



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# La evaluación de algunas series de la teoría de números

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

*Autor:* Rubén Mariño Fernández

*Tutor:* Fernando Chamizo Lorente

Curso 2023-2024

## Resumen

El objetivo del trabajo es demostrar una famosa fórmula de Ramanujan estrechamente relacionada con la evaluación  $\theta(0, e^{-\pi})$ , donde  $\theta$  es la función theta de Jacobi. De esta forma, empezaremos estudiando las propiedades de  $\theta$ , entre las que destaca la fórmula del triple producto, con la que podremos deducir dos importantes consecuencias: la fórmula de transformación y un acercamiento preliminar al valor de  $\theta^2(0, q)$  en forma de serie de Lambert, ambos con aplicaciones curiosas más allá de nuestra motivación central.

En particular, de los dos resultados anteriores, veremos que el primero nos abrirá el camino hacia la extensión meromorfa a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  de la función zeta de Riemann, mientras que el segundo nos permitirá dar de manera explícita el número de representaciones de un natural como suma de dos cuadrados.

Centrándonos de nuevo en nuestro propósito, probaremos la fórmula límite de Kronecker que, evaluada en  $Q(x, y) = x^2 + y^2$ , será uno de los dos pilares en los que nos apoyaremos para reducir el teorema de Ramanujan al cálculo de una integral con técnicas de variable compleja. La otra clave para esto, por otro lado, consistirá en sustituir  $q = e^{-\pi}$  en la serie de Lambert para  $\theta^2(0, q)$ .

Para acabar, aparecen dos anexos: un estudio de las funciones zeta de Riemann y Gamma, cuyas propiedades usaremos recurrentemente a lo largo del trabajo, y la prueba de la ley de reciprocidad cuadrática, que obtendremos, de manera sorprendente, a partir de la fórmula de transformación.

## Abstract

The objective of this paper is to demonstrate a famous formula by Ramanujan closely related to the evaluation  $\theta(0, e^{-\pi})$ , where  $\theta$  is the Jacobi theta function. To this end, we will start by studying the properties of  $\theta$ , among which the triple product formula stands out. With this, we will be able to deduce two important consequences: the transformation formula and a preliminary approach to the value of  $\theta^2(0, q)$  in the form of a Lambert series, both with intriguing applications beyond our central motivation.

In particular, from the two aforementioned results, we will see that the first one will pave the way for the meromorphic extension to  $\mathbb{C} \setminus 1$  of the Riemann zeta function, while the second one will allow us to explicitly provide the number of representations of a natural number as the sum of two squares.

Focusing again on our purpose, we will prove Kronecker limit formula which, evaluated at  $Q(x, y) = x^2 + y^2$ , will be one of the two pillars on which we will rely to reduce Ramanujan's theorem to the calculation of an integral using complex variable techniques. The other key for this, on the other hand, will consist of substituting  $q = e^{-\pi}$  in the Lambert series for  $\theta^2(0, q)$ .

To conclude, two appendices are included: a study of the Riemann zeta and Gamma functions, whose properties we will use recurrently throughout the paper, and the proof of the quadratic reciprocity law, which we will surprisingly obtain from the transformation formula.

# Índice

<b>1. La función theta de Jacobi</b>	<b>1</b>
1.1. Propiedades generales . . . . .	1
1.2. La fórmula del triple producto . . . . .	2
1.3. La fórmula de transformación . . . . .	6
1.4. Un valor especial . . . . .	8
<b>2. Algunas aplicaciones</b>	<b>12</b>
2.1. Naturales como suma de cuadrados . . . . .	12
2.2. La simetría de la función zeta . . . . .	14
<b>3. La fórmula límite de Kronecker</b>	<b>18</b>
3.1. La prueba de la fórmula límite . . . . .	18
3.2. Conexión entre las funciones eta y theta . . . . .	27
<b>4. Una fórmula de Ramanujan</b>	<b>29</b>
4.1. Tras los pasos de Ramanujan . . . . .	30
<b>Referencias</b>	<b>40</b>
<b>A. Las funciones zeta y Gamma</b>	<b>42</b>
A.1. La constante de Euler-Mascheroni . . . . .	42
A.2. La función zeta de Riemann . . . . .	42
A.3. La función Gamma . . . . .	45
<b>B. La ley de reciprocidad cuadrática</b>	<b>50</b>

## 1. La función theta de Jacobi

El objetivo de nuestro trabajo es probar una fórmula de Ramanujan que depende, en última instancia, de la evaluación en un punto especial de la *función theta de Jacobi*, cuya definición viene dada por la serie  $\theta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz}$ , con  $z \in \mathbb{C}$  y  $|q| < 1$ . Consideraremos aquí que  $q$  es un parámetro y  $z$  es la variable, por lo que cuando nos refiramos a la derivada de  $\theta$ , a sus ceros, a su holomorfía o a cualquier otra propiedad, debemos entender estos conceptos para  $f(z) = \theta(z, q)$ , con  $q$  fijado. Por razones que aparecerán en breve, se suele escribir  $q = e^{\pi i \tau}$ , con  $\Im(\tau) > 0$ , y se define  $\omega = \frac{1+\tau}{2}$ . Cabe observar que hay cierta ambigüedad en la determinación de  $\tau$  y  $\omega$  porque  $\tau$  y  $\tau + 2k$  dan el mismo  $q$ , pero es irrelevante en lo sucesivo.

### 1.1. Propiedades generales

Como siempre que nos enfrentamos a una nueva función compleja, lo primero que haremos con  $\theta$  es estudiar su regularidad:

**Lema 1** *La serie que define  $\theta(z, q)$  converge en todo el plano a una función (de  $z$ ) entera.*

**Demostración** Para empezar, sabemos que

$$\theta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} e^{-2\pi ikz} = 1 + F(z) + F(-z).$$

De esta forma, basta probar que  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  es entera para concluir que  $\theta(z, q)$  también lo es:

1. Las funciones  $f_n(z)$  son enteras  $\forall n \in \mathbb{N}$  por ser exponenciales.
2. Sea  $K \subset \mathbb{C}$  un compacto, entonces  $K$  está acotado, por lo que, en particular, existe una constante  $C$  positiva tal que  $|\Im(z)| < C$  si  $z \in K$ . Esto, junto con el hecho de que  $\Im(\tau)$  es un número fijo mayor que 0, nos permite deducir que, dado  $n \geq \frac{1+2C}{\Im(\tau)}$ ,  $e^{-\pi n(n\Im(\tau)+2\Im(z))} \leq e^{-\pi n}$  para todo  $z \in K$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n(n\Im(\tau)+2\Im(z))} \leq \sum_{n=1}^{\lceil \frac{1+2C}{\Im(\tau)} \rceil} e^{-\pi n(n\Im(\tau)+2\Im(z))} + \sum_{n=\lceil \frac{1+2C}{\Im(\tau)} \rceil}^{\infty} e^{-\pi n} < \infty \text{ si } z \in K.$$

Cabe destacar que en el último paso de nuestra estimación hemos usado que  $\sum_{a=0}^{\infty} e^{-\pi a}$  converge por ser la serie geométrica de razón  $e^{-\pi}$ , cuyo módulo es menor que 1. Con esto queda comprobado, en definitiva, que  $F(z)$  converge absolutamente en compactos  $K \subset \mathbb{C}$ .

Gracias a los dos puntos anteriores, podemos aplicar el criterio M de Weierstrass, que nos asegura que la serie que define  $F(z)$  converge uniformemente sobre compactos  $K \subset \mathbb{C}$ , y por lo tanto puntualmente en todo el plano, dando lugar, según el teorema de convergencia de Weierstrass, a una función entera. ■

Históricamente,  $\theta(z, q)$  surgió en la teoría de *funciones elípticas*, que son funciones meromorfas 1-periódicas con un segundo periodo  $\tau$  complejo. Aunque  $\theta(z, q)$  no es exactamente elíptica, siempre como función en  $z$ , guarda cierta simetría por traslaciones de 1 y  $\tau$ , que es lo que nos motiva a introducir  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \theta(z+1, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi in(z+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} e^{2\pi in} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} = \theta(z, q); \\ \theta(z+\tau, q) &= e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+1)^2 \tau} e^{2\pi i(n+1)z} = q^{-1} e^{-2\pi iz} \theta(z, q). \end{aligned}$$

Por otro lado, hay algunas simetrías que permiten localizar ceros de la función y de su derivada:

$$\begin{aligned}\theta(-z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{-2\pi i n z} = \theta(z, q) \Rightarrow -\theta'(-z, q) = \theta'(z, q) \Rightarrow \theta'(0, q) = 0; \\ \theta\left(\frac{1}{2} - z, q\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{-2\pi i n z} \stackrel{k=-n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2\pi i k z} = \theta\left(\frac{1}{2} + z, q\right) \Rightarrow \\ &-\theta'\left(\frac{1}{2} - z, q\right) = \theta'\left(\frac{1}{2} + z, q\right) \Rightarrow \theta'\left(\frac{1}{2}, q\right) = 0; \\ \theta(\omega + z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + \pi i n(\tau+1) + 2\pi i n z} \stackrel{k=-n-1}{=} e^{-\pi i} e^{-2\pi i z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i k^2 \tau + \pi i k \tau - \pi i k - 2\pi i k z} = \\ &-e^{-2\pi i z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2\pi i k(\omega-1-z)} = -e^{-2\pi i z} \theta(\omega - z, q) \Rightarrow \theta(\omega, q) = -\theta(\omega, q) \Rightarrow \theta(\omega, q) = 0.\end{aligned}$$

Como  $\omega$  es un cero de  $\theta$ , si tenemos en cuenta que  $\theta$  es 1-periódica y que tiene cuasi-periodo  $\tau$ , vemos que  $\theta(\omega + m + n\tau, q) = 0$  para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Más tarde, deduciremos que esos son todos los ceros de la función  $\theta$  y que son simples, pero antes vamos a acabar con las propiedades elementales de  $\theta$  analizando algunos valores especiales de sus derivadas logarítmicas. Para ello, usaremos varias de las igualdades probadas hasta ahora:

$$\begin{aligned}\theta(z + \tau, q) &= q^{-1} e^{-2\pi i z} \theta(z, q) \Rightarrow \log(\theta(z + \tau, q)) = -\pi i \tau - 2\pi i z + \log(\theta(z, q)) \Rightarrow \\ \frac{\theta'(z + \tau, q)}{\theta(z + \tau, q)} &= -2\pi i + \frac{\theta'(z, q)}{\theta(z, q)} \Rightarrow \frac{\theta'(\tau, q)}{\theta(\tau, q)} = -2\pi i \quad \text{y} \quad \frac{\theta'(1/2 + \tau, q)}{\theta(1/2 + \tau, q)} = -2\pi i; \\ \theta(z + \omega, q) &= -e^{-2\pi i z} \theta(-z + \omega, q) = -e^{-2\pi i z} \theta(-z + \omega + 1, q) \Rightarrow \log(\theta(z + \omega, q)) = \\ \pi i - 2\pi i z + \log(\theta(-z + \omega + 1, q)) &\Rightarrow \frac{\theta'(z + \omega, q)}{\theta(z + \omega, q)} = -2\pi i - \frac{\theta'(-z + \omega + 1, q)}{\theta(-z + \omega + 1, q)} \Rightarrow \\ \frac{\theta'(1/4 + \omega, q)}{\theta(1/4 + \omega, q)} + 2\pi i &= -\frac{\theta'(3/4 + \omega, q)}{\theta(3/4 + \omega, q)}.\end{aligned}$$

Tras este primer acercamiento a la función  $\theta$ , ya estamos listos para pasar a estudiar en detalle los tres resultados principales de este capítulo.

## 1.2. La fórmula del triple producto

Empezamos con una sorprendente factorización de  $\theta(z, q)$  como producto infinito, conocida como *fórmula del triple producto de Jacobi*:

**Teorema 1** *La función  $\theta$  admite la expresión*

$$\theta(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1} e^{2\pi i z})(1 + q^{2n-1} e^{-2\pi i z}) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

si  $|q| < 1$ .

Para demostrar la identidad anterior, primero vamos a examinar algunas propiedades de los productos parciales:

**Lema 2** *Sea  $p_m(w) = \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1} w)(1 + q^{2n-1} w^{-1})$  el  $m$ -ésimo producto parcial en (1), renombrando  $w = e^{2\pi i z}$ , tenemos que  $(1 + q^{2m+1} w)p_m(w) = (qw + q^{2m})p_m(q^2 w)$ .*

**Demostración** El caso  $m = 1$  es trivial y se verifica directamente haciendo las cuentas y comprobando que los términos a ambos lados de la igualdad coinciden. Nosotros vamos a demostrar la ecuación funcional para el caso  $m \geq 2$ , tomando como convenio que un producto vacío vale 1:

$$\frac{p_m(q^2w)}{1 + q^{2m+1}w} = (1 + (qw)^{-1}) \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{m-1} (1 + q^{2n+1}w) \prod_{n=2}^m (1 + q^{2n-3}w^{-1}).$$

Para rematar, basta observar que  $qw + q^{2m} = qw(1 + q^{2m-1}w^{-1})$ , y multiplicar lo que ya teníamos por ese término:

$$\begin{aligned} \frac{(qw + q^{2m})p_m(q^2w)}{1 + q^{2m+1}w} &= \frac{qw(1 + q^{2m-1}w^{-1})p_m(q^2w)}{1 + q^{2m+1}w} = \\ \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}) \prod_{n=0}^{m-1} (1 + q^{2n+1}w) \prod_{n=2}^{m+1} (1 + q^{2n-3}w^{-1}) &= \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}w)(1 + q^{2n-1}w^{-1}) = \\ p_m(w) \quad \forall m \geq 2. & \end{aligned}$$

Como  $p_m(w) = p_m(-w)$ , deducimos que los coeficientes de  $w^n$  y  $w^{-n}$  al desarrollar el producto  $p_m(w)$  son iguales, por lo que se le puede dar a  $p_m(w)$  un tratamiento de sumatorio de la forma  $p_m(w) = \lambda_m(0) + \sum_{n=1}^m \lambda_m(n)(w^n + w^{-n})$ . Bajo este contexto, nos interesa estudiar los escalares  $\lambda_m(n)$  con tal de entender mejor  $p_m(w)$ :

**Proposición 1** *Se verifica la recurrencia  $\lambda_m(n) = \frac{q^{2n-1}(1 - q^{2(m-n+1)})}{1 - q^{2(m+n)}} \lambda_m(n-1)$  para todo  $n \in \{1, \dots, m\}$ . Además,  $\lambda_m(m) = q^{m^2} \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n})$ .*

**Demostración** El lema 2 se traduce en la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \lambda_m(0) + \sum_{n=1}^m \lambda_m(n)(w^n + w^{-n}) + q^{2m+1}\lambda_m(0)w + \sum_{n=1}^m q^{2m+1}\lambda_m(n)(w^{n+1} + w^{-n+1}) &= \\ q\lambda_m(0)w + \sum_{n=1}^m q\lambda_m(n)(q^{2n}w^{n+1} + q^{-2n}w^{-n+1}) + q^{2m}\lambda_m(0) + \sum_{n=1}^m q^{2m}\lambda_m(n)(q^{2n}w^n + q^{-2n}w^{-n}). & \end{aligned}$$

Ahora bien, como las dos expresiones son iguales, el coeficiente de  $w^n$  en ambos lados ha de ser el mismo, con lo que completamos ya el primer punto del enunciado:

$$\begin{aligned} \lambda_m(n) + q^{2m+1}\lambda_m(n-1) &= q^{2n-1}\lambda_m(n-1) + q^{2(m+n)}\lambda_m(n) \Rightarrow \\ \lambda_m(n) &= \frac{q^{2n-1}(1 - q^{2(m-n+1)})}{1 - q^{2(m+n)}} \lambda_m(n-1) \quad \forall n \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Por último, vamos a calcular el valor de  $\lambda_m(m)$ :

$$\begin{aligned} p_m(w) = \prod_{n=1}^m (1 + q^{2n-1}w^{-1} + q^{2n-1}w + q^{4n-2}) \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}) &\Rightarrow \lambda_m(m) = \prod_{n=1}^m q^{2n-1} \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}) = \\ q^{\sum_{n=1}^m (2n-1)} \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}) &= q^{m^2} \prod_{n=1}^m (1 - q^{2n}). \end{aligned}$$

La proposición que acabamos de ver nos permite demostrar por inducción que

$$\lambda_m(n) = q^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^{2(m-k)}) \prod_{k=n+1}^m (1 - q^{2(m+k)}) \quad \text{para } n \in \{0, \dots, m\},$$

lo que equivale, tras hacer el cambio de variable  $n = m - c$ , a

$$\lambda_m(m - c) = q^{(m-c)^2} \prod_{a=c+1}^m (1 - q^{2a}) \prod_{a=2m-c+1}^{2m} (1 - q^{2a}) \quad \forall c \in \{0, \dots, m\} :$$

1. El caso base,  $c = 0$ , es trivial que se cumple si tenemos en cuenta la expresión para  $\lambda_m(m)$  que hemos probado en la proposición 1.
2. La hipótesis inductiva es  $\lambda_m(m - c + 1) = q^{(m-c+1)^2} \prod_{a=c}^m (1 - q^{2a}) \prod_{a=2m-c+2}^{2m} (1 - q^{2a})$ , de donde se deduce la expresión esperada para  $\lambda_m(m - c)$ , con  $c \in \{1, \dots, m\}$ , si aplicamos la fórmula recursiva para los coeficientes  $\lambda_m$  obtenida en la proposición 1:

$$\lambda_m(m - c + 1) = \frac{q^{2m-2c+1}(1 - q^{2c})}{1 - q^{2(2m-c+1)}} \lambda_m(m - c) \Rightarrow$$

$$\lambda_m(m - c) = q^{(m-c)^2} \prod_{a=c+1}^m (1 - q^{2a}) \prod_{a=2m-c+1}^{2m} (1 - q^{2a}) \quad \forall c \in \{1, \dots, m\}.$$

Tras el trabajo previo que hemos desarrollado, estamos en condiciones de poder demostrar la fórmula del triple producto para la función  $\theta$  con cierta facilidad:

**Demostración del teorema 1:** tomando límites en  $p_m(w) = \lambda_m(0) + \sum_{n=1}^m \lambda_m(n)(w^n + w^{-n})$ , llegamos a que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(w) \stackrel{\text{TCD}}{=} \ell(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(n)(w^n + w^{-n}), \quad \text{donde } \ell(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(n).$$

Es conveniente notar que la sucesión de funciones  $f_m(n) = \lambda_m(n)(w^n + w^{-n})$  verifican que  $|f_m(n)| \leq C_q |q|^{n^2} (|w|^n + |w|^{-n}) = g(n) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ , con  $g(n)$  sumable gracias a que  $|q| < 1$ . Esto, que aparece explicado con todo detalle en [15, §8.3], nos permite apelar al teorema de la convergencia dominada para justificar el intercambio del límite y el sumatorio que hemos llevado a cabo.

Tras la aclaración anterior, queremos calcular explícitamente  $\ell(n)$ , para lo que nos va a ser útil usar la expresión que hemos demostrado para  $\lambda_m(n)$ :

$$\ell(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} q^{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^{2(m-k)}) \prod_{k=n+1}^m (1 - q^{2(m+k)}).$$

Llegados a este punto, podemos probar que los dos productorios involucrados en el límite se van a 1 cuando  $m \rightarrow \infty$ :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^{2(m-k)}) \stackrel{k=m-a}{=} \prod_{a=m}^{m-n+1} (1 - q^{2a}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1; \quad \prod_{k=n+1}^m (1 - q^{2(m+k)}) \stackrel{k=b-m}{=} \prod_{b=m+n+1}^{2m} (1 - q^{2b}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

De esta forma, concluimos que  $\ell(n) = q^{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , de donde se desprende directamente el resultado que queríamos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (w^n + w^{-n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} = \theta(z, q). \quad \blacksquare$$

Una importante consecuencia de la representación en forma de producto de la función  $\theta$  tiene que ver con la determinación de sus ceros:

**Corolario 1** Si  $z = \omega + m + n\tau$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $z$  anula exactamente a uno de los factores en (1) y lo hace con multiplicidad 1. Recíprocamente, todo  $z$  que hace que algún factor sea 0 es de esa forma.

**Demostración** Empezamos tomando  $z_{m,n} = \omega + m + n\tau$ , donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  son fijos, y evaluamos  $\theta$  en  $z_{m,n}$  haciendo uso de su expresión como productorio:

$$\theta(z_{m,n}, q) = \prod_{a=1}^{\infty} (1 - q^{2a}) (1 + q^{2a-1} e^{2\pi i(\omega+m+n\tau)}) (1 + q^{2a-1} e^{-2\pi i(\omega+m+n\tau)}) =$$

$$\prod_{a=1}^{\infty} (1 - q^{2a})(1 - e^{2\pi i\tau(a+n)})(1 - e^{2\pi i\tau(a-1-n)}) = \prod_{a=1}^{\infty} (1 - q^{2a})f_a(z_{m,n})g_a(z_{m,n}).$$

Se ve a partir de la expresión de arriba que  $z_{m,n}$  anula solo a  $f_{-n}$  si  $n$  es un entero negativo, y solo a  $g_{n+1}$  si  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Nos queda ver, por lo tanto, que el orden del cero es 1, para lo que distinguimos los dos posibles casos:

1. Si  $n \in \mathbb{Z}^-$ ,  $f_{-n}(z_{m,n}) = 0$ , pero  $f'_{-n}(z) = 2\pi iq^{-2n-1}e^{2\pi iz}$ , que no se anula nunca por ser una exponencial multiplicada por una constante, así que  $z_{m,n}$  tiene multiplicidad 1 como cero de  $f_{-n}$ .
2. De manera análoga, si  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $g_{n+1}(z_{m,n}) = 0$ , pero  $g'_{n+1}(z) = -2\pi iq^{2n+1}e^{-2\pi iz}$ , que tampoco se anula en ningún punto por el mismo motivo que  $f'_{-n}(z)$ , así que  $z_{m,n}$  es un cero de orden 1 de  $g_{n+1}$ .

Ahora pasamos a comprobar el recíproco, para lo que igualamos los factores  $f_a(z)$ ,  $g_a(z)$  a 0 y comprobamos que el número  $z$  que satisface la ecuación en ambos casos es de la forma  $z = \omega + m + n\tau$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$f_a(z) = 1 + q^{2a-1}e^{2\pi iz} = 0 \Rightarrow e^{\pi i + 2\pi ik} = e^{2a\pi i\tau - \pi i\tau + 2\pi iz} \Rightarrow a\tau - \frac{\tau}{2} + z = \frac{1}{2} + k \Rightarrow$$

$$z = \omega + k - a\tau, \quad \text{donde } k, -a \in \mathbb{Z};$$

$$g_a(z) = 1 + q^{2a-1}e^{-2\pi iz} = 0 \Rightarrow e^{\pi i + 2\pi ik} = e^{2a\pi i\tau - \pi i\tau - 2\pi iz} \Rightarrow a\tau - \frac{\tau}{2} - z = \frac{1}{2} + k \Rightarrow$$

$$z = \omega - (k+1) + (a-1)\tau, \quad \text{donde } -(k+1), a-1 \in \mathbb{Z}.$$

■

Es lícito pensar que, quizás, con el producto infinito podrían surgir ceros nuevos que no anulasen necesariamente a ningún factor. Sin embargo, esto es imposible gracias al llamado *teorema de Hurwitz* [6], por lo que todos los ceros de  $\theta$  son de la forma  $z = \omega + m + n\tau$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Antes de cerrar esta sección, vamos a examinar otros dos resultados que se deducen de la fórmula del triple producto:

**Corolario 2**  $\frac{\theta'(1/4+\omega, q)}{\theta(1/4+\omega, q)} = \pi(1-i) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1+q^{4n}}.$

**Demostración** Teniendo en cuenta que  $\theta(z+\omega, q) = -e^{-2\pi iz}\theta(\omega-z, q)$ , tal y como vimos al principio de este capítulo, y tomando en ambos términos logaritmos, si usamos en el lado derecho la representación en forma de producto de  $\theta$ , obtenemos que  $\log(\theta(z+\omega, q))$  es igual a

$$\pi i - 2\pi iz + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^{2n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + q^{2n-1}e^{2\pi i\omega - 2\pi iz}) + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz - 2\pi i\omega}).$$

Con esta última identidad, si derivamos sus dos miembros y sustituimos  $z = 1/4$ , alcanzamos el resultado deseado. ■

**Corolario 3**  $\theta'(\omega, q) = \pi i\theta(0, q)\theta(1/2, q)\theta(\tau/2, q).$

**Demostración** Siguiendo la notación que hemos usado en la prueba del corolario 1,  $z = \omega$  anula a  $g_1(z) = 1 + qe^{-2\pi iz}$ , así que si queremos evaluar  $\theta'(z, q)$ , hallada a partir de (1) por la regla del producto, en  $z = \omega$ , todos los términos del sumatorio resultante se van a cancelar excepto el único en el que aparece como factor  $g'_1(z)$  en vez de  $g_1(z)$ :

$$\theta'(\omega, q) = g'_1(\omega) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}e^{2\pi i\omega}) \prod_{n=2}^{\infty} (1 + q^{2n-1}e^{-2\pi i\omega}) =$$

$$2\pi i \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^{2n-2}) = 2\pi i \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^3.$$

Por otro lado, vamos a calcular, también ayudándonos de la fórmula del triple producto,  $\pi i \theta(0, q) \theta(1/2, q) \theta(\tau/2, q)$ :

$$\begin{aligned} \theta(0, q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2; & \theta(1/2, q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})^2; \\ \theta(\tau/2, q) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})(1 + q^{2n-2}) = 2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2 \Rightarrow \\ \pi i \theta(0, q) \theta(1/2, q) \theta(\tau/2, q) &= 2\pi i \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^3 (1 - q^{4n-2})^2 (1 + q^{2n})^2. \end{aligned}$$

Para acabar, comprobamos que el cociente entre los dos valores que hemos calculado es 1:

$$\frac{\pi i \theta(0, q) \theta(1/2, q) \theta(\tau/2, q)}{\theta'(\omega, q)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2})^2 (1 + q^{2n})^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{4n-2})^2 (1 - q^{4n})^2}{(1 - q^{2n})^2} = 1,$$

donde el último paso se debe a que cada factor que aparece en el numerador está también en el denominador, así que se simplifican entre sí. ■

Las dos igualdades que acabamos de probar adquirirán cierta importancia cuando pasemos a evaluar, al final del capítulo,  $\theta^2(0, q)$ .

