Las funciones L de Dirichlet

Adrián Ubis Martínez

13 de octubre de 2005

Prefacio

Este trabajo está dedicado al estudio de las funciones L de Dirichlet. En el texto sólo se tratan algunos temas sobre estas funciones, no es una exposición exhaustiva.

Las funciones L surgieron básicamente por el trabajo de Dirichlet en su intento (y logro) por demostrar que hay infinitos primos en progresiones aritméticas. Más tarde Riemann publicaría su memoria sobre la función Zeta, y a partir de ahí se vio que la relación de ésta (y de las funciones L en general) con la distribución de los primos es muy estrecha. Esto ha motivado que se haya trabajado mucho sobre ello desde entonces, extendiéndose a otros ámbitos la idea de trabajar con funciones Zeta. Una constante en el estudio de estas funciones, y en general de la Teoría de Números, es el lento avance que se ha producido. Parece desesperante pensar que la hipótesis de Riemann es cierta (con lo que sabríamos aproximar la distribución de los primos de forma muy buena), y sin embargo estar tan lejos de ella. Así, en este texto se muestran resultados mucho más débiles, y ello ha requerido un gran esfuerzo de muchos matemáticos.

En el capítulo 1 hacemos una breve introducción a la relación entre las funciones L y Zeta y la distribución de los primos en los enteros. Nos haremos una idea de como nació el concepto, y cuales son los problemas principales.

El capítulo 2 es un estudio de la mejor región libre de ceros para funciones L conocida hasta la fecha. Está basada en el estudio de sumas trigonométricas por el método de Vinogradov-Korobov, que veremos en detalle.

En el capítulo 3 se prueban dos teoremas sobre la densidad de ceros de funciones L en la banda crítica, a través de la acotación de sumas e integrales promediando sobre los caracteres.

Quisiera agradecer a mi director Fernando Chamizo su constante ayuda a lo largo de todo el trabajo. Son de destacar sus precisas correcciones, así como el hecho de que siempre muestre su forma de ver o exponer las cosas, tantas veces distinta a la mía (lo que me hace aprender).

Índice general

Capítulo 1

Distribución de la sucesión de los primos

1.1. Introducción

En la investigación sobre la distribución de los primos en los números naturales, la propiedad de factorización única en producto de primos se transformó de la mano de Leonhard Euler en la ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{1.1}$$

para todo $s > 1$, s real, donde el producto es sobre todos los primos. Esta fórmula da una relación entre la estructura aditiva de $\mathbb{N}$, y su más compleja estructura multiplicativa. Euler mismo fue capaz de usarla para ver que hay infinitos primos, hecho conocido desde Euclides. Veamos como actuar para conseguirlo:

Definiendo $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ y aplicando la fórmula de Abel (A.2) obtenemos

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} (x - \lfloor x \rfloor) x^{-s-1} dx, \tag{1.2}$$

con $\lfloor x \rfloor = \max_{n \le x} n$. Tomando logaritmos en (1.1) y aplicando el desarrollo en serie de potencias para la función $\log(1 + z)$ vemos que

$$\log \zeta(s) = \sum_{p} p^{-s} + \frac{1}{2} p^{-2s} + \frac{1}{3} p^{-3s} + \dots . \tag{1.3}$$

Teniendo en cuenta (1.2) y que la parte derecha de (1.3) es $\sum_p p^{-s} + O(p^{-2})$ llegamos a

$$\sum_p p^{-s} = \log\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1). \tag{1.4}$$

Haciendo tender s a 1 por la derecha concluimos la existencia de infinitos primos. Pero lo importante es que (1.4) nos da una medida de la proporción de primos que hay. Así, por ejemplo, eligiendo $s = 1 + (\log\log x)(\log x)^{-1}$ y acotando la cola de la serie podemos deducir siguiendo de nuevo a Euler que

$$\sum_{p\le x} p^{-1} \sim \log\log x.$$

Pero Euler no llego a estudiar más a fondo la distribución de los primos. Legrende fue el primero en preocuparse por este tema. Conjeturó que el número de primos menores o iguales que x, denotado por $\pi(x)$, viene dado aproximadamente por

$$\frac{x}{\log x - 1{,}08\ldots}.$$

Más tarde Gauss escribió que había pensado mucho en esa cuestión cuando era niño y había llegado a la conclusión de que la función

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

era una buena aproximación de $\pi(x)$. Él ciertamente creía, basándose en datos numéricos, que $\pi(x)/\mathrm{li}(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a infinito. Finalmente Tchebychev, en 1851, demostró que

$$\text{lím inf}\,\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} \le 1 \le \text{lím sup}\,\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)},$$

luego si el límite existe tiene que ser 1. En un segundo artículo de 1852 Tchebychev probó cotas concretas:

$$(0{,}92\ldots)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1{,}105\ldots)\frac{x}{\log x}.$$

Estos teoremas fueron demostrados con técnicas elementales. A partir de ese momento se intentó probar que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

lo que se conoce como el Teorema del Número Primo. Nótese que esto es equivalente a que $\mathrm{li}(x) \sim \pi(x)$, pues integrando por partes vemos que

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right). \tag{1.5}$$

1.2. La memoria de Riemann

Todavía la relación (1.1) no estaba aprovechada en su totalidad. Fue Bernhard Riemann quien, considerando $\zeta(s)$ como una función de variable compleja, mostró que $\zeta(s)$ era la clave para desentrañar el comportamiento de la sucesión de los primos. En concreto, en su artículo de 1859 probó los siguientes dos resultados [13]:

i) La función $\zeta(s)$ puede ser continuada analíticamente sobre $\mathbb{C}$ como una función meromorfa con un único polo en $s = 1$ de residuo 1.

ii) $\zeta(s)$ satisface la llamada ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s). \tag{1.6}$$

Vamos a probar estos dos hechos de una vez, siguiendo la demostración de Riemann (aunque él los probó de forma separada). La demostración se basa en relacionar la función ζ con la función theta

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Era conocido desde el trabajo de Jacobi con funciones elípticas que $\theta(x)$ cumplía la ecuación

$$\theta(x^{-1}) = x^{1/2}\theta(x). \tag{1.7}$$

Esta relación, que se prueba aplicando la fórmula de sumación de Poisson (A.3), es la que nos dará (1.6). Comenzamos con la definición típica de la función Gamma de Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Así, por el cambio $t = \pi n^2 x$ obtenemos

$$n^{-s}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}x^{s/2-1}dx,$$

y sumando en $n \in \mathbb{N}$ con $\Re s > 1$

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\eta(s)x^{s/2-1}dx, \tag{1.8}$$

donde $\eta(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{2}(\theta(x) - 1)$. Así, de (1.7) obtenemos

$$\eta(x^{-1}) = x^{1/2}\eta(x) + \frac{x^{1/2}}{2} - \frac{1}{2},$$

luego dividiendo la integral en (1.8) en los intervalos $[0, 1]$ y $(1, \infty)$, y haciendo el cambio $x \to x^{-1}$ en el primero de estos llegamos a

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})\eta(x)dx. \tag{1.9}$$

Debido a que la integral en (1.9) es convergente para todo $s \in \mathbb{C}$, esto nos da una extensión meromorfa de $\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}$ al plano complejo, y como $\Gamma(s)$ no tiene polos en $0, -1, -2, -3 \ldots$ y no tiene ningún cero (ver (A.10) y comentarios posteriores), también conseguimos la extensión meromorfa de $\zeta(s)$ con un único polo en $s = 1$. Además, (1.6) queda probado dándose cuenta de que la parte derecha de la igualdad en (1.9) no se modifica por la sustitución $s \to 1 - s$.

La ecuación funcional va a ser clave para nuestro conocimiento de la función ζ, porque nos permite obtener información para valores de s con $\Re s < 0$ a partir del comportamiento de $\zeta(s)$ en $\Re s > 1$. Así por ejemplo, como en $\Re s > 1$

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n)n^{-s},$$

(donde $\mu(n)$ es la función de Möbius (A.6)) entonces $|\zeta(s)|^{-1} \le \zeta(\sigma) < \infty$ y por tanto $\zeta(s)$ no tiene ceros en esa región. De esto vemos que los únicos ceros de $\zeta(s)$ en $\Re s < 0$ son los polos de $\Gamma(s/2)$, es decir $s = -2, -4, -6, \ldots$ Así, sólo desconocemos los ceros en la banda crítica $0 \le \sigma \le 1$. De estos sabemos que están situados de forma simétrica respecto al eje real y respecto a la línea $\Re s = 1/2$, teniendo en cuenta la ecuación funcional y que $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$ (por (1.9)). Además los ceros en la banda crítica son todos complejos, teniendo en cuenta que (por (1.2)) $\zeta(\sigma) < 0$ cuando $0 < \sigma < 1$.

En el mismo artículo Riemann hizo una serie de profundas conjeturas:

iii) Sea $s = \sigma + it$. El número de ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica con $0 < t \leq T$ satisface la ecuación

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{1.10}$$

Se demuestra usando la ecuación funcional y la relación entre el número de ceros contenidos en una región y la variación del argumento de una función analítica cuando recorremos el borde. Pero nosotros sólo probaremos una cota superior para $N(T)$.

iv) La función entera $\xi(s)$ definida por

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \tag{1.11}$$

tiene la representación

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}, \tag{1.12}$$

donde A y B son constantes y ρ recorre los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica. ($\xi(s)$ es entera porque no tiene polos en $\Re s \geq 1/2$ y es una función par de $s - \frac{1}{2}$).

v) Existe una fórmula explícita para $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, válida para $x > 1$, y los términos más importantes van a provenir de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la banda crítica. Riemann dio una fórmula explícita, pero como es una poco complicada, nosotros escribiremos una para $\psi(x)$, donde $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ y

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La fórmula es la siguiente:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}). \tag{1.13}$$

vi) Por último la famosa Hipótesis de Riemann: Todo cero en la banda crítica está situado en la línea $\Re s = 1/2$.

Primero vamos a ver que aproximar $\psi(x)$ por x es como aproximar $\pi(x)$ por $\mathrm{li}(x)$. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.1. *Sea $E(x)$ una función creciente tal que $\psi(x) = x + O(E(x))$. Entonces $\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2}\log x + E(x)/\log x)$.*

Demostración. Es sencillo ver que $\pi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)/\log n + O(x^{1/2}\log x)$. Aplicando el lema de Abel (A.2) deducimos que

$$\pi(x) = \psi(x)/\log x + \int_2^x \psi(t)/(t\log^2 t)dt + O(x^{1/2}\log x)$$

o puesto de otra forma

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \frac{\psi(x) - x}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t\log^2 t}dt + O(x^{1/2}\log x)$$

de donde concluimos el enunciado. □

En realidad Riemann actuó a partir de (1.3), que podemos poner como

$$\log\zeta(s) = \sum_n f(n)n^{-s}, \tag{1.14}$$

donde $f(p^m) = 1/m$ y $f(n) = 0$ en otro caso. Usando el Análisis Complejo obtuvo una fórmula para

$$\sum_{n\le x} f(n) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots$$

y de ahí "despejó" $\pi(x)$. Nosotros, en vez de hacer esto, partiremos de la igualdad obtenida derivando en (1.14) en $\Re s > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}, \tag{1.15}$$

(vemos como la función Λ surge de forma natural) y obtendremos una fórmula para $\sum_{n\le x} \Lambda(n) = \psi(x)$. La idea básica es usar la integral compleja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1, \\ 0 & \text{si } 0 < y < 1, \end{cases} \tag{1.16}$$

que se prueba por el teorema de los residuos. Aplicando esta fórmula sobre cada término de la serie en (1.15), por convergencia absoluta en $\Re s > 1$ obtenemos

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds \tag{1.17}$$

para $c > 1$. Con esta fórmula, si consiguiésemos mover la línea de integración hacia la izquierda obtendríamos $\psi(x)$ en función de los residuos de la función $(-\zeta'(s)/\zeta(s))x^s s^{-1}$, que son $-\zeta'(0)/\zeta(0)$, x y $-x^\rho \rho^{-1}$ para cada cero ρ de ζ. Pero para poder mover la línea de integración, que nos hará probar *v*), necesitamos controlar el tamaño de $-\zeta'(s)/\zeta(s)$. Esto lo haremos probando *iv*) y un resultado más débil que *iii*).

Para conseguir *iv*), usamos el Teorema de Factorización de Hadamard [3], que se puede ver como una extensión del teorema fundamental del álgebra para funciones enteras que no crecen muy rápido:

Teorema 1.2. *Sea $f(z)$ una función entera de orden 1, esto es que para todo $\alpha > 1$ se cumple*

$$f(z) \ll e^{|z|^\alpha}. \tag{1.18}$$

Si $f(0) \neq 0$, entonces $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = e^{A+Bz} \prod_\rho \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{\frac{z}{\rho}},$$

donde el producto recorre los ceros de f en el plano complejo, y A y B son constantes.

Veamos que $\xi(s)$ cumple las hipótesis del teorema. Comparando la integral en (1.9) con la definición de $\Gamma(s)$ (teniendo en cuenta que $\eta(t) \ll e^{-t}$) deducimos que

$$\xi(s) \ll |s|^2 \Gamma(1/2 + |s|/2) \ll e^{Cs \log s},$$

para cierta constante C (esto último por la fórmula de Stirling (A.14)). Como además $\xi(0) \neq 0$, por el teorema 1.2 probamos *iv*). Aplicando derivada logarítmica en (1.12) llegamos a

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Ahora, comparando esto con lo que obtenemos al aplicar derivada logarítmica en (1.11), deducimos el siguiente resultado:

Teorema 1.3. *Existe una cierta constante B tal que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right), \tag{1.19}$$

donde la suma es sobre los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica.

Con este teorema vamos a demostrar que ζ no tiene demasiados ceros y que además están distribuidos verticalmente de forma más o menos regular en la banda crítica:

Teorema 1.4. *Sea $T > 0$. Entonces*

$$N(T+1) - N(T) \ll \log T$$

y por tanto

$$N(T) \ll T \log T.$$

Demostración. Tomando $s = 2 + iT$, vemos por (1.15) que $|-\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq -\zeta'(2)/\zeta(2)$. Así, por el teorema 1.3 y (A.11) se cumple que

$$\sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{2+iT-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \ll \log T.$$

Pero como $\rho = \beta + i\gamma$ cumple que $0 \leq \beta \leq 1$, entonces $\Re(1/\rho)$ es positivo y además

$$\Re\frac{1}{2+iT-\rho} = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \leq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2}.$$

Luego deducimos que

$$\sum_{\rho} \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \ll \log T, \tag{1.20}$$

lo que implica $N(T+1) - N(T) \ll \log T$. □

Ahora podemos dar una expresión que controle el tamaño de $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ en la banda crítica en función de los ceros cercanos a s:

Proposición 1.5. *Sea $s = \sigma + it$. Entonces*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho:|s-\rho|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log|t|),$$

con la constante implícita uniforme en $\sigma \geq -1$, $|t| \geq 2$ y $s \neq \rho$ para todo cero ρ en la banda crítica.

Demostración. Aplicamos el teorema 1.3 para s y para $s_1 = 2+it$. Restando las expresiones, como en el teorema anterior vemos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log|t|).$$

Para los términos con $|\gamma - t| \geq 1$, tenemos que

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+it-\rho)|} \leq \frac{2-\sigma}{|s-\rho|^2} \leq \frac{1/5}{4+(t-\gamma)^2},$$

luego por (1.20) deducimos que estos términos contribuyen $O(\log|t|)$. Por otra parte, como $|(2+it-\rho)^{-1}| \leq 1$ y hay $O(\log|t|)$ ceros con $|t-\gamma| \leq 1$, concluimos el resultado. $\square$

Ya estamos en condiciones de terminar la prueba de (1.13). En vez de usar la integral (1.16) utilizaremos una aproximación finita de ella. Esto es, para $T > 2$,$1 < c < 2$ e $y \neq 1$ positivo podemos probar aplicando el teorema de los residuos y acotando que [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \delta(y) + O\left(\frac{y^c}{T\,|\log t|} \right),$$

donde $\delta(y)$ es 0 si $0 < y < 1$ y 1 si $y > 1$. Así, tomando $c = 1 + (\log x)^{-1}$ y sumando errores obtenemos

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O(xT^{-1} \log^2 x). \tag{1.21}$$

Usando el teorema de los residuos con $U < -2$ tenemos que

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2\pi i} \int_{R(T,U)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O(xT^{-1} \log^2 x),$$

donde la suma es sobre los ceros $\rho = \beta + \gamma$ de ζ con $|\gamma| < T$, $-U < \beta < c$ y

$$R(T,U) = [c - iT, -U - iT] \cup [-U - iT, -U + iT] \cup [-U + iT, c + iT],$$

en caso de que no haya ceros de ζ en $R(T,U)$ en el resto de $R(T,U)$. Pero por el teorema 1.4, moviendo T a lo sumo una unidad podemos asegurar que el cero más cercano a $R(T,U)$ en la banda crítica esté a distancia

$C/\log|T|$, para una constante absoluta C. Así, por la proposición 1.5 vemos que $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \log^2|t|$ en los segmentos $[-1 \pm Ti, c \pm Ti]$. Tomando U un número impar negativo, usando el teorema 1.3 y (A.11) deducimos que $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \log(|s|)$. Con estas cotas es sencillo ver que

$$\int_{R(T,U)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds \ll xT^{-1} \log^2 T.$$

De esto y de (1.21) haciendo U tender a infinito deducimos que

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{-2m} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + O(xT^{-1}\log^2(xT)), \tag{1.22}$$

donde ahora la suma en ρ es sobre los ceros en la banda crítica con $|\gamma| < T$. Como

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m} = \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}),$$

demostramos la fórmula explícita (1.13) para $x \notin \mathbb{N}$ haciendo tender T a infinito en (1.22). Pero además, dejando T fijada obtenemos una fórmula mucho más útil para nosotros de cara a aproximar $\psi(x)$:

Proposición 1.6. *Sean $x, T \geq 2$. Entonces se cumple la ecuación*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im\rho < T|} \frac{x^\rho}{\rho} + O(xT^{-1}\log^2(xT) + \log x),$$

donde ρ recorre los ceros de ζ en la banda crítica.

Nótese que en el enunciado de esta proposición no hemos puesto la condición de que x no sea entero. Esto es porque al variar x menos de una unidad el salto máximo que se produce en la función $\psi(x)$ es $\log x$, luego metiendo esto en el término de error vemos que la ecuación sigue siendo válida.

Como $|x^\rho| = x^\beta$ (con $\rho = \beta + i\gamma$), vemos que cuanto más grande sea la banda $r \leq \sigma \leq 1$ donde no hay ceros de $\zeta(s)$, más pequeña será la diferencia $\psi(x) - x$. En concreto, como por el teorema 1.10

$$\sum_{|\gamma|\leq T} \left|\frac{1}{\rho}\right| \leq \int_0^T \frac{1}{t} dN(t) \ll \int_0^T N(t)t^{-2}dt \ll \log^2 T, \tag{1.23}$$

entonces tenemos que si $\zeta(s)$ no tiene ceros con $\beta > r \geq 1/2$ entonces tomando $T = x^{1/2}$ vemos que

$$\psi(x) = x + O(x^r \log^2 x).$$

En particular si se cumple la hipótesis de Riemann, entonces

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x).$$

Llegados a este punto podríamos ser un tanto escépticos y argumentar que si hubiese mucha cancelación en la fórmula de la proposición 1.6, aunque hubiera ceros con $\beta > r$ la diferencia $\psi(x) - x$ podría ser menor que x^r. Veamos que esto no es posible. Aplicando el lema de Abel (A.2) a (1.15) obtenemos que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx,$$

y como $s/(s-1) = s \int_1^\infty x^{-s} dx$ llegamos a la ecuación

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty (\psi(x) - x) x^{-s-1} dx. \tag{1.24}$$

Supongamos como antes que $\zeta(s)$ tiene un cero con parte real r y que $\psi(x) - x = o(x^r)$. Por esto último, la parte derecha de la igualdad en (1.24) converge uniformemente en $\Re s \geq r$. Pero como $\zeta(s)$ tiene un cero con parte real r la función $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo con parte real r, contradicción.

Luego la mayor o menor irregularidad en la distribución de los primos en $\mathbb{N}$ queda determinada por la cercanía de los ceros de la función $\zeta(s)$ a la línea $\Re s = 1$. Por ahora no sabemos ni siquiera si hay ceros sobre esta línea. Vamos a probar que no los hay en una pequeña región a su izquierda:

Teorema 1.7. *Existe una constante $c > 0$ tal que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en la región*

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{\log(|t| + 2)}. \tag{1.25}$$

Demostración. Supongamos que $\zeta(s)$ se hace cero en $\rho = \beta + it$. La prueba se basa en estudiar el comportamiento de $-\zeta'(s)/\zeta(s)$. Si $\zeta(\beta + i\gamma) = 0$, con β cerca de 1, haciendo $\sigma \to \beta$ por la derecha por (1.5) vemos que $-\Re\zeta'(\sigma +$

$i\gamma)/\zeta(\sigma+i\gamma)$ tiende a $-\infty$. Pero cuando $\sigma>1$ tenemos la expresión de esta función en serie dada por (1.15), y tomando parte real

$$-\Re\frac{\zeta'(\sigma+i\gamma)}{\zeta(\sigma+i\gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(\gamma\log n). \tag{1.26}$$

Para que esto tienda a $-\infty$ $\cos(\gamma\log n)$ debe ser negativo para muchos n. Pero entonces $\cos(2\gamma\log n)$ sería muchas veces positivo, lo que implicaría que $-\Re\zeta'(\sigma+i2\gamma)/\zeta(\sigma+i2\gamma)$ tendiese a $+\infty$. Esto contradeciría el hecho de que $\zeta'(\sigma+i2\gamma)$ se mantiene acotada (si γ no está cera de cero).

