e(g(a))\big) = \mathcal{O}(1)$$

despejando y sustituyendo esta primera integral se obtiene lo que queríamos demostrar. □

Como corolario de lo anterior, si $|f'| \leq 1/2$ en $[a, b]$, poniendo $\alpha = -1 = -\beta$ y estimando las integrales de $n = \pm 1$ con el primer lema de Van der Corput, se llega a que

$$\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))\, dx + \mathcal{O}(1).$$

Ya, para finalizar, enunciamos el siguiente resultado, que es consecuencia directa del segundo lema de Van der Corput:

Teorema 3.6.2. *Sea $f \in C^2([a, b])$ con a, b enteros. Si $0 < \lambda \ll |f''| \ll \lambda$, entonces*

$$\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n)) \ll (b-a)\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}.$$

Demostración. El teorema del valor medio aplicado a f' implica que, en la proposición anterior pueden elegirse α, β de modo que $\beta-\alpha \ll \lambda(b-a)+1$. Por el segundo lema de Van der Corput, cada integral es $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$, luego

$$\sum_{a\leq n\leq b} e(f(n)) \ll (\lambda(b-a)+1)\lambda^{-1/2} + \log{(\lambda(b-a)+2)}.$$

Así, si $\lambda \leq 1$ el primer término domina al logaritmo; y si $\lambda > 1$ el teorema es trivial. □

Como ejemplo, si $a = 1$, $b = N$ y $f(n) = n^2/N$ se obtiene una acotación para las sumas de Gauss del orden correcto y además, se obtiene que las sumas parciales de las mismas son $\mathcal{O}(N^{1/2})$, lo cual en modo absoluto era obvio.

Bibliografía

[1] G. I. Arhipov, A. A. Karacuba and V. N. Cubarikov, *Trigonometric integrals*, Math. USSR Izvestija 15 (1980), 211-239.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, second edition. John Wiley & Sons, New York, 1976.

[3] J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. **84** (1921), no. 1-2,53-79.

[4] N. G. de Bruijn, *Johannes G. van der Corput (1890-1975) A biographical note.* Acta Arithmetica **32** (1977) 207-208.

[5] A. J. Castro Castilla, *El método de la fase estacionaria, funciones de Bessel y aplicaciones.* Tesis de Máster. Universidad Autónoma de Madrid, (2010)

[6] C. A. Catalá, *A new proof for a sharp Van der Corput's Lemma*, Amer. Math. Monthly **122**, no. 02 (2015), 138-142. `http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.02.138.`

[7] F. Chamizo *Aplicaciones del Análisis Armónico*, Notas de clase. Universidad Autónoma de Madrid (2013).

[8] W. J. Ellison. *Les nombres premiers.* Hermann, Paris, 1975. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[9] A. Ivic. *The Riemann Zeta-Function.* Dover Publications, Mineola, NY, 2003. Theory and applications. Reprint of the 1985 original. John Wiley & Sons, New York.

[10] J.M. De Koninck, F. Luca, *Analytic Number Theory*, (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 134.) American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2012.

[11] H. Robbins, *A remark on Stirling's formula*, Amer. Math. Monthly **62**, no. 01 (1955), 26-29.

[12] K. M. Rogers, *Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 12, 3543-3550.

[13] K. M. Rogers, *Real and p-Adic Oscillatory Integrals*, PhD. Thesis, University of New South Wales, (2005).

[14] E. M. Stein *Harmonic Analysis: Real-Variable methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton mathematical series, 43, Princeton Univ. Press,Princeton, 1993.

[15] A. Zygmund, *Trigonometric series*. 2nd ed. Vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.