### 1.3. La fórmula de transformación

El segundo resultado que vamos a estudiar está relacionado con la teoría de *formas modulares*, y es una consecuencia de la llamada *fórmula de sumación de Poisson* [9]. Su importancia radica en que nos permite cambiar el parámetro  $q$  de la función  $\theta$  de cierta manera:

**Teorema 2** *Sea  $q_* = e^{-\pi i/\tau}$ , la función  $\theta$  verifica la igualdad*

$$\theta(z, q) = (-i\tau)^{-1/2} e^{-\pi i z^2/\tau} \theta(z/\tau, q_*) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

si  $|q| < 1$ .

Es conveniente notar en la igualdad de arriba que  $\Im(\tau) > 0$  implica que  $|q_*| < 1$ , lo que no deja lugar a problemas de definición. Por otro lado,  $\Re(-i\tau) > 0$ , así que a la hora de calcular  $(-i\tau)^{-1/2}$  se escoge la determinación del ángulo habitual de forma que el resultado también esté en el semiplano derecho.

Para empezar a acercarnos a la demostración, consideramos la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+x)z - \pi(n+x)^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+x)$  para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $t > 0$  fijos, de la que nos va a interesar su serie de Fourier:

**Lema 3**  *$F$  admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma  $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ , con  $a_n = t^{-1/2} e^{-\frac{\pi(z-n)^2}{t}}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**Demostración** Primero comprobamos que  $F$  es 1-periódica:

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+1+x)z - \pi(n+1+x)^2 t} \stackrel{k=n+1}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(k+x)z - \pi(k+x)^2 t} = F(x).$$

Por otro lado, también vamos a ver que  $F$  es  $C^\infty$ , notando para ello que  $f(n+x)$  es de la clase de Schwartz al ser su término dominante una gaussiana. De esta forma, por definición,

$\exists C > 0$  tal que  $(1 + |x + n|)^2 |f(x + n)| \leq C$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , de donde se deduce, si trabajamos con  $x$  en el cerrado  $K = [0, 1]$ , que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x + n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C}{(1 + |x + n|)^2} \leq \frac{C}{(1 + |x|)^2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{C}{(1 - |x| + |n|)^2} \leq C + 2C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

para todo  $x \in K$ . Lo anterior nos da, gracias al criterio M de Weierstrass, la convergencia uniforme de la serie que define  $F$  en  $K$ . No obstante, teniendo en cuenta que  $F$  es 1-periódica, la convergencia uniforme en  $[0, 1]$  implica que hay convergencia uniforme en todo  $\mathbb{R}$ , de donde deducimos, al ser  $f(n + x)$  de clase  $C^\infty \forall n \in \mathbb{Z}$ , que  $F$  es continua. La aplicación reiterada de este mismo argumento con las infinitas derivadas de  $f(n + x)$ , todas ellas continuas y de la clase de Schwartz, nos da la prueba de que  $F \in C^\infty$ .

Gracias a las dos propiedades de  $F$  que acabamos de comprobar, la teoría nos dice que  $F$  admite un desarrollo de Fourier convergente de la forma  $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ , con los coeficientes dados por  $a_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k + x) e^{-2\pi i n x} dx \stackrel{\text{TCU}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(k + x) e^{-2\pi i n x} dx \stackrel{y=k+x}{=} \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(y) e^{-2\pi i n y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \stackrel{u=\sqrt{t}y}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{2\pi i n u}{\sqrt{t}}} du = \\ &\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i(z-n)u}{\sqrt{t}} - \pi u^2} du = \frac{1}{e^{\frac{\pi(z-n)^2}{t}} \sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i(z-n)u}{\sqrt{t}} - \pi u^2 + \frac{\pi(z-n)^2}{t}} du = \\ &t^{-1/2} e^{-\frac{\pi(z-n)^2}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(u - \frac{i(z-n)}{\sqrt{t}}\right)^2} du \stackrel{v=u - \frac{i(z-n)}{\sqrt{t}}}{=} t^{-1/2} e^{-\frac{\pi(z-n)^2}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

donde las siglas TCU en la segunda igualdad indican que hemos conmutado la integral y el sumatorio apelando al teorema de convergencia uniforme. Además, el último cambio de variables que llevamos a cabo no nos da problemas porque  $t \in \mathbb{R}^+$ , de manera que  $\sqrt{t} \in \mathbb{R}^+$ . Nos queda, por lo tanto, evaluar la última integral, algo que vamos a hacer usando propiedades de la función  $\Gamma$  probadas en el anexo A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi v^2} dv \stackrel{w=\pi v^2}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} w^{-1/2} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1. \quad \blacksquare$$

Teniendo en cuenta que  $F$  coincide con la serie de Fourier con la que acabamos de trabajar, ya nos va a ser bastante sencillo probar la fórmula de transformación:

**Demostración del teorema 2:** el caso imaginario puro,  $\tau = it$ , con  $t > 0$ , se desprende directamente evaluando en  $x = 0$  tanto  $F$  como su serie de Fourier, que sabemos que son iguales:

$$\begin{aligned} F(0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z - \pi n^2 t} \stackrel{\tau=it}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} = \theta(z, q); \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{-1/2} e^{-\frac{\pi(z-n)^2}{t}} = \\ &t^{-1/2} e^{-\frac{\pi z^2}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n z}{t} - \frac{\pi n^2}{t}} \stackrel{\tau=it}{=} (-i\tau)^{-1/2} e^{-\frac{\pi i z^2}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i n^2}{\tau} + \frac{2\pi i n z}{\tau}} = \end{aligned}$$

$$(-i\tau)^{-1/2} e^{-\frac{\pi i z^2}{\tau}} \theta(z/\tau, q_*) \Rightarrow \theta(z, q) = (-i\tau)^{-1/2} e^{-\frac{\pi i z^2}{\tau}} \theta(z/\tau, q_*) \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ si } \tau = it, \text{ con } t > 0.$$

Tras esto, para extender el resultado a cualquier  $\tau$  en  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ , vamos a comprobar primero que  $H(\tau) = \theta(z, q)$  y  $K(\tau) = \theta(z/\tau, q_*)$  son, vistas como funciones de  $\tau$ , holomorfas en  $S$ :

1. Ya demostramos en el lema 1 que la serie que define  $\theta(z, q)$  converge uniformemente sobre compactos en todo el plano si fijamos  $\tau \in S$ . Repitiendo el mismo argumento (criterio M de Weierstrass), pero ahora con  $z \in \mathbb{C}$  fijo y tratando a  $\tau \in S$  como la variable, se puede ver que las series

$$H(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n(\tau) \quad \text{y} \quad K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i n^2}{\tau} + \frac{2\pi i n z}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(\tau)$$

convergen uniformemente sobre compactos en  $S$ .

2. Las funciones  $h_n(\tau)$ ,  $k_n(\tau)$  son holomorfas en  $S \forall n \in \mathbb{Z}$ , lo que implica, si tenemos en cuenta la convergencia uniforme sobre compactos en  $S$  de  $H(\tau)$  y  $K(\tau)$ , que  $H$ ,  $K$  son holomorfas en  $S$  por el teorema de convergencia de Weierstrass.

Como consecuencia, observando también que ni  $(-i\tau)^{-1/2}$  ni  $e^{-\frac{\pi i z^2}{\tau}}$  dan problemas en  $S$ , concluimos que tanto  $M(\tau) = \theta(z, q)$  como  $N(\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{-\frac{\pi i z^2}{\tau}} \theta(z/\tau, q_*)$  son holomorfas en  $S$ . Además, ambas funciones coinciden en el conjunto  $U = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \tau = it, t > 0\} \subset S$ , que contiene algunos de sus puntos de acumulación, así que por el principio de ceros aislados,  $M(\tau) = N(\tau) \forall \tau \in S$ . ■

A modo de adelanto, gracias a la transformación (2) probaremos más adelante una importante simetría de la función  $\zeta$  de Riemann.

#### 1.4. Un valor especial

Para cerrar el capítulo, vamos a ver una expresión alternativa para el valor en  $z = 0$  de la función theta de Jacobi, involucrando a la derecha de la igualdad una de las llamadas *series de Lambert*:

**Teorema 3** Si  $|q| < 1$ ,

$$\theta^2(0, q) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}}. \quad (3)$$

Su prueba es más complicada, requiriendo el uso de (1) y de técnicas de variable compleja. Sin embargo, es un poco más cómodo deducir la identidad con  $q^2$  en vez de  $q$ , y así lo haremos aquí, ya que los cuadrados de los números complejos  $q$  de módulo menor que 1 vuelven a dar todos los  $q \in \mathbb{C}$  tales que  $|q| < 1$ , por lo que no perdemos generalidad.

Para llegar al resultado, vamos a empezar definiendo dos funciones:

$$F(z) = \left( \log \frac{\theta(z, q)}{\theta(z + 1/2, q)} \right)'; \quad G(z) = -2q \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(2z - 1/2 - \tau, q^2)}{e^{2\pi i z} \theta(2z - 1/2, q^2)}.$$

A la vista de  $F$ , nos va a interesar estudiar la regularidad de las funciones del tipo  $H(z) = \left( \log \frac{f(z)}{g(z)} \right)'$ , con  $f, g$  enteras:

**Lema 4** Sean  $f, g$  dos funciones enteras con todos sus ceros simples, entonces  $H = \left( \log \frac{f}{g} \right)'$ , sea cual sea la rama que tomemos del logaritmo, es meromorfa con polos, todos ellos simples, en los ceros no comunes de  $f$  y  $g$ , siendo su residuo 1 si son ceros de  $f$  y  $-1$  si lo son de  $g$ .

**Demostración** Aplicando la regla de la cadena, vemos que

$$H(z) = \left( \log \frac{f(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{f(z)g(z)},$$

donde tanto el numerador como el denominador son enteros porque  $f$  y  $g$  lo son. De esta forma,  $H$  es una función meromorfa con polos, tal y como vamos a probar, en los ceros no comunes de  $f$  y  $g$ :

1. Si  $z = a$  es un cero de  $f$ , simple por hipótesis, pero no de  $g$ , entonces  $f(z) = (z - a)k(z)$ , con  $k$  una función entera que no se anula en  $z = a$ , y se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)H(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{k(z)g(z) + (z - a)k'(z)g(z) - (z - a)k(z)g'(z)}{(z - a)k(z)g(z)} = 1,$$

así que  $z = a$  es un polo simple de residuo 1 de  $H$ .

2. De manera recíproca, si  $z = b$  es un cero de  $g$ , simple por hipótesis, pero  $f(b) \neq 0$ , se verifica que  $\lim_{z \rightarrow b} (z - b)H(z) = -1$  si tenemos en cuenta el caso anterior y que  $\log(f/g) = -\log(g/f)$ , por lo que  $z = b$  es un polo simple de residuo  $-1$  de  $H$ .

Otros puntos problemáticos de  $H$  son los ceros comunes de  $f$  y  $g$ , pero podemos ver que no dan lugar a polos, sino a singularidades evitables. Para ello, suponemos que  $z = c$  es un cero tanto de  $f$  como de  $g$ , en ambos casos simple por hipótesis, de donde deducimos que  $f(z) = (z - c)p(z)$  y  $g(z) = (z - c)q(z)$ , con  $p, q$  dos funciones enteras que no se anulan en  $z = c$ . Como consecuencia,

$$\lim_{z \rightarrow c} (z - c)H(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) \frac{(z - c)^2(p'(z)q(z) - p(z)q'(z))}{(z - c)^2p(z)q(z)} = 0.$$

Tras este inciso, vamos a centrarnos en las dos funciones  $F, G$  que hemos definido más arriba. En particular, con el lema técnico anterior, queda demostrado que  $F$  es meromorfa, una propiedad que en  $G$  es trivial si tenemos en cuenta que  $\theta$  es entera. Lo siguiente que necesitamos, no obstante, tiene que ver con la evaluación de  $F$  en los puntos  $z = 0$  y  $z = \frac{1}{4} + \omega$ , para lo que usaremos varias de las propiedades de  $\theta$  y su derivada que hemos visto a lo largo del capítulo:

$$F(z) = \left( \log \frac{\theta(z, q)}{\theta(z + 1/2, q)} \right)' = \frac{\theta'(z, q)\theta(z + 1/2, q) - \theta(z, q)\theta'(z + 1/2, q)}{\theta(z, q)\theta(z + 1/2, q)} \Rightarrow F(0) = 0,$$

ya que  $\theta'(0, q) = \theta'(1/2, q) = 0$ , y

$$F(1/4 + \omega) = \frac{\theta'(1/4 + \omega, q)\theta(3/4 + \omega, q) - \theta(1/4 + \omega, q)\theta'(3/4 + \omega, q)}{\theta(1/4 + \omega, q)\theta(3/4 + \omega, q)} =$$

$$\frac{\theta'(1/4 + \omega, q)}{\theta(1/4 + \omega, q)} - \frac{\theta'(3/4 + \omega, q)}{\theta(3/4 + \omega, q)} = 2 \frac{\theta'(1/4 + \omega, q)}{\theta(1/4 + \omega, q)} + 2\pi i = 2\pi + 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 + q^{4n}},$$

teniendo en cuenta que  $-\frac{\theta'(3/4 + \omega, q)}{\theta(3/4 + \omega, q)} = \frac{\theta'(1/4 + \omega, q)}{\theta(1/4 + \omega, q)} + 2\pi i$  y apelando al corolario 2 para justificar la última igualdad.

Ahora vamos a estudiar la periodicidad de las funciones  $F$  y  $G$ , con la que podremos simplificar muchos cálculos en lo que nos queda por demostrar:

**Lema 5** *Tanto  $F$  como  $G$  tienen periodos 1 y  $\tau$ .*

**Demostración** Es bastante sencillo verificar ambos periodos de  $F$  y que  $G(z + 1) = G(z)$  si usamos que  $\theta$  es 1-periódica y que tiene cuasi-periodo  $\tau$ :

$$F(z+1) = \left( \log \frac{\theta(z+1, q)}{\theta(z+3/2, q)} \right)' = \left( \log \frac{\theta(z, q)}{\theta(z+1/2, q)} \right)' = F(z); \quad F(z+\tau) = \left( \log \frac{\theta(z+\tau, q)}{\theta(z+1/2+\tau, q)} \right)' =$$

$$\left( \log \frac{q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z, q)}{q^{-1}e^{-2\pi i(z+1/2)}\theta(z+1/2, q)} \right)' = \left( \log(-1) + \log \frac{\theta(z, q)}{\theta(z+1/2, q)} \right)' = F(z);$$

$$G(z+1) = -2q \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2) \cdot \theta(2z + 3/2 - \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2) \cdot e^{2\pi i(z+1)}\theta(2z + 3/2, q^2)} = -2q \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2) \cdot \theta(2z - 1/2 - \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2) \cdot e^{2\pi iz}\theta(2z - 1/2, q^2)} = G(z).$$

Por otro lado, para mostrar que  $G$  es  $\tau$ -periódica hace falta trabajar algo más:

$$\theta(2(z + \tau) - 1/2 - \tau, q^2) = \theta(2z + \tau - 1/2, q^2) = -e^{-4\pi iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+1)^2\tau + 2\pi i(n+1)(2z - \tau - 1/2)} =$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-4\pi iz}\theta(2z-1/2-\tau, q^2); \quad \theta(2(z+\tau)-1/2, q^2) = \theta(2z+2\tau-1/2, q^2) = \\
& -e^{-2\pi i\tau-4\pi iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+1)^2\tau+2\pi i(n+1)(2z-1/2)} = -q^{-2}e^{-4\pi iz}\theta(2z-1/2, q^2) \Rightarrow \\
& G(z+\tau) = -2q \frac{\theta'(1/2+\tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(2(z+\tau)-1/2-\tau, q^2)}{e^{2\pi i(z+\tau)}\theta(2(z+\tau)-1/2, q^2)} = \\
& -2q \frac{\theta'(1/2+\tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{-e^{-4\pi iz}\theta(2z-1/2-\tau, q^2)}{-e^{2\pi iz}q^2q^{-2}e^{-4\pi iz}\theta(2z-1/2, q^2)} = -2q \frac{\theta'(1/2+\tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(2z-1/2-\tau, q^2)}{e^{2\pi iz}\theta(2z-1/2, q^2)} = G(z). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Con lo anterior, nos va a ser más fácil llevar a cabo un análisis completo de los polos de las funciones  $F$  y  $G$ :

**Proposición 2**  $F$  y  $G$  tienen los mismos polos, situados en  $z = \tau/2 + m/2 + n\tau$ , donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ , con residuos  $(-1)^{m-1}$ .

**Demostración** Por el lema 4, los polos de  $F$  son los ceros no comunes de  $\theta(z, q)$  y  $\theta(z+1/2, q)$ , pero si seguimos el corolario 1, sabemos que

$$\theta(z, q) = 0 \Leftrightarrow z = \omega + k + n\tau = \frac{\tau}{2} + \frac{2k+1}{2} + n\tau; \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \theta(z+1/2, q) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = \omega + k + n\tau - \frac{1}{2} = \frac{\tau}{2} + \frac{2k}{2} + n\tau; \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

de donde deducimos, juntando esos puntos en una sola expresión, que todos los polos de  $F$  son de la forma  $z = \tau/2 + m/2 + n\tau$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Además, vimos que los ceros de  $\theta$  son simples, así que el mismo lema 4 también nos asegura que los polos que acabamos de encontrar son de orden 1 y tienen residuo 1 si anulan a  $\theta(z, q)$ , es decir, si  $m$  es impar, y  $-1$  si hacen lo propio con  $\theta(z+1/2, q)$  o, equivalentemente, si  $m$  es par:

$$z_0 = \tau/2 + m/2 + n\tau; \quad m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Res}(F, z_0) = (-1)^{m-1}.$$

Ahora vamos a encontrar los polos de  $G$ , que no son más que los puntos en los que se anula su denominador. No obstante, como  $e^{2\pi iz} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , nuestro problema se reduce a calcular los ceros de  $\theta(2z-1/2, q^2)$ , una tarea sencilla si escribimos su desarrollo en forma de triple producto de Jacobi dado por el teorema 1. Hecho esto, como ya hemos mencionado en más ocasiones, el *teorema de Hurwitz* [6] nos asegura que  $\theta(2z_0-1/2, q^2) = 0$  si y solo si  $z_0$  es un cero de algún factor del triple producto:

$$\begin{aligned}
\theta(2z-1/2, q^2) &= \prod_{a=1}^{\infty} (1-q^{4a})(1+q^{4a-2}e^{2\pi i(2z-1/2)})(1+q^{4a-2}e^{-2\pi i(2z-1/2)}); \\
1+q^{4a-2}e^{2\pi i(2z-1/2)} &= 0 \Rightarrow e^{4a\pi i\tau-2\pi i\tau+4\pi iz-\pi i} = e^{\pi i+2\pi ib} \Rightarrow a\tau - \frac{\tau}{2} + z - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{b}{2} \Rightarrow \\
z &= \frac{\tau}{2} + \frac{b+1}{2} - a\tau \stackrel{b+1=m}{=} \frac{\tau}{2} + \frac{m}{2} - a\tau, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{N}; \\
1+q^{4a-2}e^{-2\pi i(2z-1/2)} &= 0 \Rightarrow e^{4a\pi i\tau-2\pi i\tau-4\pi iz+\pi i} = e^{\pi i+2\pi ib} \Rightarrow a\tau - \frac{\tau}{2} - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{b}{2} \Rightarrow \\
z &= \frac{\tau}{2} - \frac{b}{2} + (a-1)\tau \stackrel{-b=m}{=} \frac{\tau}{2} + \frac{m}{2} + (a-1)\tau, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

En definitiva, los polos de  $G$  son de la forma  $z = \tau/2 + m/2 + n\tau$ , donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ , y son todos ellos simples, ya que provienen de ceros que anulan a un solo factor del triple producto y que tienen, por lo tanto, multiplicidad 1. Con esta información, podemos pasar a calcular los residuos, teniendo en cuenta que, debido a que  $G$  es 1 y  $\tau$ -periódica, como hemos probado en el lema 5, dado  $z_0 = \tau/2 + m/2 + n\tau$ ,  $\text{Res}(G, z_0) = \text{Res}(G, \tau/2)$  si  $m$  es par y  $\text{Res}(G, z_0) = \text{Res}(G, \omega)$  si  $m$  es impar:

$$\text{Res}(G, \tau/2) = \frac{\theta'(1/2+\tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \lim_{z \rightarrow \tau/2} \frac{-2q(z-\tau/2)\theta(2z-1/2-\tau, q^2)}{e^{2\pi iz}\theta(2z-1/2, q^2)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\theta'(1/2+\tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \lim_{z \rightarrow \tau/2} \frac{-2q\theta(2z - 1/2 - \tau, q^2) - 4q(z - \tau/2)\theta'(2z - 1/2 - \tau, q^2)}{2\pi i e^{2\pi i z} \theta(2z - 1/2, q^2) + 2e^{2\pi i z} \theta'(2z - 1/2, q^2)} = \\ \frac{-2q\theta'(1/2 + \tau, q^2)\theta(-1/2, q^2)}{2q\theta(1/2, q^2)\theta'(\tau - 1/2, q^2)} = \frac{-2q\theta'(1/2 + \tau, q^2)\theta(1/2, q^2)}{2q\theta(1/2, q^2)\theta'(\tau + 1/2, q^2)} = -1, \end{aligned}$$

mientras que unos cálculos similares, volviendo a usar la regla de L'Hôpital para deshacer una indeterminación del tipo 0/0, nos indican que  $\text{Res}(G, \omega) = 1$ . Así, queda visto que  $\text{Res}(G, z_0) = (-1)^{m-1}$ . ■

Según lo que acabamos de probar, como los polos de  $F$  y  $G$  están situados en los mismos puntos, y en ambas funciones coinciden tanto sus órdenes como sus residuos, al tomar  $K(z) = F(z) - G(z)$ , el resultado es una función entera, ya que todos los polos se cancelan. Además,  $K$  es 1 y  $\tau$ -periódica porque  $F$  y  $G$  lo son, algo que nos va a permitir demostrar que  $H$  está acotada:

1. Todo  $z_0 \in \mathbb{C}$  se puede expresar como  $x + y\tau$  para ciertos  $x, y \in \mathbb{R}$ , ya que los números 1 y  $\tau$ , vistos como vectores de  $\mathbb{R}^2$ , forman una base del plano. De esta forma,  $K(z_0) = K(x + y\tau) = K(x - [x] + (y - [y])\tau)$ , donde la última igualdad se justifica apelando a las dos periodicidades de  $K$ . Con ello, y teniendo en cuenta que  $x - [x] + (y - [y])\tau \in D = \{a + b\tau : a, b \in [0, 1]\}$ , está claro que  $K(\mathbb{C}) = K(D)$ , así que  $\sup_{z \in \mathbb{C}} |K(z)| = \sup_{z \in D} |K(z)|$ .
2. Como el conjunto  $D$  es compacto, por el teorema de Weierstrass, al ser  $K$  una función continua,  $\sup_{z \in D} |K(z)| = M < \infty$ , de modo que  $\sup_{z \in \mathbb{C}} |K(z)| = M$ .