A este razonamiento se le puede dar rigor usando la ecuación

$$2(1+\cos\theta)^2=4\cos\theta+\cos2\theta+3\geq0. \tag{1.27}$$

Así, comparando los coeficientes de las series obtenemos que

$$4\left(-\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)+\left(-\Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right)+3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)\geq0 \tag{1.28}$$

Ahora, como $\zeta(s)$ tiene un polo en $s=1$ vemos que si $1<\sigma<2$ se cumple para cierta constante A la desigualdad

$$\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\leq\frac{1}{\sigma-1}+A.$$

Para la otras dos funciones, por la proposición 1.5 se cumplen las desigualdades

$$\Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}>\frac{1}{\sigma-\beta}+O(\log(|t|+2)),\qquad\Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}=O(\log(|t|+2)).$$

Sustituyendo en (1.28)

$$4\frac{1}{\sigma-\beta}\leq3\frac{1}{\sigma-1}+O(\log(|t|+2)).$$

Manipulando la desigualdad llegamos a

$$1-\beta\geq(\sigma-1)\frac{1-(\sigma-1)O(\log(|t|+2)}{3+(\sigma-1)O(\log(|t|+2)},$$

luego tomando $\sigma-1=c'/\log(|t|+2)$ para cierta constante $c'>0$ acabamos la prueba. $\square$

Con esta pequeña región libre de ceros, tomando $T = \exp(\log^{1/2} x)$ en la proposición 1.6 y teniendo en cuenta (1.23) deducimos para cierta constante $\delta > 0$ que

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-\delta \log^{1/2} x)),$$

y de aquí por el lema 1.1

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x \exp(-\delta' \log^{1/2} x)),$$

para otra constante $\delta' > 0$. En particular hemos probado el Teorema del número primo, siguiendo más o menos la primera demostración de éste, realizada independientemente por Hadamard y de la Vallée Poussin en 1896 (probando las conjeturas que Riemann había hecho en 1859). Además vemos que Gauss tenía razón pues $\mathrm{li}(x)$ aproxima mucho mejor que $x/\log x$ a la función $\pi(x)$ (ver (1.5)).

1.3. El Teorema de Dirichlet

Euler no sólo obtuvo la fórmula (1.1), sino que probó otras similares como

$$L(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)^{-s} = \prod_{p \equiv 1(4)} (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p \equiv 3(4)} (1 + p^{-s})^{-1} \tag{1.29}$$

para $s > 1$ cuya demostración se reduce otra vez al teorema fundamental de la aritmética. Además dedujo que

$$L(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4} (= \operatorname{arc\,tg} 1).$$

De esta observación se sigue obviamente (tomando logaritmos en (1.29)) que

$$\sum_{p \equiv 1(4)} p^{-s} - \sum_{p \equiv 3(4)} p^{-s} \ll 1,$$

y contrastando esta fórmula con (1.4) llegamos a

$$\sum_{p \equiv 1(4)} p^{-s} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1) \quad \sum_{p \equiv 3(4)} p^{-s} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1) \tag{1.30}$$

luego hemos descubierto no sólo que existen infinitos primos en las progresiones aritméticas $4n+1$ y $4n+3$, sino que los primos están más o menos bien distribuidos en cada una de ellas.

A partir de estos pasos iniciales, Dirichlet se dio cuenta de que para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y $f(1) = 1$ (lo que llamamos funciones completamente multiplicativas) se puede establecer una identidad del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_p (1 - f(p)p^{-s})^{-1} \tag{1.31}$$

si $f(n)$ no crece demasiado deprisa (por ejemplo como un polinomio) y buscó la manera de usar esto para ver que hay infinitos primos en la sucesión

$$a, a+q, a+2q, \ldots$$

donde a y q son dos números naturales cualesquiera con la condición (obvia) de $(a,q) = 1$. Lo consiguió [4] en 1837 (12 años antes del artículo de Riemann) construyendo para ello unas funciones llamadas caracteres, y esto fue el comienzo de la teoría de representaciones de grupos. Realmente la prueba de 1837 sólo era completa para el caso q primo. El caso general fue demostrado por Dirichlet [5] en un artículo de 1839-1840 . Vamos a ver como proceder:

En general, a cualquier grupo abeliano finito G le podemos asociar otro grupo $\widehat{G}$ formado por los homomorfismos

$$\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$$

que llamamos caracteres de G, definiendo la multiplicación de caracteres como $\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g)$, y el elemento inverso de χ es el carácter conjugado $\chi^{-1}(g) = \overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$. Al homomorfismo identidad χ_0 lo llamaremos carácter principal. Además $\widehat{G}$ es isomorfo a G, pues descomponiendo G en producto de grupos cíclicos $G = \prod_j \langle g_j \rangle$ podemos asociar a cada g_j el carácter definido como

$$\chi_{g_j}(g_j^m) = e(m/|g_j|) \tag{1.32}$$

para elementos de $\langle g_j \rangle$ e idénticamente 1 fuera de este subgrupo. Por tanto $\widehat{G} = \prod_j \langle \chi_{g_j} \rangle$. Decimos que el homomorfismo identidad χ_0 es el carácter principal. Ahora, expresando $g \in G$ como producto de los g_j vemos que

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0. \end{cases} \tag{1.33}$$

De forma equivalente, expresando χ como producto de χ_{g_j} se tiene que

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |\widehat{G}| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{si } g = 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Estas son las llamadas relaciones de ortogonalidad. Con ellas vemos que $\widehat{G}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(G)$, definiendo el producto escalar como

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \omega(g)\overline{\varphi(g)}.$$

Así cualquier función $\omega \in L^2(G)$ la podemos expresar como

$$w(g) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \langle w, \chi\rangle \chi(g). \tag{1.35}$$

Centrémonos en los caracteres del grupo $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Podemos extender cada carácter χ a $\mathbb{Z}$ como una función periódica de período q con la condición $\chi(n) = 0$ si $(n, q) > 1$, llamando caracteres módulo q a las funciones así definidas (o caracteres de Dirichlet módulo q). De esta forma, para la función

$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a \pmod q \\ 0 & \text{si } n \not\equiv a \pmod q \end{cases}$$

por (1.35) conseguimos la representación

$$\omega(n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(n), \tag{1.36}$$

donde la suma es sobre los $\phi(q)$ caracteres módulo q. A partir de un carácter χ módulo q definimos la función $L(s, \chi)$ de Dirichlet

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} \tag{1.37}$$

en la región $\Re s > 1$ (realmente Dirichlet la trató como función de variable real, pero nosotros seguiremos los pasos de Riemann). Esta función es analítica y satisface el producto de Euler

$$L(s,\chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \tag{1.38}$$

Tomando logaritmos y usando (1.36) deducimos que

$$\sum_{p\equiv a(q)} p^{-s} = \sum_p \omega(p)p^{-s} = \frac{1}{\phi(q)}\sum_\chi \overline{\chi(a)}\log L(s,\chi) + O(1) \tag{1.39}$$

Comparando los productos de Euler de $\zeta(s)$ y $L(s,\chi_0)$ vemos que

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p|q}(1-p^{-s})\zeta(s) \tag{1.40}$$

luego $\log L(s,\chi_0) = \log(1/(s-1)) + O(1)$. Si χ no es principal, aplicando la fórmula de Abel (A.2) se sigue

$$L(s,\chi) = s\int_1^\infty M_\chi(x)x^{-s-1}dx, \tag{1.41}$$

donde $M_\chi(x) = \sum_{n\le x}\chi(n) \le q$ (debido a (1.33)). Luego $L(s,\chi)$ se mantiene acotado si $s\in\mathbb{R}$ $s>1$ y por tanto si probamos que

$$L(1,\chi)\neq 0 \tag{1.42}$$

para todo carácter no principal obtenemos el siguiente resultado de Dirichlet:

Teorema 1.8. *Sean a,q números naturales con $(a,q)=1$. Entonces*

$$\sum_{p\equiv a(q)} p^{-s} = \frac{1}{\phi(q)}\log\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$$

para todo $s>1$.

Corolario 1.9. *Hay infinitos primos en la progresión aritmética $a+qn$, $n=0,1,2\ldots$.*

Pero todavía nos queda probar la afirmación (1.42), que es la clave de la prueba. Otra vez usando el producto de Euler y las relaciones de ortogonalidad tenemos la expresión

$$\sum_\chi \log L(s,\chi) = \phi(q)\sum_p \sum_{\substack{m=1\\ p^m\equiv 1(q)}}^\infty m^{-1}p^{-ms} \tag{1.43}$$

En particular $\sum_\chi \log L(s,\chi) \geq 0$, o puesto de otra forma

$$\prod_\chi L(s,\chi) \geq 1. \tag{1.44}$$

Sabemos por (1.40) que $L(s,\chi)$ tiene un polo simple en $s = 1$ si y sólo si χ es principal. Por tanto no puede cumplirse para dos caracteres distintos χ y χ' que $L(1,\chi) = L(1,\chi') = 0$, pues entraría en contradicción con (1.44). En particular, si χ es un carácter complejo (toma valores fuera de los reales) hemos probado que $L(1,\chi) \neq 0$, pues si no tendríamos $L(1,\overline{\chi}) = L(1,\chi) = 0$. Sólo nos queda probar (1.42) para el caso en que χ es un carácter real (sólo toma valores reales).

Vemos que la ecuación (1.40) nos da una extensión meromorfa para la función $L(s,\chi_0)$, además de una ecuación funcional, usando la de $\zeta(s)$. En general, partiendo el sumatorio (1.37) en progresiones aritméticas podemos escribir

$$L(s,\chi) = q^{-s} \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \zeta\left(s, \frac{a}{q}\right), \tag{1.45}$$

donde $\zeta(s,x)$ es la llamada función Zeta de Hurwitz, definida para cada $0 < x \leq 1$ por

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s} \quad \text{si } \sigma > 1. \tag{1.46}$$

Vamos a poner $\zeta(s,x)$ en función de $\zeta(s)$ para $\Re s > 1$:

$$\begin{aligned} \zeta(s,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+x-1)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \left(\frac{x-1}{n}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (x-1)^k \zeta(s+k) \\ &= \zeta(s) - s\zeta(s+1)(x-1) + \ \ldots \end{aligned} \tag{1.47}$$

En particular esta fórmula nos da la extensión meromorfa de $\zeta(s,x)$ a todo el plano complejo con un único polo en $s = 1$ residuo 1, y además si χ no es principal por (1.45) tenemos la extensión de $L(s,\chi)$ como función entera (por ortogonalidad).

Con la extensión entera de $L(s,\chi)$ ya podemos concluir que $L(1,\chi) \neq 0$ para χ real de forma sencilla. Supongamos que $L(1,\chi) = 0$. Consideramos la

función
$$\zeta_\nu(s) = L(s,\chi)\zeta(s), \tag{1.48}$$
donde $\nu = 1 * \chi$ (ver (A.1) y (A.2)) es multiplicativa y entonces
$$\nu(n) = \prod_{p|n}(1 + \chi(p) + \chi(p)^2 + \ldots + \chi(p)^{\alpha_p}).$$

Luego como χ es real se cumple que $\nu(1) = 1$ y $\nu(n) \geq 0$. Por otra parte, como $L(1,\chi) = 0$, entonces $\zeta_\nu(s)$ es una función entera. Consideramos su desarrollo en serie de potencias
$$\zeta_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\zeta_\nu^{(k)}(2)(s-2)^k, \tag{1.49}$$
válido para todo $s \in \mathbb{C}$. Pero
$$\zeta_\nu^{(k)}(2) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n)(\log n)^k n^{-2} = (-1)^k b_k,$$
donde $b_k \geq 1$ para todo k. De esta forma (1.49) se transforma en
$$\zeta_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b_k (2-s)^k, \tag{1.50}$$
luego $\zeta_\nu(s) \geq e^{2-s}$ si $s < 2$, lo que entra en contradicción con el hecho de que $\zeta(s)$ se anule en $s = 0, -2, -4, \ldots$

1.4. Los ceros de Siegel

Ahora queremos ir más allá y siguiendo lo hecho en el caso de la función $\zeta(s)$, aproximar el número de primos congruentes con a módulo q menores o iguales que x, denotado $\pi(x;a,q)$. Equivalentemente podemos tratar
$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \ (\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n).$$
Definiendo para cada carácter χ módulo q la función
$$\psi(x,\chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n) \tag{1.51}$$

y usando de nuevo (1.35) concluimos que

$$\psi(x;a,q) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\psi(x,\chi). \tag{1.52}$$

Así, tenemos que como

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s} \tag{1.53}$$

podemos actuar como con $\zeta(s)$ y deducir que

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right) \frac{x^s}{s} ds. \tag{1.54}$$

Por tanto vemos que la aproximación de $\psi(x;a,q)$ va a depender de los ceros de las funciones $L(s,\chi)$, para todo carácter χ módulo q. Ya sabemos que $L(s,\chi_0)$ es la única que tiene polo en $s=1$, luego esperamos que el término principal en la aproximación de $\psi(x;a,q)$ sea $x/\phi(q)$.

Para estudiarlos los ceros de $L(s,\chi)$ usaremos que posee ecuación funcional. Vamos a ver que para algunos de estos caracteres, los llamados caracteres primitivos, esta ecuación será más simple, y a partir de los ceros de las funciones asociadas a estos caracteres tendremos controlados todos los ceros. Además, en las aplicaciones son necesarias estimaciones de $\psi(x;a,q)$ para un rango lo más amplio posible de q (respecto al tamaño de x), luego para nosotros será interesante la dependencia en q de los errores (a parte de la dependencia en x).

Si $q=p^\alpha$ con p primo, cada carácter χ módulo q es una función periódica de periodo mínimo p^β con $0 \le \beta \le \alpha$, luego podemos identificar χ con un carácter módulo p^β. Por tanto, si $q = \prod_p p^{\alpha_p}$ tenemos que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \cong \prod_p (\mathbb{Z}/p^{\alpha_p}\mathbb{Z})^\times$ y para cada carácter χ módulo q existen un único χ^* y un único $q^* \mid q$ tales que podemos escribir $\chi = \chi_0\chi^*$, donde χ^* es un carácter módulo q^* con periodo mínimo q^*. q^* se denomina el conductor de χ, y se dice que χ^* induce el carácter χ. En el caso de que el módulo de χ sea igual al conductor se dice que χ es un carácter primitivo. Los caracteres primitivos son más sencillos de tratar. Veamos que cumplen la siguiente relación ortogonal para progresiones aritméticas:

$$\sum_{x=1}^{q} \chi(ax+b) = \begin{cases} q\chi(b) & \text{si } q \mid a \\ 0 & \text{si } q \nmid a. \end{cases} \tag{1.55}$$

Sea S esta suma. Si $a \mid c$ y $q \mid ac$, entonces la multiplicación por $(1+c)$ es una permutación del conjunto de elementos módulo q de la forma $ax+b$. Se puede ver que el elemento más pequeño que cumple esto es $c_0 = q(a,q)/(a^2,q)$. Así, deducimos que para todo $m \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$\chi(1+mc_0)S = S.$$

Si $S \neq 0$, se sigue que $\chi(1+mc_0) = 0$. Pero esto implica que χ es periódico módulo c_0, y como χ es primitivo $c_0 = q$, es decir $q \mid a$.

Los caracteres del grupo aditivo $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ son de la forma (por (1.32))

$$\psi_a(x) = e\left(\frac{ax}{m}\right).$$

Éstos tienen un comportamiento más sencillo que los caracteres de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Por eso a veces es interesante escribir los últimos en función de los primeros mediante (1.35). Para esto debemos conocer los números

$$\tau_a(\chi) = q\langle \chi, \psi_a \rangle = \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e\left(\frac{-am}{q}\right), \tag{1.56}$$

las llamadas sumas de Gauss. Si $(a,q) = 1$ por el cambio $m \to (-a)^{-1}m$ vemos que $\tau_a(\chi) = \overline{\chi}(-a)\tau(\chi)$, donde

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e\left(\frac{m}{q}\right). \tag{1.57}$$

Si $(a,q) > 1$, en el caso de que χ sea primitivo escribiendo $m = r + hq/(q,a)$ vemos que (1.56) se reduce a sumas del tipo (1.55), con lo que $\tau_a(\chi) = 0$. Luego usando (1.35) vemos que

$$\chi(n) = \frac{\tau(\chi)}{q} \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(-a) e\left(\frac{an}{q}\right). \tag{1.58}$$

A partir de aquí vamos a calcular $|\tau(\chi)|$. Tomando módulos al cuadrado en (1.58) y expandiendo

$$|\chi(n)|^2 = \frac{|\tau(\chi)|^2}{q^2} \sum_{a=1}^{q} \sum_{b=1}^{q} \overline{\chi}(-a)\chi(-b) e\left(\frac{n(a-b)}{q}\right),$$

y sumando para todo n $1 \leq n \leq q$

$$\phi(q) = \frac{|\tau(\chi)|^2}{q^2} q\phi(q),$$

luego

$$|\tau(\chi)| = q^{1/2}. \tag{1.59}$$

Además de aquí y (1.58) se sigue que

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right). \tag{1.60}$$

Gracias a las ecuaciones (A.12) y (A.13) podemos poner la ecuación funcional para $\zeta(s)$ en la forma

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}s\right)\zeta(1-s).$$

Aplicando esta fórmula en la ecuación (1.47) y teniendo en cuenta (1.45) conseguimos (tras unos cálculos) la ecuación funcional para funciones $L(s,\chi)$. En el caso de que el carácter sea primitivo la ecuación queda más sencilla gracias a (1.60). Vamos a escribirla sólo en ese caso:

$$L(s,\chi) = 2i^{\mathfrak{a}}\tau(\chi)q^{-s}(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(s-\mathfrak{a})\right)L(1-s,\overline{\chi}) \tag{1.61}$$

con $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(1-\chi(-1))$. Usando de nuevo (A.12) y (A.13) tenemos la forma simétrica

$$\xi(s,\chi) = \varepsilon_\chi \xi(1-s,\overline{\chi}), \tag{1.62}$$

donde $\varepsilon_\chi = i^{-\mathfrak{a}}\tau(\chi)q^{-1/2}$ y

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) L(s,\chi). \tag{1.63}$$

De aquí inmediatamente deducimos que los ceros fuera de la banda crítica de $L(s,\chi)$ son

$$s = 0, -2, -4, -6, \ldots \qquad \text{si } \chi(-1) = 1 \tag{1.64}$$

$$s = -1, -3, -5, -7, \ldots \qquad \text{si } \chi(-1) = -1.$$

Si χ no es primitivo, comparando productos de Euler vemos la relación

$$L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \prod_{p|q'} (1 - \chi^*(p)p^{-s}) \tag{1.65}$$

entre la función L asociada a χ y la asociada al carácter primitivo χ^* que induce χ (q' es el producto de los primos que dividen a q pero no al conductor de χ). Por tanto, los ceros de $L(s,\chi)$ son los mismos que los de $L(s,\chi^*)$ más los ceros en el eje imaginario

$$s = \frac{2\pi i n}{\log p}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad p \mid q'. \tag{1.66}$$

$\xi(s,\chi)$ es una función entera, y por la ecuación (1.41) tenemos la cota

$$|L(s,\chi)| \leq 2q\,|s| \qquad \text{si } \sigma \geq \frac{1}{2}, \tag{1.67}$$

luego $\xi(s,\chi)$ cumple las hipótesis del teorema 1.2 y como antes podemos conseguir la representación (para χ primitivo)

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + B(\chi) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\mathfrak{a})}{\Gamma(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\mathfrak{a})} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{1.68}$$

A partir de esta ecuación podemos obtener (con demostraciones similares) los equivalentes al teorema 1.4 y de la proposición 1.5, es decir:

Teorema 1.10. *Se χ carácter primitivo módulo q, y sea $N(T,\chi)$ el número de ceros en la banda crítica con $0 \leq t \leq T$. Entonces:*

$$N(T+1,\chi) - N(T,\chi) \ll \log qT \tag{1.69}$$

y por tanto

$$N(T,\chi) \ll T \log qT \tag{1.70}$$

Proposición 1.11. *Sea χ carácter primitivo módulo $q > 1$. Entonces en la región $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \leq T$ se cumple la aproximación*

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{\rho : |s-\rho|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log q(|t|+1)).$$

También se cumple en la región $1/2 \leq \sigma \leq 2$.

A partir de estos resultados podemos considerar la fórmula equivalente a (1.54) pero con la integral truncada, como hicimos en el caso de $\zeta(s)$. Por (1.40) vemos que los residuos de $(-L'(s,\chi_0)/L(s,\chi_0))(x^s/s)$ son los mismos que los de $(-\zeta'(s)/\zeta(s))(x^s/s)$. Si $\chi \neq \chi_0$ no tenemos polo en $s = 1$, y en $s = 0$ tenemos la serie de Laurent

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{\mathfrak{a}-1}{s} + b + \dots$$

donde $b = b(\chi)$ es cierta constante (que puede depender de q). Así

$$\operatorname{res}_{s=0}\left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\frac{x^s}{s}\right) = (\mathfrak{a}-1)\log x + b.$$

El resto es igual al caso de la función $\zeta(s)$, luego acotando los errores mediante (1.11) llegamos al siguiente resultado:

Teorema 1.12. *Sea χ carácter primitivo módulo $q > 1$. Sea $2 \leq T \leq x$. Entonces se cumple que*

$$\psi(x,\chi) = -\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} + b(\chi) + O\left(\frac{x}{T}(\log qx)^2\right).$$

Restando de la ecuación de este teorema la misma ecuación con $x' = T' = 2$ desaparece $b(\chi)$ y como por (1.70)

$$\sum_{|\gamma|\leq T}\left|\frac{1}{\rho}\right| \leq \int_0^T \frac{1}{t}dN(t,\chi) \ll \int_0^T N(t,\chi)t^{-2}dt \ll \log^2 qT, \tag{1.71}$$

obtenemos

Corolario 1.13. *En las mismas condiciones que el teorema, tenemos que*

$$\psi(x,\chi) = \sum_{|\gamma|<T} \frac{2^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}(\log qx)^2\right).$$

Nótese que este teorema y el corolario son también válidos en el caso de que χ no sea primitivo, pues la diferencia entre $\psi(x,\chi)$ y $\psi(x,\chi^*)$ es $< 2(\log q)(\log x)$. La cuestión queda ahora reducida a ver donde están los ceros de las funciones $L(s,\chi)$. Podemos conjeturar que los ceros de todas las funciones $L(s,\chi)$ están en la línea $\Re s = \frac{1}{2}$. Esto es lo que se conoce como hipótesis de Riemann generalizada. Aplicando (1.71) y el teorema 1.12 llegamos al siguiente resultado:

Corolario 1.14. *Asumiendo la hipótesis de Riemann generalizada tenemos que para todo $a, q \in \mathbb{N}$ con $(a, q) = 1$*

$$\psi(x, a, q) = \frac{x}{\phi(q)} + O(x^{1/2}(\log x)^2).$$

En este caso si $q > x^{1/2}$ este corolario no nos dice nada nuevo, teniendo en cuenta que trivialmente $\psi(x; a, q) < x/q$. H. L. Montgomery ha hecho la conjetura de que

$$\psi(x; a, q) = \frac{x}{\phi(q)} + O(q^{-1/2}x^{1/2+\varepsilon})$$

para todo $x \geq q \geq 1$, $(a, q) = 1$ y $\varepsilon > 0$, donde la constante implícita sólo depende de q.

