- El método del círculo es una herramienta analítica que sirve para solucionar algunos problemas aditivos de Teoría de Números.

- Apareció en 1918

$\downarrow$

Hardy y Ramanujan

$\downarrow$

problema de las particiones

- Hardy y Littlewood

$\downarrow$

Problema de Waring

Teorema de Vinogradov:
Todo número N impar suficientemente grande se puede expresar como suma de tres primos, es decir, si $N \geq C$ podemos escribir

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

siendo p_1, p_2 y p_3 números primos.

Sea

$$r_3(N) = \sum_{p_1+p_2+p_3=N} 1$$

con el método del círculo se prueba

$$r_3(N) > CN^2/(\log N)^3$$

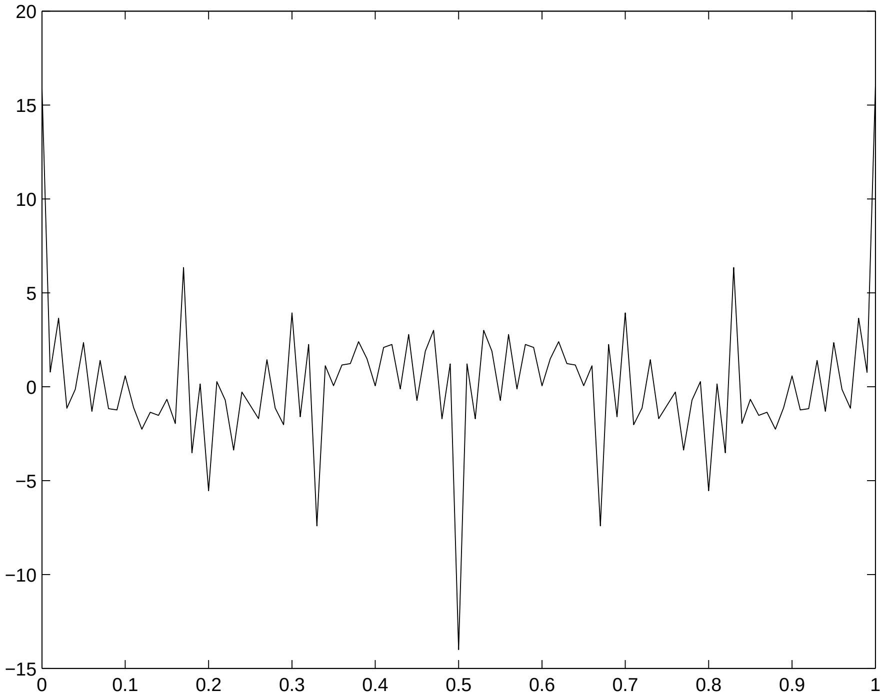
para N impar grande.

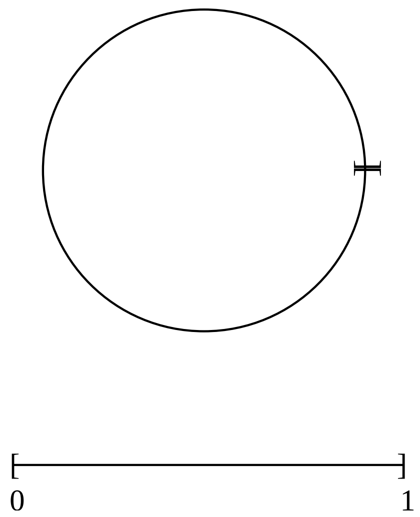
$$r_3(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_p z^p\right)^3 \frac{dz}{z^{N+1}} \longrightarrow$$

$$r_3(N) = \int_0^1 \left(\sum_{p \leq N} e^{2\pi i p x}\right)^3 e^{-2\pi i N x} dx \longrightarrow$$

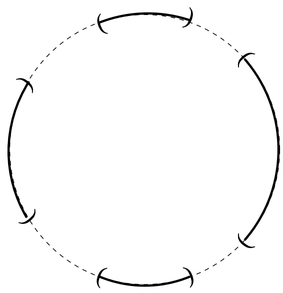
Para obtener información sobre $r_3(N)$ analizaremos las "singularidades" del integrando.

Gráfica de $\mathrm{Re}\sum_{p\le N} e^{2\pi i p x}$




0
1

Apliquemos el método del círculo, dividimos la circunferencia en arcos mayores y arcos menores.



- Arcos mayores $\longrightarrow$ aproximación asintótica

$\downarrow$

puntos "cercanos" a los racionales $\longleftrightarrow$ valores singulares

Los arcos mayores están formados por los puntos x tales que $|x - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qQ}$, (donde q es un número pequeño).

- Arcos menores $\longrightarrow$ conseguimos una cota

$\downarrow$

puntos "lejanos" a los racionales

Una vez que conocemos la contribución de los arcos mayores y de los arcos menores resulta para N impar

$$\mathrm{r}_3(\mathrm{N}) \sim \frac{\mathrm{N}^2}{2\log^3 \mathrm{N}} \prod_{\mathrm{p}|\mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{(\mathrm{p}-1)^2}\right) \prod_{\mathrm{p}\nmid\mathrm{N}} \left(1 + \frac{1}{(\mathrm{p}-1)^3}\right).$$

- Los productos están entre dos constantes positivas, por tanto $\mathrm{r}_3(\mathrm{N})$ es mayor que cero y esto quiere decir que existe al menos una forma de representar N como suma de tres primos.

- Si N fuera par esta fórmula “no funciona”.

"Todo número par mayor que dos se puede representar como suma de dos primos"

(C.Goldbach, 1742)

- La conjetura de Goldbach continúa siendo hoy en día un problema abierto.

- Su dificultad radica en que al aplicar el método del círculo la contribución de los arcos menores supera al término principal con los conocimientos actuales.

- No obstante, con el método del círculo se ha demostrado que casi todo número par es suma de dos primos.

- El método del círculo también se ha aplicado para hallar una fórmula asintótica para $\mathrm{r_k(N)}$, el número de formas en que podemos representar un entero N suficientemente grande como suma de k cuadrados. Por ejemplo si k es múltiplo de 8

$$\mathrm{r_k(N) \sim C_k N^{k/2-1} \sum_{d|N} (-1)^{N+N/d} d^{1-k/2}}$$

- La fórmula que se obtiene para $\mathrm{k} = 8$ es ¡exacta!.

- Otro problema muy relacionado con el método del círculo es el problema de Waring.

- Consiste en estimar G(k), el mínimo s tal que todo número natural suficientemente grande se puede escribir como suma de s potencias k-ésimas de números naturales.

- Éste también sigue siendo un problema abierto y las mejores estimaciones de G(k) que se conocen han sido obtenidas con el método del círculo.

"Todo número par mayor que dos se puede representar como suma de dos primos"

(C.Goldbach, 1742)

- La conjetura de Goldbach continúa siendo hoy en día un problema abierto.

- No obstante, con el método del círculo se ha demostrado que casi todo número par es suma de dos primos.

- El método del círculo también se ha aplicado para hallar una fórmula asintótica para $r_k(N)$, el número de formas en que podemos representar un entero N suficientemente grande como suma de k cuadrados.

- Otro problema muy relacionado con el método del círculo es el problema de Waring.

- Consiste en estimar G(k), el mínimo s tal que todo número natural suficientemente grande se puede escribir como suma de s potencias k-ésimas de números naturales.