En conclusión,  $K$  es una función entera y acotada, así que por el teorema de Liouville,  $K(z) = C$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Nos queda, por lo tanto, calcular  $C$ , para lo que vamos a evaluar  $K(0)$  teniendo en cuenta que ya sabemos que  $F(0) = 0$  y usando el triple producto de Jacobi del teorema 1 para hallar  $G(0)$ :

$$\theta(2z - 1/2 - \tau, q^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n})(1 + q^{4n-2}e^{2\pi i(2z-1/2-\tau)})(1 + q^{4n-2}e^{-2\pi i(2z-1/2-\tau)}),$$

y si llamamos  $s_n(z) = (1 + q^{4n-2}e^{2\pi i(2z-1/2-\tau)})$ , vemos que

$$s_1(0) = 1 + q^2 e^{2\pi i(-1/2-\tau)} = 1 + q^2 e^{-\pi i} q^{-2} = 1 + e^{-\pi i} = 0 \Rightarrow \theta(-1/2 - \tau, q^2) = 0 \Rightarrow$$

$$G(0) = -2q \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(-1/2 - \tau, q^2)}{\theta(-1/2, q^2)} = 0 \Rightarrow C = K(0) = F(0) - G(0) = 0,$$

siendo válida la evaluación de  $G(0)$  porque, según la proposición 2, 0 no es un polo de  $G$ .

Deducimos tras todo este razonamiento que  $F(z) = G(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , con lo que ya podemos pasar a la demostración del resultado que motiva esta sección:

**Demostración del teorema 3:** como  $F = G$ , en particular el valor de ambas funciones en  $z = 1/4 + \omega$  coincide, pero ya dimos una expresión explícita de  $F(1/4 + \omega)$  más atrás:

$$\begin{aligned} F(1/4 + \omega) = G(1/4 + \omega) \Rightarrow 2\pi + 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 + q^{4n}} = -2q \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(1, q^2)}{-iq\theta(1 + \tau, q^2)} = \\ 2 \frac{\theta'(1/2 + \tau, q^2)}{\theta(1/2, q^2)} \cdot \frac{\theta(0, q^2)}{i\theta(\tau, q^2)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\theta$  es 1-periódica para llegar a la última igualdad.

Ahora, si utilizamos la identidad dada por el corolario 3, que equivale a  $\theta'(1/2 + \tau, q^2) = \pi i \theta(0, q^2) \theta(1/2, q^2) \theta(\tau, q^2)$  al cambiar  $q$  por  $q^2$ , llegamos a que

$$2\pi + 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 + q^{4n}} = 2\pi i \frac{\theta^2(0, q^2) \theta(1/2, q^2) \theta(\tau, q^2)}{i\theta(1/2, q^2) \theta(\tau, q^2)} = 2\pi \theta^2(0, q^2),$$

de donde extraemos (3) si tomamos  $q$  en vez de  $q^2$  sin pérdida de generalidad, tal y como comentamos al inicio de la sección. ■

Este último resultado esconde una fuerte relación con el problema de la suma de cuadrados.

## 2. Algunas aplicaciones

En este capítulo vamos a ver un par de consecuencias aritméticas que derivan de las propiedades que hemos visto hasta ahora de la función  $\theta$  y que, por otro lado, nos van a ser útiles en el desarrollo del trabajo. El lector curioso puede encontrar una tercera aplicación, igual de sorprendente pero no muy relacionada con lo que nos interesa ahora mismo, en el anexo B.

### 2.1. Naturales como suma de cuadrados

Empezamos con la función  $r(n)$ , que da el número de representaciones de  $n \in \mathbb{N}$  como suma de dos cuadrados de enteros, es decir,  $r(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : n = a^2 + b^2\}$ .

Por ejemplo,  $r(10) = 8$ , ya que  $10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$ , con 4 combinaciones de signos en cada uno de los dos términos. También se tiene que  $r(2023) = r(2024) = 0$  y  $r(2050) = 24$ , lo que nos lleva a preguntarnos si hay una fórmula explícita para calcular esta función tan caótica:

**Proposición 3**  $r(n) = 4 \sum_{2d+1|n} (-1)^d$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración** Partiendo de (3), que probamos al final del capítulo anterior, consideramos el desarrollo en serie de potencias en ambos miembros de esa identidad, de tal forma que si  $a_n, b_n$  son los coeficientes de  $q^n$  en los lados izquierdo y derecho respectivamente, entonces  $a_n = b_n$ :

$$\theta^2(0, q) = \left( \sum_{u \in \mathbb{Z}} q^{u^2} \right) \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}} q^{v^2} \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n,$$

de donde se deduce que cada par ordenado  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $u^2 + v^2 = n$  contribuirá a dar un  $q^n$ , así que  $a_n = r(n)$ .

Ahora, si usamos que  $x/(1+x^2) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d x^{2d+1}$  si  $|x| < 1$ , y teniendo en cuenta que  $|q^k| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , obtenemos que

$$1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} 4(-1)^d q^{k(2d+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n,$$

en donde se puede observar que cada número de la forma  $2d+1$ , con  $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tal que  $n = k(2d+1)$  para algún  $k \in \mathbb{N}$  aporta  $4(-1)^d$  al coeficiente de  $q^n$ . Si expresamos esto de manera matemática,  $b_n = 4 \sum_{2d+1|n} (-1)^d$ , con  $2d+1$  recorriendo los divisores impares positivos de  $n$ .

Podemos concluir, por lo tanto, que  $r(n) = 4 \sum_{2d+1|n} (-1)^d$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Con la expresión para  $r(n)$  que acabamos de probar, podemos dar también una relación entre su serie de Dirichlet y la función  $\zeta$  de Riemann:

**Corolario 4** Para  $\Re(s) > 1$ , se verifica que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = 4\zeta(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$  y, como consecuencia de ello,  $\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} r(n)/n^s = \pi$ .

**Demostración** Empezamos comprobando la igualdad formal, partiendo del lado derecho y transformándolo hasta llegar al izquierdo, para luego ocuparnos de la convergencia:

$$4\zeta(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(k(2n+1))^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{m^s},$$

de donde se desprende, con un razonamiento similar al de la proposición anterior, que cada divisor impar positivo  $2n+1$  de  $m$  contribuye a  $p_m$  con  $4(-1)^n$ , así que  $p_m = 4 \sum_{2n+1|m} (-1)^n = r(m)$ .

La condición  $\Re(s) > 1$  es necesaria porque, tal y como se puede ver en el lema 19, nos asegura la convergencia absoluta de  $\zeta(s)$  sobre compactos. Además, como  $\frac{1}{(2n+1)^{\Re(s)}} \leq \frac{1}{n^{\Re(s)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ ,  $\forall s$  con  $\Re(s) > 1$ , la segunda serie del miembro derecho también converge absolutamente en compactos, lo que nos permite concluir que la serie de Dirichlet de  $r(n)$  tiene sentido en  $\Re(s) > 1$ .

En cuanto al límite, podemos computarlo si tenemos en cuenta que  $\zeta(s)$  tiene un polo simple con residuo 1 en  $s = 1$ , tal y como explicamos en el anexo A:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \lim_{s \rightarrow 1^+} 4(s-1) \zeta(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi.$$

Para justificar el último paso, usamos que  $1/(1+x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$  si  $|x| < 1$ , así que integrando a ambos lados desde 0 hasta  $t$ , con  $0 < t < 1$ , obtenemos que  $\arctan(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \forall t \in (0, 1)$ . De esta forma,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \arctan(t) = \pi/4$ . ■

Por último, vamos a derivar una fórmula para  $r(n)$  que es computacionalmente más eficiente, y que se expresa en función de la factorización de  $n$ . Así, dado  $n \in \mathbb{N}$ , empleamos la siguiente notación para su descomposición en potencias de primos:

$$n = 2^\gamma p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_w^{\alpha_w} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}, \quad \text{con } \gamma, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad p_j \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{y} \quad q_j \equiv -1 \pmod{4}.$$

Para poder usar lo anterior vamos a empezar probando que  $r$  conserva, al menos en algún sentido, el producto de coprimos:

**Lema 6** *La función aritmética  $h(n) = r(n)/4$  es multiplicativa, es decir,  $h(1) = 1$  y, dados  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $(n_1, n_2) = 1$ ,  $h(n_1 n_2) = h(n_1) h(n_2)$ .*

**Demostración** Por el corolario 4, la serie de Dirichlet de  $h$  cumple formalmente que

$$D_h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^s} = D_a(s) D_b(s),$$

$$\text{con } a(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad b(n) = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } \exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tal que } n = 2m+1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lo anterior equivale a que  $h = a * b$ , así que por las propiedades de la convolución [8], basta comprobar que  $a, b$  son multiplicativas para concluir que  $h$  también lo es. Sin embargo, es trivial ver que  $a(1) = 1$  y  $a(ij) = a(i)a(j) = 1$  si  $(i, j) = 1$ , lo que nos motiva a centrarnos solo en  $b$ , estudiando por separado los dos casos ante los que podemos estar si tomamos  $i, j \in \mathbb{N}$  tales que  $(i, j) = 1$ :

1. Si uno de los dos números es par, entonces  $b(i)b(j) = 0$  porque  $b$  manda todos los pares al 0, de forma que uno de los factores se anula. Por el mismo motivo, al ser  $ij$  par,  $b(ij) = 0$ .
2. Por otro lado, si tanto  $i$  como  $j$  son impares, existen  $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que  $i = 2k+1, j = 2l+1$ , así que  $b(i)b(j) = (-1)^k (-1)^l = (-1)^{k+l}$ . Además,  $ij = (2k+1)(2l+1) = 2(2kl+k+l) + 1$ , con  $2kl+k+l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , lo que nos sugiere que  $b(ij) = (-1)^{2kl+k+l} = (-1)^{2kl} (-1)^{k+l} = (-1)^{k+l}$ .

Si al análisis que acabamos de hacer le añadimos que  $b(1) = (-1)^0 = 1$ , ya que  $1 = 2 \cdot 0 + 1$ , llegamos a que  $b$  es multiplicativa al igual que  $a$ , lo que nos conduce al resultado que queríamos. ■

Gracias a la propiedad que acabamos de ver, y siguiendo la notación que hemos introducido antes, basta con que hallemos las imágenes explícitas por  $r$  de  $2^\gamma, p_j^{\alpha_j}$  y  $q_j^{\beta_j}$  para obtener una fórmula para  $r(n)$ , con  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera:

1.  $r(2^\gamma) = 4 \sum_{2d+1|2^\gamma} (-1)^d$ , pero el único impar positivo que divide a  $2^\gamma$ , sea cual sea  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , es  $1 = 2 \cdot 0 + 1$ , así que  $r(2^\gamma) = 4(-1)^0 = 4$ .

2.  $r(p_j^{\alpha_j}) = 4 \sum_{2d+1|p_j^{\alpha_j}} (-1)^d$ , donde los divisores impares positivos de  $p_j^{\alpha_j}$  son de la forma  $p_j^u = 2d_u + 1$ , con  $u \in \{0, 1, \dots, \alpha_j\}$ . Además, teniendo en cuenta que  $p_j \equiv 1 \pmod{4}$ , deducimos que en realidad  $p_j^u \equiv 1 \pmod{4} \quad \forall u \in \{0, 1, \dots, \alpha_j\}$ , así que  $d_u = (p_j^u - 1)/2$  es par para todo  $u \in \{0, 1, \dots, \alpha_j\}$ . Con todo esto,  $r(p_j^{\alpha_j}) = 4 \sum_{u=0}^{\alpha_j} (-1)^{d_u} = 4 \sum_{u=0}^{\alpha_j} 1 = 4(\alpha_j + 1)$ .
3.  $r(q_j^{\beta_j}) = 4 \sum_{2d+1|q_j^{\beta_j}} (-1)^d$ , siendo  $q_j^v = 2d_v + 1$ , con  $v \in \{0, 1, \dots, \beta_j\}$ , todos los impares positivos que dividen a  $q_j^{\beta_j}$ . Ahora bien, como  $q_j \equiv -1 \pmod{4}$ , de manera más general,  $q_j^v \equiv (-1)^v \pmod{4} \quad \forall v \in \{0, 1, \dots, \beta_j\}$ , luego  $d_v = (q_j^v - 1)/2$  tiene la misma paridad que  $v$ . Así,  $r(q_j^{\beta_j}) = 4 \sum_{v=0}^{\beta_j} (-1)^{d_v} = 4 \sum_{v=0}^{\beta_j} (-1)^v$ , expresión que vale 0 si  $\beta_j$  es impar, ya que los  $\beta_j + 1$  términos forman parejas que se van cancelando entre sí, y 4 si  $\beta_j$  es par, debido a que en este caso al último término no le sigue otro que le anule. Expresado algo más formal, lo anterior quiere decir que  $r(q_j^{\beta_j}) = 2(1 + (-1)^{\beta_j})$ .

Ya estamos en condiciones, por lo tanto, de calcular  $r(n)$  para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$r(n) = 4h(n) = 4h(2^\gamma)h(p_1^{\alpha_1}) \dots h(p_w^{\alpha_w})h(q_1^{\beta_1}) \dots h(q_s^{\beta_s}) = \frac{4r(2^\gamma)r(p_1^{\alpha_1}) \dots r(p_w^{\alpha_w})r(q_1^{\beta_1}) \dots r(q_s^{\beta_s})}{4^{1+w+s}} =$$

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4^w (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_w + 1) \cdot 2^s (1 + (-1)^{\beta_1}) \dots (1 + (-1)^{\beta_s})}{4^{1+w+s}} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \exists j \in \{1, \dots, s\} \text{ tal que } \beta_j \text{ es impar,} \\ 4(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_w + 1) & \text{si todos los } \beta_j \text{ son pares.} \end{cases}$$

Por ejemplo,  $r(79625) = r(5^3 \cdot 7^2 \cdot 13) = 4(3 + 1)(1 + 1) = 32$ , ya que en la factorización  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 1$  y el único primo congruente a 3 módulo 4 que aparece, el 7, va elevado a una potencia par. A modo de observación, la fórmula anterior también se puede obtener estudiando la factorización única en  $\mathbb{Z}[i]$ , el anillo de *enteros gaussianos* [11, §5.5].

## 2.2. La simetría de la función zeta

Para la segunda aplicación, nos remitimos al anexo B, donde definimos  $\zeta(s)$  como una serie que converge para  $\Re(s) > 1$  y después deducimos que admite una extensión meromorfa a  $\Re(s) > 0$  con un único polo (simple de residuo 1) en  $s = 1$ . Ahora completaremos esta extensión a todo  $\mathbb{C}$  y, como objetivo principal, veremos que admite una simetría insospechada que también involucra a la función  $\Gamma$ . Esto tiene consecuencias importantes acerca de la distribución de los números primos, pero analizarlas con detalle llevaría a un trabajo distinto del nuestro, así que solo presentaremos la relación con la conjetura más famosa del área.

Hay muchas pruebas de la extensión meromorfa y de la simetría de  $\zeta$ , pero vamos a seguir la original de Riemann en su famosa memoria [12, §8], [14]. Con este fin, introducimos la función  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ , que es *de decaimiento rápido* en  $\mathbb{R}^+$ , aunque no lo demostraremos. Sí vamos a ver con detalle, no obstante, una ecuación funcional que satisface  $\omega$  y que nos va a ser de ayuda en esta sección:

**Lema 7**  $\omega(x^{-1}) = \frac{\sqrt{x-1}}{2} + \sqrt{x}\omega(x)$  para cualquier  $x > 0$ .

**Demostración** Para todo  $x > 0$ , si tomamos  $\tau_x = ix$ , se cumple que  $\Im(\tau_x) > 0$ , así que la ecuación (2) probada en el capítulo anterior es válida si la evaluamos en  $(z, q) = (0, q_x)$ , donde  $q_x = e^{\pi i \tau_x} = e^{-\pi x}$ :

$$\theta(0, q_x) = (-i\tau_x)^{-1/2} \theta(0, (q_x)_*) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta(0, (q_x)_*), \quad \text{con } (q_x)_* = e^{-\pi i / \tau_x} = e^{-\pi/x} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \Rightarrow 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \right) \Rightarrow \\ 1 + 2\omega(x) &= \frac{1 + 2\omega(x^{-1})}{\sqrt{x}} \Rightarrow \omega(x^{-1}) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2} + \sqrt{x}\omega(x) \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

El siguiente paso es comprobar que  $\zeta$  y  $\Gamma$  están relacionadas con  $\omega$ , para lo que presentamos una nueva función compleja,  $\xi(s)$ , dada por  $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ .

**Proposición 4**  $\xi(s) = s(1-s) \int_0^{\infty} x^{s/2-1} \omega(x) dx$  si  $\Re(s) > 1$ .

**Demostración** En primer lugar, como estamos trabajando en  $\Re(s) > 1$ ,  $\Gamma(s/2)$  admite su representación integral, válida en  $\Re(s) > 0$ , así que hacemos uso de ella:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \stackrel{t=n^2\pi x}{=} \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} (n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1} n^2\pi dx = n^s \pi^{\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \Rightarrow \\ \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}}}{n^s} &= \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \quad \text{si } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la igualdad anterior y que  $\zeta(s)$  se puede expresar en forma de serie en  $\Re(s) > 1$ , que es nuestro dominio en este caso, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \\ \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \quad \text{si } \Re(s) > 1, \end{aligned}$$

donde el paso de intercambiar la suma y la integral está justificado por el teorema de Fubini, que podemos aplicar porque  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}| dx$  converge en  $\Re(s) > 1$ , tal y como vamos a ver a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |e^{-n^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1}| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{\Re(s)}{2}-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\Re(s)}{2}\right) \pi^{-\frac{\Re(s)}{2}}}{n^{\Re(s)}} = \\ \Gamma\left(\frac{\Re(s)}{2}\right) \pi^{-\frac{\Re(s)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\Re(s)}} &= \Gamma\left(\frac{\Re(s)}{2}\right) \pi^{-\frac{\Re(s)}{2}} \zeta(\Re(s)) < \infty \quad \text{si } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

Juntando lo que hemos probado y la definición de  $\xi$ , concluimos finalmente que

$$\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = s(1-s) \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \quad \text{si } \Re(s) > 1.$$

Asumiendo aún que  $\Re(s) > 1$ , si separamos la integral que aparece en la expresión que acabamos de ver para  $\xi$  en los intervalos  $(0, 1]$  y  $[1, \infty)$ , y aplicamos el cambio de variables  $x \mapsto 1/x$  en el primero de ellos, llegamos a que

$$J = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx = \int_1^{\infty} x^{-(\frac{s}{2}+1)} \omega(x^{-1}) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx,$$

pero si ahora usamos la expresión para  $\omega(x^{-1})$  dada por el lema 7,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2} (x^{-\frac{s+1}{2}} - x^{-(\frac{s}{2}+1)}) dx + \int_1^{\infty} \omega(x) (x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx = \\ \frac{1}{2} \left( \frac{2x^{(1-s)/2}}{1-s} + \frac{2x^{-s/2}}{s} \right) \Big|_{x=1}^{x=\infty} &+ \int_1^{\infty} \omega(x) (x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx \quad \text{si } \Re(s) > 1,$$

aprovechando que  $x \geq 1$ , y que  $\Re(s) > 1$  a la hora de computar la integral que no dependía de  $\omega$ . De esta forma, el resultado de la proposición 4 se puede expresar como

$$\xi(s) = -1 + s(1-s) \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx \quad \text{si } \Re(s) > 1,$$

con  $I(s) = \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx$  convergente  $\forall s \in \mathbb{C}$  tal y como vamos a comprobar:

1. Ya mencionamos que  $\omega(x)$  es de la clase de Schwartz en  $\mathbb{R}^+$ , y las funciones  $g_s(x) = x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}$  verifican en  $[1, \infty)$ , para cualquier  $s \in \mathbb{C}$  fijo y  $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , que  $g_s(|x|) = g_s(x) \in C^\infty$  y

$$|g_s^{(k)}(|x|)| = |g_s^{(k)}(x)| \leq C_{s,k} x^{-\frac{\Re(s)+1}{2}-k} + D_{s,k} x^{\frac{\Re(s)}{2}-1-k} \leq C_{s,k} x^{\alpha_{s,k}} + D_{s,k} x^{\beta_{s,k}} = p_{s,k}(x),$$

donde  $C_{s,k}$ ,  $D_{s,k}$  son ciertas constantes reales y  $\alpha_{s,k}$ ,  $\beta_{s,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , lo que convierte a  $p_{s,k}(x)$  en un polinomio. Bajo estas hipótesis, el producto  $\omega(x)g_s(x)$  es de la clase de Schwartz en  $[1, \infty) \forall s \in \mathbb{C}$ .

2. Como el espacio de Schwartz en  $[1, \infty)$  está contenido en  $L^1([1, \infty))$ , en particular  $\omega(x)g_s(x) \in L^1([1, \infty)) \forall s \in \mathbb{C}$ , así que

$$|I(s)| = \left| \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) dx \right| \leq \int_1^\infty |\omega(x)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})| dx < \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Con esto ya podemos hablar de la continuación analítica de  $\xi$  y de la simetría que guarda:

**Proposición 5**  $\xi(s)$  se extiende a una función entera tal que  $\xi(s) = \xi(1-s)$  para todo  $s \in \mathbb{C}$ .

**Demostración** Por el teorema de analiticidad de integrales paramétricas, como  $I(s)$  converge en todo el plano,  $I(s)$  define una función entera, dando como consecuencia trivial que  $h(s) = -1 + s(1-s)I(s)$  es también entera. De esta manera, apelando a que  $h(s)$  coincide con  $\xi(s)$  en el abierto  $\Re(s) > 1$ , donde  $\xi(s)$  es holomorfa, podemos concluir que  $h$  es la extensión entera de  $\xi$  que andábamos buscando.

Como consecuencia de lo anterior, para ver que  $\xi$ , extendida mediante  $h$ , verifica que  $\xi(s) = \xi(1-s)$  para todo  $s \in \mathbb{C}$ , basta ver que  $h$  guarda esa misma simetría:

$$\begin{aligned} h(1-s) &= -1 + (1-s)sI(1-s) = -1 + s(1-s) \int_1^\infty \omega(x)(x^{-\frac{1-s+1}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}-1}) dx = \\ &= -1 + s(1-s) \int_1^\infty \omega(x)(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}) dx = -1 + s(1-s)I(s) = h(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

■

Sabemos que la función  $\zeta$  aparece en la definición de  $\xi$ , así que despejándola en esa igualdad podemos extraer conclusiones acerca de su continuación analítica:

$$\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \Rightarrow \zeta(s) = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}\frac{1}{s\Gamma(s/2)}}{1-s} = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{2(1-s)} \cdot \frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma(s/2)} = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{2(1-s)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)},$$

donde en el último paso hemos aplicado el corolario 8, suponiendo para ello, al menos en principio, que  $s \in \mathbb{C} \setminus \{-2k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ . La expresión que nos queda depende, por lo tanto, de  $\xi(s)$ , que acabamos de probar que admite una extensión entera; de  $\pi^{s/2}$ , que es entera de forma trivial; de un inverso de la función  $\Gamma$ , que explicamos que es entero en el anexo A; y de  $1/(1-s)$ , que nos genera un polo en  $s = 1$ . De esta forma, si tomamos  $k(s) = \frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{2(1-s)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ , con  $\xi(s)$  haciendo referencia a su extensión entera  $h(s)$ , está claro que  $k(s)$  es meromorfa con un único polo en  $s = 1$  y que coincide con  $\zeta(s)$  en  $\Re(s) > 1$ , donde  $\zeta$  es holomorfa.

Según el análisis anterior,  $k(s)$  es la continuación meromorfa de  $\zeta(s)$  a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , lo que implica que de la igualdad  $\xi(s) = \xi(1-s)$  se deduce una ecuación funcional para  $\zeta$  que permite relacionar  $\zeta(s)$  con  $\zeta(1-s)$ . Por otro lado, como

$$\text{Res}(k; 1) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)k(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{-(1-s)\xi(s)\pi^{s/2}}{2(1-s)\Gamma(\frac{s}{2}+1)} = -\frac{\xi(1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3}{2})} = -\xi(1) = -h(1) = 1,$$

podemos concluir que  $\zeta(s) - 1/(s-1)$  se extiende a una función entera mediante  $k(s) - 1/(s-1)$ , ya que se cancela el polo en  $s = 1$ .

Bajo este contexto, ya sabemos cómo evaluar  $\zeta(s)$  en cualquier valor distinto de  $s = 1$ . Por ejemplo, nosotros vamos a calcular  $\zeta(0)$ :

$$\zeta(0) = k(0) = \frac{\xi(0)}{2\Gamma(1)} = \frac{h(0)}{2 \int_0^\infty e^{-t} dt} = \frac{-1}{-2e^{-t}|_{t=0}^{t=\infty}} = -\frac{1}{2}.$$

Para cerrar la sección, vamos a relacionar la simetría dada por la proposición 5 con la distribución de los números primos, de la que se sabe que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \text{ primo} : p \leq N\} - \text{Li}(N)}{N^\sigma} = 0 \quad \text{para cualquier } \sigma > \sigma_0,$$

donde  $\sigma_0 = \sup \{\Re(\rho) : \zeta(\rho) = 0\}$  y  $\text{Li}(N) = \int_2^N \frac{dt}{\log t}$ . Además, el límite no existe para ningún  $\sigma < \sigma_0$ . Este resultado, que nos dice que  $\sigma_0$  coincide con el orden con el que  $\text{Li}(N)$  aproxima a la cantidad de números primos hasta  $N$ , se demuestra en [6, §5] y [4, §1.4].