Vamos a ver qué podemos obtener sin hipótesis. Considerando en $\sigma > 1$ la representación

$$-\frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \chi(n) e^{it \log n}$$

y teniendo en cuenta que $\chi^2(n)e^{i2t \log n}$ tiene ángulo doble que $\chi(n)e^{it \log n}$ podemos usar como antes (1.27) y obtener

$$4\left(-\Re\frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)}\right) + \left(-\Re\frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)}\right) + 3\left(\frac{-L'(\sigma, \chi_0)}{L(\sigma, \chi_0)}\right) \geq 0. \quad (1.72)$$

Si χ es un carácter complejo, entonces χ^2 es un carácter no principal. Si χ_1 el carácter primitivo que induce χ^2, por (1.65) conseguimos la relación

$$\left|\frac{L'(s, \chi^2)}{L(s, \chi^2)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)}\right| \leq \sum_{p|q} \frac{p^{-\sigma} \log p}{1 - p^{-\sigma}} \leq \sum_{p|q} \log p \leq \log q. \quad (1.73)$$

Así podemos suponer que χ^2 es primitivo y usando la proposición 1.11 en (1.72) conseguir una región libre de ceros como hicimos en el caso de $\zeta(s)$, que va a ser de la forma

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log q(|t| + 1)}. \quad (1.74)$$

La dificultad llega cuando cuando χ es real, pues en este caso χ^2 es el carácter principal. El polo de $\chi^2 = \chi_0$ va a afectar a nuestros argumentos cuando queramos ver que no hay un cero cerca de $s=1$, y sólo vamos a poder probar (1.74) cuando $|\gamma| \geq (\log q)^{-1}$. Si $|\gamma| \leq (\log q)^{-1}$ no nos sirve la ecuación (1.72). Aún así vamos a probar en esa región que $L(s,\chi)$ no tiene ceros no reales con parte real muy cercana a uno. Si $\beta+i\gamma$ fuese un cero, su conjugado $\beta-i\gamma$ también lo sería. Usando la proposición 1.11 conseguimos

$$\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} > 2\frac{(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} + O(\log q). \tag{1.75}$$

Por otra parte, sin usar (1.72) tenemos la cota

$$\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} -\chi(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1}+c. \tag{1.76}$$

De (1.75) y (1.76) con $\sigma = 1+c'/\log q$ y c' una constante adecuada deducimos que

$$\beta < 1 - \frac{c''}{\log q}$$

con c'' constante. El caso en que $L(s,\chi)$ tenga un cero real doble se trata de la misma forma. Por tanto hemos probado lo siguiente:

Teorema 1.15. *Existe una constante $c>0$ tal que si χ es un carácter complejo módulo q, entonces $L(s,\chi)$ no tiene ceros en la región*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log q(|t|+1)}. \tag{1.77}$$

Además, si χ es real módulo q sólo puede tener a lo sumo un cero en la región (1.77), y éste debe ser real y simple.

Estos posibles ceros reales de caracteres reales son los llamados ceros de Siegel, y son un obstáculo para la obtención de resultados sobre distribución de primos en progresiones aritméticas. Por ello sólo se conocen estimaciones no triviales de $\psi(x;a,q)$ (y por tanto de $\pi(x;a,q)$) cuando q es muy pequeña en comparación con x. Se cree que estos ceros no existen, pero hasta hoy no se ha demostrado y sólo se tienen resultados parciales. En 1918 E. Landau demostró que si estos ceros existen, no puede haber muchos. Éste es el resultado preciso:

Teorema 1.16. *Sean χ_1, χ_2 caracteres distintos y reales con módulos q_1, q_2 respectivamente. Supongamos que $L(\beta_1, \chi_1) = 0$ y $L(\beta_2, \chi_2) = 0$. Entonces*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\log q_1 q_2} \tag{1.78}$$

donde c es una constante absoluta.

Demostración. En la línea de (1.72), Landau usó la ecuación

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)} - \frac{L'(s,\chi_2)}{L(s,\chi_2)} - \frac{L'(s,\chi_1\chi_2)}{L(s,\chi_1\chi_2)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))\Lambda(n) n^{-\sigma} \geq 0$$

para $\sigma > 1$. Como $\chi_1 \neq \chi_2$ deducimos que $\chi_1\chi_2$ es un carácter no principal módulo $q_1 q_2$. Usando (1.11) y que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ obtenemos que

$$\frac{1}{\sigma - \beta_1} + \frac{1}{\sigma - \beta_2} < \frac{1}{\sigma - 1} + R$$

con $R \ll \log q_1 q_2$. Tomando $\sigma = 1 + 1/(2R)$ obtenemos el resultado. □

En particular de aquí y del teorema 1.15 deducimos que sólo puede haber un cero de Siegel módulo q.

Vamos a ver el mejor resultado conocido sobre el cero de Siegel. Éste es debido a Siegel [14], de ahí el nombre que se le dio a este cero.

Teorema 1.17. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $C_1(\varepsilon)$ tal que si χ es un carácter primitivo real módulo $q > 1$, entonces*

$$L(1, \chi) > C_1(\varepsilon) q^{-\varepsilon}. \tag{1.79}$$

Por esto deducimos que existe otro número $C_2(\varepsilon)$ tal que $L(s, \chi)$ no tiene ceros en la región

$$\sigma > 1 - C_2(\varepsilon) q^{-\varepsilon}. \tag{1.80}$$

Primero vamos a probar que realmente (1.80) se sigue de (1.79). Para ello vamos a usar el siguiente lema:

Lema 1.18. *Sea χ y carácter no principal de módulo q. Para s con $1/2 \leq \sigma \leq 1$ se cumplen las acotaciones*

$$L(s,\chi) \ll (q\,|s|)^{1-\sigma} \log(2q\,|s|) \tag{1.81}$$

$$L'(s,\chi) \ll (q\,|s|)^{1-\sigma} (\log(2q\,|s|))^2 \tag{1.82}$$

Demostración. Para $N \geq 1$, por el lema de Abel (A.2) tenemos que

$$L(s,\chi) = \sum_{n\leq N} \chi(n) n^{-s} + s\int_N^\infty M_\chi(x) x^{-s-1} dx - N^{-s} M_\chi(N). \tag{1.83}$$

Como $|M_\chi(x)| \leq q$ para todo x vemos que

$$L(s,\chi) \ll \sum_{n\leq N} n^{-\sigma} + q\,|s| \int_N^\infty x^{-\sigma-1} \leq N^{1-\sigma} \log N + q\,|s|\, N^{-\sigma}$$

y tomando $N = 2q\,|s|$ se sigue (1.81). Para probar (1.82) derivamos la ecuación (1.83) y luego acotamos de la misma forma. □

Supongamos que $L(\beta,\chi) = 0$, con $\beta > 1 - C_2(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$. Entonces

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - L(\beta,\chi) \leq \text{máx}\,|L'(z,\chi)|\,(1-\beta)$$

donde el máximo se toma sobre $\beta \leq z \leq 1$. Usando (1.82) llegamos a contradicción con (1.79) (tomando $C_2(\varepsilon)$ suficientemente pequeño).

Ahora vamos a probar (1.79). Vamos a intentar llevar más allá el argumento que usamos para probar que $L(1,\chi) \neq 0$ en el caso de χ real, usando la función $\zeta_\nu(s)$, definida en (1.48). Como ahora no suponemos que $L(1,\chi) \neq 0$, la ecuación (1.49) queda

$$\zeta_\nu(s) - \frac{L(1,\chi)}{s-1} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{b_k}{k!} - L(1,\chi) \right) (2-s)^k, \tag{1.84}$$

y la serie es válida en todo $\mathbb{C}$, pues representa una función entera. Además, por (1.67) vemos que

$$|\zeta_\nu(s)| \leq cq \qquad \text{en la circunferencia } |s-2| = 3/2. \tag{1.85}$$

De esta forma, usando la fórmula integral de Cauchy para los coeficientes de la serie obtenemos que

$$\left|\frac{b_k}{k!} - L(1,\chi)\right| \leq cq\left(\frac{2}{3}\right)^k, \tag{1.86}$$

luego para $7/8 < s < 1$

$$\sum_{k=M}^{\infty}\left|\frac{b_k}{k!} - L(1,\chi)\right|(2-s)^k \leq cq\sum_{k=M}\left(\frac{2}{3}(2-s)\right)^k \leq c_1 q\left(\frac{3}{4}\right)^M \leq c_1 q e^{-M/4}$$

para cierta constante c_1. Como $b_0 = 1$ y $b_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(s) - \frac{L(1,\chi)}{s-1} &\geq 1 - L(1,\chi)\sum_{k=0}^{M-1}(2-s)^k - c_1 q e^{-M/4} \\ &= 1 - L(1,\chi)\frac{(2-s)^M - 1}{1-s} - c_1 q e^{-M/4}, \end{aligned}$$

luego

$$\zeta_\nu(s) \geq 1 - L(1,\chi)\frac{(2-s)^M}{1-s} - c_1 q e^{-M/4}. \tag{1.87}$$

Tomando M lo más pequeña posible tal que $1 - c_1 q e^{-M/4} \geq 1/2$ concluimos que para cierta constante $c_2 > 0$ se cumple que si $7/8 < s < 1$

$$L(s,\chi)\zeta(s) = \zeta_\nu(s) \geq \frac{1}{2} - c_2 L(1,\chi)\frac{q^{4(1-s)}}{(1-s)}. \tag{1.88}$$

A partir de esta ecuación quisiéramos llegar a contradicción suponiendo que $L(\beta,\chi) = 0$ para β cerca de 1. Pero sólo obtendríamos que $L(1,\chi) > \frac{1}{2}(1-\beta)q^{-4(1-\beta)}$, y esto lo único que nos demuestra es la equivalencia entre (1.80) y (1.79). La ecuación (1.88) no funciona porque no hay una cierta independencia entre los dos lados de la desigualdad.

Esta independencia se puede adquirir, siguiendo la idea de Landau en el teorema 1.16, si consideramos la función

$$L(s) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)\zeta(s),$$

para χ_1, χ_2 caracteres reales primitivos con módulos q_1, q_2 diferentes. Por el producto de Euler para cada factor conseguimos un producto de Euler de la forma

$$L(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))\frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s}\right).$$

Aplicando la serie de potencias para la función exponencial, vemos que

$$L(s) = \sum_{n=1} a_n n^{-s} \qquad \text{si } \sigma > 1,$$

con $a_1 = 1$ y $a_n \geq 0$. Para llegar a (1.88) el factor clave ha sido que el primer coeficiente de la serie de Dirichlet de $\zeta_\nu(s)$ es uno y los demás mayores o iguales que cero. Así, podemos actuar de manera idéntica con $L(s)$ y deducir la ecuación

$$L(s) > \frac{1}{2} - \frac{c_4 R}{1-s}(q_1 q_2)^{8(1-s)} \qquad \text{si } 7/8 < s < 1, \tag{1.89}$$

donde R es el residuo de $L(s)$ en $s = 1$

$$R = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2). \tag{1.90}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Si no existe ningún carácter χ para el cuál $L(s, \chi)$ tiene un cero real entre $1 - \frac{1}{16}\varepsilon$, entonces (1.80) se cumple de forma trivial. Si por el contrario existe un carácter cumpliendo eso, elegimos χ_1 como ese carácter y llamemos β_1 a ese cero. Por tanto $L(\beta_1) = 0$. Luego por (1.90)

$$L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2) \geq \frac{1}{2c_4}(1 - \beta_1)(q_1 q_2)^{-8(1-\beta_1)} \tag{1.91}$$

y aplicando (1.81) para cierta constante $C > 0$

$$L(1, \chi_2) \geq C(1 - \beta_1)(\log q_1)^{-1}(\log q_2)^{-1}(q_1 q_2)^{-8(1-\beta_1)}. \tag{1.92}$$

Teniendo en cuenta que q_1 y β_1 son constantes fijadas que sólo dependen de ε y que $8(1 - \beta_1) < \varepsilon/2$ deducimos (1.79) para todo carácter primitivo χ_2 con módulo q_2 suficientemente grande. Para los módulos más pequeños (1.79) se sigue cumpliendo por simplemente tomando $C_1(\varepsilon)$ más pequeña. □

Sea $A > 0$ y $q \ll (\log x)^A$. Tomando $\log qT = c'(\log x)^{1/2}$ (para cierta constante c') en el corolario 1.13 y $\varepsilon = \frac{1}{2(A+1)}$ en el teorema 1.17 vemos (usando (1.71)) que

$$\psi(x, \chi) \ll x \exp(-c \log^{1/2} x)$$

si χ es un carácter no principal. En el caso del carácter χ_0 tenemos que

$$|\psi(x) - \psi(x, \chi_0)| \ll (\log x)(\log q).$$

Así, teniendo en cuenta (1.52), se tiene el teorema de Siegel-Walfisz:

Teorema 1.19. *Sea $A > 0$, para $(a, q) = 1$ y $x \geq 2$ se cumple uniformemente*

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

Nótese que la condición $q \ll (\log x)^A$ no es necesaria porque cuando $q > (\log x)^A$ el teorema es trivial. Si aceptamos una fórmula en la que esté involucrado el cero de Siegel, el error restante será mucho más pequeño. En ese caso teniendo en cuenta la región (1.77) para los demás ceros tenemos que

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} - \frac{\overline{\chi_1}(a)}{\phi(q)} \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + R \tag{1.93}$$

donde β_1 es el (posible) cero de Siegel y $R = O(x \exp(-c(\log x)^{1/2})$. Este resultado es válido para $q \ll \exp(c(\log x)^{1/2})$.

El error R puede mejorarse, porque nosotros para obtenerlo hemos mirado los ceros de cada función $L(s, \chi)$ por separado. Este error va a provenir sobre todo de

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \sum_{1 \leq |\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

Esta cantidad podría estimar de forma adecuada si controlásemos

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi)$$

para cada $1/2 \leq \sigma \leq 1$ donde $N(\sigma, T, \chi)$ es el número de ceros de la función $L(s, \chi)$ en la región $|\gamma| \leq T$, $1/2 < \sigma < 1$.

También tendría influencia sobre R el hecho de que pudiésemos hacer mayor la región libre de ceros (1.77).

A estos dos tópicos nos vamos a dedicar en los capítulos 2 y 3.

1.5. Notas

A la hora de elaborar este capítulo hemos tenido en cuenta fundamentalmente las monografías [3], [9] y [2]. Las referencias al trabajo de Euler han sido sacadas de [17].

En este capítulo hemos cambiado el orden histórico para hacer más simple la exposición. Dirichlet demostró que había infinitos primos en progresiones aritméticas antes de que Riemann escribiese su memoria, y sin usar la maquinaria del análisis complejo. La prueba de Dirichlet de que $L(1,\chi) \neq 0$ para un carácter real es una simple consecuencia de su fórmula para el número de clases. Se puede ver que todo carácter primitivo real se puede expresar como $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ para algún $d \in \mathbb{Z}$, donde $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$ es una generalización del símbolo de Legendre. $\chi(n)$ será en ese caso carácter módulo $|d|$. Sea $h(d)$ el número de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias $f(x,y) = ac^2 + bxy + cy^2 \in \mathbb{Z}[x,y]$ de discriminante $d = b^2 - 4ac$. Entonces Dirichlet [3] demostró que

$$L(1,\chi) = 2\pi\omega^{-1}h(d)\,|d|^{-1/2} \qquad \text{si } d < 0 \tag{1.94}$$

$$L(1,\chi) = h(d)d^{-1/2}\log\varepsilon_d \qquad \text{si } d > 0 \tag{1.95}$$

donde $\omega = 2,4,6$ si $d < -4$, $d = -4$, $d = -3$ respectivamente y $\varepsilon_d = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{d})$ viene dado por la solución más pequeña de la ecuación de Pell $t^2 - du^2 = 4$ tal que $\varepsilon_d > 1$ si $d > 0$. Como $h(d) \geq 1$ y $\varepsilon_d \geq \sqrt{d}/2$ Dirichlet probó que

$$L(1,\chi) > |d|^{-1/2} \qquad \text{si } d < 0$$

$$L(1,\chi) > \frac{1}{2}d^{-1/2}\log(d/4) \qquad \text{si } d > 0.$$

Con esto a su vez podemos deducir cotas para el cero de Siegel que aun siendo peores que el teorema de Siegel tienen la ventaja de que la constante es efectivamente computable. Por otra parte, mediante el teorema de Siegel podemos concluir que

$$h(d) > C_2(\varepsilon)\,|d|^{1/2-\varepsilon} \qquad \text{si } d < 0$$

$$h(d)\log\varepsilon_d > C_2(\varepsilon)d^{1/2-\varepsilon} \qquad \text{si } d > 0.$$

Así, vemos que con la fórmula para el número de clases cualquier avance en el conocimiento de $L(1,\chi)$ se reflejaría en un conocimiento mayor de $h(d)$ (y viceversa).

Capítulo 2

Región libre de ceros

2.1. Introducción.

Nuestro objetivo en este capítulo es probar la mejor región libre de ceros conocida para una función $L(s,\chi)$ de Dirichlet, sin preocuparnos por el posible cero que pueda haber en la región $\Im s = 0$ cuando χ es un carácter real (el llamado cero de Siegel). Pero, ¿cómo podemos descubrir si cerca de un punto hay un cero? Una forma sencilla es considerar la función $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$, como hicimos en el Capítulo 1. Notaremos si estamos cerca de un cero $\nu = \rho + it$ al acercarnos por la derecha a ν la función tiende a $+\infty$. De forma explícita, por el desarrollo en serie de $L(s,\chi)$ en $\nu = \rho + it$, vemos que cerca de ν

$$L'(s,\chi)/L(s,\chi) \approx \frac{1}{s-\nu}. \tag{2.1}$$

Por otra parte, si $\sigma > 1$ tenemos la ecuación

$$L'(s,\chi)/L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} -\Lambda(n) n^{-\sigma} \chi(n) e^{-it\log n}.$$

Si $\chi(n)e^{-it\log n}$ es un número complejo de argumento θ, $\chi^2(n)e^{-i(2t)\log n}$ tiene argumento 2θ. Esto implica una relación entre los coeficientes de $L'(\sigma + it,\chi)/L(\sigma+it,\chi)$ y los de $L'(\sigma+2it,\chi^2)/L(\sigma+2it,\chi^2)$, que gracias a la ecuación elemental $-4\cos\theta - \cos 2\theta \le 3$ podemos plasmar como

$$4\Re\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)} + \Re\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)} \le 3\frac{-L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}. \tag{2.2}$$

Como $L(\sigma,\chi_0)$ tiene un polo en 1, podemos poner $-L'(\sigma,\chi_0)/L(\sigma,\chi_0) \approx 1/(\sigma-1)$ si σ está cerca de 1. Luego concluimos que

$$\frac{4}{\sigma-\rho} \leq \frac{3}{\sigma-1} + R$$

donde R proviene sobre todo del error en la aproximación de (2.1). Tomando $\sigma = 1 + O(1/R)$ tenemos $1-\rho \gg 1/R$. En última instancia, veremos que R depende del tamaño de $L(s,\chi)$ cerca de la recta unidad. Es decir, a una mejor acotación de $L(s,\chi)$ le corresponde una mejor región libre de ceros. Históricamente la primera acotación provino directamente de la ecuación funcional (como hemos visto en la proposición 1.11), pero a partir de ahí se mejoró porque $L(s,\chi)$ se puede estimar por una suma finita en la región que nos interesa, y a su vez esta suma se puede acotar por el estudio de sumas trigonométricas, es decir sumas del tipo

$$\sum_{a<n\leq b} e(f(n)),$$

donde f es una función de variable real con cierta regularidad. De esta forma, primero se mejoró la región clásica a

$$\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log q + \log|t|\,(\log\log|t|)^{-1}}.$$

Esto se consigue tanto con el método de van der Corput, como con el de Weyl-Hardy-Littlewood. Más tarde esto se mejoró con el llamado método de Vinogradov-Korobov. Este último es el que explicaremos en lo que sigue. Nuestro objetivo final será demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Existe una constante absoluta $\eta > 0$ tal que si $|t| \geq 3$ y*

$$\sigma \geq 1 - \frac{\eta}{\log q + \log^{2/3}|t|\,(\log\log|t|)^{1/3}}$$

entonces $L(\sigma+it) \neq 0$.

2.2. El Método de Vinogradov-Korobov.

En esta parte vamos a estudiar sumas trigonométricas. Parece lógico pensar que si $P(x)$ es un polinomio que aproxima bien a la función $f(x)$ en el intervalo de sumación, la suma $S = \sum_{a<n\leq b} e(f(n))$ se puede estimar mediante $\sum_n e(P(n))$. Esto puede hacerse riguroso de forma sencilla, escribiendo $S = \sum_{a<n\leq b} e(f(n) - P(n))e(P(n))$ y sumando por partes (A.1). Si $|f(n) - P(n)| < \epsilon$ para todo n entonces

$$S \ll (1 + N\epsilon)S_P \tag{2.3}$$

con $S_P = \text{máx}_{a<l\leq b} \left|\sum_{a<n\leq l} e(P(n))\right|$. Esto nos lleva a centrarnos en acotar las llamadas sumas de Weyl, sumas trigonométricas donde $f(x) = P(x)$ con

$$P(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$$

para un cierto $k \in \mathbb{Z}$ (omitimos el término de grado cero porque no afectaría al módulo de la suma). El método de Vinogradov-Korobov es un método para acotar sumas de este tipo. La idea más directa de cómo funciona el método (en su versión más simple) es la siguiente:

Si P es como antes, con coeficientes $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, definimos

$$S(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{n=1}^{N} e(P(n)).$$

Sea $P_m(x) = P(x + m) - P(m)$, un polinomio de grado k con término independiente cero y coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Entonces tenemos que

$$S(\boldsymbol{\alpha}(m)) = e(-P(m))S(\boldsymbol{\alpha}) + 2\theta\,|m| \tag{2.4}$$

con $|\theta| \leq 1$. Luego para cierto rango de m, $|S(\boldsymbol{\alpha}(m))|$ es similar a $|S(\boldsymbol{\alpha})|$. Esto, unido al hecho de que en un entorno de $\boldsymbol{\alpha}(m)$ en el espacio $\mathbb{T}^k$ (para cada m) la suma no varía mucho, nos hace pensar que hay un conjunto de medida considerable donde $|S(\cdot)|$ se mantiene casi constante (similar a $|S(\boldsymbol{\alpha})|$). Por tanto una acotación de las sumas promediando en $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{T}^k$ aportaría información sobre cada suma en particular. Por ello nos interesa acotar la cantidad

$$J_{b,k}(N) = \int_{\mathbb{T}^k} |S(\boldsymbol{\beta})|^{2b}\, d\boldsymbol{\beta} \qquad (b \in \mathbb{N}). \tag{2.5}$$

Esta idea funciona con ligeras modificaciones, tomando el b adecuado. Para ello se necesita ver que estos entornos no se intersecan mucho, lo cuál se puede deducir de propiedades de aproximación diofántica de los coeficientes de $f(x)$. Con esta motivación vamos a demostrar nuestro teorema principal concerniendo a $J_{b,k}(N)$.

Teorema 2.2. *(Del Valor Medio de Vinogradov) Existe una constante $c > 0$ tal que si $N > \exp(ck(1-1/k)^{-b/k}\log^2 b)$ entonces*

$$J_{b,k}(N) \ll b^{2b} N^{2b-(1-\delta_b)k(k+1)/2},$$

donde $\delta_b = e^{1-b/k^2}$.

Escribiendo en (2.5) $|S(\boldsymbol{\alpha})|^{2b} = S(\boldsymbol{\alpha})^b \overline{S(\boldsymbol{\alpha})^b}$, multiplicando cada sumando y después integrando, como

$$\int_0^1 e(ax)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \text{ es entero distinto de cero,} \end{cases}$$

vemos que $J_{b,k}(N)$ es el número de soluciones en enteros del sistema de ecuaciones

$$n_1^h + n_2^h + \ldots + n_b^h = m_1^h + m_2^h + \ldots + m_b^h \qquad (1 \leq h \leq k)$$

con $1 \leq n_i, m_i \leq N$ para todo i, $1 \leq i \leq b$. Si nos fijamos, vemos que esta relación entre una integral y el número de soluciones de un sistema diofántico se puede generalizar a cualquier polinomio trigonométrico

$$T(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} r(\boldsymbol{\lambda}) e(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha})$$

donde $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^k$, $\boldsymbol{\lambda}$ recorriendo un subconjunto de $\mathbb{Z}^k$. Esto es, tenemos la igualdad

$$I(T, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{T}^k} |T(\boldsymbol{\alpha})|^2 e(-\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} r(\boldsymbol{\lambda}) \overline{r(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}. \qquad (2.6)$$

Si $r(\boldsymbol{\lambda})$ es el número de soluciones en $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^b$ del sistema

$$n_1^h + n_2^h + \cdots + n_b^h = \lambda_h \qquad (1 \leq h \leq k) \qquad (2.7)$$

entonces $\sum_{\boldsymbol{\lambda}} r(\boldsymbol{\lambda}) \overline{r(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu})}$ es igual a $N(\mathcal{S}, \boldsymbol{\mu})$, número de soluciones $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) \in \mathcal{S}^2$ del sistema

$$n_1^h + n_2^h + \ldots + n_b^h = \mu_h + m_1^h + m_2^h + \ldots + m_b^h \qquad (1 \leq h \leq k). \quad (2.8)$$

En este caso escribimos $T = T_{\mathcal{S}}$ y tenemos que $I(T_{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mu})$ es igual a $N(\mathcal{S}, \boldsymbol{\mu})$. De esto, escribiendo $N(\mathcal{S}) = N(\mathcal{S}, \mathbf{0})$ y $I(T, \mathbf{0}) = I(T)$ deducimos el siguiente lema:

Lema 2.3. *a)* $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{S}_i \Rightarrow N(\mathcal{S}) \le M \sum_{i=1}^{M} N(\mathcal{S}_i)$.
b) $N(\mathcal{S}, \boldsymbol{\mu}) \le N(\mathcal{S})$.
c) Si $\boldsymbol{d} = (d, d, \dots, d) \Rightarrow N(\mathcal{S} + \boldsymbol{d}) = N(\mathcal{S})$.
d) $N(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2) = I(T_{\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2}) = I(T_{\mathcal{S}_1} T_{\mathcal{S}_2})$

Demostración. $c)$ es trivial por (2.8) y $b)$ por (2.6), ya que $|I(T,\mu)| \le I(T,0)$. Para $a)$, si $r_i(\boldsymbol{\lambda})$ es el número de soluciones en $\mathcal{S}_i$ de (2.7) está claro que $r(\boldsymbol{\lambda}) \le r_1(\boldsymbol{\lambda}) + \ldots + r_M(\boldsymbol{\lambda})$. Luego por Cauchy-Schwarz

$$N(\mathcal{S}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} r(\lambda)^2 \le \sum_{\boldsymbol{\lambda}} M \sum_{i=1}^{M} r_i(\lambda)^2 \le M \sum_{i=1}^{M} N(\mathcal{S}_i).$$

Por último, $d)$ se demuestra usando (2.6) y que $T_{\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2} = T_{\mathcal{S}_1} T_{\mathcal{S}_2}$. Esto último es cierto porque

$$T_{\mathcal{S}_1}(\boldsymbol{\alpha}) T_{\mathcal{S}_2}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} r_1(\boldsymbol{\lambda}) e(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \sum_{\boldsymbol{\lambda'}} r_2(\boldsymbol{\lambda'}) e(\boldsymbol{\lambda'} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} r(\boldsymbol{\mu}) e(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\alpha}),$$

con $r(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda'}=\boldsymbol{\mu}} r_1(\boldsymbol{\lambda}) r_2(\boldsymbol{\lambda'})$ que es el número de soluciones en $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ de (2.7).

□

Ahora vamos con la base de la demostración, un lema de Linnik que acota el número de soluciones de un sistema diofántico con congruencias, y que funciona gracias a la relación entre nuestros polinomios $s_h(m_1, \dots, m_k) = m_1^h + \ldots + m_k^h$ y los polinomios simétricos $\sigma_j(m_1, \dots, m_k)$. Después lo utilizaremos para conseguir una fórmula de recurrencia para $J_{b,k}(N)$.

Lema 2.4. *Sea p primo ($p > k$), $1 \le \lambda_h \le p^h$ para todo h, $1 \le h \le k$, y $r_p(\boldsymbol{\lambda})$ el número de soluciones módulo p^k del sistema*

$$m_1^h + m_2^h + \ldots + m_k^h \equiv \lambda_h \pmod{p^h} \qquad (1 \le h \le k), \tag{2.9}$$

con $m_i \not\equiv m_j (\text{mod } p)$ para todo $1 \le i < j \le k$. Entonces $r_p(\boldsymbol{\lambda}) \le k! p^{k(k+1)/2}$.

Demostración. Hay p^{k-h} residuos μ_h módulo p^k congruentes con λ_h módulo p^h. Así, cada solución del sistema inicial está contenida en las soluciones de uno de los $p^{k(k-1)/2}$ sistemas

$$m_1^h + m_2^h + \ldots + m_k^h \equiv \mu_h \pmod{p^k} \qquad (1 \le h \le k)$$

con $m_i \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Para terminar es suficiente ver que cada uno de estos sistemas tiene a lo sumo $k!$ soluciones. Si σ_i es el i-ésimo polinomio simétrico, tenemos las relaciones

$$\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\sigma_i s_{j-i} \equiv (-1)^{j-1} j\sigma_j \pmod{p^k}.$$

Como $(k!, p) = 1$ podemos despejar, luego si $s_i(n_1, \ldots, n_k) = s_i(m_1, \ldots, m_k)$ entonces tenemos que $\sigma_i(n_1, \ldots, n_k) = \sigma_i(m_1, \ldots, m_k)$, es decir $P(x) = \prod_{1\leq i\leq k}(x - m_i)$ y $Q(x) = \prod_{1\leq i\leq k}(x - n_i)$ son el mismo polinomio módulo p^k. Por tanto $p^k \mid Q(m_1)$, pero esto implica que existe algún i para el cuál $n_i = m_1$ (porque $m_i \not\equiv m_j (\text{mod } p)$). Continuando de esta forma vemos que $(n_1, \ldots, n_k)$ es una permutación de $(m_1, \ldots, m_k)$, es decir que a lo sumo hay $k!$ soluciones en cada sistema. $\square$

Vamos con la fórmula de recurrencia:

Lema 2.5. *Sea $k \geq 2$ y $b \geq 2k$. Existe una constante c tal que si $N \geq \exp(ck\log^2 b)$ entonces*

$$J_{b,k}(N) \ll (k-1)^{2b}N^{2k-2} + b^{2k}N^{3k/2-5/2+2b/k}J_{b-k,k}(\lfloor N^{1-1/k}\rfloor).$$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, N\}$, escribimos $\mathcal{S}^b = \mathcal{V} \cup \mathcal{U}$ donde $\mathcal{V}$ es el conjunto de elementos con al menos k coordenadas diferentes, y $\mathcal{U}$ su complementario. Por el lema 2.3 *a*) tenemos que $J_{b,k}(N) = N(\mathcal{S}^b) \leq 2N(\mathcal{V}) + 2N(\mathcal{U})$. Además $N(\mathcal{U}) \leq |\mathcal{U}|^2 \leq ((k-1)^b N^{k-1})^2$. Por otra parte consideramos $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ el conjunto de elementos con las primeras k coordenadas diferentes entre sí. A cada elemento de $\mathcal{V}$ le podemos asociar el elemento de $\mathcal{V}^*$ que consiste en mover los k primeras componentes distintas a los k primeros lugares. Como estas permutaciones no afectan a la solución de (2.8) podemos asociar un elemento de $N(\mathcal{V}^*)$ a cada elemento de $N(\mathcal{V})$. Además, por cada elemento de $N(\mathcal{V}^*)$ existen como máximo $\binom{b}{k}^2$ elementos en $N(\mathcal{V})$. Luego

$$N(\mathcal{V}) \leq \binom{b}{k}^2 N(\mathcal{V}^*).$$

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de k^3 primos localizados en el intervalo $[N^{1/k}+3, N^{1/k}(1+\epsilon)]$, con $\epsilon = \exp(-\delta\log^{1/2}(N^{1/k}))$, δ una cierta constante (la existencia de $\mathcal{P}$ está asegurada por las hipótesis del enunciado y el teorema del número primo). Sea $\mathcal{V}^*(p)$ el subconjunto de $\mathcal{V}^*$ con $m_1, m_2, \ldots, m_k$ distintos módulo p. Vamos a ver que $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{V}^*(p) = \mathcal{V}^*$. Supongamos que no existe ningún primo en $\mathcal{P}$ para el cuál $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sean distintos módulo ese primo. Entonces

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} p \mid \prod_{i<j} (m_j - m_i) < N^{k(k-1)/2}.$$

Pero esto contradice la desigualdad $\prod_{p\in\mathcal{P}} p > (N^{1/k})^{k^3} = N^{k^2}$. Luego $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{V}^*(p) = \mathcal{V}^*$ y por el lema 2.3 $a)$

$$N(\mathcal{V}^*) \leq k^3 \sum_{p\in\mathcal{P}} N(\mathcal{V}^*(p)).$$

Podemos escribir $\mathcal{V}^*(p) = \mathcal{M}(p) \times \mathcal{S}^{b-k}$, con $\mathcal{M}(p) \subset \mathcal{S}$ el conjunto con todas las componentes distintas módulo p. Por el lema 2.3 $d)$

$$N(\mathcal{V}^*) = I(T_{\mathcal{M}(p)} T_{\mathcal{S}}^{b-k}).$$

Por otra parte $T_{\mathcal{S}} = \sum_{l=1}^{p} T_{\mathcal{S}_l}$, con

$$\mathcal{S}_l = \mathcal{S} \cap \{m \equiv l \mod p\}.$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder y obtenemos

$$N(\mathcal{V}^*(p)) = I\Big(\sum_{1\leq l\leq p} T_{\mathcal{M}(p)} T_{\mathcal{S}_l}^{b-k}\Big) \leq$$

$$\leq p^{2b-2k-1} \sum I(T_{\mathcal{M}(p)} T_{\mathcal{S}_l}^{b-k}) = p^{2b-2k-1} \sum_{1\leq l\leq p} N(\mathcal{M}(p) \times \mathcal{S}_l^{b-k}).$$

Por el lema 2.3 $c)$ se cumple $N(\mathcal{M}(p) \times \mathcal{S}_l) = N(\mathcal{M}(p) \times \mathcal{S}_l - \boldsymbol{l})$. Pero esto último es el número de soluciones del sistema

$$m_1^h + \ldots + m_k^h = n_1^h + \ldots + n_k^h + p^h(u_{k+1}^h + \ldots + u_b^h - r_{k+1}^h - \ldots - r_b^h) \quad (1 \leq h \leq k)$$

con $1 - l \leq m_i, n_i \leq N - l$ y $(1-l)/p \leq u_i, r_i \leq (N-l)/p$. Si considero que los n_i están fijados (hay N^k posibilidades), está claro que los m_i deberán ser solución de un sistema como (2.9), teniendo en cuenta que $(N-l)-(1-l)+1 \leq p$. Por tanto como mucho habrá $k!p^{k(k-1)/2}$. Una vez elegidos los m_i y los n_i, los u_i, r_i deben satisfacer un sistema del tipo

$$u_{k+1}^h + \ldots + u_b^h = v_h + r_{k+1}^h + \ldots + r_b^h \quad (1 \leq h \leq k)$$

con $(1-l)/p \leq u_i, r_i \leq (N-l)/p$. Sabemos por el lema 2.3 b) que el máximo se alcanza en $(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mathbf{0}$. Además, por el lema 2.3 c) podemos cambiar el rango a $(1-l)/p + d \leq u_i, r_i \leq (N-l)/p + d$ para cualquier $d \in \mathbb{N}$. Si escogemos d tal que $0 \leq (1-l)/p + d \leq 1$, tenemos que

$$(N-l)/p + d \leq N/p + 1 \leq N^{1-1/k} - 1 \leq \lfloor N^{1-1/k} \rfloor$$

y por tanto el número de soluciones es a lo sumo $J_{b,k}(\lfloor N^{1-1/k} \rfloor)$. Así,

$$N(\mathcal{V}^*(p)) \leq p^{2b-2k-1} p \times N^k k! p^{k(k-1)/2} J_{b-k,k}(\lfloor N^{1-1/k} \rfloor). \tag{2.10}$$

Además, por las hipótesis del lema tenemos que $\epsilon < 1/b$ y por tanto $p < N(1+\epsilon) < N \exp(\epsilon) < N e^{1/b}$. Substituyendo esto en (2.10) y considerando lo hecho anteriormente obtenemos el resultado. □

Ya podemos acometer el teorema principal:

Demostración. (Del Teorema 2.2) Vamos a demostrarlo por inducción sobre b. Si $b \leq k^2$ es trivial pues $J_{b,k}(N) \leq N^{2b}$. Si $b > k^2$, N cumpliendo la hipótesis del enunciado, aplicamos lema 2.5. Como $b - k < b$ y

$$\lfloor N^{1-1/k} \rfloor > N^{1-1/k} - 1 > \exp(ck(1-1/k)^{-(b-k)/k} \log^2(b-k)),$$

aplicamos la hipótesis de inducción sobre $J_{b-k,k}(\lfloor N^{1-1/k} \rfloor)$ y por tanto

$$J_{b,k}(N) \ll b^{2b} N^b + b^{2k} N^{3k/2-5/2+2b/k} \times (b-k)^{2(b-k)} \lfloor N^{1-1/k} \rfloor^{2(b-k)-(1-\delta_{b-k})k(k+1)/2}.$$

Como

$$3k/2 - 5/2 + 2b/k + (1-1/k)(2b - 2k - (1-\delta_{b-k})k(k+1)/2) \leq 2b - (1-\delta_b)k(k+1)/2$$

y

$$b^{2k}(b-k)^{2(b-k)} \leq b^{2b},$$

el teorema está demostrado. □

Ahora que ya sabemos controlar $J_{b,k}(N)$, vamos a demostrar nuestro resultado de acotación de sumas de Weyl. En vez de seguir la idea del principio de esta sección, vamos a seguir otro camino que nos conducirá a una cota ligeramente mejor.

Las sumas de Weyl de grado 1, o sumas con frecuencias lineales, son fáciles de estimar. Esto es así porque lo que sumamos es una progresión geométrica, luego

$$\sum_{n=a}^{b} e(\alpha n) = \left| \frac{1 - e((b-a+1)\alpha)}{1 - e(\alpha)} \right| \leq \text{mín}(b-a+1, \|\alpha\|^{-1}), \tag{2.11}$$

donde $\|x\|$ es la distancia de x al entero más próximo. Así, la estrategia será transformar nuestra suma polinómica en sumas con frecuencias lineales. Para poder llevarlo a cabo deberemos expresar la suma como promedio de sumas $S(\boldsymbol{\alpha}(m))$, y en este promedio nos aparecerán las cantidades $N(\{1, \dots, N\}, \boldsymbol{\mu})$, que renombramos como $J_{b,k}(N, \boldsymbol{\mu})$.

Pero primero, para aprovechar las acotaciones del tipo (2.11) en promedio, necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.6. *Sea $\alpha = a/q + \theta/q^2$ con $a, q \in \mathbb{Z}$, $(a,q) = 1$ y $|\theta| \leq 1$. Si $A \in \mathbb{N}$, se cumple la desigualdad*

$$\sum_{n=1}^{T} \text{mín}(U, \|A\alpha n + \beta\|^{-1}) \leq (AT/q + 1)(5U + 2q \log q).$$

Demostración. Como cada término de la suma es positivo, vemos que la suma es menor o igual que

$$\sum_{n=1}^{AT} \text{mín}(U, \|\alpha n + \beta\|^{-1}).$$

Dividiendo la suma en intervalos de longitud q, tendremos a lo sumo $AT/q+1$ sumas que podemos expresar de la forma

$$S = \sum_{n=1}^{q} \text{mín}(U, \|\alpha n + \beta'\|^{-1})$$

donde β' depende del intervalo elegido. Pues bien, para conseguir demostrar el lema es suficiente con ver que

$$S \leq 5U + 2q \log q.$$

Podemos escribir

$$\alpha n + \beta' = \frac{an + \lfloor \beta' q \rfloor}{q} + \frac{\{\beta' q\}}{q} + \frac{\theta n}{q^2}.$$

Como $(a,q)=1$, $an+\lfloor\beta' q\rfloor$ recorre todos los residuos módulo q, luego con un cambio de variable se tiene

$$S=\sum_{m=1}^{q}\text{mín}(U,\|m/q+\epsilon(m)\|^{-1})$$

con $|\epsilon(m)|\leq 2/q$. Por tanto,

$$S\leq 5U+2\sum_{3\leq m\leq q/2}\frac{q}{m-2}\leq 5U+2q\log q$$

como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 2.7. *Sea $r\in\mathbb{Z}$, $1\leq r\leq k+1$ y $P(x)=\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_{k+1}x^{k+1}$. Si existen $a,q\in\mathbb{Z}$ tales que $(a,q)=1$, $|\alpha_r-a/q|\leq 1/q^2$ y $q\asymp N^{\delta r}$ con $1\leq\delta r\leq r-1$, y $r=\gamma k$, entonces existe una constante $C>0$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{N}e(P(n))\ll N^{1-C\gamma^2\delta(1-\delta)k^{-2}}.$$

Demostración. Por (2.4) tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}e(P(n))\ll M^{-1}U+M$$

donde

$$U=\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{m=1}^{M}e(P_n(m))\right|$$

con $P_n(m)=P(n+m)-P(n)=\alpha_{k+1}m^{k+1}+\alpha_k(n)m^k+\ldots+\alpha_1(n)m$. Aplicando la desigualdad de Hölder, para todo $b\in\mathbb{Z}$ tenemos

$$U^{2b}\leq N^{2b-1}\sum_{n}\left|\sum_{m=1}^{M}e(P_n(m))\right|^{2b}=$$

$$=N^{2b-1}\sum_{n}\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}}J_{b,k+1}(M,\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1})e(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}+\alpha_k(n)\lambda_k+\ldots+\alpha_1(n)\lambda_1)$$

donde λ_i recorre el rango $-bM^i \leq \lambda_i \leq bM^i$. Ahora cambiando el orden de sumación y utilizando la ecuación trivial

$$J_{b,k}(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \sum_{\lambda_{k+1}} J_{b,k+1}(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})$$

tenemos

$$U^{2b} \leq N^{2b-1} \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} J_{b,k}(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \left| \sum_n e(\alpha_k(n)\lambda_k + \ldots + \alpha_1(n)\lambda_1) \right|$$

Pero podemos reescribir $\alpha_k(n)\lambda_k + \ldots + \alpha_1(n)\lambda_1$ como $Q(n) = \beta_k n^k + \ldots + \beta_1 n + \beta_0$ con β_i dependiente de los α_i y de los λ_i. Aplicando Hölder de nuevo

$$U^{4b^2} \leq N^{2b(2b-1)} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} J_{b,k}(M, \boldsymbol{\lambda}) \right)^{2b-1} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} J_{b,k}(M, \boldsymbol{\lambda}) \left| \sum_n e(Q(n) - Q(0)) \right|^{2b}$$

con $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Como $\sum_{\boldsymbol{\lambda}} J_{b,k}(M, \boldsymbol{\lambda}) = M^{2b}$ y $J_{b,k}(M, \boldsymbol{\lambda}) \leq J_{b,k}(M)$ desarrollando el producto tenemos

$$U^{4b^2} \leq (NM)^{2b(2b-1)} J_{b,k}(M) \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k} J_{b,k}(N, \mu_1, \ldots) e(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_k\mu_k),$$

con $-bN^i \leq \mu_i \leq bN^i$. Otra vez podemos escribir $\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_k\mu_k = \beta_1^*\lambda_1 + \ldots + \beta_k^*\lambda_k$, donde esta vez β_i^* depende de los μ_i y los α_i. Reordenando y usando lema 2.3 b) obtenemos

$$U^{4b^2} \leq (NM)^{2b(2b-1)} J_{b,k}(M) J_{b,k}(N) \sum_{\boldsymbol{\mu}} \left| \sum_{\boldsymbol{\lambda}} e(\beta_1^*\lambda_1 + \ldots + \beta_k^*\lambda_k) \right|.$$

Realmente ahora ya tenemos sumas con frecuencias lineales en $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$, porque β_i^* depende linealmente de los μ_i. Exactamente

$$\beta_j^* = \sum_{d=1}^{k+1-j} \binom{j+d}{d} \alpha_{j+d}\mu_d. \tag{2.12}$$

Por (2.11)

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}} e(\beta_1^*\lambda_1 + \ldots + \beta_k^*\lambda_k) = \prod_j \sum_{\lambda_j} e(\beta_j^*\lambda_j) \leq 2bM^k 2bM^{k-1} \ldots 2bM^r P_{r-1}$$

donde $P_{r-1} = \prod_{j=1}^{r-1} \text{mín}(2bM^j, \|\beta_j^*\|^{-1})$. Por tanto

$$U^{4b^2} \le c_1(NM)^{2b(2b-1)} J_{b,k}(M) J_{b,k}(N)(NM)^{(k+r)(k-r+1)/2} \max_{\mu_r,\dots,\mu_k} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1}} P_{r-1}$$

con $c_1 = (4b^2)^{k-r+1}$. Por (2.12) vemos que $\beta_j^* = A_{r-j}\alpha_r\mu_{r-j} + \delta_{r-j}$, donde δ_{r-j} no depende de μ_{r-j} y $A_{r-j} \in \mathbb{N}$ es más pequeño que 2^r. Luego por el lema 2.6

$$\begin{aligned}\sum_{\mu_1,\dots,\mu_{r-1}} P_{r-1} &= \sum_{\mu_2,\dots,\mu_{r-1}} P_{r-2} \sum_{\mu_1} \text{mín}(2bM^{r-1}, \|A_1\alpha_r\mu_1 + \delta_1\|^{-1}) \\ &\le (2^r 2bN/q + 1)(5 \times 2bM^{r-1} + 2q\log q) \sum_{\mu_2,\dots,\mu_{r-1}} P_{r-2}.\end{aligned}$$

Continuando así vemos que

$$U^{4b^2} \le (4b^2)^k (5 \times 2^r)^{r-1} (NM)^{4b^2} J_{b,k}(M) J_{b,s}(N)(NM)^{-(2b-k(k+1)/2)} P$$

con $P = \prod_{i=1}^{r-1}(1/q + N^{-i})(1 + M^{-i}q\log q)$. Luego con $M = N^{1-w/k^2}$ (w constante pequeña) y $b = Rk^2$ (con $R \asymp \log(\delta^{-1}(1-\delta)^{-1}\gamma^{-2})$), si $N > \exp(c'k(\log k)^2 e^R)$ para cierta constante c', podemos aplicar el teorema 2.5 y obtenemos el resultado. Si $N \le \exp(c'k(\log k)^2 e^R)$ la cota del teorema es trivial.