En lo que respecta a nuestro trabajo, vamos a usar que  $\zeta(s)$  tiene ceros en  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ , algo a lo que se llega aplicando el principio del argumento [12, §15]. Sabiendo eso, podemos dar una cota inferior para  $\sigma_0$ :

**Corolario 5**  $\sigma_0 \geq 1/2$ .

**Demostración** Hemos mencionado que existen ceros de  $\zeta(s)$  con  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ , así que tomamos uno de ellos, al que llamaremos  $s_1$ :

$$\zeta(s_1) = k(s_1) = \frac{\xi(s_1)\pi^{s_1/2}}{2(1-s_1)\Gamma(\frac{s_1}{2}+1)} = 0 \Rightarrow \xi(s_1) = 0,$$

ya que  $\pi^{s/2}$  y  $1/(1-s)$  no se anulan nunca, mientras que  $1/\Gamma(\frac{s}{2}+1) = 0$  si y solo si  $1 + \frac{s}{2} \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ , tal y como comentamos en el anexo A. En otras palabras, todos los ceros de  $1/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$  son los enteros negativos pares, pero  $s_1$  no es ninguno de ellos por definición.

Si continuamos con nuestro argumento, por la proposición 5,  $\xi(s_1) = 0$  implica que  $\xi(1-s_1) = 0$ , luego

$$\zeta(1-s_1) = k(1-s_1) = \frac{\xi(1-s_1)\pi^{(1-s_1)/2}}{2s_1\Gamma(\frac{3-s_1}{2})} = 0.$$

Vemos, por lo tanto, que  $s_2 = 1-s_1$  es otro cero de  $\zeta(s)$ , verificándose que  $\Re(s_2) = 1-\Re(s_1) \leq 1/2$  si  $\Re(s_1) \geq 1/2$  y  $\Re(s_2) \geq 1/2$  en caso contrario. De esta forma, queda garantizado que alguno entre  $s_1$  y  $s_2$  tiene parte real mayor o igual que  $1/2$ , de donde se extrae que  $\sigma_0 = \sup \{\Re(\rho) : \zeta(\rho) = 0\} \geq \max \{\Re(s_1), \Re(s_2)\} \geq 1/2$ . ■

La llamada *hipótesis de Riemann* conjetura que  $\sigma_0 = 1/2$ , en cuyo caso todos los ceros de  $\zeta(s)$  en  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  deben estar, siguiendo el razonamiento anterior, en la línea vertical  $\Re(s) = 1/2$ . Este es uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas, y si se demostrase, implicaría el mejor escenario posible para la aproximación de la cantidad de primos que nos da  $\text{Li}(N)$ .

### 3. La fórmula límite de Kronecker

En algunos temas avanzados de teoría de números aparece la función

$$E(z, s) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} \frac{(\Im(z))^s}{|n_1 z + n_2|^2 s}, \quad \text{donde } \Im(z) > 0 \text{ y } \Re(s) > 1.$$

Se dice que es una *serie de Eisenstein real*, y se puede probar que para cada  $z$  fijado admite una extensión meromorfa a  $\mathbb{C}$  en  $s$  con un único polo simple en  $s = 1$ . La *fórmula límite de Kronecker*, que estudiaremos en este capítulo, afirma que en el desarrollo de Laurent  $E(z, s) = a_{-1}/(s-1) + a_0 + a_1(s-1) + \dots$ , el residuo  $a_{-1}$  es  $\pi$  y  $a_0$  se expresa en términos de la *función eta de Dedekind*, holomorfa en  $\Im(z) > 0$  y dada en ese dominio por  $\eta(z) = e^{\pi iz/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})$ .

El enunciado habitual (cf. [26]) se escribe en forma de límite:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( E(z, s) - \frac{\pi}{s-1} \right) = 2\pi \log \frac{e^\gamma}{2|\eta(z)|^2 \sqrt{\Im(z)}}, \quad (4)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni. Sin embargo, (4) es equivalente al siguiente resultado:

**Teorema 4** Sea  $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  una forma cuadrática real con  $D = 4ac - b^2 > 0$  y  $a > 0$ , y dada  $\zeta(s, Q) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} (Q(\vec{n}))^{-s}$  para  $\Re(s) > 1$ , se cumple que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{D}}{4\pi} \zeta(s, Q) - \zeta(2s-1) \right) = \log \frac{\sqrt{a/D}}{|\eta(z_Q)|^2}, \quad \text{donde } z_Q = \frac{-b + i\sqrt{D}}{2a}. \quad (5)$$

#### 3.1. La prueba de la fórmula límite

El grueso de este capítulo está dedicado a demostrar (5), que nos facilitará mucho las cosas cuando pasemos a deducir la fórmula de Ramanujan que motiva este trabajo. Seguiremos las líneas de [7], salvo cambios en el orden y la notación inspirados por [19]. No obstante, el lector que prefiera ver una demostración más clásica puede consultar [20].

**Lema 8** Sea  $\epsilon > 0$ , y dada  $f : \{|\Im(z)| < 2\epsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa par tal que para algún  $\alpha > 1$  verifica que  $|f(z)||z|^\alpha \rightarrow 0$  cuando  $|\Re(z)| \rightarrow \infty$ , entonces  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = i \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) \cotg(\pi z) dz$ .

**Demostración** Si definimos el dominio  $D = \{|\Im(z)| < 2\epsilon\}$ , tenemos que la función  $g(z) = f(z) \cotg(\pi z)$  es meromorfa en  $D$  con polos en los puntos de  $D$  en los que se anula  $\sen(\pi z)$  pero  $f(z) \neq 0$ , es decir, en los  $m \in \mathbb{Z}$  tales que  $f(m) \neq 0$ . Además, como existe

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow m} (z-m)f(z) \cotg(\pi z) &= \lim_{z \rightarrow m} \frac{(z-m)f(z) \cos(\pi z)}{\sen(\pi z)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ \lim_{z \rightarrow m} \frac{f(z) \cos(\pi z) + (z-m)f'(z) \cos(\pi z) - \pi(z-m)f(z) \sen(\pi z)}{\pi \cos(\pi z)} &= \frac{f(m)}{\pi} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

todos esos polos son simples y  $\text{Res}(g, m) = f(m)/\pi$ . A modo de observación, cabe destacar que en nuestro razonamiento, L'H indica que hemos utilizado la regla de L'Hôpital.

Podemos tomar ahora el rectángulo  $C_N$  que delimita la región  $\{|\Re(z)| \leq N + 1/2, |\Im(z)| \leq \epsilon\}$ , resultando ser este una curva simple, cerrada, suave a trozos y contenida en  $D$  tal que solo un número finito de polos de  $g$  en  $D$ , en particular los  $m \in \mathbb{Z}$  con  $|m| \leq N$ , pertenecen a su interior. De esta forma, por el teorema de los residuos,

$$I_N = \int_{C_N} f(z) \cotg(\pi z) dz = 2\pi i \sum_{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq N} \text{Res}(g, m) = 2\pi i \sum_{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq N} \frac{f(m)}{\pi} =$$

$$2i \sum_{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq N} f(m) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m).$$

Está claro, por otro lado, que  $I_N$  es igual a la suma de las integrales de  $g$  sobre los cuatro bordes del rectángulo  $C_N$ , todos ellos manteniendo la orientación positiva. Sabiendo esto, empezamos analizando el lateral derecho, al que llamaremos  $C_{N,1}$ :

$$I_{N,1} = \int_{C_{N,1}} f(z) \cotg(\pi z) dz = \int_{C_{N,1}} \frac{f(z) \cos(\pi z) z^\alpha}{\sen(\pi z) z^\alpha} dz \stackrel{z=N+1/2+ti}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{if(N+1/2+ti) \cos(\pi(N+1/2+ti))(N+1/2+ti)^\alpha}{\sen(\pi(N+1/2+ti))(N+1/2+ti)^\alpha} dt,$$

teniendo en cuenta que podemos multiplicar en el numerador y en el denominador por  $z^\alpha$ , con  $\alpha > 1$  como en el enunciado del lema, porque  $z^\alpha$  no se anula nunca en  $C_{N,1}$ . Si tomamos módulos y hacemos que  $N \rightarrow \infty$ ,

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |I_{N,1}| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{|f(N+1/2+ti)| |(N+1/2+ti)^\alpha| |\cos(\pi(N+1/2+ti))|}{|\sen(\pi(N+1/2+ti))| |(N+1/2+ti)^\alpha|} dt \stackrel{1}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|f(N+1/2+ti)| |(N+1/2+ti)^\alpha| |\cos(\pi(N+1/2+ti))|}{|\sen(\pi(N+1/2+ti))| |(N+1/2+ti)^\alpha|} dt \stackrel{2}{=} 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,1} = 0,$$

con dos puntos delicados que hay que justificar con más calma. Sin embargo, suponiendo que  $|\cotg(\pi(N+1/2+ti))|$  está uniformemente acotada en  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ , se deducen las pruebas para los dos pasos que nos preocupan:

1. Si recordamos que  $f$  es holomorfa (y por lo tanto continua) en  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ , y tenemos en cuenta que  $(N+1/2+ti)^\alpha$  no se anula en ese mismo intervalo, podemos concluir que  $H_N(t) = |f(N+1/2+ti)| |(N+1/2+ti)^\alpha|$  es continua en  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ , y además  $H_N$  tiende a 0 por hipótesis cuando  $N \rightarrow \infty$ . De esta forma, la continuidad nos asegura que  $\sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \{H_N(t)\} = s_N \rightarrow 0$  si  $N \rightarrow \infty$ , y como existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|\cotg(\pi(N+1/2+ti))| \leq M \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ , llamando  $L_N(t) = H_N(t) |\cotg(\pi(N+1/2+ti))|$ , se tiene que  $\sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \{L_N(t)\} \leq s_N \cdot M \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . Con ello, podemos meter el límite dentro de la integral por el teorema de la convergencia uniforme.
2. Como  $H_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  y  $|\cotg(\pi(N+1/2+ti))| \leq M \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ , se desprende que  $L_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

Tenemos aún pendiente comprobar que nuestra hipótesis es cierta:

$$|\cotg(z)| = \left| i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \left| 1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1} \right| \leq 1 + \frac{2}{|e^{2iz}|} = 1 + \frac{2}{e^{-2\Im(z)}} \Rightarrow |\cotg(\pi(N+1/2+ti))| \leq 1 + \frac{2}{e^{-2\pi t}} \leq 1 + \frac{2}{e^{-2\pi \epsilon}} \quad \forall t \in [-\epsilon, \epsilon] = M, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

En el caso de  $C_{N,3}$ , correspondiente al lateral izquierdo, tenemos que

$$I_{N,3} = \int_{C_{N,3}} g(z) dz \stackrel{z=-N-1/2+ti}{=} \int_{\epsilon}^{-\epsilon} ig(-N-1/2+ti) dt \stackrel{t=-u}{=} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} -ig(-N-1/2-ui) du = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} ig(N+1/2+ui) du \stackrel{N+1/2+ui=v}{=} \int_{C_{N,1}} g(v) dv = I_{N,1} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,3} = \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,1} = 0,$$

utilizando para ello en la cuarta igualdad que  $g(-z) = f(-z) \cotg(-\pi z) = -f(z) \cotg(\pi z) = -g(z)$ , ya que  $f$  es par por hipótesis y la cotangente es impar.

Llegados a este punto, podemos concluir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,2} + \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,4} = 2i \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m),$$

con  $C_{N,2}$  y  $C_{N,4}$  los lados superior e inferior del rectángulo respectivamente. Sin embargo, podemos relacionar  $I_{N,2}$  e  $I_{N,4}$  gracias a que  $g$  es impar:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,4} &= \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} g(z) dz \stackrel{z=-t}{=} \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} -g(-t) dt = \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} g(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \\ &2 \lim_{N \rightarrow \infty} I_{N,2} = 2 \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} g(z) dz = -2 \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) \cotg(\pi z) dz = 2i \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m), \end{aligned}$$

de donde se sigue, despejando  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)$ , la identidad que queríamos.  $\blacksquare$

Tras este primer resultado, vamos a resaltar otra propiedad útil de las funciones  $f$  con las que estamos trabajando:

**Lema 9** *Sea  $f$  una función como en el lema 8, entonces  $\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} f$ .*

**Demostración** Empezamos definiendo el rectángulo  $T_N$  como aquel que delimita la región  $\{|\Re(z)| \leq N, 0 \leq \Im(z) \leq \epsilon\}$ . En definitiva,  $T_N$  no es más que una curva simple, cerrada,  $C^1$  a trozos y contenida en el dominio de  $f$ , en el que la función es holomorfa, así que el teorema de Cauchy nos asegura que  $I_N = \int_{T_N} f = 0$ .

Por otro lado, la integral de  $f$  sobre  $T_N$  es igual a la suma de las integrales de  $f$  sobre los cuatro lados de  $T_N$ . En este contexto, queremos comprobar que tanto  $I_{N,1}$  como  $I_{N,3}$  se van a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ , con  $I_{N,1}$  e  $I_{N,3}$  las integrales de  $f$  sobre los lados derecho e izquierdo del rectángulo. Para ello, vamos a usar que, por hipótesis y para un  $\alpha > 1$ ,  $|f(z)||z|^\alpha \rightarrow 0$  si  $|\Re(z)| \rightarrow \infty$ , lo que implica necesariamente que  $|f(z)|$  tiende a 0 al acercarse  $|\Re(z)|$  a infinito:

$$|I_{N,1}| = \left| \int_{T_{N,1}} f(z) dz \right| \leq \text{Long}(T_{N,1}) \cdot \max_{z \in T_{N,1}} \{|f(z)|\} = \epsilon \cdot \max_{t \in [0, \epsilon]} \{|f(N+ti)|\} = \epsilon \cdot C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0;$$

$$|I_{N,3}| = \left| \int_{T_{N,3}} f(z) dz \right| \leq \text{Long}(T_{N,3}) \cdot \max_{z \in T_{N,3}} \{|f(z)|\} = \epsilon \cdot \max_{r \in [0, \epsilon]} \{|f(-N+ri)|\} = \epsilon \cdot D_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

donde  $C_N, D_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  por ser ambos módulos de  $f$  en puntos cuya parte real en valor absoluto vale  $N$  y, por lo tanto, se va a infinito.

Con lo que hemos recopilado, si llamamos  $I_{N,2}$  e  $I_{N,4}$  a las integrales de  $f$  sobre los lados superior e inferior del rectángulo respectivamente,

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (I_{N,1} + I_{N,2} + I_{N,3} + I_{N,4}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (I_{N,2} + I_{N,4}) = \int_{\infty+i\epsilon}^{-\infty+i\epsilon} f(z) dz + \int_{\mathbb{R}} f,$$

extrayéndose de esta expresión el resultado que queríamos si despejamos  $\int_{\mathbb{R}} f$ .  $\blacksquare$

Todo lo que llevamos hasta ahora nos va a permitir hallar una variante de la fórmula de sumación de Poisson [9], [13, §2.7], pero aún necesitamos un pequeño detalle más: comprobar que, para  $\Im(z) > 0$ ,  $i \cotg(z) - 1 = 2e^{2iz} + 2e^{4iz} + 2e^{6iz} + \dots$ , algo que vamos a hacer expandiendo ambos términos y viendo que coinciden en el semiplano superior de  $\mathbb{C}$ :

$$i \cotg(z) - 1 = \frac{i \cos(z)}{\sen(z)} - 1 = \frac{-(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} - 1 = \frac{2e^{iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2niz} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (e^{2iz})^n = -2 + \frac{2}{1 - e^{2iz}} = \frac{2e^{iz}}{e^{-iz} - e^{iz}} \quad \text{si } \Im(z) > 0,$$

donde la condición  $\Im(z) > 0$  es suficiente para asegurar la convergencia de nuestra progresión geométrica de razón  $r = e^{2iz}$ .

Ya estamos en condiciones de llegar a nuestra primera identidad de provecho, válida para funciones  $f$  como en el lema 8. Para ello, solo tenemos que sustituir en el primer paso los dos

términos que aparecen por sus expresiones equivalentes, apoyándonos en las dos igualdades que hemos probado de momento en el capítulo:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) - \int_{\mathbb{R}} f = i \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) \cot g(\pi z) dz - \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) dz = \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) (i \cot g(\pi z) - 1) dz,$$

pero si observamos que en los  $z$  sobre los que estamos integrando, siempre tenemos que  $\Im(z) = \epsilon > 0$ , podemos escribir en lugar de  $i \cot g(\pi z) - 1$  su forma de serie, dando lugar a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) - \int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} 2f(z) \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k z} dz \stackrel{\text{TCU}}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) e^{2\pi i k z} dz, \quad (6)$$

donde TCU indica que hemos podido sacar el sumatorio fuera de la integral gracias al teorema de convergencia uniforme, que se puede aplicar en este caso porque, como  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k z}$  converge absolutamente a  $i \cot g(z) - 1$  en  $\Im(z) = \epsilon > 0$ , también lo hace uniformemente en esa región por el criterio M de Weierstrass.

Tras haber obtenido (6), el siguiente paso es definir la función

$$g_s(z) = p_s(z) + p_s(-z), \quad \text{con } p_s(z) = (Q(z, 1))^{-s},$$

que es holomorfa en  $z$  allá donde no se anule ni  $Q(z, 1)$  ni  $Q(-z, 1)$ . En particular, como la unión de los ceros de ambas formas cuadráticas da lugar al conjunto  $A = \{z_Q, \bar{z}_Q, -z_Q, -\bar{z}_Q\}$ , cumpliéndose que  $|\Im(a)| = \frac{\sqrt{D}}{2a} > 0 \quad \forall a \in A$ , podemos concluir que  $g_s(z)$  es holomorfa en  $B = \{|\Im(z)| < 2\epsilon\}$  para cada  $s \in \mathbb{C}$ , con la rama usual de las potencias, si elegimos  $0 < \epsilon \leq \frac{\sqrt{D}}{4a}$ .

Una observación útil es que  $g_s(z/n) \in \mathcal{H}(B)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  en realidad, ya que  $|\Im(z/n)| = \frac{|\Im(z)|}{n} \leq |\Im(z)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Con ello, se cumplen las tres condiciones necesarias para poder aplicar (6) a  $f(z) = n^{-2s} g_s(z/n)$  en  $\Re(s) > 1$ :

1. Existe  $\epsilon > 0$ , en este caso  $\epsilon = \frac{\sqrt{D}}{4a}$ , tal que  $f : \{|\Im(z)| < 2\epsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa para todo  $n \in \mathbb{N}$  si  $\Re(s) > 1$ . Cabe destacar que no hay problemas con la rama de las potencias gracias a que estamos trabajando en  $\Re(s) > 1$ .
2. Como  $g(z) = g(-z)$  por cómo la hemos definido,  $f$  es claramente par.
3. El módulo de  $f(z)$  decae a 0 como  $\frac{1}{|z|^{2s}} = \frac{1}{|z|^{2\Re(s)}}$ , que es menor que  $\frac{1}{|z|^2}$  en  $\Re(s) > 1$ . De esta forma, tomando  $1 < \alpha < 2$ , se tiene que  $|f(z)||z|^\alpha \rightarrow 0$  cuando  $|\Re(z)| \rightarrow \infty$ .

Podemos pasar, por lo tanto, a sustituir  $f(z) = n^{-2s} g_s(z/n)$  en ambos términos de (6) y luego igualarlos en  $\Re(s) > 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} n^{-2s} g_s(m/n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} n^{-2s} (p_s(m/n) + p_s(-m/n)) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} n^{-2s} \left( (Q(m/n, 1))^{-s} + (Q(-m/n, 1))^{-s} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( (n^2 Q(m/n, 1))^{-s} + (n^2 Q(-m/n, 1))^{-s} \right) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( (Q(m, n))^{-s} + (Q(m, -n))^{-s} \right); \quad \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} n^{-2s} g_s(z/n) dz \stackrel{z=nt}{=} \int_{\mathbb{R}} n^{-2s+1} g_s(t) dt = \\ &= \frac{1}{n^{2s-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} p_s(t) dt + \int_{\mathbb{R}} p_s(-u) du \right) \stackrel{u=-v}{=} \frac{1}{n^{2s-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} p_s(t) dt + \int_{\infty}^{-\infty} -p_s(v) dv \right) = \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{\mathbb{R}} p_s; \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z) e^{2\pi i k z} dz = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} n^{-2s} g_s(z/n) e^{2\pi i k z} dz \stackrel{z=nt}{=} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \int_{-\infty+i\frac{\epsilon}{n}}^{\infty+i\frac{\epsilon}{n}} n^{-2s+1} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \stackrel{\epsilon=n\delta}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( (Q(m, n))^{-s} + (Q(m, -n))^{-s} \right) - \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{\mathbb{R}} p_s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \quad \text{si } \Re(s) > 1.$$

Si ahora sumamos en  $n \in \mathbb{N}$  a los dos lados de la identidad de arriba, llegamos finalmente a la expresión que nos interesa para nuestro propósito:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( (Q(m, n))^{-s} + (Q(m, -n))^{-s} \right) - \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{\mathbb{R}} p_s \right) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( (Q(m, n))^{-s} + (Q(m, -n))^{-s} \right) - 2 \int_{\mathbb{R}} p_s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1}} = \\ & \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (Q(m, n))^{-s} - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \stackrel{(6)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \quad \text{si } \Re(s) > 1, \end{aligned}$$

pudiendo pasar de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2s-1}$  a  $\zeta(2s-1)$  porque  $\Re(2s-1) > 1$  está garantizado por la condición  $\Re(s) > 1$ .

A la vista de lo que hemos obtenido, y teniendo en cuenta que el siguiente paso será hacer que  $s$  tienda a  $1^+$ , nos gustaría calcular explícitamente la integral que aparece en el término de la derecha con  $s = 1$ :

**Lema 10**  $\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} (e^{2\pi i k n z_Q} + e^{-2\pi i k n \bar{z}_Q}).$

**Demostración** Sabiendo que  $Q(t, 1) = a(t - z_Q)(t - \bar{z}_Q)$  y  $Q(-t, 1) = a(t + z_Q)(t + \bar{z}_Q)$ , podemos reescribir ambos términos usando la decomposición en fracciones simples, quedando  $Q(t, 1) = a(z_Q - \bar{z}_Q) \left( (t - z_Q)^{-1} - (t - \bar{z}_Q)^{-1} \right)^{-1}$  y  $Q(-t, 1) = a(z_Q - \bar{z}_Q) \left( (t + \bar{z}_Q)^{-1} - (t + z_Q)^{-1} \right)^{-1}$ . De esta forma,

$$\begin{aligned} g_1(t) e^{2\pi i k n t} &= (p_1(t) + p_1(-t)) e^{2\pi i k n t} = \left( \frac{1}{Q(t, 1)} + \frac{1}{Q(-t, 1)} \right) e^{2\pi i k n t} = \\ & \frac{e^{2\pi i k n t}}{a(z_Q - \bar{z}_Q)} \left( \frac{1}{t - z_Q} - \frac{1}{t - \bar{z}_Q} + \frac{1}{t + \bar{z}_Q} - \frac{1}{t + z_Q} \right). \end{aligned}$$

Lo anterior nos motiva a considerar la región  $G_N = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > \delta, |z| < N\}$ , que para  $N > \lceil |z_Q| \rceil$  es no vacía y, de hecho, contiene en su dominio interior a los puntos  $z_Q$  y  $-\bar{z}_Q$ :

$$\Im(z_Q) = \Im(-\bar{z}_Q) = \frac{\sqrt{D}}{2a} > \frac{\sqrt{D}}{4a} \geq \epsilon \geq \frac{\epsilon}{n} = \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad |z_Q| = |-\bar{z}_Q| \leq \lceil |z_Q| \rceil < N.$$

Nuestro objetivo es, tomando  $N > \lceil |z_Q| \rceil$  para que tenga sentido el razonamiento, integrar  $g_1(t) e^{2\pi i k n t}$  sobre la curva  $W_N$  que delimita  $G_N$ :

$$\int_{W_N} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \frac{1}{a(z_Q - \bar{z}_Q)} \left( \int_{W_N} \frac{e^{2\pi i k n t}}{t - z_Q} dt - \int_{W_N} \frac{e^{2\pi i k n t}}{t - \bar{z}_Q} dt + \int_{W_N} \frac{e^{2\pi i k n t}}{t + \bar{z}_Q} dt - \int_{W_N} \frac{e^{2\pi i k n t}}{t + z_Q} dt \right),$$

siendo las cuatro integrales que aparecen aquí muy fáciles de resolver aplicando el teorema integral de Cauchy: la función (de  $t$ )  $e^{2\pi i k n t}$  es entera y  $W_N$  es, para  $N > \lceil |z_Q| \rceil$ , un contorno con orientación positiva contenido, junto con su dominio interior, en  $\mathbb{C}$ , así que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{W_N} \frac{e^{2\pi i k n t}}{t - a} dt = \begin{cases} e^{2\pi i k n a} & \text{si } a \in G_N; \\ 0 & \text{si } a \in (\overline{G_N})^c. \end{cases}$$

En definitiva, teniendo en cuenta que  $z_Q, -\bar{z}_Q \in G_N$  y  $\bar{z}_Q, -z_Q \in (\overline{G_N})^c$  si  $N > \lceil |z_Q| \rceil$ , y sabiendo que  $a(z_Q - \bar{z}_Q) = i\sqrt{D}$ , obtenemos que

$$\int_{W_N} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} (e^{2\pi i k n z_Q} + e^{-2\pi i k n \bar{z}_Q})$$

cuando  $N > \lceil |z_Q| \rceil$ . Por último, si hacemos tender  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{W_N} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} (e^{2\pi i k n z_Q} + e^{-2\pi i k n \bar{z}_Q}),$$

para lo que hemos utilizado en la primera igualdad que la integral sobre el arco  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = N, \Im(z) \geq \delta\}$  tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$  por el lema de Jordan [25], que podemos aplicar porque se cumplen sus 3 hipótesis:

1.  $g_1$  es una función holomorfa en  $\Delta_N = \{t \in \mathbb{C} : |t| \geq N, \Im(t) \geq \delta\}$  si  $N > \lceil |z_Q| \rceil$ , así que es también continua en  $\Delta_N$ .
2.  $g_1(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$  porque  $g_1(t) = p_1(t) + p_1(-t)$ , con  $p_1(t)$ ,  $p_1(-t)$  los inversos de dos polinomios de grado 2.
3. Si llamamos  $\alpha$  al número tal que  $e^{2\pi i k n t} = e^{i\alpha t}$ , vemos que  $\alpha = 2\pi k n > 0 \forall n, k \in \mathbb{N}$ . ■

Ya podemos considerar la expresión a la que hemos llegado al aplicar (6) a  $f(z) = n^{-2s} g_s(z/n)$  y hacer que  $s$  tienda a  $1^+$  en sus dos miembros, algo que mantiene la igualdad. Empezamos por el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (Q(m, n))^{-s} - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \right) = \\ & \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (Q(m, 0))^{-s} - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \right) = \\ & \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \right) - \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (Q(m, 0))^{-1} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \right) - \frac{2\zeta(2)}{a}, \end{aligned}$$

usando en el último paso que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (Q(m, 0))^{-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{am^2} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{2\zeta(2)}{a}.$$

Ahora tomamos el límite cuando  $s \rightarrow 1^+$  en el otro lado, teniendo en cuenta que podemos aplicar el teorema de Fubini (F) para cambiar el orden de los sumatorios y el teorema de convergencia uniforme (TCU) para meter el límite dentro de las sumas y la integral porque estamos trabajando con  $s$  tendiendo a  $1^+$ , así que  $\Re(s) > 1$  y, por lo tanto, caemos en la región de convergencia absoluta de los dos términos de nuestra identidad y, en particular, del derecho:

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \right) \stackrel{F}{=} \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \right) \stackrel{TCU}{=} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \stackrel{TCU}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} \lim_{s \rightarrow 1^+} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_1(t) e^{2\pi i k n t} dt = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k n z_Q} + e^{-2\pi i k n \bar{z}_Q}}{n}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es una aplicación directa del lema 10.