□

2.3. Acotación de las funciones L cerca de $\Re s = 1$.

En $\sigma > 1$ ($s = \sigma + it$) podemos escribir $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$. Separando en residuos módulo q tenemos

$$L(s,\chi) = q^{-s} \sum_{a=1}^{q} \chi(a)\zeta(s, a/q), \tag{2.13}$$

donde $\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}$ es la llamada función Zeta de Hurwitz. Luego si acotamos cada función Zeta de Hurwitz tenemos una acotación buena en la variable t de $L(s,\chi)$. Como $(n+\alpha)^{-s} = (n+\alpha)^{-\sigma}e(f(n))$ con $f(n) = (2\pi)^{-1}t\log(n+\alpha)$, podremos utilizar el método de Vinogradov, pero antes debemos controlar la cola de la suma. Esto es posible debido a la poca variación de $f(n)$ cuando $n \gg t$. De hecho, vamos ser capaces de hacerlo incluso cuando $\sigma \leq 1$, extendiendo primero la función Zeta de Hurwitz a ese dominio. Para estas estimaciones primero necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.8. *Si $f(x)$ es diferenciable en (a, b) y $f'(x)$ es monótona con $|f'(x)| \leq 1/2$ se cumple*

$$\sum_{a \leq n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))dx + O(1).$$

Demostración.

$$\sum_{a \leq n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))d\lfloor x \rfloor = \int_a^b e(f(x))dx - \int_a^b e(f(x))d\{x\},$$

donde estas son integrales de Riemann-Stieljes ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). Como la serie de Fourier de $\{x\}$ es $1/2 + \sum_{n \neq 0} e(-nx)/(2\pi i n)$

$$\int_a^b e(f(x))d\{x\} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi i n} \int_a^b e(f(x))de(-nx) =$$

$$= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi i n} \int_a^b f'(x)e(f(x) - nx)dx + O(1)$$

la última igualdad integrando por partes. Integrando de nuevo,

$$\int_a^b f'(x)e(f(x) - nx)dx \leq \left|\frac{f'(b)}{f'(b) - n}\right| + \left|\frac{f'(a)}{f'(a) - n}\right| + \int_a^b \left|\left(\frac{f'(x)}{f'(x) - n}\right)'\right| dx$$

y como f' es monótona entonces $f'(x)/(f'(x) - n)$ también con lo cual podemos quitar el módulo en la integral y tenemos

$$\int_a^b f'(x)e(f(x) - nx)dx \ll 1/(2\,|n| - 1).$$

Sumando, el lema queda demostrado. □

Teorema 2.9. *Sea $0 < \alpha \leq 1$. Entonces $\zeta(s, \alpha)$ tiene extensión meromorfa a la región $\sigma > 0$, y además cuando $1/2 \leq \sigma \leq 2$, $x \geq |t|/\pi$ se cumple que*

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{0 \leq n \leq x} (n + \alpha)^{-s} + (x + \alpha)^{1-s}/(s - 1) + O((x + \alpha)^{-\sigma}).$$

Demostración. Por el lema de Abel (A.2)

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{-s}+\frac{(N+\alpha)^{1-s}}{s-1}-s\int_N^\infty\{x\}(x+\alpha)^{-s-1}dx. \tag{2.14}$$

Vemos que esta fórmula es válida para $\Re s>0$, luego podemos utilizarla para acotar $L(s,\chi)$ en ese conjunto. Además, por el lema 2.8

$$\sum_{x<n\le N}(n+\alpha)^{-it}=\int_x^N(u+\alpha)^{-it}du+O(1)=\frac{(N+\alpha)^{1-it}-(x+\alpha)^{1-it}}{1-it}+O(1),$$

con lo que usando de nuevo el lema de Abel (A.2) obtenemos

$$\sum_{x<n\le N}(n+\alpha)^{-s}=\frac{(N+\alpha)^{1-s}-(x+\alpha)^{1-s}}{1-s}+O((x+\alpha)^{-\sigma}).$$

Sustituyendo en (2.14) y haciendo $N\to\infty$ demostramos el enunciado.

□

Ahora vamos a usar el método de la sección anterior para acotar la suma hasta t.

Teorema 2.10. *Sea $1\le N\le N_1\le 2N\le t$. Entonces existe una constante c_0 tal que*

$$\sum_{N\le n\le N_1}(n+\alpha)^{it}\ll N\exp(-c_0\log^3 N/\log^2 t)$$

Demostración. Podemos reescribir la suma como

$$S=\sum_{N\le n\le N_1\le 2N}e(f(n))$$

donde $f(n)=(2\pi)^{-1}t\log(n+\alpha)$. Subdividiendo la suma en intervalos de longitud a, tenemos que la suma es

$$S\ll Na^{-1}\max_{N\le m\le N_1}\left|\sum_{m\le n\le m+a}e(f(n))\right|+a.$$

Ahora, si tomamos $a=\lfloor N^{1/10}\rfloor$, en cada intervalo tenemos que

$$|f(n)-P_m(n)|\ll\frac{t}{k+2}\left(\frac{a}{N}\right)^{k+2}\ll t^{-8}\ll a^{-1},$$

donde $P_m(n)$ es el polinomio de Taylor de grado $k+1 = \lfloor \log t / \log a \rfloor \geq 10$ sobre m. Por tanto, por (2.3) la suma en este intervalo se puede acotar por S_{P_m}. Los coeficientes de P_m son $\alpha_j = t/(2\pi j(m+\alpha)^j)$. Si $\alpha_j < 1$ entonces

$$\left| \alpha_j - \frac{1}{\lfloor \alpha_j^{-1} \rfloor} \right| < \frac{1}{\lfloor \alpha_j^{-1} \rfloor^2}$$

y $\lfloor \alpha_j^{-1} \rfloor \asymp ja^j (t^{-1/(k+1)})^{k+1-j} = ja^j a^{-(1+\epsilon)(k+1-j)}$ $(-1/10 < \epsilon < 0)$, cogiendo en el teorema 2.7 $r = \lfloor 2k/3 \rfloor$ tenemos para cierta constante c_1

$$S \ll Na^{-1} a^{1-c_1 k^{-2}}$$

y sustituyendo obtenemos el resultado. □

Ya estamos en condiciones de acotar las funciones Zeta de Hurwitz.

Teorema 2.11. *Existe una constante $c_1 > 0$ tal que para $1/2 \leq \sigma \leq 1$ se cumple*

$$\zeta(s, \alpha) - \alpha^{-s} \ll t^{c_1(1-\sigma)^{3/2}} \log t.$$

Demostración. Por el teorema 2.9 tenemos que

$$\zeta(s, \alpha) - \alpha^{-s} \ll F(t) + O(t^{-\sigma})$$

donde $F(t) = \sum_{1 \leq n \leq t} (n+\alpha)^{-\sigma - it}$. Luego dividiendo el intervalo de sumación en intervalos de la forma $[M, 2M]$ y aplicando la fórmula de sumación de Abel (A.2) y el teorema 2.10 tenemos

$$F(t) \ll \log t \max_{1 \leq N \leq N_1 \leq 2N \leq t} N^{-\sigma} \left| \sum_{N \leq n \leq N_1} (n+\alpha)^{-it} \right| \ll$$

$$\ll \log t \max_{1 \leq N \leq t} N^{1-\sigma} \exp(-c \log^3 N / \log^2 t) \ll \log t \max_{0 \leq u \leq \log t} \exp(f(u))$$

con $f(u) = (1-\sigma)u - cu^3/\log^2 t$. Derivando vemos que el máximo está en $u_0 = (3c)^{-1/2}(1-\sigma)^{1/2} \log t$ y $f(u_0) = 2(27c)^{-1/2}(1-\sigma)^{3/2} \log t$. □

Finalmente obtenemos el resultado deseado.

Teorema 2.12. *En la región $1/2 \leq \sigma \leq 1$ tenemos que*

$$L(s, \chi) \ll q^{1-\sigma}(t^{c_1(1-\sigma)^{3/2}} \log t + 1) + \log q.$$

Demostración. Por (2.13)

$$L(s,\chi) = q^{-s}\sum_{a=1}^{q}\chi(a)(\zeta(s,a/q) - (a/q)^{-s}) + \sum_{a=1}^{q}\chi(a)a^{-s}$$

y por el teorema 2.11

$$L(s,\chi) \ll q^{1-\sigma}t^{c_1(1-\sigma)^{3/2}}\log t + R,$$

con

$$R = \begin{cases} \log q & \text{si } \sigma = 1 \\ (q^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma) & \text{si } \sigma < 1. \end{cases}$$

De aquí deducimos el resultado. □

2.4. Región libre de ceros.

Vamos a trasformar nuestra cota sobre $L(s,\chi)$ en una estimación de $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ por métodos de variable compleja. Con esto ya será suficiente para obtener información sobre la distribución de los ceros.

Lema 2.13. *Sea $f(z)$ una función analítica en $|z-z_0| < R$ y $\Re f(z) \le U$ para $|z-z_0| \le R$. Entonces*

$$\left|f^{(n)}(z_0)/n!\right| \le 2(U - \Re f(z_0))R^{-n} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Demostración. Consideramos la función $g(z) = U - f(z)$ analítica en $|z-z_0| < R$. Escribiendo $g(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots$ tenemos para $0 < r < R$

$$b_n = (2\pi i)^{-1}\int_{|z-z_0|=r} g(z)(z-z_0)^{-n-1}dz = (2\pi r^n)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(A+iB)e^{-in\theta}d\theta, \tag{2.15}$$

con $g(z_0 + re^{i\theta}) = A(r,\theta) + iB(r,\theta)$. Como $g(z)z^{n-1}$ es analítica si $n \ge 1$

$$0 = r^n(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(A+iB)e^{in\theta}d\theta,$$

luego tomando conjugados y sumando con (2.13) tenemos

$$b_n r^n = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}Ae^{-in\theta}d\theta$$

Como $A = U - \Re f(z_0 + re^{i\theta}) \geq 0$ entonces

$$|b_n| \, r^n \leq \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| Ae^{-in\theta} \right| d\theta \leq \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} A d\theta = 2\Re b_0$$

y haciendo r tender a R obtenemos el resultado.

$\square$

Lema 2.14. *Sea $f(z)$ una función analítica en $|z - z_0| \leq r$, con $f(z_0) \neq 0$ y $|f(z)/f(z_0)| \leq M$ para $|z - z_0| \leq r$. Si $f(z) \neq 0$ para $|z - z_0| \leq r/2$, $\Re(z - z_0) \geq 0$, entonces*

$$\Re f'(z_0)/f(z_0) \geq -\frac{4}{r} \log M.$$

Si además $f(z)$ tiene un cero β en la región $|z - z_0| \leq r/2$, $\Re(z - z_0) < 0$, entonces

$$\Re f'(z_0)/f(z_0) \geq -\frac{4}{r} \log M + \Re(z_0 - \beta)^{-1}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $\Re(z_0 - \nu)^{-1} > 0$, si ν se encuentra en la región $\Re(z - z_0) < 0$, el resultado sigue directamente de la ecuación

$$\left| \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} - \sum_{\nu} \frac{1}{z_0 - \nu} \right| \leq \frac{4}{r} \log M. \tag{2.16}$$

donde la suma es sobre los ceros de $f(z)$ en $|z - z_0| \leq r/2$. Para demostrarla, definimos

$$h(z) = f(z) \prod_{\nu} (z - \nu)^{-1}$$

si $z \neq \nu$ y $h(\nu) = \lim_{z \to \nu} h(z)$. Se $|z - z_0| = r$,

$$\left| \frac{h(z)}{h(z_0)} \right| = \left| \frac{f(z)}{f(z_0)} \prod_{\nu} \frac{z_0 - \nu}{z - \nu} \right| \leq M.$$

y como $h(z)$ también es regular en $|z - z_0| \leq r$ por el principio del módulo máximo tenemos $|h(z)/h(z_0)| \leq M$ en toda esta región. Como $h(z)$ no se anula en $|z - z_0| \leq r/2$, vemos que la función $F(z) = \log h(z) - \log h(z_0)$ está bien definida y es analítica en esa región. Además, como $\Re F(z) = \log |h(z)/h(z_0)| \leq \log M$ y $\Re F(z_0) = 0$ aplicando el lema 2.13 con $R = r/2$ tenemos

$$|F'(z_0)| = |h'(z_0)/h(z)| \leq \frac{4}{r} \log M,$$

pero esto es precisamente (2.16). $\square$

Teorema 2.15. *Sean $\varphi(t,q)$ y $\theta(t,q)$ dos funciones positivas para $t \geq 1$, $\theta(t,q)$ decreciente en t, $\varphi(t,q)$ creciente en q, tal que $\theta(t,q) \leq 1$, $\varphi(t,q) \geq 1$ y*

$$\varphi(t,q)/\theta(t,q) = o(\exp(\varphi(t,q))) \quad (t \to \infty) \tag{2.17}$$

uniformemente en q. Si $L(s,\chi) \ll \exp(\varphi(t,q))$ para $1-\theta(t,q) \leq \sigma \leq 2$, $t \geq t_0$, entonces $L(s,\chi) \neq 0$ para

$$\sigma \geq 1 - C\frac{\theta(2t+2,q)}{\varphi(2t+2,q)} \quad (t \geq 5),$$

donde C es una constante absoluta (no depende ni de t ni de q).

Demostración. Sea $L(\rho+it) = 0$. Consideramos los puntos $s_0 = \sigma + it$ y $s_1 = \sigma + 2it$, con $2 > \sigma > 1$. Tenemos que

$$|1/L(s_i)| = \left|\sum_n \mu(n)\chi(n)n^{-s_i}\right| \leq \sum n^{-\sigma} = \zeta(\sigma) < A(\sigma-1)^{-1}.$$

Sean los círculos centrados en s_0 y s_1 de radios $2(\sigma-1+\theta(t)) \leq 4$ y $\sigma - 1 + \theta(2t) \leq 2$ respectivamente. Si $\rho + it$ no está en el círculo de radio $\sigma - 1 + \theta(t)$ entonces cumple el resultado del teorema. Si por el contrario está, por las hipótesis del teorema y por el lema 2.14 tenemos las ecuaciones

$$\Re\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)} \geq \frac{1}{\sigma-\rho} - 4\frac{\varphi(t+4,q) - \log(\sigma-1) + \log A}{2(\sigma-1+\theta(t))} \tag{2.18}$$

$$\Re\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)} \geq -4\frac{\varphi(2t+2,q) - \log(\sigma-1) + \log A}{\sigma-1+\theta(2t)}. \tag{2.19}$$

Además,

$$-L'(\sigma,\chi_0)/L(\sigma,\chi_0) = \sum_n \chi_0(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} \leq \zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma) \leq 1/(\sigma-1) + c_1, \tag{2.20}$$

puesto que esta función tiene un polo en el punto 1. Sustituyendo las acotaciones (2.18), (2.19), (2.20) en (2.2) obtenemos

$$\frac{4}{\sigma-\rho} \leq \frac{3}{\sigma-1} + R$$

donde $R \leq 16(\varphi(2t+2,q) - \log(\sigma-1) + \log A)/(\sigma - 1 + \theta(2t+2,q)) + 3c_1$. Operando llegamos a

$$1 - \rho \geq (\sigma - 1)\frac{1 - R(\sigma-1)}{3 + R(\sigma-1)}$$

y por (2.17) tomando $\sigma - 1 = c'\theta(2t+2,q)/\varphi(2t+2,q)$ con c' una constante pequeña obtenemos que

$$1 - \rho \geq C\theta(2t+2,q)/\varphi(2t+2,q)$$

para t suficientemente grande.

$\square$

Tomando $\theta(t,q) = ((\log\log(|t|+2) + \log\log q)/\log(|t|+2))^{2/3}$ y $\varphi(t,q) = \theta(t,q)\log q + c_1\theta(t,q)^{3/2}\log(|t|+2) + \log\log q + \log\log(|t|+2)$ en este teorema, obtenemos finalmente el teorema 2.1.

2.5. Notas.

Exposiciones del método de Vinogradov-Korobov y su aplicación a estimar la región libre de ceros para la función Zeta de Riemann pueden encontrarse en las monografías [8], [12], [6], [15], [1] y [16] (también hay en todos ellos menos en [6] exposiciones de los métodos de van der Corput y Weyl-Hardy-Littlewood). Estos textos han sido una guía en mi exposición, pues el caso de funciones L es similar al de ζ.

El lema 2.5 mejora el valor de la constante (dependiente sólo de b y k) con respecto al expuesto en los textos anteriores, aunque la cota está restringida a un rango de N. Esta mejora fue obtenida en [18], y sólo consiste en coger un intervalo más estrecho para la familia de primos $\mathcal{P}$.

Con la idea expuesta al principio de la sección 2 podríamos obtener una cota ligeramente peor que la obtenida en el Teorema 2.7, pero de una forma más simple. Esto está hecho en [12], pero allí la dependencia de k que se obtiene es peor. Teniendo en cuenta la dependencia que nosotros conseguimos, este teorema nos daría a su vez una región libre de ceros de la forma como la que nosotros obtenemos pero cambiando el exponente de $\log\log t$ de $1/3$ a $5/6$.

El Teorema 2.7 es una variación del método seguido en la demostración del Teorema 10.2 en [6]. El resultado acota la suma de Weyl no sólo por propiedades del coeficiente principal (que suele ser lo usual), sino por las de otros coeficientes. Lo hacemos así porque en el caso de acotar la funciones Zeta de Hurwitz el coeficiente principal del polinomio que aproxima $(2\pi)^{-1}t\log(n+\alpha)$ va a ser bastante pequeño, y nuestro método no sería efectivo aplicado sobre él.

En el Teorema 2.11 podríamos haber obtenido con un poco más trabajo un exponente de $2/3$ en $\log t$ en vez de 1, pero para nuestros propósitos no era necesario.

En el Teorema 2.11 no hacemos explícita la constante, aunque sería posible. Se han obtenido sucesivas mejoras en las constantes, y lo mejor hasta hoy es [7], donde se muestra

$$\left|\zeta(s,\alpha)-\alpha^{-s}\right| \le 76'2t^{4'45(1-\sigma)^{3/2}}\log^{2/3} t \qquad (t \le 3, 1/2 \le \sigma \le 1).$$

El resultado está basado en un perfeccionamiento del método de Vinogradov-Korobov, y con esta cota se obtiene una mejor constante también para la región libre de ceros en las funciones L.

Capítulo 3

Densidad de ceros

3.1. Introducción.

Sean $q \in \mathbb{N}$ y χ un carácter módulo q, y sea $1/2 \leq \sigma \leq 1$. Definimos

$$N(\sigma, T, \chi)$$

como el número de ceros $\alpha + it$ de la función $L(s, \chi)$ en el rectángulo $-T \leq t \leq T$, $\sigma \leq \alpha \leq 1$. Esta cantidad es interesante porque nos proporciona una medida del número de ceros que hay en cualquier región en la banda crítica. Por esa razón, para diferentes cuestiones en Teoría de Números resulta provechoso controlar $N(\sigma, T, \chi)$, pero normalmente promediada sobre todos los caracteres módulo q. Es decir, queremos encontrar cotas para

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi).$$

A ello nos vamos a dedicar en este capítulo, y para lograr buenos resultados será necesario acotar diferentes sumas de caracteres, y sumas en las que intervienen caracteres y exponenciales complejas.

Pretendemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $q \geq 1$ y $T \geq 2$. Tenemos que para $1/2 \leq \sigma \leq 4/5$ se cumple*

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} (\log(qT))^9, \tag{3.1}$$

y para $4/5 \leq \sigma \leq 1$

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi) \ll (qT)^{2(1-\sigma)/\sigma} (\log(qT))^{14}. \tag{3.2}$$

3.2. Ideas básicas.

En nuestra tarea de acotar sumas con diferentes propiedades vamos a tener en cuenta tres ideas básicas. La primera es la idea intuitiva de que si tenemos una función con derivada continua en un intervalo, podemos controlar cualquier valor de la función si controlamos su integral y la de su derivada. Esto se puede llevar a cabo, consiguiendo lo siguiente:

Lema 3.2. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *con derivada continua en* (a, b). *Entonces:*

$$|f((a+b)/2)| \leq (b-a)^{-1} \int_a^b |f(x)|\, dx + 1/2 \int_a^b |f'(x)|\, dx \tag{3.3}$$

y además para todo $u \in [a, b]$

$$|f(u)| \leq (b-a)^{-1} \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |f'(x)|\, dx. \tag{3.4}$$

Demostración. Integrando por partes llegamos a la ecuación

$$f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \int_u^b f'(x) \frac{x-b}{b-a} dx + \int_a^u f'(x) \frac{x-a}{b-a} dx.$$

Ambos resultados se deducen directamente de ella. □

El apartado a) es debido a Gallagher, y el b) es un caso muy particular de un teorema de Sobolev.