Aún queremos simplificar algo más el resultado del último límite, para lo que tenemos que recordar que  $d(z) = 1/(1-z)$  es analítica en  $|z| < 1$ , siendo su serie de Taylor en este dominio  $d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Con ello, deducimos que la primitiva de  $d$ ,  $D(z) = -\log(1-z)$ , también es analítica en  $|z| < 1$ , verificándose que  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$  converge absolutamente a  $D(z)$  en  $|z| < 1$ . Aplicando esto a  $z_1 = e^{2\pi i k z_Q}$  y a  $z_2 = e^{-2\pi i k \bar{z}_Q}$ , algo que podemos hacer porque  $|z_1| = |z_2| = e^{-\pi k \sqrt{D}/a} < 1$  al ser  $-\pi k \sqrt{D}/a < 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , obtenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} (\log(1 - e^{2\pi i k z_Q}) + \log(1 - e^{-2\pi i k \bar{z}_Q})).$$

Finalmente, observamos que  $\bar{z}_1 = z_2$ , así que notando la igualdad elemental  $\log(1 - z) + \log(1 - \bar{z}) = \log|1 - z|^2$ , concluimos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} g_s(t) e^{2\pi i k n t} dt \right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \log|1 - e^{2\pi i k z_Q}|^2.$$

Solo nos queda igualar los límites que hemos obtenido en ambos términos de la identidad de partida:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s \right) = \frac{2\zeta(2)}{a} - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \log|1 - e^{2\pi i k z_Q}|^2. \quad (7)$$

Como vemos, hemos llegado a una expresión que se parece a (5) y que, de hecho, nos da esa fórmula si le sumamos un límite más, con el que vamos a trabajar ahora:

$$L = \lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(2s-1) \left( 2 \int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \right).$$

En primer lugar, recordamos que, según explicamos en el anexo A,  $\text{Res}(\zeta; 1) = \lim_{k \rightarrow 1} (k-1)\zeta(k) = 1$ , así que haciendo el cambio de variables  $k = 2s-1$ , nos queda  $\text{Res}(\zeta; 1) = \lim_{s \rightarrow 1} (2s-2)\zeta(2s-1) = 1$ . De esta forma, si multiplicamos en el numerador y en el denominador de nuestro límite por  $2s-2$ , algo que no afecta al resultado, nos queda

$$L = \lim_{s \rightarrow 1^+} (2s-2)\zeta(2s-1) \frac{2 \int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}}}{2s-2} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{2 \int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}}}{2s-2} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{2\pi}{\sqrt{D}}}{s-1} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{f(s)}{g(s)},$$

pero vamos a comprobar que  $f(1) = g(1) = 0$  y, por lo tanto, nos encontramos ante una indeterminación del tipo 0/0:

1. Si consideramos, para  $N > |z_Q|$ , la curva  $\beta_N$  que delimita la región  $J_N = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0, |z| \leq N\}$ , es fácil ver que  $\beta_N$  es un contorno con orientación positiva, contenido en  $\Im(z) > -\frac{\sqrt{D}}{4a}$  y tal que  $z_Q$  pertenece a su dominio interior. Además,  $p_1$  es holomorfa en  $\omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > -\frac{\sqrt{D}}{4a}\} \setminus \{z_Q\}$ , de tal forma que, por el teorema de los residuos,

$$\int_{\beta_N} p_1 = 2\pi i \text{Res}(p_1; z_Q) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_Q} \frac{(z - z_Q)}{a(z - z_Q)(z - \bar{z}_Q)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{a(z_Q - \bar{z}_Q)} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

para todo  $N > |z_Q|$ , utilizando en la segunda igualdad que  $z_Q$  es un polo simple de  $p_1$ , ya que  $\lim_{z \rightarrow z_Q} (z - z_Q)p_1(z) = \frac{1}{i\sqrt{D}}$  no es ni 0 ni infinito. Ahora, haciendo que  $N$  tienda a  $+\infty$ , concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\beta_N} p_1 = \int_{\mathbb{R}} p_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \Rightarrow f(1) = 0,$$

usando en el cálculo del límite que la integral de  $p_1$  sobre la semicircunferencia  $S_N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = N, \Im(z) \geq 0\}$  se va a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$  porque  $p_1$  es una función racional con grado 2 unidades mayor en el denominador que en el numerador.

2.  $g(1) = 1 - 1 = 0$ .

Una forma de sortear la indeterminación es aplicando la regla de L'Hôpital, de manera que  $L = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{f'(s)}{g'(s)}$ , donde  $g'(s) = 1$  y  $f'(s)$  la podemos hallar gracias al teorema de derivación de integrales paramétricas:

1. Tomamos  $v(s) = \int_{\mathbb{R}} p_s(z) dz = \int_{\mathbb{R}} (Q(z, 1))^{-s}$ , y observamos que, como  $(Q(z, 1))^{-s} = e^{-s \log(Q(z, 1))}$ ,  $p_s(z)$  es continua  $\forall s \in \mathbb{R}$  y para todo  $z$  tal que  $\log(Q(z, 1))$  sea continuo en  $Q(z, 1)$ . Sin embargo, tenemos que  $Q(z, 1) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$  para ningún  $z \in \mathbb{R}$ , y sabemos que el logaritmo es continuo en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ , así que deducimos que  $p_s(z) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

2. Además,  $\frac{\partial}{\partial s} p_s(z)$  existe y es igual a  $-\log(Q(z, 1)) \cdot (Q(z, 1))^{-s}$ , así que es continua en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  por el mismo argumento que antes.
3. Lo anterior nos permite asegurar que  $\exists v'(s) \forall s \in \mathbb{R}$  y que  $v'(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial s} p_s(z) dz$  para todo  $s$  real.

Con el razonamiento que hemos llevado a cabo,  $f'(s) = v'(s)$ , de donde se extrae que

$$L = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{f'(s)}{g'(s)} = \lim_{s \rightarrow 1^+} v'(s) = v'(1) = \int_{\mathbb{R}} (Q(z, 1))^{-1} \log(Q(z, 1))^{-1} dz = \int_{\mathbb{R}} p_1 \log p_1.$$

A la vista de lo que hemos obtenido, nos gustaría computar explícitamente la integral que aparece como límite:

**Lema 11**  $\int_{\mathbb{R}} p_1 \log p_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log(\sqrt{a/D}).$

**Demostración** Descomponemos  $p_1(z) = (Q(z, 1))^{-1}$  en fracciones simples como ya hicimos en la prueba del lema 10, llegando a que

$$p_1(z) = \frac{1}{a(z_Q - \bar{z}_Q)} \left( \frac{1}{z - z_Q} - \frac{1}{z - \bar{z}_Q} \right) = \frac{1}{i\sqrt{D}} \left( \frac{1}{z - z_Q} - \frac{1}{z - \bar{z}_Q} \right).$$

Con ello, el paso clave en este caso es hacer el cambio de variables  $z = \frac{1}{2a}(\sqrt{D} \tan(\frac{t}{2}) - b)$ , convirtiéndose así  $p_1(z)$  en

$$\begin{aligned} p_1 \left( \frac{1}{2a} \left( \sqrt{D} \tan \left( \frac{t}{2} \right) - b \right) \right) &= \frac{1}{i\sqrt{D}} \left( \frac{2a}{\sqrt{D} \tan \left( \frac{t}{2} \right) - b + b - i\sqrt{D}} - \frac{2a}{\sqrt{D} \tan \left( \frac{t}{2} \right) - b + b + i\sqrt{D}} \right) = \\ &= \frac{2a}{i\sqrt{D}} \left( \frac{1}{\tan \left( \frac{t}{2} \right) - i} - \frac{1}{\tan \left( \frac{t}{2} \right) + i} \right) = \frac{2a}{i\sqrt{D}} \cdot \frac{\tan \left( \frac{t}{2} \right) + i - \tan \left( \frac{t}{2} \right) + i}{\tan^2 \left( \frac{t}{2} \right) + 1} = \frac{4a}{D} \cos^2 \left( \frac{t}{2} \right) \Rightarrow \\ \log \left( p_1 \left( \frac{1}{2a} \left( \sqrt{D} \tan \left( \frac{t}{2} \right) - b \right) \right) \right) &= \log \left( \frac{4a}{D} \cos^2 \left( \frac{t}{2} \right) \right) = 2 \log \left( 2\sqrt{\frac{a}{D}} \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Además, bajo esta transformación,  $dz = \frac{\sqrt{D}}{4a \cos^2(t/2)} dt$ , y los nuevos límites de integración si estábamos trabajando en  $(-\infty, \infty)$  pasan a ser, respectivamente,  $-\pi$  y  $\pi$ . De esta forma, juntando todo lo que hemos recopilado, la integral  $\int_{\mathbb{R}} p_1 \log p_1$  es igual a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\sqrt{D}} \log \left( 2\sqrt{\frac{a}{D}} \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt &= \frac{2}{\sqrt{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) dt + \frac{2}{\sqrt{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( 2 \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt = \\ \frac{2t}{\sqrt{D}} \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{2}{\sqrt{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( 2 \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt &= \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) + \frac{2}{\sqrt{D}} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( 2 \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt, \end{aligned}$$

así que habremos acabado si conseguimos comprobar que  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \log(2 \cos(t/2)) dt = 0$ .

Antes de ponernos manos a la obra, vamos a transformar el integrando para que nos resulte más fácil trabajar con él:

1. Empezamos observando que  $\Re(\log(1 + e^{it})) = \log(2 \cos(t/2))$ :

$$\begin{aligned} \Re(\log(1 + e^{it})) &= \log |1 + e^{it}| = \log |1 + \cos(t) + i \sen(t)| = \log \left( \sqrt{1 + 2 \cos(t) + \cos^2(t) + \sen^2(t)} \right) = \\ &= \log \left( \sqrt{2 + 2 \cos(t)} \right) = \log \left( \sqrt{4 \cos^2(t/2)} \right) = \log(2 \cos(t/2)), \end{aligned}$$

donde la quinta igualdad se deduce al usar que  $\cos(t) = 2 \cos^2(t/2) - 1$ . Con ello, nos queda

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( 2 \cos \left( \frac{t}{2} \right) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Re(\log(1 + e^{it})) dt = \Re \left( \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + e^{it}) dt \right).$$

2. Lo siguiente que hay que hacer es acordarse de la identidad  $-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ , que converge absolutamente en  $|z| < 1$  tal y como ya comentamos anteriormente en este capítulo. En particular, tomando  $z = -re^{it}$ , con  $|r| < 1$ , tenemos que  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n e^{int}}{n} = \log(1+re^{it})$   $\forall t \in [-\pi, \pi]$ , con convergencia absoluta porque  $| -re^{it} | = |r| < 1 \forall t \in [-\pi, \pi]$ . Gracias a esta relación,

$$I = \Re \left( \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \log(1+re^{it}) dt \right) = -\Re \left( \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n e^{int}}{n} dt \right),$$

pero podemos meter el límite dentro del sumatorio por el TCU, ya que hay convergencia uniforme del sumatorio en  $|r| < 1$  por el criterio  $M$  de Weierstrass:

$$I = -\Re \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n r^n e^{int}}{n} dt \right).$$

Además, por el mismo motivo que antes, podemos volver a aplicar el TCU para sacar el sumatorio fuera de la integral:

$$I \stackrel{\text{TCU}}{=} -\Re \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^n r^n e^{int}}{n} dt \right) = -\Re \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt \right),$$

con  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , de donde se desprende que  $I = 0$ , tal y como queríamos. ■

Con lo que acabamos de probar, en realidad hemos terminado de evaluar el segundo límite que necesitamos, junto con (7), para estar en condiciones de llegar a la fórmula límite de Kronecker fácilmente:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(2s-1) \left( 2 \int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right). \quad (8)$$

Solo nos hace falta un pequeño ingrediente más para pasar a demostrar (5):

**Lema 12**  $\log |\eta(z_Q)|^{-2} = \frac{\pi\sqrt{D}}{12a} - \sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2$ .

**Demostración** Sabemos que  $\eta(z_Q) = e^{\pi iz_Q/12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi ikz_Q})$ , y tomando el módulo al cuadrado,

$$|\eta(z_Q)|^2 = |e^{\pi iz_Q/12}|^2 \prod_{k=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2 = |e^{-\frac{\pi ib - \pi\sqrt{D}}{24a}}| \prod_{k=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2 = e^{-\frac{\pi\sqrt{D}}{12a}} \prod_{k=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2.$$

Con lo anterior, podemos pasar a calcular la expresión del enunciado:

$$\log |\eta(z_Q)|^{-2} = -\log |\eta(z_Q)|^2 = -\log \left( e^{-\frac{\pi\sqrt{D}}{12a}} \prod_{k=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2 \right) = \frac{\pi\sqrt{D}}{12a} - \sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2. \quad \blacksquare$$

Ya tenemos todo lo necesario para probar el resultado principal de este capítulo:

**Demostración del teorema 7:** todo se reduce a sumar los límites (7) y (8), teniendo en cuenta en el primero de ellos que  $\zeta(2) = \pi^2/6$ , así que  $\frac{2\zeta(2)}{a} = \frac{\pi^2}{3a}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - 2\zeta(2s-1) \int_{\mathbb{R}} p_s + \zeta(2s-1) \left( 2 \int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \right) \right) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(s, Q) - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \zeta(2s-1) \right) = \\ \frac{\pi^2}{3a} - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2 + \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) &= \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \left( \frac{\pi\sqrt{D}}{12a} - \sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - e^{2\pi ikz_Q}|^2 + \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) \right) \stackrel{12}{=} \\ \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \left( \log |\eta(z_Q)|^{-2} + \log \left( \sqrt{\frac{a}{D}} \right) \right) &= \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log \frac{\sqrt{a/D}}{|\eta(z_Q)|^2} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{D}}{4\pi} \zeta(s, Q) - \zeta(2s-1) \right) = \log \frac{\sqrt{a/D}}{|\eta(z_Q)|^2}, \end{aligned}$$

donde 12 indica que hemos usado el último lema en esa igualdad. ■

### 3.2. Conexión entre las funciones eta y theta

Vamos a terminar el capítulo relacionando las funciones  $\eta$  de Dedekind y  $\theta$  de Jacobi, centrándonos sobre todo en un caso concreto, para el que nos será útil tener en cuenta una identidad que involucra a los módulos de  $\eta((1+i)/2)$  y  $\eta(i)$ :

**Lema 13**  $|\eta((1+i)/2)| = |\eta(i)|\sqrt[4]{2}$ .

**Demostración** Consideramos  $Q_j(x, y) = x^2 + (y - jx)^2$ , con  $j \in \{0, 1\}$ , y comprobamos que  $\zeta(s, Q_1) = \zeta(s, Q_0)$  en todo su dominio de convergencia absoluta, es decir, en  $\Re(s) > 1$ :

$$\begin{aligned} \zeta(s, Q_1) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (Q_1(m, n))^{-s} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m^2 + (n-m)^2)^{-s} \stackrel{n=k+m}{=} \\ &= \sum_{(m,k+m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m^2 + k^2)^{-s} = \sum_{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m^2 + k^2)^{-s} = \sum_{(m,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (Q_0(m, k))^{-s} = \zeta(s, Q_0) \end{aligned}$$

para  $\Re(s) > 1$ , observando en la cuarta igualdad que pedir que  $(m, k+m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$  es equivalente a que  $(m, k)$  recorra  $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Por otro lado, si escribimos  $Q_0(x, y) = x^2 + y^2$  y  $Q_1(x, y) = x^2 + (y-x)^2 = 2x^2 - 2xy + y^2$ , vemos que  $D_0 = 4a_0c_0 - b_0^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 0^2 = 4$  y  $D_1 = 4a_1c_1 - b_1^2 = 4 \cdot 2 \cdot 1 - (-2)^2 = 4$ , así que además de la coincidencia entre  $\zeta(s, Q_0)$  y  $\zeta(s, Q_1)$ , tenemos que  $D_0 = D_1$  y, como consecuencia,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{D_0}}{4\pi} \zeta(s, Q_0) - \zeta(2s-1) \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{D_1}}{4\pi} \zeta(s, Q_1) - \zeta(2s-1) \right),$$

pero aplicando (5) en ambos términos, llegamos a que

$$\log \frac{\sqrt{a_0/D_0}}{|\eta(z_{Q_0})|^2} = \log \frac{\sqrt{a_1/D_1}}{|\eta(z_{Q_1})|^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1/4}}{|\eta(z_{Q_0})|^2} = \frac{\sqrt{2/4}}{|\eta(z_{Q_1})|^2} \Rightarrow |\eta(z_{Q_1})| = \sqrt[4]{2} |\eta(z_{Q_0})|.$$

A modo de aclaración, cabe destacar que la fórmula (5) es válida en este caso porque  $Q_0$  y  $Q_1$  son formas cuadráticas reales tales que  $D_0 = D_1 = 4 > 0$ ,  $a_0 = 1 > 0$  y  $a_1 = 2 > 0$ . Solo nos queda, por lo tanto, calcular  $z_{Q_0}$  y  $z_{Q_1}$ :

$$\left. \begin{aligned} z_{Q_0} &= \frac{-b_0 + i\sqrt{D_0}}{2a_0} = \frac{-0 + i\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = i \\ z_{Q_1} &= \frac{-b_1 + i\sqrt{D_1}}{2a_1} = \frac{-(-2) + i\sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{1+i}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\eta((1+i)/2)| = \sqrt[4]{2} |\eta(i)|.$$

■

La relación anunciada entre  $\eta$  y  $\theta$ , en el caso general, es una aplicación directa de la fórmula del triple producto de Jacobi:

**Lema 14**  $\theta(0, e^{\pi i \tau}) = \eta^2((\tau+1)/2)/\eta(\tau+1)$  si  $\Im(\tau) > 0$ .

**Demostración** Comenzamos observando que la condición  $\Im(\tau) > 0$  nos garantiza que  $|e^{\pi i \tau}| < 1$  e  $\Im((\tau+1)/2)$ ,  $\Im(\tau+1) > 0$ , de manera que todas las funciones involucradas en la prueba son holomorfas en un entorno de los puntos en los que están siendo evaluadas y, por lo tanto, no hay problemas de convergencia con los productos infinitos implicados.

Por otro lado, la aparición de  $\eta(\tau+1)$  en el denominador del término derecho tampoco es conflictiva, ya que por el teorema de Hurwitz,  $\eta(z)$  solo se anula en los puntos de  $\Im(z) > 0$  en los que se haga 0 alguno de sus infinitos factores, pero  $e^{\pi i z/12} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$  y  $e^{2\pi i n z} = 1$  si y solo si  $z = k/n$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , algo imposible si  $\Im(z) > 0$ . De esta forma, como  $\Im(\tau+1) = \Im(\tau) > 0$ , concluimos que  $\eta(\tau+1) \neq 0$ .

Tras los dos comentarios que hemos hecho, basta comprobar la igualdad formal  $\eta(\tau+1)\theta(0, e^{\pi i \tau}) = \eta^2((\tau+1)/2)$ , para lo que desarrollaremos ambos lados, empezando por el izquierdo, hasta llegar a la misma expresión:

$$\eta(\tau+1)\theta(0, e^{\pi i \tau}) \stackrel{(1)}{=} e^{\pi i(\tau+1)/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n(\tau+1)}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i k \tau})(1 + e^{\pi i \tau(2k-1)})^2 \stackrel{e^{\pi i \tau} = q}{=}$$

$$q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} e^{2\pi i n}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 + q^{2k-1})^2 =$$

$$q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 + q^{2k-1})^2 = q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^2 (1 + q^{2k-1})^2,$$

donde (1) en el primer paso nos indica que hemos utilizado la fórmula del triple producto, válida por ser  $\Im(\tau) > 0$ , para evaluar  $\theta(0, e^{\pi i \tau})$ . Vamos ahora con el otro miembro:

$$\eta^2((\tau + 1)/2) = (e^{\pi i(\tau+1)/(2 \cdot 12)})^2 \prod_{a=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i a(\tau+1)/2})^2 = e^{\pi i(\tau+1)/12} \prod_{a=1}^{\infty} (1 - e^{\pi i a(\tau+1)})^2 \stackrel{e^{\pi i \tau} = q}{=}$$

$$q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{a=1}^{\infty} (1 - q^a e^{\pi i a})^2 = q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{a=1}^{\infty} (1 - (-1)^a q^a)^2 =$$

$$q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{b \in \mathbb{N}, b \text{ par}} (1 - (-1)^b q^b)^2 \cdot \prod_{c \in \mathbb{N}, c \text{ impar}} (1 - (-1)^c q^c)^2 \stackrel{b=2n, c=2k-1}{=}$$

$$q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k-1})^2 = q^{1/12} e^{\pi i/12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^2 (1 + q^{2k-1})^2. \quad \blacksquare$$

Ahora, evaluamos la fórmula límite de Kronecker con  $Q(x, y) = x^2 + y^2$  y aplicamos luego el resultado que acabamos de ver, llegamos a una sorprendente relación que involucra a la función  $r(n)$  del capítulo anterior:

**Proposición 6**  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} - \zeta(2s - 1) \right) = -\log \left( \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-\pi n} \right).$

**Demostración** Como  $Q(x, y) = x^2 + y^2$  es una forma cuadrática real con  $a = 1 > 0$  y  $D = 4ac - b^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 0^2 = 4 > 0$ , podemos hacer uso de (5), quedándonos

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{D}}{4\pi} \zeta(s, Q) - \zeta(2s - 1) \right) = \log \frac{\sqrt{a/D}}{|\eta(z_Q)|^2} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{2\pi} \zeta(s, Q) - \zeta(2s - 1) \right) = \log \frac{1/2}{|\eta(i)|^2}$$

si tenemos en cuenta que  $z_Q = \frac{-b+i\sqrt{D}}{2a} = \frac{-0+i\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = i$ . Nuestro objetivo es, por lo tanto, transformar ambos términos de la igualdad hasta llegar a lo que necesitamos, empezando por el lado izquierdo:

$$\zeta(s, Q) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(Q(a,b))^s} = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(a^2 + b^2)^s} \stackrel{a^2 + b^2 = n}{=}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} : n = a^2 + b^2\}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{2\pi} \zeta(s, Q) - \zeta(2s - 1) \right) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} - \zeta(2s - 1) \right),$$

con el cuarto paso justificado porque, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} : n = a^2 + b^2\} = \#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : n = a^2 + b^2\} = r(n)$ .

Para trabajar con el lado derecho, vamos a empezar escribiendo  $|\eta(i)|^2$  en términos de la función  $\theta$ :

$$|\eta(i)|^2 \stackrel{13}{=} \frac{|\eta((1+i)/2)|^2}{\sqrt{2}} = \frac{|\eta^2((1+i)/2)|}{\sqrt{2}} \stackrel{14}{=} \frac{|\theta(0, e^{-\pi})| |\eta(i+1)|}{\sqrt{2}},$$

donde 13, 14 hacen referencia a que hemos aplicado, respectivamente, los dos lemas de esta sección, funcionando el segundo de ellos porque tomamos  $\tau = i$ , e  $\Im(i) > 0$ , tal y como necesitábamos. Nos va a ayudar a seguir con nuestro cometido saber que

$$\eta(i+1) = e^{\pi i(i+1)/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n(i+1)}) = e^{-\pi/12} e^{\pi i/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n} e^{2\pi i n}) =$$

$$e^{\pi i/12} e^{\pi i \cdot i/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \cdot i}) = e^{\pi i/12} \eta(i) \Rightarrow |\eta(i+1)| = |e^{\pi i/12}| |\eta(i)| = |\eta(i)|,$$

de manera que

$$|\eta(i)|^2 = \frac{|\theta(0, e^{-\pi})| |\eta(i)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\eta(i)| = \frac{|\theta(0, e^{-\pi})|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\eta(i)|^2 = \frac{|\theta(0, e^{-\pi})|^2}{2} = \frac{|\theta^2(0, e^{-\pi})|}{2},$$

siendo posible en la primera implicación dividir por  $|\eta(i)|$  gracias a que  $\Im(i) > 0$ , lo que nos asegura, como discutimos en la prueba del lema 14, que  $\eta(i) \neq 0$ . Con esto,

$$\log \frac{1/2}{|\eta(i)|^2} = \log \frac{1/2}{|\theta^2(0, e^{-\pi})|/2} = \log \frac{1}{|\theta^2(0, e^{-\pi})|} = -\log |\theta^2(0, e^{-\pi})|,$$

pero en la proposición 3 demostramos que  $\theta^2(0, e^{\pi i \tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{\pi i n \tau}$  si  $\Im(\tau) > 0$ , así que empleando esta identidad con  $\tau = i$ ,

$$\log \frac{1/2}{|\eta(i)|^2} = -\log \left| \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-\pi n} \right| = -\log \left( \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-\pi n} \right),$$

suprimiendo el módulo al final porque  $r(n) e^{-\pi n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , de forma que la serie resultante es real y no negativa. ■

En el próximo capítulo evaluaremos explícitamente el límite anterior en términos de la función  $\Gamma$ , con lo que podremos calcular la suma de la serie dentro del logaritmo.

## 4. Una fórmula de Ramanujan

La última parte del trabajo está dedicada a probar la identidad de Ramanujan [2, p.162] que motiva todo lo que hemos hecho hasta ahora, y que aunque no tiene ninguna aplicación sobresaliente, es muy bonita en el sentido en el que se suele utilizar este adjetivo en matemáticas: es simétrica e inesperada:

**Teorema 5** Para  $|\Re(z)|, |\Im(z)| < 1$ ,

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(\pi n z)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cosh(\pi n z)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} = \frac{4\pi \Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)}, \quad (9)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma que introducimos en el anexo A.

Un apunte llamativo es que Ramanujan escribió  $2\pi^{-1}\Gamma^4(3/4)$  en el segundo miembro, pero vamos a ver que esta constante es realmente la misma que aparece en el término derecho de (9). Para ello, tenemos que apelar a la proposición 12, y tomar en ella  $w = 1/4 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ :

$$\Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\Gamma(1/4) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/4)} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Gamma^2(3/4)\Gamma^2(1/4) = 2\pi^2 \Rightarrow$$

$$\Gamma^4(3/4)\Gamma^2(1/4) = 2\pi^2\Gamma^2(3/4) \Rightarrow \Gamma^4(3/4) = \frac{2\pi^2\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)} \Rightarrow \frac{2\Gamma^4(3/4)}{\pi} = \frac{4\pi\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)},$$

donde la división por  $\Gamma^2(1/4)$  en la tercera implicación no nos da problemas porque, tal y como se puede ver en A,  $1/\Gamma(z)$  es una función entera, de donde se sigue que  $\Gamma(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

Otra curiosidad, en la línea de lo anterior, es que Ramanujan no indicó el dominio de validez de (9), que coincide con la intersección de las regiones de convergencia de las dos series del lado izquierdo,  $|\Im(z)| < 1$  y  $|\Re(z)| < 1$  respectivamente.

#### 4.1. Tras los pasos de Ramanujan

La demostración de (9) que vamos a dar sigue la estructura de la que se presenta en [7], y no es más que una combinación de todos los resultados que hemos visto en los capítulos anteriores. Aunque no ha llegado hasta nuestros días la original de Ramanujan, el lector interesado puede consultar en [2] una prueba alternativa basada en funciones elípticas e hipergeométricas.

Empezamos con un resultado general de variable compleja que es una aplicación del teorema de Liouville [17]:

**Lema 15** *Sea  $f$  una función meromorfa en todo  $\mathbb{C}$ , impar, que verifica que  $f^2(z) = f^2(z + 1) = f^2(z + i)$  y tal que tiene un único polo en  $|z| < 1$ , ubicado en  $z = 0$  y simple, entonces  $f^2(z) + f^2(iz)$  es constante.*

**Demostración** Sabemos que  $f$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y tiene un polo simple en  $z = 0$ , así que existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  admite un desarrollo de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{en } z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\},$$

pero como  $iz \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\}$  si y solo si  $z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ , también tenemos que

$$f(iz) = \frac{c_{-1}}{iz} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iz)^n = \frac{d_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad \forall z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\}.$$

Ahora, elevando ambas expresiones al cuadrado, obtenemos que

$$f^2(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad f^2(iz) = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{iz} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \forall z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\},$$

con  $a_{-2} = c_{-1}^2$  y  $b_{-2} = d_{-1}^2 = (c_{-1}/i)^2 = -c_{-1}^2$ . De esta manera, las potencias de  $z^{-2}$  de las dos series se cancelan al sumarlas:

$$g(z) = f^2(z) + f^2(iz) = \frac{h_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \quad \forall z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\},$$

donde  $h_n = a_n + b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ . No obstante, como  $f$  es impar,  $g(-z) = f^2(-z) + f^2(-iz) = (-f(z))^2 + (-f(iz))^2 = f^2(z) + f^2(iz) = g(z)$ , por lo que  $g$  es par y, en consecuencia, su serie de Laurent en 0 solo puede tener coeficientes no nulos multiplicando a las potencias de  $z$  pares:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{2k} z^{2k} \quad \forall z \in B_\epsilon(0) \setminus \{0\}.$$

En realidad, al ver que la parte principal de la serie de Laurent de  $g$  en 0 es idénticamente nula, hemos demostrado que  $z = 0$  es una singularidad evitable de  $g$ , de donde se deduce que  $g$  admite una extensión analítica  $\tilde{g}$  en  $B_\epsilon(0)$ . Además, como  $g$  es holomorfa allá donde lo sea  $f$ , usando que la única singularidad de  $f$  en  $|z| < 1$  es  $z = 0$ , concluimos que  $g$  no tiene más singularidades en  $|z| < 1$ , por lo que  $\tilde{g}$  está definida y es analítica en  $B_1(0)$ . Como consecuencia, tomando un  $\delta > 0$  tan pequeño como queramos,  $\tilde{g}$  está acotada en  $B_{1-\delta}(0)$ .

Solo nos queda ver que  $g$  tiene periodos 1 e  $i$  para estar en condiciones de rematar la prueba:

$$g(z+1) = f^2(z+1) + f^2(i(z+1)) = f^2(z+1) + f^2(iz+i) = f^2(z) + f^2(iz) = g(z);$$

$$g(z+i) = f^2(z+i) + f^2(i(z+i)) = f^2(z+i) + f^2(iz-1) = f^2(z) + f^2(iz) = g(z),$$

de donde deducimos, teniendo en cuenta que  $\tilde{g} \in \mathcal{H}(B_1(0))$ , que  $\tilde{g}$  es en realidad holomorfa en  $\bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} B_1(m+ni) = \mathbb{C}$ , así que es entera. Por otro lado, usando el mismo argumento,  $\tilde{g}$  está

acotada en  $A_\delta = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} B_{1-\delta}(m + ni) \forall \delta > 0$ , pero tomando  $\delta$  suficientemente cercano a 0,  $A_\delta = \mathbb{C}$ .

En definitiva,  $\tilde{g}$  es una función entera acotada y, por el teorema de Liouville, no le queda otra que ser constante. Llamando  $\Omega$  al conjunto de los puntos que no son singularidades de  $g$ , esto último implica que  $g = \tilde{g}|_\Omega$  es también constante. ■

A la vista de este resultado, vamos a elegir una función  $f$  a la que aplicárselo, para luego relacionarla con las series de (9) e identificar la constante. En particular, nos interesa trabajar con  $f(z) = P(i + 2z)$ , donde

$$P(z) = \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) + \cos(\pi z)}{\cosh(\pi n) - \cos(\pi z)} = \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(n - iz)\right) \coth\left(\frac{\pi}{2}(n + iz)\right).$$

Se puede comprobar, aplicando teoremas generales de variable compleja, que  $P$  converge a una función meromorfa en todo el plano, aunque nosotros no lo haremos. Sí que vamos a verificar, sin embargo, que  $f$  cumple las otras tres propiedades que nos exige el lema 15:

1. Para probar que  $f$  es impar, simplificamos la expresión  $-P(i + 2z)/P(3i + 2z)$  trabajando con la segunda definición de  $P$ , con la que se producen cancelaciones de términos 2 a 2:

$$\begin{aligned} -\frac{P(i + 2z)}{P(3i + 2z)} &= -\frac{\prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(n + 1 - 2iz)\right) \coth\left(\frac{\pi}{2}(n - 1 + 2iz)\right)}{\prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(n + 3 - 2iz)\right) \coth\left(\frac{\pi}{2}(n - 3 + 2iz)\right)} = \\ &= -\frac{\prod_{\substack{m=2 \\ 2 \nmid m}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(m - 2iz)\right) \prod_{\substack{m=0 \\ 2 \nmid m}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(m + 2iz)\right)}{\prod_{\substack{m=4 \\ 2 \nmid m}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(m - 2iz)\right) \prod_{\substack{m=-2 \\ 2 \nmid m}}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi}{2}(m + 2iz)\right)} = -\frac{\coth\left(\frac{\pi}{2}(2 - 2iz)\right)}{\coth\left(\frac{\pi}{2}(-2 + 2iz)\right)} = \frac{\coth(\pi(1 - iz))}{\coth(\pi(1 + iz))} = \\ &\stackrel{z=w-i}{=} 1 - \frac{P(i + 2(w - i))}{P(3i + 2(w - i))} = -\frac{P(-i + 2w)}{P(i + 2w)} = -\frac{P(i - 2w)}{P(i + 2w)} = -\frac{f(-w)}{f(w)} = 1 \Rightarrow -f(-w) = f(w), \end{aligned}$$

utilizando en el procedimiento que  $\coth(z)$  es impar y que, como se puede observar en la primera representación de  $P$ ,  $P(-z) = P(z)$  porque el coseno es par.

2. Ahora hay que justificar que  $f^2$  tiene periodos 1 e  $i$ , para lo que nos va a ser de ayuda usar, respectivamente, que el coseno es una función  $2\pi$ -periódica y que, como consecuencia del apartado anterior,  $P^2(3i + 2z) = P^2(i + 2z)$ :

$$\begin{aligned} f^2(z + 1) &= P^2(i + 2(z + 1)) = P^2(i + 2z + 2) = \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \left( \frac{\cosh(\pi n) + \cos(\pi(i + 2z + 2))}{\cosh(\pi n) - \cos(\pi(i + 2z + 2))} \right)^2 = \\ &= \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \left( \frac{\cosh(\pi n) + \cos(\pi(i + 2z))}{\cosh(\pi n) - \cos(\pi(i + 2z))} \right)^2 = P^2(i + 2z) = f^2(z); \\ f^2(z + i) &= P^2(i + 2(z + i)) = P^2(3i + 2z) = P^2(i + 2z) = f^2(z). \end{aligned}$$

3. Por último, vamos a calcular todos los polos de  $f$ , teniendo en cuenta que, por el teorema de Hurwitz,  $z_0$  es un polo de  $P$  si y solo si lo es de alguno de sus factores:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} P(i + 2z) = \infty \Leftrightarrow \cosh(\pi n) - \cos(\pi(i + 2z_0)) = \\ &= \cosh(\pi n) - \cos(\pi i(1 - 2iz_0)) = \cosh(\pi n) - \cosh(\pi(1 - 2iz_0)) = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ impar} \Leftrightarrow \\ &= \pi n = \pi(1 - 2iz_0) + 2\pi ki \text{ o } \pi n = -\pi(1 - 2iz_0) + 2\pi ki \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ impar y } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ z_0 &= \frac{n-1}{2}i + k \text{ o } z_0 = -\frac{n+1}{2}i - k \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ impar y } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_0 = k + il, (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \end{aligned}$$

donde cabe observar que nos hemos apoyado en que  $\cos(iz) = \cosh(z)$  y, dado que el coseno hiperbólico es una función par  $2\pi i$ -periódica, en que  $\cosh(a) = \cosh(b)$  si y solo si  $a = \pm b + 2\pi ik$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Según lo que hemos obtenido, el único polo de  $f$  en  $|z| < 1$  se encuentra en  $z = 0$ , así que solo nos queda ver que este polo sea simple. No obstante, es fácil comprobar que  $z = 0$  únicamente es polo del término con  $n = 1$  de  $P(i + 2z)$ , de manera que el orden de  $z = 0$  como polo de  $f$  es el mismo que como polo de  $t(z) = \frac{\cosh(\pi) + \cos(\pi(i+2z))}{\cosh(\pi) - \cos(\pi(i+2z))}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z t(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(\cosh(\pi) + \cos(\pi(i + 2z)))}{\cosh(\pi) - \cos(\pi(i + 2z))} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh(\pi) + \cos(\pi(i + 2z)) - 2\pi z \operatorname{sen}(\pi(i + 2z))}{2\pi \operatorname{sen}(\pi(i + 2z))} = \\ &= \frac{\cosh(\pi) + \cos(\pi i)}{2\pi \operatorname{sen}(\pi i)} = \frac{\cosh(\pi)}{\pi \operatorname{sen}(\pi i)}, \end{aligned}$$

que es finito por ser  $\pi \operatorname{sen}(\pi i) \neq 0$  y distinto de 0 porque  $2 \cosh(\pi) \neq 0$ . De esta forma,  $z = 0$  es, tal y como queríamos y gracias a la regla de L'Hôpital (L'H), un polo simple de  $f$ .

Tras haber verificado las hipótesis del lema 15 para la función  $f$ , concluimos que  $f^2(z) + f^2(iz)$  es constante, lo que equivale a que  $P^2(i + 2z) + P^2(i + 2iz) = K \in \mathbb{C}$ . El siguiente paso es transformar esta identidad en una que se parezca más a (9), para lo que nos va a ser útil recordar que, como  $f$  es impar,  $f^2$  es par:

$$f^2(iz) = f^2(-iz) \Rightarrow P^2(i + 2iz) = P^2(i - 2iz) \Rightarrow P^2(i + 2z) + P^2(i - 2iz) = K \stackrel{\Rightarrow}{z=(w+1-i)/2}$$

$$P^2(w + 1) + P^2(-iw - 1) = K \Rightarrow P^2(w + 1) + P^2(iw + 1) = K,$$

donde la última implicación es consecuencia directa de que  $P$  es par, tal y como hemos mencionado ya en lo que llevamos. Si usamos que  $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$  para probar que  $P(z + 1) = P^{-1}(z)$  y aplicamos esta relación, obtenemos por fin lo que estábamos buscando:

$$P(z + 1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) + \cos(\pi(z + 1))}{\cosh(\pi n) - \cos(\pi(z + 1))} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) + \cos(\pi z + \pi)}{\cosh(\pi n) - \cos(\pi z + \pi)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) - \cos(\pi z)}{\cosh(\pi n) + \cos(\pi z)} =$$

$$P^{-1}(z) \Rightarrow P^2(w + 1) + P^2(iw + 1) = P^{-2}(w) + P^{-2}(iw) = K.$$

Ahora vamos a ver que  $P(z)$  es en realidad igual, salvo una constante multiplicativa  $C$ , a la primera de las series en (9), a la que llamaremos  $S_1(z)$ . Una vez hayamos demostrado esto, será una consecuencia trivial que  $P(iz) = C \cdot S_1(iz) = C \cdot S_2(z)$ , con  $S_2(z)$  la segunda serie en (9), así que podremos deducir de  $P^{-2}(z) + P^{-2}(iz) = K$  que  $S_1^{-2}(z) + S_2^{-2}(z) = K \cdot C^2$ , donde  $K \cdot C^2$  es una constante que determinaremos. En particular, el primer miembro tiene perfecto sentido en  $|\Im(z)|, |\Re(z)| < 1$  porque es la intersección de los respectivos dominios en los que  $S_1(z), S_2(z)$  no se van a infinito.

La proporcionalidad entre  $P(z)$  y  $S_1(z)$  es muy sorprendente, pero la prueba no es tan difícil, ya que por continuación analítica basta verificarla para  $z \in \mathbb{R}$  aplicando argumentos de análisis de Fourier:

**Proposición 7** *Existe una constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $P(z) = C \cdot S_1(z)$  para todo  $z$  con  $|\Im(z)| < 1$ .*

**Demostración** Empezamos comprobando que  $P(2x) = C \cdot S_1(2x) \forall x \in \mathbb{R}$ , para lo que haremos alusión a un resultado de variable real que nos dice que dos funciones 1-periódicas en  $L^1(\mathbb{T})$  coinciden si y solo si tienen los mismos coeficientes de Fourier. A la vista de esto, tenemos que verificar primero las dos hipótesis que necesitamos:

1. La 1-periodicidad de  $P(2x)$  y  $C \cdot S_1(2x)$  se sigue fácilmente si tenemos en cuenta que el coseno es  $2\pi$ -periódico:

$$P(2(x+1)) = \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) + \cos(2\pi(x+1))}{\cosh(\pi n) - \cos(2\pi(x+1))} = \prod_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{\cosh(\pi n) + \cos(2\pi x)}{\cosh(\pi n) - \cos(2\pi x)} = P(2x);$$

$$C \cdot S_1(2(x+1)) = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(2\pi n(x+1))}{\cosh(\pi n)} = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(2\pi n x + 2\pi n)}{\cosh(\pi n)} = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(2\pi n x)}{\cosh(\pi n)} = C \cdot S_1(2x).$$

2. Ya hemos mencionado que  $1/S_1(z)$  no presenta problemas de regularidad en  $|\Im(z)| < 1$ , así que  $S_1(z)$  es holomorfa en ese dominio y, por lo tanto,  $C \cdot S_1(2z)$  lo es en  $|\Im(z)| < 1/2$ , que contiene a  $\mathbb{R}$ . De esta forma,  $C \cdot S_1(2x)$ , vista como función de variable real, es  $C^\infty$  y, en consecuencia, continua. Siguiendo el mismo razonamiento,  $P(2x)$  es también  $C^\infty$ , y continua en particular, ya que  $P(2z)$  es meromorfa y sus polos, todos de la forma  $z = k + (l + 1/2)i$ , con  $k, l \in \mathbb{Z}$ , están fuera del eje real.

Gracias al análisis anterior, el teorema de Weierstrass nos asegura que tanto  $P(2x)$  como  $C \cdot S_1(x)$ , que son continuas, están acotadas en el compacto  $\mathbb{T}$ . Dicho con otras palabras,  $P(2x), C \cdot S_1(x) \in L^\infty(\mathbb{T})$ , pero esto implica que  $P(2x), C \cdot S_1(x) \in L^1(\mathbb{T})$  al ser  $\mathbb{T}$  un espacio de medida finita.

Para hallar el desarrollo de Fourier de  $P(2x)$  y  $C \cdot S_1(2x)$ , observamos que las dos son pares porque el coseno, del que dependen en su totalidad ambas, lo es. De este modo, admiten series de Fourier en las que solo aparecen cosenos, ya que los coeficientes que van multiplicando a los senos son todos nulos:

$$P(2x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cos(2\pi n x), \quad \text{con } a_n = \int_0^1 P(2x) e^{-2\pi i n x} dx;$$

$$C \cdot S_1(2x) = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(2\pi n x)}{\cosh(\pi n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \cos(2\pi n x) \Rightarrow b_n = \frac{C}{\cosh(\pi n)}.$$

Si aplicamos el teorema que hemos enunciado al inicio de la prueba, concluimos que demostrar que  $P(2x) = C \cdot S_1(2x)$  es equivalente a ver que  $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{Z}$ , es decir, que  $a_n \cosh(\pi n) = C$  para todo  $n$  entero. Con este objetivo en mente, definimos  $\mathcal{P}$  el paralelogramo de vértices  $0, 1, 2+i, 1+i$ , en el que llamamos  $\gamma_v$  al lado que acaba en el vértice  $v$  con orientación positiva, e integramos  $W_n(z) = P(2z)e^{-2\pi i n z}$  sobre la curva formada por  $\partial\mathcal{P}$ :

$$\int_{\partial\mathcal{P}} W_n = \int_{\gamma_1} W_n + \int_{\gamma_{2+i}} W_n + \int_{\gamma_{1+i}} W_n + \int_{\gamma_0} W_n.$$

En primer lugar, vamos a ver que las integrales sobre  $\gamma_{2+i}$  y  $\gamma_0$  se cancelan la una con la otra:

$$\int_{\gamma_{2+i}} W_n(z) dz \stackrel{z=s+1+si}{=} \int_0^1 W_n(s+1+si)(1+i) ds,$$

pero  $W_n(z+1) = P(2(z+1))e^{-2\pi i n(z+1)} = P(2z)e^{-2\pi i n z} = W_n(z)$  debido a la 1-periodicidad de  $P(2z)$  y a que  $e^{-2\pi i n} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$ , así que

$$\int_{\gamma_{2+i}} W_n(z) dz = \int_0^1 W_n(s+si)(1+i) ds = - \int_1^0 W_n(s+si)(1+i) ds \stackrel{s+si=z}{=} - \int_{\gamma_0} W_n(z) dz.$$

Por otro lado, vamos a establecer una relación entre las integrales sobre  $\gamma_{1+i}$  y  $\gamma_1$ :

$$\int_{\gamma_{1+i}} W_n(z) dz \stackrel{z=s+1+i}{=} \int_1^0 W_n(s+1+i) ds = - \int_0^1 W_n(s+1+i) ds = - \int_0^1 W_n(s+i) ds,$$

donde hemos usado que  $W_n$  es 1-periódica, tal y como acabamos de comentar, en la última igualdad. Ahora bien, de la identidad  $P(3i + 2z) = -P(i + 2z)$ , demostrada más arriba en esta sección, se deduce otra simetría para  $W_n$  que nos permite llegar a lo que queremos:

$$P(3i + 2z) = -P(i + 2z) \stackrel{z=w-i/2}{\Rightarrow} P(2(w + i)) = -P(2w) \Rightarrow W_n(z + i) = P(2(z + i))e^{-2\pi in(z+i)} = -P(2z)e^{-2\pi inz}e^{2\pi n} = -e^{2\pi n}W_n(z) \Rightarrow \int_{\gamma_{1+i}} W_n(z) dz = - \int_0^1 -e^{2\pi n}W_n(s) ds \stackrel{s=z}{=} e^{2\pi n} \int_{\gamma_1} W_n(z) dz.$$

Juntando las dos propiedades recién discutidas,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}} W_n(z) dz &= (1 + e^{2\pi n}) \int_{\gamma_1} W_n(z) dz \stackrel{z=x}{=} (1 + e^{2\pi n}) \int_0^1 W_n(x) dx = \\ &= (1 + e^{2\pi n}) \int_0^1 P(2x)e^{-2\pi inx} dx = (1 + e^{2\pi n})a_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

No obstante, aprovechando que  $\partial\mathcal{P}$  es una curva simple, cerrada,  $C^1$  a trozos y con orientación positiva, vamos a ver una expresión alternativa para la integral aplicando el teorema de los residuos. Para ello, empezamos comentando que  $W_n$  es una función meromorfa en todo el plano con polos allá donde los tiene  $P(2z)$ , es decir, en los puntos de la forma  $z = k + (l + 1/2)i$ , con  $k, l \in \mathbb{Z}$ , así que existe un dominio  $\Omega$  que contiene a  $\partial\mathcal{P}$  y a su interior,  $D_{\partial\mathcal{P}}$ , tal que  $W_n \in \mathcal{H}(\Omega \setminus z_0)$ , con  $z_0 = 1 + i/2 \in D_{\partial\mathcal{P}}$ . De esta forma,  $\int_{\partial\mathcal{P}} W_n = 2\pi i \text{Res}(W_n, z_0)$ , pero  $z_0$  es un polo simple de  $W_n$  porque todos los polos del producto  $P(2z)$  anulan el denominador de uno solo de sus factores, luego

$$\int_{\partial\mathcal{P}} W_n = 2\pi i e^{-2\pi inz_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)P(2z) = 2\pi i e^{\pi n} \text{Res}(P(2z), z_0) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En definitiva, igualando los dos valores que hemos obtenido al evaluar la misma integral,

$$\begin{aligned} (1 + e^{2\pi n})a_n = 2\pi i e^{\pi n} \text{Res}(P(2z), z_0) &\Rightarrow \frac{(1 + e^{2\pi n})a_n}{2e^{\pi n}} = \frac{(e^{\pi n} + e^{-\pi n})a_n}{2} = \cosh(\pi n)a_n = \\ &= \pi i \text{Res}(P(2z), z_0) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

de manera que, tomando  $C = \pi i \text{Res}(P(2z), z_0) \in \mathbb{R}$ , que no depende de  $n$ , acabamos de probar que  $P(2x) = C \cdot S_1(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Cabe destacar que sabemos que  $\pi i \text{Res}(P(2z), z_0) \in \mathbb{R}$  porque es igual a  $\cosh(\pi \cdot 0)a_0 = a_0$  por ejemplo, y  $a_0$  es real por ser un coeficiente de Fourier de una función de variable real con valores en  $\mathbb{R}$ .