Para nosotros la aplicación más interesante de este resultado es la posibilidad de acotar sumas "bien espaciadas" por integrales. Esto es:

Lema 3.3. *Sea* $I \subset [a + \delta/2, b - \delta/2]$ *un conjunto tal que para todo* $\nu, \nu' \in I$ *tenemos que* $|\nu - \nu'| \geq \delta$. *Entonces*

$$\sum_{\nu \in I} |f(\nu)| \leq \delta^{-1} \int_a^b |f(x)|\, dx + 1/2 \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

Demostración. Por (3.3), para cada ν tenemos

$$|f(\nu)| \leq \delta^{-1} \int_{\nu-\delta/2}^{\nu+\delta/2} |f(x)|\, dx + 1/2 \int_{\nu-\delta/2}^{\nu+\delta/2} |f'(x)|\, dx.$$

Sumando en ν, como las integrales no se solapan, obtenemos el resultado. $\square$

Nótese que este lema es intuitivo, pues si los ν están espaciados a distancia δ la suma $\delta \sum_\nu |f(\nu)|$ es una suma de Riemann para la integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$, y parece lógico pensar que la diferencia entre ambas venga medida por la variación de f en $[a,b]$. Como en nuestras aplicaciones f tendrá la forma $f(x) = S(x)^2$, por lema 3.3 y Cauchy-Schwarz tenemos

Corolario 3.4. *Sea I como en lema 3.3. Entonces*

$$\sum_{\nu \in I} |S(\nu)|^2 \leq \delta^{-1} \int_a^b |S(x)|^2\, dx + \left(\int_a^b |S'(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |S(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Vamos con el segundo principio. Como ya hemos pasado sumas a integrales, queremos saber acotar estas últimas. Consideremos que S sea un polinomio trigonométrico

$$S(t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} c(\lambda) e(\lambda t),$$

donde $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$. Si por ejemplo $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ usando Parseval vemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |S(t)|^2\, dt \quad &\leq \quad (\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor) \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} |c(\lambda)|^2 \qquad \int_a^b |S(t)'|^2\, dt \\ &\leq \quad (\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor) \sum_{\lambda \in \mathcal{M}} |2\pi i \lambda c(\lambda)|^2, \end{aligned}$$

suponiendo que $S \in L^2(\mathbb{R})$. Así, considerando $a = 0$ y $b = 1$ por el lema 3.4 tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.5. *(gran criba) Sean $\delta > 0$ e I un conjunto de puntos tal que para todo $\nu, \nu' \in I$ se cumple que $\|\nu - \nu'\| \geq \delta$. Entonces*

$$\sum_{\nu \in I} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(\nu n) \right|^2 \leq (\delta^{-1} + 2\pi N) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Este resultado nos dice que no importa cómo sean los a_n, si las funciones $e(\nu\,\cdot)$ mantienen cierta independencia, entonces el tamaño de I no influye de manera importante en la cota. Dada su versatilidad, este resultado ha tenido una gran trascendencia en teoría de números.

Otras veces queremos aprovechar la cancelación de los coeficientes $c(\lambda)$, además de la de las exponenciales. Aquí es donde entra en juego nuestra segunda idea básica, un ingenioso resultado de carácter muy general debido también a Gallagher:

Lema 3.6. *Si* $\sum_{\lambda\in\mathcal{M}} |c(\lambda)| < \infty$ *y* $\delta T \le 1-\varepsilon$ *se cumple*

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\,dt \ll_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |M_\delta(t)|^2\,dt,$$

con $M_\delta(t) = \delta^{-1}\sum_{|\lambda-t|\le\delta/2} c(\lambda)$.

Demostración. Como $|\delta t| \le 1-\varepsilon$ tenemos que

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2\,dt \ll_\varepsilon \int_{-T}^{T} \left| S(t)\frac{\operatorname{sen}(\pi\delta t)}{\pi\delta t}\right|^2 dt.$$

Pero $\operatorname{sen}(\pi\delta t)/(\pi\delta t)$ es la transformada de Fourier de la función $\delta^{-1}\mathbb{I}_{[-\delta/2,\delta/2]}$, luego

$$S(t)\frac{\operatorname{sen}(\pi\delta t)}{\pi\delta t} = \sum_\lambda c(\lambda)e(\lambda t)\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\delta^{-1}e(-tx)dx =$$

$$= \sum_\lambda c(\lambda)\int_{\lambda-\delta/2}^{\lambda+\delta/2}\delta^{-1}e(-ty)dy = \int e(-ty)\sum_\lambda c(\lambda)\mathbb{I}_{[\lambda-\delta/2,\lambda+\delta/2]}(y)dy = \widehat{M_\delta}(t).$$

Usando Parseval el lema queda demostrado. □

Ahora apliquemos este resultado sobre series de Dirichlet.

Corolario 3.7. *Sea* $D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ $(s=\sigma+it)$ *absolutamente convergente en* $\sigma \ge 0$. *Entonces*

$$\int_{-T}^{T} |D(it)|^2\,dt \ll T^2\int_0^\infty \left|\sum_{y\le n\le \exp(1/T)y} a_n\right|^2 \frac{dy}{y}.$$

Demostración. Por lema 3.6 con $\lambda = \lambda(n) = -(2\pi)^{-1}t\log n$ y $\delta = (2\pi T)^{-1}$ tenemos que

$$\int_{-T}^{T} |D(it)|^2\, dt \ll T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{|(2\pi)^{-1}t\log n - t| \le (2\pi T)^{-1}} a_n \right|^2 dt.$$

Con el cambio de variable $y = \exp(-1/(2T))e^t$ obtenemos el corolario. □

Vamos con la tercera idea. Hasta ahora hemos tratado las sumas acotando por integrales. Ahora vamos a cambia la estrategia, abstrayendo el problema. Si $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_k}$ son vectores ortonormales en un espacio vectorial con producto interno, tenemos que para todo vector u se cumple la ecuación

$$\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}|^2 \le \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

Esta es la llamada desigualdad de Bessel. Nosotros queremos extenderla al caso en el que los $\boldsymbol{v_i}$ no sean necesariamente ortonormales. Buscamos algo del tipo

$$\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}|^2 \le A\|\boldsymbol{u}\|^2, \tag{3.5}$$

donde A es un número que reflejaría la casi-ortogonalidad de los vectores $\boldsymbol{v_i}$ (no dependería de $\boldsymbol{u}$). Pero (3.5) es equivalente por dualidad a la ecuación

$$\left| \sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i} \right| \le A^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|, \tag{3.6}$$

para todo $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$.

Para ver que (3.6) implica (3.5) es suficiente escoger $c_i = \overline{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}}$ en (3.6) con lo que llegamos a

$$\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}|^2 \le A^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}|^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|.$$

La implicación contraria proviene de aplicar Cauchy-Schwarz a la parte izquierda de (3.6)

$$\left| \sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i} \right| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v_i}|^2 \right)^{1/2}$$

y ahora aplicar (3.5). Con esta equivalencia ya podemos demostrar el siguiente resultado de Bombieri:

Lema 3.8.
$$\sum_{i=1}^{k} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v_i}|^2 \leq \left(\max_{1\leq i\leq k}\sum_{j\leq k}|\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_j}|\right)\|u\|^2.$$

Demostración.
$$\left|\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v_i}\right| = \left|\boldsymbol{u}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v_i}\right)\right| \leq \|\boldsymbol{u}\|\left\|\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v_i}\right\|$$

Pero
$$\left\|\sum_{i=1}^{k} c_i\boldsymbol{v_i}\right\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq k} c_i\bar{c}_j\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_j} \leq \sum_{1\leq i,j\leq k}\frac{1}{2}(|c_i|^2+|c_j|^2)\,|\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_j}| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k}|c_i|^2\max_{1\leq i\leq k}\sum_{j\leq k}|\boldsymbol{v_i}\cdot\boldsymbol{v_j}|\,.$$

Luego por la equivalencia entre (3.5) y (3.6) hemos demostrado el lema. □

Vamos a ver la fuerza de este lema al aplicarlo sobre polinomios de Dirichlet:

Lema 3.9. *Sea $D(s,\chi)=\sum_{n=1}^{N} a_n\chi(n)n^{-s}$, donde χ es un carácter módulo l, y sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de ternas (s,χ,l). Sean b_n $(n\geq 1)$ números positivos cualesquiera con $b_n\neq 0$ si $a_n\neq 0$. Entonces tenemos que*

$$\sum_{(s,\ \chi,\ l)\in\mathcal{S}}|D(s,\chi)|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2 b_n^{-1}\right)\max_{(s,\ \chi,\ l)\in\mathcal{S}}\sum_{(s',\ \chi',\ l')\in\mathcal{S}}|B(\overline{s}+s',\overline{\chi}\chi')|\,,$$

con
$$B(s,\chi)=\sum_{n=1} b_n\chi(n)n^{-s}.$$

Demostración. Aplicando el lema 3.8 con
$$\boldsymbol{u}=(a_n b_n^{-1/2})_n$$
y
$$\boldsymbol{v_i}=(b_n^{1/2}\chi(n)n^{-s})_n$$
obtenemos el resultado. □

3.3. Sumas de caracteres y de series de Dirichlet.

Vamos a comenzar estudiando sumas de caracteres, para después aplicarlas a sumas sumas involucrando series de Dirichlet. Así, para cada carácter χ definamos

$$T(\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n).$$

En este capítulo también trataremos con sumas sobre caracteres primitivos. Cuando escribamos $\sum_{\chi(q)}^{*}$ querrá decir que estamos sumando sólo sobre los caracteres primitivos módulo q. Además, normalmente no escribiremos el q, porque se sobreentiende.Vamos a probar varios resultados concerniendo a $T(\chi)$:

Teorema 3.10.

$$\sum_{\chi} |T(\chi)|^2 \leq \phi(q) \lceil N/q \rceil \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 .$$

Demostración. Multiplicando y utilizando la ortogonalidad de los caracteres tenemos

$$\sum_{\chi} |T(\chi)|^2 = \phi(q) \sum_{n \equiv m (\mathrm{mod}\ q)} a_n \overline{a}_m.$$

Por la fórmula $2 |a_n \overline{a_m}| \leq |a_n|^2 + |a_m|^2$

$$\leq \phi(q) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \sum_{m \equiv n} 1$$

de donde deducimos el resultado. □

Teorema 3.11.

$$\sum_{\chi} |T(\chi^*)|^2 \leq q \lceil N/q \rceil \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 .$$

Demostración. Sea $G_{n,m} = \sum_\chi \chi^*(n)\overline{\chi^*}(m)$. Multiplicando tenemos

$$\sum_\chi |T(\chi^*)|^2 = \sum_{M+1\le a_n,a_m\le M+N} a_n\overline{a_m}G_{n,m} \le \sum_{m=M+1}^{M+N} |a_m|^2 \sum_{n=M+1}^{M+\lceil N/q\rceil q} |G_{n,m}|\,,$$

este último paso por la desigualdad elemental $|a_n\overline{a_m}| \le (|a_n|^2 + |a_m|^2)/2$. Si $G_{n,m} \ge 0$, cambiando los sumatorios tenemos que el coeficiente de $|a_m|^2$ es

$$\sum_\chi \overline{\chi^*}(m) \sum_{n=M+1}^{M+\lceil N/q\rceil q} \chi^*(n) = \lceil N/q\rceil q,$$

pues

$$\sum_{n=1}^{q} \chi^*(n) = \begin{cases} q & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{si } \chi \ne \chi_0. \end{cases}$$

Luego para acabar la demostración, sólo hay que ver que $G_{n,m}$ es siempre mayor o igual que cero. Sea d el divisor más grande de q tal que $(d, nm) = 1$. Entonces se tiene

$$\sum_{\chi(\text{mod } q)} \chi^*(n)\overline{\chi^*}(m) = \sum_{k|q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)} \chi(n)\overline{\chi}(m) = \sum_{\substack{k|q\\(k,nm)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)} \chi(n)\overline{\chi}(m) =$$

$$\sum_{k|d} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\text{mod } q)} \chi(n)\overline{\chi}(m) = \sum_{\chi(\text{mod } d)} \chi^*(n)\overline{\chi}^*(m),$$

y como $(nm, d) = 1$ esto es igual a

$$\sum_{\chi(\text{mod } d)} \chi(n)\overline{\chi}(m) = \begin{cases} \phi(d) & \text{si } n \equiv m(\text{mod } d) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Denominamos polinomio de Dirichlet a una función compleja de la forma

$$D(s,\chi) = \sum_{n=1}^{N} a_n\chi(n)n^{-s}.$$

Vamos a obtener acotaciones de estos polinomios promediando en χ y t, considerando series absolutamente convergentes para $\sigma = 0$. Empezamos por el siguiente resultado:

Lema 3.12. *Sean* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *y* $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$, *donde* $|a_n| \le b_n$ *para todo* $n \ge 1$ *y* $g(s)$ *convergiendo absolutamente en* $\sigma = \sigma_0$. *Entonces*

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma_0 + it)|^2 \, dt \le 2 \int_{-2T}^{2T} |g(\sigma_0 + it)|^2 \, dt$$

para todo $T \ge 0$.

Demostración. Como $1 \le 2(1 - |t|/(2T))$ con $t \in [-T, T]$ tenemos

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma_0 + it)|^2 \, dt \le 2 \int_{-2T}^{2T} (1 - |t|/(2T)) \, |f(\sigma_0 + it)|^2 \, dt =$$

$$= 2 \sum_{1 \le n,m \le \infty} a_n \overline{a}_m \int_{-2T}^{2T} (1 - |t|/(2T))(n/m)^{-it} dt \le$$

$$\le 2 \sum_{1 \le n,m \le \infty} b_n b_m \int_{-2T}^{2T} (1 - |t|/(2T))(n/m)^{-it} dt \le 2 \int_{-2T}^{2T} |g(\sigma_0 + it)|^2 \, dt,$$

donde hemos utilizado que las integrales intermedias son reales positivas. □

Teorema 3.13. *Sean* $T \ge 1$ *y* $T_0 \in \mathbb{R}$. *Se cumple la acotación*

$$\sum_{\chi} \int_{T_0}^{T_0+T} |D(it, \chi)|^2 \, dt \ll \phi(q) T \sum_{n=1}^{N} (1 + n/(qT)) \, |a_n|^2 . \tag{3.7}$$

El resultado también es válido para $N = \infty$.

Demostración. Por el corolario 3.7 la parte izquierda de (3.8) es

$$\ll T^2 \sum_{\chi} \int_0^{\infty} \left| \sum_{y \le n \le \exp(1/T) y} a_n n^{-iT_0} \chi(n) \right|^2 \frac{dy}{y}$$

y por el teorema 3.10 esto es

$$\ll T^2 \int_0^{\infty} \phi(q)((\exp(1/T) - 1) y/q + 1) \sum_{y \le n \le \exp(1/T) y} |a_n|^2 \frac{dy}{y} \ll$$

$$\ll \phi(q) T^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \int_{\exp(-1/T)n}^{n} q^{-1}(\exp(1/T) - 1) + y^{-1} dy.$$

Como $\exp(\pm 1/T) - 1 \ll 1/T$ obtenemos el resultado. □

Continuamos con otro teorema del mismo tipo pero para caracteres primitivos. La demostración es idéntica a la anterior, pero usando el teorema 3.11 en vez del teorema 3.10.

Teorema 3.14. *Sean $T > 0$ y $T_0 \in \mathbb{R}$. Se cumple la acotación*

$$\sum_\chi \int_{T_0}^{T_0+T} |D(it,\chi^*)|^2 \, dt \ll qT \sum_{n=1}^{N} (1 + n/(qT)) \, |a_n|^2 . \tag{3.8}$$

Corolario 3.15. *Sea $0 < b \leq 1$. Entonces*

$$\sum_\chi \int_{\mathbb{R}} e^{-bt} \, |D(it,\chi)|^2 \, dt \ll \phi(q) \sum_{n \leq N} (1/b + n/q) \, |a_n|^2 . \tag{3.9}$$

Demostración. Podemos acotar la parte izquierda de (3.9) por

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|-1} \sum_\chi \int_{k/b}^{(k+1)/b} |D(it,\chi)|^2 \, dt.$$

Aplicando el teorema 3.13 sobre cada término de la serie obtenemos el resultado. □

Por el corolario 3.4 esta acotación de una integral se puede pasar a una acotación de una suma bien espaciada:

Corolario 3.16. *Para cada carácter χ módulo q sea R_χ un conjunto de puntos en $[T_0 + \delta/2, T_0 + T - \delta/2]$ tal que $|t - t'| \geq \delta$ $\forall t, t' \in R_\chi$. Entonces*

$$\sum_\chi \sum_{t \in R_\chi} |D(it,\chi^*)|^2 \ll (qT + N)(\delta^{-1} + \log N) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 . \tag{3.10}$$

Demostración. Aplicando el lema 3.4 y Cauchy-Schwarz la parte izquierda de (3.10) es

$$\leq \delta^{-1} \sum_\chi \int_{T_0}^{T_0+T} |D(it,\chi^*)|^2 \, dt +$$

$$+ \left(\sum_\chi \int_{T_0}^{T_0+T} |D(it,\chi^*)|^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\sum_\chi \int_{T_0}^{T_0+T} \left| \frac{d}{dt} D(it,\chi^*) \right|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Como
$$\frac{d}{dt}D(it,\chi^*) = \sum_{n=1}^{N} \chi^*(n)(-a_n i \log n)n^{-it},$$
aplicando el teorema 3.14 sobre $D(it,\chi^*)$ y sobre $(d/dt)D(it,\chi^*)$ obtenemos el resultado. □

Corolario 3.17. *Sea $\sigma_0 > 0$. Para cada carácter χ módulo q sea $\mathcal{S}_\chi$ un conjunto de puntos de la forma $\sigma + it$, tal que $\sigma > \sigma_0$ y $|t - t'| \geq \delta$ para todo $\sigma + it$, $\sigma' + it' \in \mathcal{S}$. Entonces*
$$\sum_{\chi} \sum_{s\in\mathcal{S}_\chi} |D(\sigma + it, \chi^*)|^2 \ll$$
$$\ll (qT + N)(\delta^{-1} + \log N) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 n^{-2\sigma_0} \left(1 + \log \frac{\log 2N}{\log 2n}\right). \qquad (3.11)$$

Demostración. Por el lema de Abel (A.2), para $N \geq 2$,
$$D(\sigma+it,\chi) = a_1 + \widetilde{D}(it,\chi,N)N^{-(\sigma-\sigma_0)} + (\sigma-\sigma_0)\int_2^N u^{-(\sigma-\sigma_0)-1}\widetilde{D}(it,\chi,u)du,$$
donde $\widetilde{D}(it,\chi,u) = \sum_{2\leq n\leq u} \chi(n)a_n n^{-\sigma_0} n^{-it}$. Aplicando dos veces Cauchy-Schwarz vemos que $|D(\sigma + it, \chi)|^2$ es menor o igual que
$$|a_1|^2 + \left|\widetilde{D}(it,\chi,N)\right|^2 + f(\sigma - \sigma_0)\int_2^N \left|\widetilde{D}(it,\chi,u)\right|^2 (u\log u)^{-1}du,$$
con
$$f(r) = r^2 \int_2^N u^{-2r-1}(\log u)^{-1}du.$$
Como $f(r)$ es uniformemente acotada en $r \geq 0$, sumando en χ y $s \in \mathcal{S}_\chi$ por el corolario 3.16 la parte izquierda de (3.11) es
$$\ll |a_1|^2 \sum_{\chi} |\mathcal{S}_\chi| + (qT + N)(\delta^{-1} + \log N)\sum_{n=2}^{N} |a_n|^2 n^{-2\sigma_0} +$$
$$+ \int_2^N (\delta^{-1} + \log u)(qT + u)(u\log u)^{-1} \sum_{2\leq n\leq u} |a_n|^2 n^{-2\sigma_0} du.$$

Pero

$$\int_2^N (u\log u)^{-1}\sum_{2\le u}|a_n|^2 n^{-2\sigma_0}du \ll \sum_{m=2}^N (m\log m)^{-1}\sum_{2\le m\le N}|a_n|^2 n^{-2\sigma_0} =$$

$$=\sum_{n=2}^N |a_n|^2 n^{-2\sigma_0}\sum_{m=n}^N (m\log m)^{-1} \ll \sum_{n=2}^N |a_n|^2 n^{-2\sigma_0}\log\frac{\log N}{\log n}.$$

Y como $|\mathcal{S}_\chi| \le \delta^{-1}$ para todo χ tenemos el resultado. $\square$

Teorema 3.18. *Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de ternas (s,χ,d) con χ carácter primitivo módulo d, y $d \mid q$. Sea $\sigma_0 \le \sigma$ y $|t| \le T$ para todo $(\sigma+it,\chi',d') \in \mathcal{S}$, y sea δ tal que $|t-t'| \ge \delta$ para cualesquiera ternas diferentes $(\sigma+it,\chi,d)$ y $(\sigma'+it',\chi,d)$ en $\mathcal{S}$. Entonces*

$$\sum_{(s,\chi,d)\in\mathcal{S}} |D(s,\chi)|^2 \ll (1+\delta^{-1})(N+|\mathcal{S}|\, q^{1/2}T^{1/2}\log qT)\sum_{n=1}^N |a_n|^2 n^{-2\sigma_0}. \quad (3.12)$$

Demostración. Escribimos

$$D(s,\chi) = \sum_{n=1}^N (a_n n^{-\sigma_0})\chi(n) n^{-(s-\sigma_0)}.$$

Aplicamos el lema 3.9 con $b_n = (1-n/(2N))$ si $1 \le n \le 2N$, y $b_n = 0$ si $n > 2N$ obteniendo que la parte izquierda de (3.12) es

$$\ll \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 n^{-2\sigma_0}\right) \max_{(s,\chi,l)\in\mathcal{S}} \sum_{(s',\chi',l')\in\mathcal{S}} |B(\overline{s}-\sigma_0+s'-\sigma_0,\overline{\chi}\chi')|\,.$$

Por el lema A.8 tenemos la cota

$$|B(\overline{s}-\sigma_0+s'-\sigma_0,\chi'\overline{\chi})| \ll (q(|t|+2))^{1/2}\log(q(|t|+2)) + \varepsilon(\chi'\overline{\chi})N(|t|+2)^{-2}.$$

Si χ es primitivo módulo d y χ' lo es módulo d', entonces $\chi'\overline{\chi}$ es un carácter módulo $mcm(d,d')$. Para que sea principal la única posibilidad es que $\chi'=\chi$. Por tanto $\varepsilon(\chi'\overline{\chi}) \ne 0$ sólo una vez, y sumando sobre los puntos tenemos una aportación de

$$N\sum_i (|t_i|+2)^{-2} \ll N(1+\delta^{-1}),$$

luego el teorema queda demostrado. $\square$

3.4. Sumas de funciones L.

En nuestro resultado principal necesitamos una acotación de una suma que involucra $|L(s,\chi)|^4$ donde s va a estar sobre la línea crítica. Para conseguirla, vamos a utilizar para $L(s,\chi)$ (con χ primitivo) una expresión como suma de dos series de Dirichlet que es válida en esa región. Así, usando resultados del capítulo anterior, llegaremos al siguiente teorema:

Teorema 3.19. *Para cada carácter primitivo χ módulo q, sea R_χ un conjunto contenido en $[-T,T]$ tal que para todo $t,t' \in R_\chi$ tenemos que $|t-t'| \geq \delta$. Entonces*

$$\sum_{\chi}\sum_{t\in R_\chi} |L(1/2+it,\chi^*)|^4 \ll qT(\log qT)^4(\delta^{-1}+\log qT).$$

Comenzamos por el resultado que nos permite expresar $L(s,\chi)$ mediante series donde los coeficientes decaen de forma rápida, lo que nos va a permitir aplicar los resultados de la sección anterior:

Teorema 3.20. *Sea χ carácter primitivo módulo $q>1$. Sean $0<\sigma<1$, y $X>0$. Entonces*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n/X}\chi(n)n^{-s} - \frac{i^{\mathfrak{a}}}{\pi}\tau(\chi)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(s,\chi)\overline{\chi}(n)n^{s-1}$$

con $\tau(\chi)$ la suma de Gauss asociada a χ, $\mathfrak{a}=\frac{1}{2}(1-\chi(-1))$ y

$$c_n(s,\chi) = \Gamma(1-s)\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(1-s+\mathfrak{a})-\operatorname{arc\,tg}\alpha_n)}{(1+\alpha_n)^{(1-s)/2}} - \cos(\frac{\pi}{2}(1-s+\mathfrak{a}))\right),$$

con $\alpha_n = q/(2\pi X n)$.