Bajo el cambio de variable  $2x = y$ , lo anterior es lo mismo que decir que  $P(y) = C \cdot S_1(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$ . De esta forma,  $P$  y  $C \cdot S_1$ , ambas holomorfas en  $|\Im(z)| < 1$  como ya hemos visto, coinciden en todo  $\mathbb{R}$ , que es un conjunto dentro de  $|\Im(z)| < 1$  que contiene algunos de sus puntos de acumulación, así que por el principio de ceros aislados,  $P(z) = C \cdot S_1(z)$  para todo  $z$  con  $|\Im(z)| < 1$ . ■

Gracias a este resultado, y siguiendo el razonamiento previo que nos motivó a demostrarlo, ya sabemos que el primer miembro de (9) es una constante en  $|\Im(z)|, |\Re(z)| < 1$ . Si llamamos  $M$  a esa constante, como  $z = 0$  pertenece al dominio  $|\Im(z)|, |\Re(z)| < 1$ , vemos que

$$M = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(\pi n \cdot 0)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cosh(\pi n \cdot 0)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} = 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2},$$

lo que nos lleva a querer evaluar explícitamente  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)}$ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(\pi n)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{\pi n} + e^{-\pi n}} = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi n}}{1 + e^{-2\pi n}} = \theta^2(0, e^{-\pi}),$$

donde la primera igualdad se obtiene como consecuencia de que el coseno hiperbólico sea una función par y la última, al aplicar el teorema 3 con  $q = e^{-\pi}$ , que cumple que  $|q| = |e^{-\pi}| = e^{-\pi} <$

1. Ahora bien, en la prueba de la proposición 3 vimos que  $\theta^2(0, q) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)q^n$  si  $|q| < 1$ , así que tomando de nuevo  $q = e^{-\pi}$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)} = \theta^2(0, e^{-\pi}) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{-\pi n} = \exp\left(\lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s}\right)\right),$$

siendo la identidad final una aplicación directa de la proposición 6.

Hay pruebas clásicas del valor de  $\theta(0, e^{-\pi})$  que no pasan por el límite de la expresión a la que hemos llegado, pero son difíciles [2, p. 103], [3, Th. 1.7, 2.3], [23, §22.8]. De hecho, aunque parezca que estamos yendo por un camino que complica las cosas, vamos a ser capaces de calcular explícitamente la constante que necesitamos. Para ello, consideramos una función auxiliar muy similar a la función  $\zeta$  de Riemann:

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \quad \text{para } \Re(s) > 1.$$

En primer lugar, vamos a enunciar un par de resultados auxiliares que involucran a  $L(s)$ :

**Lema 16** *La serie de Dirichlet de la función  $r(n)$  es  $4\zeta(s)L(s)$ , con convergencia en  $\Re(s) > 1$ .*

**Demostración** Por el corolario 4,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} = 4\zeta(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \quad \text{si } \Re(s) > 1,$$

pero la serie del término derecho coincide en el semiplano  $\Re(s) > 1$  con la definición de  $L(s)$ , así que hemos acabado. ■

**Lema 17**  $2\Gamma(s)L(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \operatorname{sech}(t) dt$  para todo  $s$  tal que  $\Re(s) > 1$ .

**Demostración** Empezamos probando, gracias a un sencillo cambio de variables, una expresión alternativa para  $\Gamma(s)n^{-s}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt \stackrel{t=x/n}{=} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{n^{s-1}} e^{-x} n^{-1} dx = \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 0,$$

donde el último paso se deduce al aplicar la representación integral de  $\Gamma$  (teorema 6).

Ahora, teniendo en cuenta que  $L(s)$  está definida en  $\Re(s) > 1$ , un dominio en el que la fórmula anterior es válida, obtenemos que

$$2\Gamma(s)L(s) = 2\Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{(2n+1)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} 2(-1)^n t^{s-1} e^{-(2n+1)t} dt \quad \text{si } \Re(s) > 1.$$

A la vista de esto, nos interesa meter el sumatorio dentro de la integral, algo que nos va a permitir hacer el teorema de convergencia uniforme (TCU):

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{s-1} e^{-(2n+1)t} = 2t^{s-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nt} = 2t^{s-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-2t})^n,$$

pero la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge absolutamente y uniformemente sobre compactos a  $1/(1-z)$  en el disco  $|z| < 1$ . De esta forma, como  $|-e^{-2t}| = |e^{-2t}| = e^{-2t} < e^0 = 1 \forall t \in (0, +\infty)$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{s-1} e^{-(2n+1)t} = \frac{2t^{s-1} e^{-t}}{1 + e^{-2t}} = t^{s-1} \frac{2}{e^t(1 + e^{-2t})} = t^{s-1} \frac{2}{e^t + e^{-t}} = t^{s-1} \operatorname{sech}(t),$$

con convergencia uniforme en  $t \in [\epsilon, +\infty)$ , ya que existe un compacto  $K_\epsilon$  contenido en  $|z| < 1$  tal que  $-e^{-2t} \in K_\epsilon \forall t \in [\epsilon, +\infty)$ . Bajo este contexto, sabiendo que podemos tomar  $\epsilon > 0$  tan pequeño como queramos,

$$2\Gamma(s)L(s) \stackrel{\text{TCU}}{=} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{s-1} e^{-(2n+1)t} dt = \int_0^{\infty} t^{s-1} \operatorname{sech}(t) dt \quad \text{si } \Re(s) > 1.$$

Lo siguiente que necesitamos es calcular un límite auxiliar con el que simplificaremos mucho nuestro problema: ■

**Proposición 8**  $\zeta(s) - 2\Gamma(s)\zeta(2s - 1)$  tiende a 0 cuando  $s \rightarrow 1^+$ .

**Demostración** Por el lema 20,  $\zeta(z) - \frac{1}{z-1} \rightarrow \gamma$  si  $z \rightarrow 1$ , y de la misma manera, haciendo el cambio de variables  $z = 2s - 1$ , tenemos que  $\zeta(2s - 1) - \frac{1}{2(s-1)} \rightarrow \gamma$  cuando  $s \rightarrow 1$ . En notación asintótica, lo anterior equivale a que

$$\zeta(s) \sim \gamma + \frac{1}{s-1} \quad \text{y} \quad \zeta(2s-1) \sim \gamma + \frac{1}{2(s-1)}$$

con  $s$  tendiendo a 1. De esta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} (\zeta(s) - 2\Gamma(s)\zeta(2s-1)) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \gamma + \frac{1}{s-1} - 2\Gamma(s) \left( \gamma + \frac{1}{2(s-1)} \right) \right) = \\ \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \gamma + \frac{1}{s-1} - 2\gamma\Gamma(s) - \frac{\Gamma(s)}{s-1} \right) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\gamma(s-1) + 1 - 2\gamma(s-1)\Gamma(s) - \Gamma(s)}{s-1}, \end{aligned}$$

pero como  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1$  por la representación integral de  $\Gamma$ , el último límite es una indeterminación del tipo  $0/0$ , así que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} (\zeta(s) - 2\Gamma(s)\zeta(2s-1)) &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{s \rightarrow 1^+} (\gamma - 2\gamma\Gamma(s) - 2\gamma(s-1)\Gamma'(s) - \Gamma'(s)) = \gamma - 2\gamma\Gamma(1) - \Gamma'(1) = \\ &\gamma - 2\gamma - \Gamma'(1) = -\gamma - \Gamma'(1). \end{aligned}$$

A la vista del enunciado, nos queda comprobar que  $\Gamma'(1) = -\gamma$ , algo que haremos tomando la derivada logarítmica de  $1/\Gamma(z)$  en su definición como producto infinito:

$$\begin{aligned} -\log(\Gamma(z)) &= \log\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = \log(z) + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right) \Rightarrow -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \\ \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1/n}{1+z/n} - \frac{1}{n} \right) &\Rightarrow -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\Gamma'(1) = 1 + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1/n}{1+1/n} - \frac{1}{n} \right) = \\ 1 + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} &\stackrel{n=j-1}{=} 1 + \gamma + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \gamma - 1 = \gamma \Rightarrow \Gamma'(1) = -\gamma, \end{aligned}$$

donde la derivación del sumatorio término a término es válida porque, al ser  $\Gamma(z)$  holomorfa y distinta de 0 en un dominio alrededor de  $z = 1$ , existe un entorno de  $z = 1$  en el que  $-\log(\Gamma(z))$  es también holomorfa. ■

Podemos empezar ya a manipular el límite que nos interesa en esta sección:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \right) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{2}{\pi} \zeta(s)L(s) \right) = \\ \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{4}{\pi} \Gamma(s)\zeta(2s-1)L(s) \right) &= \lim_{s \rightarrow 1^+} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \Gamma(s)L(s) \right) \zeta(2s-1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\pi - 4\Gamma(s)L(s)}{\pi} \zeta(2s-1), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene aplicando directamente el lema 16 y la segunda, teniendo en cuenta que la proposición 8 implica que  $\zeta(s) \sim 2\Gamma(s)\zeta(2s-1)$  cuando  $s \rightarrow 1^+$ . Ahora, multiplicando tanto en el numerador como en el denominador por  $2(s-1)$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \right) = \lim_{s \rightarrow 1^+} 2(s-1)\zeta(2s-1) \frac{\pi - 4\Gamma(s)L(s)}{2\pi(s-1)} = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\pi - 4\Gamma(s)L(s)}{2\pi(s-1)},$$

usando en el último paso que, como  $(s-1)\zeta(s)$  tiende a 1 si  $s \rightarrow 1$  tal y como podemos ver en el anexo A, bajo el cambio de variables  $s = 2t - 1$ ,  $2(t-1)\zeta(2t-1)$  se va a 1 también al acercarse  $t$  a 1.

El límite al que hemos llegado nos da una indeterminación del tipo  $0/0$ , ya que  $\Gamma(1) = 1$  y, recuperando un cálculo que ya hicimos en la demostración del corolario 4,  $L(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ , así que  $\pi - 4\Gamma(1)L(1) = 0$ . Con ello, es posible aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{s \rightarrow 1^+} -\frac{4(\Gamma(s)L(s))'}{2\pi} = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \Big|_{s=1^+} (\Gamma(s)L(s)) =$$

$$-\frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \Big|_{s=1^+} \left( \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{2 \cosh(t)} dt \right),$$

tomando al final la expresión integral para  $\Gamma(s)L(s)$  dada por el lema 17. Vamos a comprobar, para rematar nuestro razonamiento, que se cumplen las hipótesis del teorema de derivación de integrales paramétricas y, por lo tanto, podemos conmutar la integral y la derivada en  $s = 1^+$ :

1. Si definimos  $f(t, s) = \frac{t^{s-1}}{2 \cosh(t)}$ ,  $f$  es claramente continua en  $[0, +\infty) \times (1, +\infty)$ , siendo el segundo intervalo, que es en el que se mueve el parámetro  $s$ , un abierto tal y como necesitamos.
2. La derivada parcial de  $f$  con respecto a  $s$  en  $[0, +\infty) \times (1, +\infty)$  existe y tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial s} f(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{s-1} \log(t)}{2 \cosh(t)} & \text{si } t > 0; \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

así que es continua de manera trivial en  $(0, +\infty) \times (1, +\infty)$ . No obstante, como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{s-1} \log(t)}{2 \cosh(t)} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{s-1} \log(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(t)}{t^{1-s}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{-1}}{(1-s)t^{-s}} = \frac{1}{2(1-s)} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{s-1} = 0$$

para todo  $s \in (1, +\infty)$  por la regla de L'Hôpital, en realidad  $\partial f / \partial s$  es continua en  $[0, +\infty) \times (1, +\infty)$ .

Gracias a lo que acabamos de discutir, si llamamos  $I(s) = \int_0^{\infty} f(t, s) dt$ , sabemos que  $I(s)$  es diferenciable en  $s \in (1, +\infty)$  e  $I'(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t, s) dt \forall s \in (1, +\infty)$ . En particular, tomando  $s = 1^+$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \left( \zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s} \right) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=1^+} \frac{t^{s-1}}{2 \cosh(t)} \right) dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{t^{s-1} \log(t)}{2 \cosh(t)} \Big|_{s=1^+} \right) dt =$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{2 \cosh(t)} dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{\cosh(t)} dt.$$

Lo único que nos falta para poder demostrar (9) es evaluar la integral a la que hemos llegado:

**Proposición 9** Sea  $I = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{\cosh(t)} dt$ , entonces  $I = \log \left( \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right)$ .

**Demostración** Consideramos la función  $f(z) = i \sec(2\pi z) \log(\Gamma(1/2 + z))$ , que es meromorfa en todo el plano complejo con polos en los puntos  $z$  tales que  $1/2 + z \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$  o  $2\pi z = \pi/2 + k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Más concretamente, si tomamos el rectángulo  $\sigma_{\alpha, N}$  cuyos vértices son  $\alpha + Ni$ ,  $-\alpha + Ni$ ,  $-\alpha - Ni$  y  $\alpha - Ni$ , con  $\alpha \in (1/4, 1/2)$  y  $N > 0$ , tenemos que  $\sigma_{\alpha, N}$  es un contorno orientado positivamente contenido en  $B = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < 1/2\}$ , un abierto simplemente conexo en el que  $f$  es meromorfa con dos polos,  $z = \pm 1/4$ , contenidos ambos en el dominio interior de  $\sigma_{\alpha, N}$ . De esta forma, podemos aplicar el teorema de los residuos:

$$\int_{\sigma_{\alpha, N}} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; 1/4) + \text{Res}(f; -1/4)) \forall \alpha \in (1/4, 1/2), \forall N > 0.$$

Vamos a calcular ahora los dos residuos que necesitamos, usando para ello que  $z = \pm 1/4$  son polos simples de  $f$  por tener multiplicidad 1 como ceros de  $\cos(2\pi z)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; 1/4) &= \lim_{z \rightarrow 1/4} \frac{i(z - 1/4) \log(\Gamma(1/2 + z))}{\cos(2\pi z)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ \lim_{z \rightarrow 1/4} \left( -\frac{i \log(\Gamma(1/2 + z))}{2\pi \operatorname{sen}(2\pi z)} - \frac{i(z - 1/4)\Gamma'(1/2 + z)}{2\pi \operatorname{sen}(2\pi z)\Gamma(1/2 + z)} \right) &= -\frac{i \log(\Gamma(3/4))}{2\pi}, \end{aligned}$$

mientras que un procedimiento similar, volviendo a emplear la regla de L'Hôpital para deshacer una indeterminación del tipo  $0/0$ , nos permite concluir que  $\operatorname{Res}(f; -1/4) = \frac{i \log(\Gamma(1/4))}{2\pi}$ . Cabe observar, en todo el razonamiento que hemos seguido, que los logaritmos que aparecen están bien definidos porque  $\Gamma(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$  al ser  $1/\Gamma(z)$  entera.

Con los cálculos anteriores, concluimos que

$$\int_{\sigma_{\alpha, N}} f(z) dz = 2\pi i \frac{i \log(\Gamma(1/4)) - i \log(\Gamma(3/4))}{2\pi} = \log \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \quad \forall \alpha \in (1/4, 1/2), \quad \forall N > 0.$$

No obstante, y siguiendo con las restricciones  $\alpha \in (1/4, 1/2)$ ,  $N > 0$ , como  $f$  es continua sobre  $\sigma_{\alpha, N}$ , que es una curva cerrada, en realidad  $f$  es uniformemente continua en los puntos de  $\sigma_{\alpha, N}$ , ya que estos dan lugar a un conjunto compacto. Esto nos permite asegurar, por lo tanto, que  $f \circ \sigma_{\alpha, N}$  converge uniformemente cuando  $\alpha \rightarrow 1/2^-$ , así que por el teorema de convergencia uniforme,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1/2^-} \int_{\sigma_{\alpha, N}} f(z) dz &\stackrel{\text{TCU}}{=} \int_{\sigma_{1/2, N}} f(z) dz = \\ - \int_{-1/2}^{1/2} f(t + Ni) dt - \int_{-N}^N i f(-1/2 + ti) dt + \int_{-1/2}^{1/2} f(t - Ni) dt + \int_{-N}^N i f(1/2 + ti) dt &= \log \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \quad \forall N > 0. \end{aligned}$$

El siguiente paso de nuestro razonamiento es hacer tender  $N \rightarrow +\infty$ , contexto en el que dos de las cuatro integrales a las que hemos llegado se van a 0. Para probar esto último, vamos a usar que  $|\log \Gamma(z)| \leq C|z| \log |z|$  para valores de  $z$  con  $|\Im(z)|$  grande [23, §12.33]:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{-1/2}^{1/2} f(t + Ni) dt \right| \leq \int_{-1/2}^{1/2} |f(t + Ni)| dt \leq \max_{t \in [-1/2, 1/2]} |f(t + Ni)| = \\ \max_{t \in [-1/2, 1/2]} \frac{|\log(\Gamma(1/2 + t + Ni))|}{|\cos(2\pi(t + Ni))|} &\leq \frac{\max_{t \in [-1/2, 1/2]} |\log(\Gamma(1/2 + t + Ni))|}{\min_{t \in [-1/2, 1/2]} |\cos(2\pi(t + Ni))|} \leq \\ \frac{\max_{t \in [-1/2, 1/2]} C|1/2 + t + Ni| \log |1/2 + t + Ni|}{m_N} &= \frac{CM_N \log M_N}{m_N}, \end{aligned}$$

donde  $m_N = \min_{t \in [-1/2, 1/2]} |\cos(2\pi(t + Ni))|$  y  $M_N = \max_{t \in [-1/2, 1/2]} |1/2 + t + Ni|$ . Está claro que  $M_N \sim N$  cuando  $N \rightarrow +\infty$ , mientras que, recordando que  $|\cos(z)| = 2^{-1/2} \sqrt{\cosh(2\Im(z)) + \cos(2\Re(z))}$ ,  $m_N \sim 2^{-1/2} \sqrt{\cosh(4\pi N)}$  asintóticamente si  $N \rightarrow +\infty$ . De esta manera,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{CM_N \log M_N}{m_N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{C\sqrt{2}N \log N}{\sqrt{\cosh(4\pi N)}} = 0 \Rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} f(t + Ni) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Si desarrollamos un argumento similar, se puede ver que  $\int_{-1/2}^{1/2} f(t - Ni) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ , obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \lim_{\alpha \rightarrow 1/2^-} \int_{\sigma_{\alpha, N}} f(z) dz \right) &= - \int_{-\infty}^{\infty} i f(-1/2 + ti) dt + \int_{-\infty}^{\infty} i f(1/2 + ti) dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\Gamma(ti))}{\cos(-\pi + 2\pi ti)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\Gamma(1 + ti))}{\cos(\pi + 2\pi ti)} dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\Gamma(ti))}{\cos(2\pi ti)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(\Gamma(1 + ti))}{\cos(2\pi ti)} dt = \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log(\Gamma(ti)) + \log(ti\Gamma(ti))}{\cosh(2\pi t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(ti)}{\cosh(2\pi t)} dt = \log \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}.$$

Cabe destacar que en la cuarta igualdad hemos aplicado el corolario 8, por el que  $\Gamma(1+ti) = ti\Gamma(ti) \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sin que nos afecte el punto  $t = 0$  porque los conjuntos de medida cero no modifican el resultado de la integral. Además, en el quinto paso podemos dividir dentro del logaritmo entre  $\Gamma(ti)$  porque, al ser  $1/\Gamma(z)$  entera,  $\Gamma(ti) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ .

Por último, nos quedamos con las partes reales en ambos lados de la identidad a la que hemos llegado, teniendo en cuenta que, como se puede ver en la representación integral de  $\Gamma$  por ejemplo,  $\Gamma(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ , de manera que  $\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} \log \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} &= \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(ti)}{\cosh(2\pi t)} dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left( \frac{\log(ti)}{\cosh(2\pi t)} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|t|}{\cosh(2\pi t)} dt = \\ &2 \int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{\cosh(2\pi t)} dt \stackrel{t=w/2\pi}{=} 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(w/2\pi)}{\cosh(w)} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(w)}{\cosh(w)} dw - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(2\pi)}{\cosh(w)} dw = \\ &I - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(2\pi)}{\cosh(w)} dw \stackrel{w=\log(\tan(u))}{=} I - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \log(2\pi) \tan(u)}{\tan^2(u) + 1} \cdot \frac{1}{\tan(u) \cos^2(u)} du = \\ &I - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \log(2\pi)}{\sec^2(u) + \cos^2(u)} du = I - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \log(2\pi)}{\pi} du = I - \left( \frac{2 \log(2\pi) u}{\pi} \right) \Big|_{u=\pi/4}^{u=\pi/2} = \\ &I - \log(2\pi) + \frac{\log(2\pi)}{2} = I - \log(\sqrt{2\pi}) \Rightarrow I = \log \left( \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right), \end{aligned}$$

aprovechándonos en el cuarto paso de que la función  $h(t) = \frac{\log|t|}{\cosh(2\pi t)}$  es par.  $\blacksquare$

Con esto último, ya tenemos todos los ingredientes necesarios para probar la fórmula de Ramanujan que mencionamos al inicio del capítulo:

**Demostración del teorema 5:** ya hemos discutido que

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos(\pi n z)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cosh(\pi n z)}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2}$$

es igual a una constante  $M$  en el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)|, |\Re(z)| < 1\}$ . Además, sabemos que

$$M = 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)} \right)^{-2} = 2 \left( \exp \left( -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log(t)}{\cosh(t)} dt \right) \right)^{-2},$$

de forma que basta aplicar la proposición 9 para llegar al resultado deseado.  $\blacksquare$

Como vemos, la diosa que le dictaba a Ramanujan sus fórmulas no era más que una mezcla de la teoría de números y la variable compleja. Con estas ramas de las matemáticas actuando al mismo tiempo, podemos llegar a enunciados tan bizarros y bonitos como el que ha dado lugar a este trabajo.

## Referencias

- [1] G. E. Andrews. A simple proof of Jacobi's triple product identity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:333–334, 1965.
- [2] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part III*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] J. M. Borwein and P. B. Borwein. *Pi and the AGM*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987. A study in analytic number theory and computational complexity, A Wiley-Interscience Publication.
- [4] F. Chamizo. Ocho lecciones de teoría de números. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/lecc8.pdf>, 2011.
- [5] F. Chamizo. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. [https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/files/ell\\_th.pdf](https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/files/ell_th.pdf), 2018.
- [6] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf>, 2019.
- [7] F. Chamizo. A simple evaluation of a theta value, the Kronecker limit formula and a formula of Ramanujan. *Ramanujan J.*, 59(3):947–954, 2022.
- [8] F. Chamizo. Funciones aritméticas y series de Dirichlet. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/2223tenum/notes/sec2.1.pdf>, 2022.
- [9] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials Matemàtics*, pages 1–27, 2017. <https://mat.uab.cat/web/matmat/v2017n02/>.
- [10] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Education, 2013.
- [11] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.
- [12] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1980. Revised by H. L. Montgomery.
- [13] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [14] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.
- [15] L. K. Hua. *Introduction to number theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982. Translated from the Chinese by P. Shiu.
- [16] A. Ivic. *The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, Incorporated, 2013.
- [17] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel'd, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory. Translated from the 1981 Russian original by R. Cooke.
- [18] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

- [19] Y. Motohashi. A new proof of the limit formula of Kronecker. *Proc. Japan Acad.*, 44:614–616, 1968.
- [20] C. L. Siegel. *Lectures on advanced analytic number theory*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965. Notes by S. Raghavan.
- [21] G. K. Srinivasan. The Gamma function: an eclectic tour. *Amer. Math. Monthly*, 114(4):297–315, 2007.
- [22] G. N. Watson. Theorems Stated by Ramanujan (II): Theorems on Summation of Series. *J. London Math. Soc.*, 3(3):216–225, 1928.
- [23] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1996.
- [24] Wikipedia contributors. Identity theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Identity\\_theorem&oldid=1168073046](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Identity_theorem&oldid=1168073046), 2023. [Online; accessed 9-October-2023].
- [25] Wikipedia contributors. Jordan’s lemma — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lambert\\_series&oldid=1183921576](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lambert_series&oldid=1183921576), 2023. [Online; accessed 29-May-2024].
- [26] Wikipedia contributors. Kronecker limit formula — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kronecker\\_limit\\_formula&oldid=1184113756](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kronecker_limit_formula&oldid=1184113756), 2023. [Online; accessed 22-January-2024].
- [27] Wikipedia contributors. Lambert series — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lambert\\_series&oldid=1183921576](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lambert_series&oldid=1183921576), 2023. [Online; accessed 15-November-2023].