Demostración. Aplicando (A.18) con $c>1/2$ deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}e^{-n/X} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w)L(w+s,\chi)X^w dw.$$

Tomando $-1<b<0$ y teniendo en cuenta el polo simple de la función dentro de la integral en $w=0$ por el teorema de los residuos vemos que

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}e^{-n/X} - \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(w)L(w+s,\chi)X^w dw.$$

Usando la ecuación funcional para $L(s,\chi)$ en la forma (1.61) para $L(w+s,\chi)$ y desarrollando en serie $L(1-(w+s),\overline{\chi})$ llegamos a

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} e^{-n/X} - \frac{i^{\mathfrak{a}}}{\pi}\tau(\chi)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) n^{s-1} d_n(s,\chi) \quad (3.13)$$

donde

$$d_n(s,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(w)\cos\frac{\pi(1+\mathfrak{a}-s-w)}{2}\Gamma(1-s-w)\alpha_n^{-w}\,dw. \quad (3.14)$$

Si $0 < a < 1-\sigma$, por el teorema de los residuos vemos que

$$d_n(s,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)G(1-s-w)\alpha_n^{-w}\,dw - G(1-s)$$

donde $F(w) = \Gamma(w)$ y $G(w) = \cos\left(\frac{\pi(w-\mathfrak{a})}{2}\right)\Gamma(w)$ son las transformadas de Mellin de e^{-x} y $\cos(x-\mathfrak{a}\pi/2)$. Por (A.6)

$$d_n(s,\chi) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha_n y} y^{-s}\cos(y-\frac{\pi}{2}\mathfrak{a})\,dy - \cos\left(\frac{\pi(1-s+\mathfrak{a})}{2}\right)\Gamma(1-s),$$

Por una nueva aplicación del teorema de los residuos deducimos que $d_n(s,\chi) = c_n(s,\chi)$. $\square$

Teorema 3.21. *Si $T \geq 2$, entonces*

$$\sum_{\chi}{}^{*}\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^4\,dt \ll \phi(q)T(\log qT)^4 \quad (3.15)$$

en la región

$$1/2 - (\log qT)^{-1} \leq \sigma \leq 1/2 + (\log qT)^{-1}.$$

Demostración. Vamos a considerar $\mathfrak{a} = 0$, pues el caso $\mathfrak{a} = 1$ sería equivalente. Aplicando Hölder y el lema 3.20 sobre cada carácter primitivo, se tiene la desigualdad (usando (1.59))

$$\sum_{\chi}{}^{*}|L(s,\chi)|^4 \ll \sum_{\chi}|M_1(t,\chi)|^4 + \sum_{\chi}|M_2(t,\chi)|^4 + \sum_{\chi}|M_3(t,\chi)|^4. \quad (3.16)$$

donde

$$M_1(t,\chi) = \sum_{1\le n<\infty} e^{-n/X}\chi(n)n^{-s},$$

$$M_2(t,\chi) = \sum_{qT/(2\pi X)<n<\infty} c_n(s,\chi)\overline{\chi}(n)n^{s-1}$$

y

$$M_3(t,\chi) = \sum_{n\le qT/(2\pi X)} c_n(s,\chi)\overline{\chi}(n)n^{s-1}.$$

Ahora trataremos por separado cada una de estas tres sumas. Para poder aplicar teoremas del capítulo anterior vamos a utilizar que

$$\left|\sum_n a_n\chi(n)n^{it}\right|^4 = \left|\left(\sum_n a_n\chi(n)n^{it}\right)^2\right|^2 = \left|\sum_n b_n\chi(n)n^{it}\right|^2 \tag{3.17}$$

con $b_n = \sum_{d|n} a_d a_{n/d}$. Así, aplicando el teorema 3.14 y (3.17) se sigue

$$\begin{aligned}\sum_\chi \int_{-T}^{T} |M_1(t,\chi)|^4\,dt &\ll \phi(q)T\sum_{n=1}^{\infty}(1+n/(qT))n^{-2\sigma}d^2(n)\exp(-n^{1/2}/X)\\ &\ll \phi(q)T\sum_{n\le X^2} d^2(n)n^{-1} + \phi(q)q^{-1}\sum_{n\le X^2} d^2(n)\\ &\ll \phi(q)T(\log X)^4 + \phi(q)q^{-1}X^2(\log X)^3. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Por otra parte podemos escribir

$$c_n(s,\chi) = \Gamma(1-s)\cos(\frac{\pi}{2}(1-s))f_n(1-s) + \Gamma(1-s)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}(1-s))g_n(1-s),$$

con

$$f_n(s) = \cos(s\operatorname{arc\,tg}\alpha_n)(1+\alpha_n^2)^{-s/2} - 1$$

y

$$g_n(s) = \operatorname{sen}(s\operatorname{arc\,tg}\alpha_n)(1+\alpha_n^2)^{-s/2}.$$

Se cumple que $f_n(0) = g_n(0) = 0$ y $\left|f_n^{(k)}(0)\right|, \left|g_n^{(k)}(0)\right| \le (3\alpha_n/2)^k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Como además $\Gamma(1-s)\cos(\frac{\pi}{2}(1-s)) \ll 1$, $\Gamma(1-s)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}(1-s)) \ll$

1, desarrollando f_n y g_n en serie y usando Hölder tenemos que existe una sucesión $(r_{n,k})$ tal que $|r_{n,k}| \leq (3\alpha_n/2)^k$ y

$$|M_2(t,\chi)|^4 \ll \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{4}{3}k}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{4k}\frac{T^{4k}}{(k!)^4}\left|\sum_{n>qT/(2\pi X)} r_{n,k} n^{\sigma-1}\overline{\chi}(n)n^{it}\right|^4.$$

Por tanto, usando de nuevo el teorema 3.13 y (3.17) deducimos que

$$\sum_{\chi}\int_{-T}^{T} |M_2(t,\chi)|^4\, dt \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{4k}\frac{T^{4k}}{(k!)^4}\phi(q)T \sum_{n>(qT/(2\pi X))^2} (1+n/(qT))((3/2)^2q^2X^{-2}n^{-1})^{2k}d^2(n)n^{-2\sigma} \ll$$

$$\ll \phi(q)T\left(1+\frac{qT}{X^2}\right)\left(\log\frac{qT}{X}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{4k}}{(k!)^4} \ll \phi(q)T\left(1+\frac{qT}{X^2}\right)\left(\log\frac{qT}{X}\right)^3. \tag{3.19}$$

Ahora vamos a acotar $M_3(t,\chi)$. Como $\Gamma(1-s) \ll \exp(-\pi/2\,|t|)$ y $\cos z = (e^{iz}+e^{-iz})/2$, usando Hölder vemos que existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|u_n| \leq 1$ tal que

$$|M_3(t,\chi)|^4 \ll |M_{31}(t,\chi)|^4 + |M_{32}(t,\chi)|^4 + |M_{33}(t,\chi)|^4, \tag{3.20}$$

con

$$M_{31}(t,\chi) = \sum_{n\leq qT/(2\pi X)} \overline{\chi}(n)n^{s-1},$$

$$M_{32}(t,\chi) = \sum_{n\leq q/(2\pi X)} u_n n^{\sigma-1}\chi(n)e^{-|t|\operatorname{arc\,tg}\alpha_n}(n(1+\alpha_n^2)^{1/2})^{it}$$

y

$$M_{33}(t,\chi) = \sum_{q/(2\pi X)<n\leq qT/(2\pi X)} u_n n^{\sigma-1}\chi(n)e^{-|t|\operatorname{arc\,tg}\alpha_n}(n(1+\alpha_n^2)^{1/2})^{it}.$$

De la misma forma que con $M_1(t,\chi)$, conseguimos

$$\sum_{\chi}\int_{-T}^{T} |M_{31}(t)|^4\, dt \ll \phi(q)T(\log(qT/X))^4 + \phi(q)q^{-1}(qT/X)^2(\log(qT/X))^3. \tag{3.21}$$

Si $n \leq q/(2\pi X)$, entonces $\alpha_n \geq 1$. Luego aplicando (3.17) y el teorema 3.10 para cada t fijo se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |M_{32}(t,\chi)|^4 \, dt &\leq \phi(q) \sum_{n \leq q^2(2\pi X)^{-2}} d^2(n) n^{\sigma-1} \int_{-T}^{T} e^{-|t|} dt \\ &\ll \phi(q) \left(\log \frac{q}{X} \right)^4 . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para controlar la variabilidad de los coeficientes de $M_{33}(t,\chi)$, vamos a considerar primero $M_{33}(t,\chi,U) = \sum_{U \leq n < 2U} c_n n^{\sigma-1} \chi(n) e^{-|t| \operatorname{arc\,tg} \alpha_n} (n(1+\alpha_n^2)^{1/2})^{it}$. Se tiene que

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |M_{33}(t,\chi,U)|^4 \, dt \ll \sum_{\chi} \int_{\mathbb{R}} |M_{33}(t,\chi,U)|^4 \, dt.$$

Expandiendo la cuarta potencia, integrando y sumando tenemos que esta última integral es igual a

$$2\phi(q) \sum_{n_1 n_2 \equiv m_1 m_2} \frac{\Re(u_{n_1} u_{n_2} \overline{u}_{m_1} \overline{u}_{m_2})}{(n_1 n_2 m_1 m_2)^{1-\sigma}} \frac{b_{n_1 n_2 m_1 m_2}}{(b_{n_1 n_2 m_1 m_2})^2 + (\log \frac{n_1 n_2}{m_1 m_2} + \lambda_{n_1 n_2 m_1 m_2})^2},$$

con

$$b_{n_1 n_2 m_1 m_2} = \operatorname{arc\,tg}(\alpha_{n_1}) + \operatorname{arc\,tg}(\alpha_{n_2}) + \operatorname{arc\,tg}(\alpha_{n_3}) + \operatorname{arc\,tg}(\alpha_{n_4}),$$

$$\lambda_{n_1 n_2 m_1 m_2} = \frac{1}{2} \log \frac{(1+\alpha_{n_1}^2)(1+\alpha_{n_2}^2)}{(1+\alpha_{m_1}^2)(1+\alpha_{m_2}^2)}$$

y $U \leq n_1, n_2, m_1, m_2 < 2U$. Como $n \geq q/(2\pi X)$ implica que $0 \leq \alpha_n \leq 1$, luego

$$\alpha_U/4 = \alpha_{2U}/2 \leq \operatorname{arc\,tg} \alpha_{2U} \leq b_{n_1 n_2 m_1 m_2} \leq 4 \operatorname{arc\,tg} \alpha_U \leq 4\alpha_U,$$

$$|\lambda_{n_1 n_2 m_1 m_2}| \leq \alpha_U^2 \leq \alpha_U.$$

Así pues,

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |M_{33}(t,\chi,U)|^4 \, dt \ll$$

$$\ll 2\phi(q) \sum_{n_1 n_2 \equiv m_1 m_2} \frac{\Re(u_{n_1} u_{n_2} \overline{u}_{n_3} \overline{u}_{n_4})}{(n_1 n_2 m_1 m_2)^{1-\sigma}} \frac{\alpha_U}{(\alpha_U)^2 + (\log \frac{n_1 m_1}{n_2 m_2})^2} =$$

$$= \sum_{\chi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_U |t|} \left| \sum_{U \le n < 2U} n^{\sigma-1}\chi(n) n^{it} \right|^4 dt.$$

Por tanto, usando el corolario 3.15 y (3.17)

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |M_{33}(t,\chi,U)|^4 \ll \phi(q)(UXq^{-1} + U^2 q^{-1})(\log U)^3.$$

Finalmente, por Hölder

$$|M_{33}(t,\chi)|^4 \le \left(\sum_{2^k \le qT/(2\pi X)} l_k^{-1/3} \right)^3 \sum_{2^k \le qT/(2\pi X)} l_k \left| M_{33}(t,\chi,2^k) \right|^4,$$

y eligiendo

$$l_k = \begin{cases} (\log qT/X)^3 & \text{si } 2^k \le qT/(2\pi X)(\log qT/X)^{-3} \\ 1 & \text{si } qT/(2\pi X)(\log qT/X)^{-3} < 2^k \le qT/(2\pi X) \end{cases}$$

demostramos que

$$\sum_{\chi} \int_{-T}^{T} |M_{33}(t,\chi)|^4 \, dt \le \phi(q) T (1 + qT/X)(\log qT/X)^3 (\log\log qT/X). \tag{3.23}$$

Tomando $X \asymp (qT)^{1/2}$, por (3.16), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) y (3.23) logramos concluir la demostración. □

Corolario 3.22. *Si* $T \ge 2$ *entonces*

$$\sum_{\chi}{}^{*} \int_{-T}^{T} |L(1/2+it,\chi) L'(1/2+it,\chi)|^2 \, dt \ll \phi(q) T (\log qT)^6. \tag{3.24}$$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C}$ y f analítica en un entorno abierto conteniendo al disco $|z-a| \le R$, entonces la fórmula de Cauchy afirma que

$$f'(a) = (2\pi i)^{-1} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Aplicando Cauchy-Schwarz tenemos

$$|f'(a)|^2 \le \int_{|z-a|=R} \frac{|dz|}{|z-a|^4} \int_{|z-a|=R} |f(z)|^2 \, |dz| \ll R^{-3} \int_{|z-a|=R} |f(z)|^2 \, |dz| \, .$$

Tomamos $f(s) = L(s,\chi)^2$. Con $a = 1/2 + it$, $R = (\log qT)^{-1}$ tenemos

$$\int_{-T}^{T} \left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)L'(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^2 dt \ll$$

$$\ll (\log qT)^2 \int_0^{2\pi}\int_{-T}^{T} \left| L(\frac{1}{2}+it+\frac{e^{i\theta}}{\log qT},\chi)\right|^4 dtd\theta,$$

luego el resultado de sigue del teorema 3.21.

□

Teorema 3.23. *Para cada* χ *módulo* q *sea* R_χ *un conjunto de números contenido en* $[-T,T]$ $(T \geq 2)$, *y tal que para todo par* $t,t' \in R_\chi, t \neq t'$ *se cumple que* $|t-t'| \geq \delta$. *Entonces*

$$\sum_{\chi}{}^{*} \sum_{t\in R_\chi} \left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^4 \ll (\delta^{-1}+\log qT)\phi(q)T(\log qT)^4. \tag{3.25}$$

Demostración. Por el lema 3.4 tenemos que la parte izquierda de (3.25) es

$$\ll \sum_{\chi}{}^{*}\delta^{-1}\int_{-T}^{T}\left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^4 dt+$$

$$+\sum_{\chi}{}^{*}\left(\int_{-T}^{T}\left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^4 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)L'(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Por Cauchy-Schwarz esta última suma es

$$\ll \left(\sum_{\chi}{}^{*}\int_{-T}^{T}\left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^4 dt\sum_{\chi}{}^{*}\int_{-T}^{T}\left| L(\frac{1}{2}+it,\chi)L'(\frac{1}{2}+it,\chi)\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Ahora aplicando los teoremas 3.21 y 3.22 demostramos el teorema. □

Demostración del teorema 3.19.

Como cada carácter χ^* asociado a $\chi(\text{mod } q)$ es un carácter módulo $d \mid q$, aplicando el teorema 3.23 para cada d y sumando terminamos la demostración, teniendo en cuenta que $\sum_{d|q}\phi(d) = q$. □

3.5. Prueba del teorema de Densidad.

En la región $\sigma > 1$ tenemos que es cierta la representación de $L(s,\chi)$ como producto de Euler, por tanto

$$1/L(s,\chi) = \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\chi(p)p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\chi(n)n^{-s},$$

donde $\mu(n)$ es la función de Möbius. Así, en esa región definimos la serie de Dirichlet $M(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$. Por ser la inversa de $L(s,\chi)$, tiene extensión meromorfa cumpliendo $L(s,\chi)M(s,\chi) = 1$ para todo $s \in \mathbb{C}$. Tengamos ahora en cuenta, para cierto $X > 0$ grande, la función $M_X(s,\chi) = \sum_{n\le X}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$. Multiplicando las series obtenemos la ecuación

$$L(s,\chi)M_X(s,\chi) = 1 + D(s,\chi), \tag{3.26}$$

donde $D(s,\chi) = \sum_{n>X} a_n\chi(n)n^{-s}$ con $a_n = \sum_{d|n,d\le X}\mu(d)$ (luego $|a_n| \le d(n)$). Como M_X es una aproximación de M, vemos que $LM_X \approx 1$, y por tanto $|D(s,\chi)|$ va a ser pequeña. Imaginemos que la ecuación (3.26) siguiese siendo válida en $1/2 \le \sigma \le 1$. Entonces si existiese un cero ν de $L(s,\chi)$ en esta zona, tendríamos que $L(\nu,\chi)M_X(\nu,\chi) = 0$, luego $|D(\nu,\chi)| = 1$. Pensando que al no estar en las cercanía de un cero M_X sería una buena aproximación de M, habríamos encontrado una forma de acotar el número de ceros: Viendo las veces que $|D(\nu,\chi)|$ puede ser grande.

Esta idea se puede llevar a la práctica consiguiendo una expresión adecuada para la función $L(s,\chi)M_X(s,\chi)$ en el rango $1/2 \le \sigma \le 1$, de la siguiente manera: Sea $Y \ge X$, aplicamos el lema A.7 a (3.26), obteniendo

$$e^{-1/Y}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi(n)n^{-s}e^{-n/Y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}L(s+w,\chi)M_X(s+w,\chi)\Gamma(w)Y^w dw. \tag{3.27}$$

Ahora, utilizando el teorema de los residuos sobre el rectángulo de vértices $1/2-\sigma \pm iR$, $2 \pm iR$ nos aparece el residuo $L(s,\chi)M(s,\chi)$, debido a que Γ tiene un polo simple en cero. Si además χ es principal, y sólo en ese caso, L tiene un polo simple en uno y nos aparece el residuo $\phi(q)q^{-1}\Gamma(1-s)M_X(1,\chi)$ (pues $L(s,\chi) = \prod_{p|q}(1-p^{-s})\zeta(s)$). Haciendo R tender a infinito desaparecen las integrales horizontales por (A.15), y (3.27) se transforma en

$$L(s,\chi)M_X(s,\chi) = \tag{3.28}$$

$$= e^{-1/Y} + \sum_{n>X} a_n\chi(n)n^{-s}e^{-n/Y} - \varepsilon(\chi)\phi(q)q^{-1}\Gamma(1-s)M_X(1,\chi)Y^{1-s} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} L(1/2+it+iu,\chi)M_X(1/2+it+iu,\chi)\Gamma(1/2-\sigma+iu)Y^{1/2-\sigma+iu}du,$$

donde $\varepsilon(\chi)$ es uno o cero dependiendo de si χ es principal o no.

En lo que sigue vamos a coger $2 \leq X \leq Y \leq (qT)^M$ con $M > 0$ una cierta constante. Ahora consideramos (3.28) con $s = \nu = \beta + i\gamma$ cero de la función $L(s,\chi)$. El término con $\varepsilon(\chi)$ sólo va a aparecer cuando χ es principal, y en este caso por el (A.15) tenemos que si $|\gamma| \gg \log qT$ entonces

$$\Gamma(1-\nu)M_X(1,\chi)Y^{1-\nu} \leq 1/6,$$

luego el término con $\varepsilon(\chi)$ será $\leq 1/6$ excepto para a lo sumo $O((\log qT)^2)$ ceros (teniendo en cuenta que $N(1/2,T,\chi) \ll T\log qT$ para cada χ). Como este número de ceros excepcionales no va a afectar a nuestra cota, consideramos sólo los demás ceros. Para estos por tanto tenemos, tomando Y tal que $e^{-1/Y} \leq 5/6$, que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\right| + \left|\sum_{n>X}\right| \geq 4/6, \tag{3.29}$$

donde la suma y la integral son las que aparecen en (3.28). Para Y suficientemente grande $\sum_{n>Y^2} d(n)e^{-n/Y} \leq 1/6$, y otra vez por (A.15) tomando $Z = B\log qT$ con B cierta constante tenemos que el valor absoluto de la integral de (3.28) en el rango $[Z,\infty]$ es $\leq 1/6$. Por tanto podemos reducir (3.29) a decir que todo cero de $L(s,\chi)$ (salvo los excepcionales) cumple que

$$\left|\sum_{X<n\leq Y^2} a_n\chi(n)n^{-\nu}e^{-n/y}\right| \geq 1/6 \tag{3.30}$$

o

$$\int_{-Z}^{Z}\left|L(\frac{1}{2}+i\gamma+iu,\chi)M_X(\frac{1}{2}+i\gamma+iu,\chi)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta+iu)Y^{1/2-\beta+iu}\right|du \geq \frac{1}{6}. \tag{3.31}$$

Ahora para ver que esto no puede ocurrir para muchos ceros utilizaremos los teoremas 3.17 y 3.19. Para poder hacerlo necesitamos cierto espaciamiento en los ceros de cada función. Pero sabemos que

$$N(1/2,t+1,\chi) - N(1/2,t,\chi) \ll \log qt. \tag{3.32}$$

Teniendo en cuenta esto, consideramos para cada carácter χ el subconjunto U_χ de los ceros de $L(s,\chi)$, definido de la siguiente manera: $\nu = \beta + i\gamma$ cero de $L(s,\chi)$ está en U_χ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{Z}$, $|\lambda| \leq T/2$ tal que $2\lambda(3Z) \leq \gamma \leq (2\lambda+1)(3Z)$, $\beta \geq \sigma$ y no hay otro cero de $L(s,\chi)$ con parte imaginaria entre $2\lambda(3Z)$ y γ. De esta forma por (3.32) vemos que

$$N(\sigma,T,\chi) \ll |U_\chi| (\log qT)^2.$$

Luego considerando $U = \bigcup_\chi U_\chi$ tenemos que

$$\sum_\chi N(\sigma,T,\chi) \ll |U| (\log qT)^2. \tag{3.33}$$

Además, para cada χ, cualesquiera dos elementos distintos $\nu_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ y $\nu_2 = \beta_2 + i\gamma_2$ en U_χ cumplen que $|\gamma_2 - \gamma_1| \geq 3Z$. Para todo carácter χ, la función $L(s,\chi)$ tiene los mismos ceros con $\sigma \geq 1/2$ que la función $L(s,\chi^*)$. Así, a partir de ahora vamos a tratar sólo con χ^* (pues el teorema 3.19 lo hemos obtenido para χ^*). Ahora consideramos $U = U_1 \cup U_2$, donde en U_1 están los elementos de U cumpliendo (3.30) y en U_2 los que cumplen (3.31). Vamos a acotar $|U_1|$ y $|U_2|$. Dividimos la suma de (3.30) en $O(\log Y^2) = O(\log qT)$ intervalos diádicos.

Considerando un cero ν, para cada carácter χ^* cogemos la suma sobre el intervalo diádico que es máxima. Por el principio del palomar está claro que existe un intervalo diádico $[A, 2A]$ que es el máximo para al menos $|U_1| (\log qT)^{-1}$ caracteres, y como la suma de las sumas sobre cada intervalo diádico es mayor o igual que $1/6$ deducimos que

$$\left| \sum_{A \leq n \leq 2A} a_n \chi^*(n) n^{-\nu} e^{-n/y} \right| \gg (\log qT)^{-1}$$

para más de $|U_1| (\log qT)^{-1}$ caracteres. Por tanto

$$\sum_\chi \sum_{\nu \in U_\chi} \left| \sum_{A \leq n \leq 2A} a_n \chi^*(n) n^{-\nu} e^{-n/y} \right|^2 \gg |U_1| (\log qT)^{-3}. \tag{3.34}$$

Por el teorema 3.17 la parte izquierda de (3.34) es

$$\ll (A + qT) \log A \sum_{A \leq n \leq 2A} |a_n|^2 n^{-2\sigma} e^{-2n/y} (1 + \log \frac{\log 2A}{\log 2n}) \ll$$

$$\ll (A^{2-2\sigma}e^{-2A/Y} + qTA^{1-2\sigma})(\log A)^4 \ll (Y^{2-2\sigma} + qTX^{1-2\sigma})(\log qT)^4.$$

Por tanto

$$|U_1| \ll (Y^{2-2\sigma} + qTX^{1-2\sigma})(\log qT)^7. \tag{3.35}$$

Vamos ahora con $|U_2|$. Podemos asumir que $\sigma \geq 1/2 + (\log qT)^{-1}$, pues más a la izquierda la cota que obtenemos en nuestro teorema principal es trivial (sabemos que $N(1/2, \chi^*, T) \ll T \log qT$). Como

$$\int_{-Z}^{Z} |\Gamma(1/2 - \beta + iu)|\, du = \int_{-Z}^{Z} \left| \frac{\Gamma(3/2 - \beta + iu)}{1/2 - \beta + iu} \right| du \ll$$

$$\ll \int_{-Z}^{Z} \frac{du}{((1/2 - \beta) + u^2)^{1/2}} \ll \log qT$$

tenemos que para cada cero $\nu = \beta + i\gamma$ existe $\widetilde{\gamma}$ tal que $|\gamma - \widetilde{\gamma}| \leq Z$ y

$$|L(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*) M_X(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*)| \gg Y^{\sigma - 1/2}(\log qT)^{-1}. \tag{3.36}$$

Elevando esta ecuación 4/3, sumando sobre $\nu \in U_2$ y usando Hölder tenemos

$$|U_2| \frac{Y^{\frac{4}{3}\sigma - \frac{2}{3}}}{(\log qT)^{\frac{4}{3}}} \ll \left(\sum_{\chi} \sum_{\nu} \left| L(\frac{1}{2} + i\widetilde{\gamma}, \chi^*) \right|^4 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\chi} \sum_{\nu} \left| M_X(\frac{1}{2} + i\widetilde{\gamma}, \chi^*) \right|^2 \right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3.37}$$

Como $\left|\widetilde{\gamma} - \widetilde{\gamma'}\right| \geq Z$ para cualesquiera $\nu = \beta + i\gamma$ y $\nu' = \beta' + i\gamma'$ elementos distintos de U_χ, aplicando el corolario 3.17 a la suma con M_X y el teorema 3.19 a la suma con L, la parte derecha de (3.37) es

$$\ll \left(qT(\log qT)^4\right)^{1/3} \left((X + qT) \log qT \sum_{n \leq X} n^{-2\sigma} (\log 2X) \right)^{2/3} \ll$$

$$\ll (qT)^{1/3}(X + qT)^{2/3}(\log qT)^3.$$

Luego finalmente

$$|U_2| \ll Y^{-4/3(\sigma - 1/2)}(qT + (qT)^{1/3}X^{2/3})(\log qT)^{3+4/3}. \tag{3.38}$$

Ahora, como $|U| \leq |U_1| + |U_2|$, tomando $Y = (qT)^{3/(4-2\sigma)}$ y $X = qT$ por (3.38), (3.35) y (3.33) demostramos (3.1). Ahora vamos a cambiar nuestra forma de actuar para obtener (3.2). Aplicando el teorema 3.18 sobre (3.34) tenemos

$$|U_1|(\log qT)^{-3} \ll (A + |U_1| q^{1/2}T^{1/2}\log qT)A^{1-2\sigma}(\log A)^4 e^{-A/Y} \ll$$

$$\ll Y^{2-2\sigma}(\log qT)^4 + |U_1| X^{1-2\sigma}q^{1/2}T^{1/2}(\log qT)^5,$$

luego si $X^{1-2\sigma}q^{1/2}T^{1/2}(\log qT)^8$ es una constante suficientemente pequeña deducimos que

$$|U_1| \ll Y^{2-2\sigma}(\log qT)^7. \tag{3.39}$$

Por (3.36) tenemos que, fijando $K > 0$, todo $\widetilde{\gamma}$ asociado a un elemento de U_2 cumple

$$|L(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*)| \gg K \tag{3.40}$$

o

$$|M_X(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*)| \gg Y^{\sigma-1/2}K^{-1}(\log qT)^{-1}. \tag{3.41}$$

Así, escribimos $U_2 = U_{21} \cup U_{22}$ donde en U_{21} y en U_{22} están los elementos $\nu = \beta + i\gamma$ tal que $\widetilde{\gamma}$ cumple (3.40) y (3.41) respectivamente. Por el teorema 3.19

$$|U_{21}| K^4 \ll \sum_{\chi} \sum_{\nu \in U_\chi} |L(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*)|^4 \ll (\log qT)^5 qT,$$

luego

$$|U_{21}| \ll qTK^{-4}(\log qT)^5. \tag{3.42}$$

Y por el teorema 3.18

$$|U_{22}| Y^{2\sigma-1}K^{-2}(\log qT)^{-2} \ll \sum_{\chi} \sum_{\nu \in U_\chi} |M_X(1/2 + i\widetilde{\gamma}, \chi^*)|^2 \ll$$

$$\ll (X + |U_{22}| q^{1/2}T^{1/2}(\log qT)) \sum_{n \le X} n^{-1},$$

luego si $q^{1/2}T^{1/2}K^2Y^{1-2\sigma}(\log qT)^4$ es una constante suficientemente pequeña entonces

$$|U_{22}| \ll XK^2Y^{1-2\sigma}(\log qT)^3. \tag{3.43}$$

Tomando $X^{2\sigma-1} \asymp (qT)^{1/2}(\log qT)^8$ y $Y^{2\sigma-1} \asymp (qT)^{1/2}K^2(\log qT)^4$ por (3.39), (3.42) y (3.43) tenemos que la cota óptima para $|U_1| + |U_{21}| + |U_{22}|$ se obtiene con $K = (qT)^{(3\sigma-2)/(4\sigma)}$, y por (3.33) demostramos (3.2). $\square$

3.6. Notas

En este capítulo hemos seguido con algunos cambios la exposición de H.L. Montgomery en [11]: Hemos simplificado la prueba del teorema 3.11. En vez de usar la ecuación funcional aproximada de Lavrik a la que hace referencia Montgomery hemos demostrado el teorema 3.20 y a partir de ahí hemos derivado una cota en el teorema 3.21.

Apéndice A

Resultados básicos

A.1. Métodos de sumación

A lo largo de todo el texto usamos algunos métodos de sumación bien conocidos. Aquí los enunciamos:

Lema A.1. *(Sumación por partes) Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones de números complejos y sea* $S_m = \sum_{n=1}^{m} b_n$*. Entonces:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N S_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n.$$

Además, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es real monótona decreciente y positiva*

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right| \leq a_1 \sup_{1 \leq m \leq N} |S_m| .$$

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es real monótona creciente y positiva*

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right| \leq 2 a_N \sup_{1 \leq m \leq N} |S_m|$$

Lema A.2. *(Lema de Abel) Sea* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos y* $g : [1, \infty] \to \mathbb{C}$ *teniendo derivada continua y* $S(x) = \sum_{n \leq x} b_n$*. Entonces:*

$$\sum_{n \leq x} b_n g(n) = S(x) g(x) - \int_1^x S(u) g'(u) du$$

Lema A.3. *(Fórmula de Poisson) Sea f una función de la clase de Schwartz. Entonces*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

donde $\widehat{f}(x)$ es la transformada de Fourier de f

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e(-xt)dt.$$

A.2. Funciones aritméticas

Se llama función aritmética a una función de los naturales en los complejos

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

Si f tiene como mucho crecimiento polinomial, le podemos asociar la serie generatriz de Dirichlet

$$\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}.$$

No es difícil ver que $\zeta_f(s)$ determina f de forma única. Las funciones aritméticas forman un álgebra (el álgebra de Dirichlet) definiendo la adición de forma natural y el producto dado por la convolución de Dirichlet:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{A.1}$$

Esta multiplicación en el álgebra corresponde al producto de las series asociadas:

$$\zeta_f(s)\zeta_g(s) = \zeta_{f*g}(s). \tag{A.2}$$

Si f además es multiplicativa (i.e., $f(mn) = f(m)f(n)$ si $(m, n) = 1$), entonces tenemos el producto

$$\zeta_f(s) = \prod_p (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \dots), \tag{A.3}$$

y si f y g son multiplicativas entonces $f * g$ también. Si f es completamente multiplicativa deducimos de (A.3) que

$$\zeta_f(s) = \prod_p (1 - f(p)p^{-s})^{-1} \tag{A.4}$$

y de aquí deducimos que

$$\zeta_{\mu f}(s) = \zeta_f(s)^{-1}, \tag{A.5}$$

donde μ es la función de Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ con todos primos distintos} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{A.6}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $d(n)$ el número de divisores de n. Podemos obtener la siguiente cota para el promedio de la función $d^2(n)$:

Lema A.4. *Sea $x > 0$. Entonces*

$$\sum_{n \le x} d(n)^2 \le x(\log x)^3.$$

Demostración.

$$\sum_{n\le x} d(n)^2 = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\sum_{k|n} 1 = \sum_{d,k\le x} \lfloor x/mcm(k,d)\rfloor \le x \sum_{k\le x}\frac{1}{k}\sum_{d\le x}\frac{(k,d)}{d}.$$

Pero agrupando los d tal que $(d,k) = R$ tenemos

$$\sum_{d\le x}\frac{(k,d)}{d} = \sum_{R|k}\sum_{d'\le x/R}\frac{1}{d'} \le \sum_{R|k}\log\frac{x}{R}.$$

Luego

$$x^{-1}\sum_{n\le x} d(n)^2 \le \sum_{k\le x}\frac{1}{k}\sum_{R|k}\log\frac{x}{R} \le \sum_{R\le x}\frac{1}{R}\log\frac{x}{R}\sum_{k'\le x/R}\frac{1}{k'},$$

de donde deducimos el resultado. $\square$

A.3. La función gamma de Euler

La función gamma se define en $\Re s > 0$ por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{A.7}$$

Como primera propiedad, integrando por partes obtenemos que

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{A.8}$$

y como $\Gamma(0) = 1$, vemos que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además esta ecuación nos da una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ de la función $\Gamma(s)$ con polos simples únicamente en los puntos $s = 0, -1, -2, \ldots$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(t) = (1 - t/n)^n g_n(t)$, donde $g_n(t)$ es la función característica del intervalo $[0, n]$. $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones que convergen a e^{-t}. Así, por el teorema de convergencia monótona vemos que se cumple

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - t/n)^n t^{s-1} dt.$$

Haciendo el cambio $h = t/n$ e integrando por partes repetidamente llegamos a que la expresión infinitesimal de Euler de $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n)} \tag{A.9}$$

Sea $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, podemos escribir $n^s = e^{s(\log n - H_n)} e^{sH_n}$. Como $H_n - \log n$ converge a γ cuando n tiende a infinito, deducimos de (A.9) la fórmula de Weierstrass:

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}. \tag{A.10}$$

Se puede probar que el producto converge a un número distinto de cero para todo $s \in \mathbb{C}$ que no sea un polo de $\Gamma(s)$. Esto nos muestra en especial que $\Gamma(s)$ no se anula en ningún punto. Además, despejando $\Gamma(s)$ y aplicando derivada logarítmica deducimos que

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \ll \log|s| \tag{A.11}$$

uniformemente si s está a distancia mayor o igual que $1/4$ de cualquier polo de $\Gamma(s)$. También podemos concluir, usando (A.8) y (A.10) que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s} \tag{A.12}$$

si comparamos lo que obtenemos en el lado derecho con el producto de Hadamard para la función de la derecha proveniente del teorema (1.2) (los ceros de $\operatorname{sen}\pi s$ son los enteros). También se cumple la llamada formula de duplicación de Legrende:

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s). \tag{A.13}$$

Se puede probar por cambios de variable adecuados en (A.7).

Por último tenemos la fórmula aproximada de Stirling para $-\pi+\varepsilon < \arg s < \pi - \varepsilon$, que también se puede obtener de (A.10) pero nosotros no lo probaremos:

$$\log\Gamma(s) = (s-\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(|s|^{-1}), \tag{A.14}$$

donde la constante implícita depende de ε. De esta ecuación deducimos que para $t>0$

$$\Gamma(\sigma+it) = (2\pi)^{1/2}t^{\sigma-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}t}\left(\frac{t}{e}\right)^{it}\left\{1+O(t^{-1})\right\}. \tag{A.15}$$

A.4. La transformada de Mellin

Lema A.5. *Sea $f(x)$ una función de variación acotada en intervalos finitos, y $f(x)x^{\sigma-1}\in L^1(0,\infty)$. Entonces*

$$F(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx,$$

se denomina transformada de Mellin de $f(x)$. Además, para esta función tenemos la formula de inversión

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = (2\pi i)^{-1}\lim_{T\to\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}F(s)x^{-s}ds. \tag{A.16}$$

Lema A.6. *Sean $\alpha>0$ y $\beta\in\mathbb{R}$. Si F,G son las transformadas de Mellin de las funciones f,g continuas, con $f(x)x^{\sigma-1}, g(x)x^{\beta-\sigma-1}\in L^1(0,\infty)$, entonces se cumple la relación*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(u)G(\beta-u)\alpha^{-u}du = \int_0^\infty f(\alpha y)g(y)y^{\beta-1}dy.$$

Demostración. Consideramos la función

$$h(x) = \int_0^\infty f(xy)g(y)y^{\beta-1}dy.$$

Su transformada de Mellin es

$$\begin{aligned}\int_0^\infty h(x)x^{s-1}dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(xy)g(y)y^{\beta-1}x^{s-1}dxdy \\ &= \int_0^\infty g(y)y^{\beta-s-1}dy \int_0^\infty f(v)v^{s-1}dv = F(s)G(\beta-s)\end{aligned} \tag{A.17}$$

habiendo hecho el cambio $x = v/y$. Por tanto, la antitransformada de la función $F(s)G(\beta - s)$ debe ser $h(\alpha)$, lo que es equivalente al enunciado del lema. □

Lema A.7. *Sea $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet que converge absolutamente en $\sigma \geq \sigma_0$. Sea f una función de variación acotada en intervalos finitos, continua y acotada, y $f(x)x^{\sigma-1} \in L(0,\infty)$ para $\sigma \geq \sigma_0$. Entonces, para todo $N > 0$ y $c \geq \sigma_0$ tenemos que*

$$\sum_{n=1} a_n n^{-s} f(n/N) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s+w)F(w)N^w dw, \tag{A.18}$$

donde F es la transformada de Mellin de f.

Demostración. Por (A.16) tenemos

$$f(n/N) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)(n/N)^{-w}dw.$$

Sustituimos esto en la parte izquierda de (A.18), y metemos dentro el sumatorio por convergencia uniforme de la serie (f es acotada). □

Lema A.8. *Sea χ un carácter módulo q, y sea $s = \sigma + it$ con $1/2 \geq \sigma \geq 0$. Denotando $\tau = |t| + 2$, tenemos*

$$\sum_{n \leq N} (1 - n/N)\chi(n)n^{-s} \ll (q\tau)^{1/2} \log q\tau + \varepsilon(\chi)N\tau^{-2},$$

donde $\varepsilon(\chi)$ es uno o cero si χ es o no principal.

Demostración. Primero lo probaremos con $\sigma = 0$. Sea $f(x)$ la función definida como $1-x$ si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ en el resto. Observamos que la transformada de Mellin de esta función es $s^{-1}(s+1)^{-1}$. Por tanto, aplicando la fórmula de inversión de la transformada de Mellin

$$\sum_{n\leq N}(1-n/N)\chi(n)n^{-it} = (2\pi i)^{-1}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} L(w+it,\chi)N^w w^{-1}(w+1)^{-1}dw$$

Ahora cambiamos la abcisa de integración de 2 a $b = -(\log q\tau)^{-1}$. Al hacerlo pasamos un polo en $w = 0$ con residuo $L(it,\chi)$, y si χ es principal tenemos otro polo en $w = 1-it$ con residuo $\ll N\tau^{-2}$. Por tanto

$$\sum_{n\leq N}(1-\frac{n}{N})\chi(n)n^{-it} \ll \varepsilon(\chi)N\tau^{-2} + |L(it,\chi)| + \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\left|\frac{L(w+it,\chi)}{w(w+1)}\right||dw|\,. \tag{A.19}$$

Ahora tenemos en cuenta que si el conductor de χ es χ_1 de módulo q_1, entonces

$$L(b+iu+it,\chi) =$$
$$= \prod_{p|q/q_1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^{b+iu+it}}\right)L(b+iu+it,\chi_1) \ll d(q/q_1)\left|L(b+iu+it,\chi_1)\right|.$$

Además, por la ecuación funcional de $L(s,\chi_1)$ y teniendo en cuenta que $\Gamma(1/2(s+\mathfrak{a}))/\Gamma(1/2(1-s+\mathfrak{a})) \ll 1$ (se ve usando la fórmula de Stirling), vemos que

$$L(b+iu+it,\chi_1) \ll (q_1\tau)^{1/2}\left|L(1-b-iu-it,\overline{\chi}_1)\right|.$$

Sustituyendo estas cotas obtenemos que la parte derecha de (A.19) es

$$\ll \varepsilon(\chi)N\tau^{-2} + (q\tau)^{1/2}\left|L(1-it,\overline{\chi}_1)\right| + (q\tau)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{L(1-b-i(u+t),\chi_1)}{(b+iu)(1+b+iu)}\right|du,$$

y usando Cauchy-Schwarz esto tenemos que la integral en esta cota es

$$\ll \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{b^2+u^2}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|L(1-b-i(u+t),\chi_1)|^2}{(1+b)^2+u^2}du\right)^{1/2}. \tag{A.20}$$

$$\ll (\log q\tau)^{1/2}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+m^2}\int_m^{m+1}\left|L(1-b-i(u+t),\chi_1)\right|^2du\right)^{1/2},$$

y como por el lema 3.12

$$\begin{aligned}\int_m^{m+1} |L(1-b-i(u+t),\chi_1)|^2\,du &\leq 2\int_{-2}^{2} |\zeta(1-b-iu)|^2\,du \\ &\ll \int \frac{du}{b^2+u^2}du,\end{aligned}$$

obtenemos el resultado.

El caso con $\sigma > 0$ se haría de la misma forma pero tomando

$$b = -\sigma - 1/2(\log q\tau)^{-1}.$$

$\square$

Bibliografía

[1] F. Chamizo. *Las Sumas Trigonométricas en la Teoría de Números*, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid 1992.

[2] F. Chamizo. *Métodos Analíticos en Teoría de Números*, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid 2002.

[3] H. Davenport. *Multiplicative number theory (2nd ed.) Graduate texts in Mathematics 74.* Springer, 1980.

[4] G.L. Dirichlet's *Werke,* I, pp. 313-342.

[5] G.L. Dirichlet's *Werke,* I, pp. 411-496.

[6] W.J. Ellison and M. Mendès-France. *Les nombres premiers*, Publications de l'institute de mathématique de l'université de Nancago IX Hermann. Paris 1975.

[7] K. Ford. Vinogradov's integral and bounds for the Riemann Zeta Function. *Proc. London Math. Soc.* **3** 85 (2002) 565-633.

[8] A. Ivić. *The Riemann Zeta-Function, Theory and Applications*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2003.

[9] H. Iwaniec. *Introduction to The Prime Number Theory.* Rutgers University, Spring 1994.

[10] A.A. Karatsuba. *Fundamentos de la teoría analítica de los números.* Editorial Mir, 1979.

[11] H.L. Montgomery. *Topics in Multiplicative Number Theory.* LNM 227, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[12] H.L. Montgomery. *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, Expository lectures from the NSF-CBMS regional conference held at Kansas State University, Manhattan, May 22-25, 1990.

[13] B. Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie,* November 1859.

[14] C.L. Siegel. *Acta Arithmetica,* **1**, 83-86 (1935).

[15] E.C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function, Second Edition* (D. R. Heat-Brown, ed.), Oxford University Press, Oxford, 1986.

[16] R.C. Vaughan. *The Hardy-Littlewood Method,* Cambridge Tract 80, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[17] A. Weil. *Number Theory: an approach through history; From Hammurapi to Legendre.* Boston; Basel; Stuttgart: Birkhäuser, 1983.

[18] T.D. Wooley. On Vinogradov's mean value theorem, II, *Michigan Math. J.* **40** (1993), 175-180.