## A. Las funciones zeta y Gamma

En este primer anexo vamos a definir las funciones  $\zeta$  y  $\Gamma$ , además de demostrar sus propiedades más sobresalientes, en las que nos apoyamos varias veces a lo largo del trabajo.

### A.1. La constante de Euler-Mascheroni

Como preliminar, es interesante introducir una constante muy relacionada con las funciones anteriores:

**Lema 18** *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$  converge.*

**Demostración** El término general de la serie es

$$a_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} = \int_0^1 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) dx.$$

Tomando la expresión integral de arriba, y teniendo en cuenta que en ella  $x \in [0, 1]$ , podemos encontrar una cota superior para  $a_n$  usando que  $n(x+n) \geq n^2$  para todo  $x \in [0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \int_0^1 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{n^2} dx = \frac{1}{2n^2} = b_n.$$

Por otro lado, que  $a_n \geq 0$  es obvio a partir de su representación integral porque  $\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ . De esta forma, tenemos que  $0 \leq a_n \leq b_n$ , y sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$  converge por ser, salvo multiplicación por constante, la serie 2-armónica. Bajo este contexto, se cumplen todas las hipótesis necesarias para hacer uso del criterio de comparación y concluir que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$  converge. ■

**Corolario 6** *El límite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \log(N+1)\right)$  existe y es finito.*

**Demostración** Basta con observar que  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \log(N+1)$ , por lo que la convergencia vista en el lema 18 de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$  implica que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \log(N+1)\right)$  existe y es finito. ■

Al valor que se obtiene al evaluar el límite con el que hemos trabajado en el corolario se le llama *constante de Euler-Mascheroni*, y se suele denotar con  $\gamma$ . Numéricamente es  $\gamma = 0,57721\dots$ , pero por lo demás es un número misterioso del que no se sabe ni si admite una expresión sencilla.

### A.2. La función zeta de Riemann

Podemos ya pasar a definir la *función  $\zeta$  de Riemann*, una de la más famosas en el ámbito de la teoría de números, dada por la serie  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . Su interés proviene de que está íntimamente ligada a la distribución de los números primos, tal y como se puede ver en el llamado *producto de Euler*, en el que no entraremos, pero que dejamos escrito sin demostrar para satisfacer la curiosidad del lector:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Comenzamos estudiando cuándo tiene sentido la definición inicial de  $\zeta$ :

**Lema 19** *La serie que define  $\zeta$  converge a una función holomorfa para todo número complejo  $s$  con  $\Re(s) > 1$ , y diverge si  $s$  es real menor que 1.*

**Demostración** Tenemos que  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ , donde  $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$  es una función holomorfa en  $A = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  por ser cociente de holomorfas en ese abierto tales que el denominador nunca se anula en  $A$ .

Ahora bien, sea  $K \subset A$  un compacto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\Re(s) \geq 1 + \epsilon \forall s \in K$ :

$$|f_n(s)| = \frac{1}{|n^s|} = \frac{1}{|e^{s \log n}|} = \frac{1}{e^{\Re(s) \log n}} = \frac{1}{e^{\log n \Re(s)}} = \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \quad \forall s \in K.$$

La desigualdad a la que hemos llegado nos permite concluir, por el criterio de comparación, que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(s)|$  converge sobre compactos  $K \subset A$ , ya que  $0 \leq |f_n(s)| \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \forall s \in K$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$  converge por ser la serie  $(1 + \epsilon)$ -armónica, con  $\epsilon > 0$ .

Recapitulando, sabemos que  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de funciones holomorfas en  $A$  tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(s)|$  converge sobre compactos. De esta forma, por el criterio M de Weierstrass,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , que es la serie que define  $\zeta$ , converge uniformemente sobre compactos  $K \subset A$ , lo que implica que converge puntualmente  $\forall s \in A$ . Además, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que la función definida por la serie en  $A$  es holomorfa en ese dominio.

Si  $s$  es real menor que 1, podemos distinguir dos casos:

1.  $s \leq 0$ : el término general de la serie,  $\frac{1}{n^s}$ , no tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ , así que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  diverge.
2.  $s \in (0, 1)$ : la serie a la que llegamos es a la  $d$ -armónica con  $d \in (0, 1)$ , por lo que sabemos que diverge.

■

En realidad, se puede probar que la serie diverge para todos los números complejos  $s$  tales que  $\Re(s) < 1$ , no solo los reales, aplicando el teorema que aparece en la referencia [18, Cor. 1.2]. Todo esto sugiere que la formulación como serie de la función  $\zeta$  de Riemann solo nos permite, para todos los  $s$  tales que  $\Re(s) \leq 1$ , definir  $\zeta(s)$  como “infinito”. Sin embargo, resulta que hay una descripción alternativa de  $\zeta$  que permite ampliar su dominio, algo que, dicho sea de paso, es de capital importancia para estudiar la distribución de los primos:

**Proposición 10** *Se tiene que  $\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x-[x]-1/2}{x^{s+1}} dx$  para todo  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(s) > 1$ .*

**Demostración** Para la primera identidad, nos apoyamos en que  $[x] = n \quad \forall x \in [n, n+1)$ , y usamos también en el cálculo de la integral involucrada que  $\Re(s) > 1$ :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx &= \int_n^{n+1} \frac{n}{x^{s+1}} dx = \frac{-n}{sx^s} \Big|_{x=n}^{x=n+1} = \frac{n}{sn^s} - \frac{n}{s(n+1)^s} \Rightarrow s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \\ &= s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \quad \text{si } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, para la segunda parte vamos a necesitar hacer algunos cálculos previos, teniendo en cuenta que  $\Re(s) > 1$  a la hora de computar las dos primeras integrales, y usando en la tercera la igualdad que acabamos de demostrar para  $\Re(s) > 1$ :

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{(1-s)x^{s-1}} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow -s \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx = \frac{-s}{s-1}, \quad \Re(s) > 1; \\ \int_1^{\infty} \frac{-1/2}{x^{s+1}} dx &= \frac{1}{2sx^s} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \frac{-1}{2s} \Rightarrow -s \int_1^{\infty} \frac{-1/2}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{2} \quad \text{si } \Re(s) > 1; \\ -s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx &= s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \zeta(s) \quad \text{si } \Re(s) > 1. \end{aligned}$$

Con los ingredientes que hemos recopilado, y aplicando la linealidad de la integral, es fácil ver que

$$\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - \frac{s}{s-1} + \zeta(s) + \frac{1}{2} = \zeta(s) \text{ en } \Re(s) > 1.$$

■

Cabe destacar que la última integral que aparece en la proposición anterior converge para  $\Re(s) > 0$ . Para convencernos de ello, basta notar que  $|x - [x] - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \forall x \in [1, \infty)$ , con lo que podemos dar una cota al módulo de la integral para todo  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(s) > 0$ :

$$\left| \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{|x - [x] - 1/2|}{|x^{s+1}|} dx \leq \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^{\Re(s)+1}} dx = \frac{1}{2\Re(s)} < \infty.$$

Además, la función compleja  $F$  a la que converge la integral en  $\Re(s) > 0$  es holomorfa en ese dominio por el teorema de analiticidad de integrales paramétricas. De esta forma, la expresión  $f(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx$ , que es holomorfa en  $B = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0, s \neq 1\}$  y coincide con  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$  en  $\Re(s) > 1$ , da lugar a una extensión meromorfa de  $\zeta$  definida en  $\Re(s) > 0$  al menos. Se puede demostrar, aunque nosotros no lo haremos, que realmente  $f$  cubre el dominio de los  $s \in \mathbb{C}$  tales que  $\Re(s) > -1$ .

Sobre  $f$  sabemos que tiene un único polo en  $s = 1$ , que es simple y cuyo residuo es igual a 1. Vamos a ver ambas cosas:

1. Como  $f$  es holomorfa en un entorno reducido de  $s = 1$  y  $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)f(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - \frac{s-1}{2} - s(s-1)F(s)) = 1$  no es infinito ni 0,  $f$  tiene un polo de orden 1 en  $s = 1$ .
2. Al ser el polo de orden 1, su residuo coincide con  $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)f(s)$ , así que  $\text{Res}(f; 1) = 1$ .

Como la extensión meromorfa de  $\zeta$  tiene un polo simple en  $s = 1$  con residuo 1, se cumple que  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  permanece acotado cuando  $s \rightarrow 1$ , siendo posible apurar un poco más:

**Lema 20**  $\lim_{s \rightarrow 1} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \gamma$ .

**Demostración** Para calcular el límite de nuestro lema, vamos a trabajar con la extensión  $f$  de  $\zeta$  que hemos obtenido en la proposición 10, ya que está definida en un abierto que contiene al 1. Con esto, llegamos a que  $\lim_{s \rightarrow 1} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \lim_{s \rightarrow 1} (\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{s-1}) = \frac{1}{2} - \lim_{s \rightarrow 1} F(s)$ . Por otro lado, sabemos de antes que la integral que define  $F$  es holomorfa en  $\Re(s) > 0$ , así que, en particular,  $F$  es continua en un entorno de  $s = 1$  y, como consecuencia,  $\lim_{s \rightarrow 1} F(s) = F(1) = \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^2} dx$ . De esta forma, si escribimos la integral impropia como límite, llegamos a la primera igualdad importante:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{x - [x] - 1/2}{x^2} dx.$$

Nos interesa ahora, por lo tanto, calcular  $\int_1^N \frac{x - [x] - 1/2}{x^2} dx$ , algo que haremos sumando a sumando aprovechándonos de la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{x}{x^2} dx &= \int_1^N \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_{x=1}^{x=N} = \log N; \quad \int_1^N -\frac{[x]}{x^2} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} -\frac{[x]}{x^2} dx = \\ \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} -\frac{n}{x^2} dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{n}{x} \Big|_{x=n}^{x=n+1} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{n}{n+1} - 1 \right) \stackrel{n=j-1}{=} - \sum_{j=2}^N \frac{1}{j} = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}; \quad \int_1^N \frac{-1/2}{x^2} dx = \\ -\frac{1}{2} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx &= \frac{1}{2x} \Big|_{x=1}^{x=N} = \frac{1}{2N} - \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^N \frac{x - [x] - 1/2}{x^2} dx = \log N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}, \end{aligned}$$

lo que da lugar a la igualdad

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \right).$$

Por último, teniendo en cuenta que  $-\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \right) = -\frac{1}{2}$  y que, como ya comentamos al inicio del anexo,  $-\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} - \log N \right) = \gamma$ , obtenemos que  $\lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma$ . ■

Para terminar con la función  $\zeta$ , vamos a contar una curiosidad: si uno sabe lo que hemos dicho antes de que la extensión  $f$  de  $\zeta$  en realidad cubre el abierto  $\Re(s) > -1$ , tomando  $s = 0$  se obtiene  $f(0) = -1/2$ , lo cual suena increíble si solo se tiene en mente la serie que define  $\zeta(s)$  en  $\Re(s) > 1$ . En este caso, es como decir  $1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$ .

Es un resultado clásico de Riemann que  $\zeta(s) - 1/(s-1)$  se extiende a una función entera [16], algo que Ramanujan usó de manera ilícita para escribir otras cosas del estilo de lo anterior, tales como  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ . Aquí, por ejemplo, lo que estaba haciendo realmente era tomar una extensión  $g$  de  $\zeta$  definida en un entorno de  $s = -1$  y evaluarla en ese punto.

### A.3. La función Gamma

Ahora introduciremos la función  $\Gamma$ , o más bien  $1/\Gamma$ , como un producto infinito:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Hay un resultado de variable compleja, que no probaremos aquí para no dispersarnos, que afirma que si  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de funciones enteras tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$  converge, entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  define una función entera que se anula justamente en los puntos en los que alguna de las  $f_n$  se anula. Su aplicación al producto anterior muestra que  $1/\Gamma(z)$  es una función entera cuyo conjunto de ceros es  $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ , algo que ya nos permite extraer algunas conclusiones básicas sobre  $\Gamma$ :

**Corolario 7**  $\Gamma(z)$  es una función meromorfa con polos simples en  $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ .

**Demostración** Podemos escribir  $\Gamma(z) = \frac{1}{1/\Gamma(z)}$ , donde tanto el numerador como el denominador son funciones enteras, así que concluimos que  $\Gamma(z)$  es una función holomorfa en todo el plano complejo excepto en los puntos en los que se anula  $1/\Gamma(z)$ , que sabemos que son los enteros negativos y el 0.

Ahora bien, sea  $a \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ , tenemos que  $\Gamma(z)$  es holomorfa en un entorno reducido  $U$  de  $a$  y, puesto que al multiplicar  $\Gamma(z) = \frac{1}{1/\Gamma(z)}$  por  $(z-a)$  se simplifica en  $U$  el único factor del denominador que se hace 0 en  $z = a$ , deducimos que  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)\Gamma(z)$  no es infinito. Además, el límite tampoco vale 0 porque el productorio del denominador converge en todo  $\mathbb{C}$ . En definitiva, los únicos puntos en los que  $\Gamma(z)$  no es holomorfa, que son los enteros no positivos, dan lugar todos ellos a polos simples de esta función, que es, por lo tanto, meromorfa. ■

Tras este primer resultado, vamos a ver una fórmula alternativa con un límite que fue, históricamente, la definición de la función  $\Gamma$  dada por Gauss [21]:

**Proposición 11**  $\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\dots(z+N)}{N!(N+1)^z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Demostración** Teniendo en cuenta que  $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\log(N+1) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)$  y  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left( \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right)$ , es fácil ver que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} z e^{z \left( -\log(N+1) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)} \prod_{n=1}^N \left( \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right).$$

Por otro lado, manipulando un poco el factor exponencial, llegamos a que

$$e^{z(-\log(N+1) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n})} = e^{-z \log(N+1)} e^{z \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}} = (N+1)^{-z} \prod_{n=1}^N e^{z/n}.$$

Con todo esto, basta sustituir la expresión del paso anterior en la primera igualdad de nuestra demostración para concluir que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{N \rightarrow \infty} z(N+1)^{-z} \prod_{n=1}^N e^{z/n} \prod_{n=1}^N \frac{n+z}{ne^{z/n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\dots(z+N)}{N!(N+1)^z}.$$

■

Ya estamos preparados para dar una representación integral sencilla para  $\Gamma$ , pero primero probaremos un lema auxiliar:

**Lema 21**  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)} = \Gamma(z)$  si  $\Re(z) > 0$ .

**Demostración** Empezamos con la integral  $\int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt$ , en la que realizamos el cambio de variable  $\frac{t}{N} = u$  y llegamos a la igualdad

$$I = \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt = N^z \int_0^1 (1-u)^N u^{z-1} du.$$

Ahora integramos por partes la expresión de arriba, teniendo en cuenta para hallar la primitiva de  $u^{z-1}$  que  $\Re(z) > 0$ :

$$I = N^z \int_0^1 (1-u)^N u^{z-1} du = \frac{N^z N}{z} \int_0^1 (1-u)^{N-1} u^z du.$$

Volvemos a integrar por partes lo que hemos obtenido en el paso anterior:

$$I = \frac{N^z N}{z} \int_0^1 (1-u)^{N-1} u^z du = \frac{N^z N(N-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{N-2} u^{z+1} du.$$

Ya podemos ver el patrón que se va repitiendo en este proceso, llegando a la conclusión de que, tras  $N-2$  integraciones por partes más, obtenemos que

$$I = \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} \int_0^1 u^{z+N-1} du = \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)}.$$

Para acabar, basta con tomar límites en ambos lados de la igualdad que hemos probado para  $\Re(z) > 0$ , teniendo en cuenta el resultado de la proposición 11. ■

La idea ahora es que la fórmula  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  para  $\Re(z) > 0$  se sigue si, para todo  $z$  en ese mismo abierto,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N (e^{-t} - (1 - \frac{t}{N})^N) t^{z-1} dt = 0$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = 0$ , tal y como vamos a ver a continuación:

$$\left| \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt \right| = \left| \int_0^N \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right) t^{z-1} dt + \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq$$

$$\left| \int_0^N \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right) t^{z-1} dt \right| + \left| \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty \text{ si } \Re(z) > 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \text{ en } \Re(z) > 0.$$

**Teorema 6**  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  en  $\Re(z) > 0$ .

**Demostración** Como acabamos de discutir, el teorema queda demostrado si conseguimos comprobar que

$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = 0$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N (e^{-t} - (1 - \frac{t}{N})^N) t^{z-1} dt = 0$ , ambos para  $\Re(z) > 0$ :

1. Para el primer límite, empezamos utilizando la desigualdad  $x^a \leq x^b$  si  $x \geq 1$  y  $a, b \in \mathbb{R}$  son tales que  $a \leq b$ :

$$\left| \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_N^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_N^\infty e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt \leq \int_N^\infty e^{-t} t^{\lfloor \Re(z) \rfloor} dt$$

Llegados a este punto, nos va a ser de ayuda usar que, para todo  $\Re(z) > 0$ , existe  $t_0$  tal que  $e^{-t} t^{\lfloor \Re(z) \rfloor} \leq e^{-t/2}$  para  $t \geq t_0$  porque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t} t^{\lfloor \Re(z) \rfloor}}{e^{-t/2}} = 0$ . De esta forma, como queremos hacer que  $N$  tienda a  $\infty$ ,

$$\left| \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_N^\infty e^{-t} t^{\lfloor \Re(z) \rfloor} dt \leq \int_N^\infty e^{-t/2} dt = -2e^{-t/2} \Big|_{t=N}^{t=\infty} = 2e^{-N/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

2. Por otra parte, para el segundo límite vamos a hacer uso de la desigualdad  $0 \leq e^{-x} - (1 - \frac{x}{n})^n \leq \frac{x^2 e^{-x}}{n}$  para  $x \geq 0$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$  [23], que no vamos a demostrar aquí, cuya dirección se mantiene si multiplicamos a ambos lados por  $x^a$ , con  $x > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^N \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \right) t^{z-1} dt \right| &\leq \int_0^N \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \right) t^{\Re(z)-1} dt \leq \\ &\int_0^N \frac{t^2 e^{-t} t^{\Re(z)-1}}{N} dt = \frac{1}{N} \int_0^N t^{\Re(z)+1} e^{-t} dt = \frac{1}{N} \int_0^1 t^{\Re(z)+1} e^{-t} dt + \frac{1}{N} \int_1^N t^{\Re(z)+1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Por un lado, sabemos que  $\int_0^1 t^{\Re(z)+1} e^{-t} dt = c < \infty$  al tratarse de una integral de una función continua sobre un dominio acotado. Por el otro, debido a la misma observación en la que nos hemos apoyado para el primer límite,  $\forall \Re(z) > 0$ , existe una constante  $C > 0$  tal que  $e^{-t} t^{\lfloor \Re(z) \rfloor} \leq C e^{-t/2}$  si  $t \geq 1$ , de donde se deduce que  $\int_1^N t^{\Re(z)+1} e^{-t} dt \leq \int_1^N t^{\lfloor \Re(z) \rfloor + 2} e^{-t} dt \leq C \int_1^N e^{-t/2} dt$ :

$$\left| \int_0^N \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \right) t^{z-1} dt \right| \leq \frac{c}{N} + \frac{C}{N} \int_1^N e^{-t/2} dt = \frac{c + 2C(e^{-1/2} - e^{-N/2})}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

A modo de curiosidad, muchos autores modernos toman como definición de  $\Gamma(z)$  la expresión integral a la que acabamos de llegar en  $\Re(z) > 0$ , y luego la extienden a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ . Esto se debe a que algunas propiedades, como la que vamos a ver ahora, se deducen de manera sencilla a partir de esa representación de  $\Gamma(z)$ :

**Corolario 8**  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ .

**Demostración** Empezamos probando la igualdad en  $\Re(z) > 0$ , donde es válida la expresión para  $\Gamma$  dada por el teorema 6. De esta forma, dado un  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(z) > 0$ , basta con integrar por partes una vez la representación integral de  $\Gamma(z+1)$  para llegar al resultado deseado:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z); \quad \Re(z) > 0.$$

Sin embargo, por el corolario 7 sabemos que tanto  $\Gamma(z+1)$  como  $z\Gamma(z)$  son funciones holomorfas en el abierto  $P = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , que contiene al abierto  $\Re(z) > 0$ , en el que coinciden. Así, por el principio de ceros aislados, concluimos que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  para todo  $z \in P = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ . ■

Con la ecuación funcional que satisface  $\Gamma$  podemos calcular fácilmente los residuos en sus polos si tenemos en cuenta que todos ellos son simples. Veámoslo con un ejemplo:

$$\text{Res}(\Gamma; -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z+2)\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, usando que  $\Gamma(1) = 1$ , se sigue que  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . En este sentido,  $\Gamma$  generaliza el factorial a valores no enteros.

Para acabar con el estudio de la función  $\Gamma$ , vamos a trabajar con una identidad que se sigue de su representación integral, suponiendo para ello que  $\Re(s), \Re(w), \Re(s-w) > 0$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s} dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s} y^{s-1} e^{-y} dx dy \quad \begin{matrix} x=u/v \\ y=u+v \end{matrix} \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u}{v}\right)^{w-1} \left(\frac{u+v}{v}\right)^{-s} (u+v)^{s-1} e^{-(u+v)} \frac{u+v}{v^2} dudv &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{w-1} e^{-u} v^{s-w-1} e^{-v} dudv = \\ &= \Gamma(w)\Gamma(s-w). \end{aligned}$$

De aquí se deduce la *fórmula de reflexión*:

**Proposición 12**  $\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi w)}$  para todo  $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Demostración** Empezamos evaluando la igualdad que hemos mencionado arriba en  $s = 1$ , teniendo en cuenta que  $\Gamma(1) = 1$ :

$$\int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x} dx = \Gamma(1-w)\Gamma(w) \text{ si } \Re(w), \Re(1-w) > 0.$$

De esta forma, podemos empezar demostrando que  $\int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi w)}$  para  $w$  real tal que  $w \in (0, 1)$ , y luego extender el resultado a  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Con este objetivo en mente, consideramos la función  $W(x) = \frac{x^{w-1}}{1+x}$ , con  $w \in (0, 1)$ , y la curva  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$  tal y como aparece en el siguiente esquema:

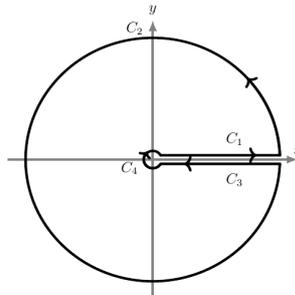


Figura 1: curva  $C$  sobre la que integramos  $W$ .

Observamos que  $W$ , vista como función de variable compleja, es meromorfa en  $B = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , y que  $C$  es una curva cuya traza está contenida en  $B$  y que es simple, cerrada,  $C^1$  a trozos, con orientación positiva y tal que la única singularidad de  $W$  en  $B$ ,  $x = -1$ , pertenece al dominio interior de  $C$ . Con todos estos ingredientes, se reúnen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de los residuos:

$$\int_C W(x) dx = \int_C \frac{x^{w-1}}{1+x} dx = 2\pi i \text{Res}(W; -1) \text{ para todo } w \in (0, 1).$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)W(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^{w-1} = (-1)^{w-1}$  no es ni cero ni infinito, concluimos que  $x = -1$  es un polo simple de  $W$  y, por lo tanto,  $\text{Res}(W; -1) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)W(x) =$

$(-1)^{w-1} = e^{\pi i(w-1)}$ . Sustituyendo este valor en la igualdad anterior, tenemos que  $\int_C W(x) dx = 2\pi i e^{\pi i(w-1)} \forall w \in (0, 1)$ .

Por otro lado, al ser  $C$  unión disjunta de  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ ,  $2\pi i e^{\pi i(w-1)} = \int_C W(x) dx = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} W(x) dx$ . En este contexto, teniendo en cuenta que el resultado de la integral sobre  $C$  no depende de los radios  $\epsilon$  de  $C_4$  y  $R$  de  $C_2$ , nuestro objetivo no es más que calcular  $\int_{C_i} W(x) dx$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty$  en función de  $I = \int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x} dx$ :

1. Sobre  $C_4$ , que tiene longitud  $(2\pi - 2\delta_\epsilon)\epsilon$ , los puntos  $x$  son todos de módulo  $\epsilon$ , de manera que

$$\left| \int_{C_4} \frac{x^{w-1}}{1+x} dx \right| \leq (2\pi - 2\delta_\epsilon)\epsilon \cdot \max_{|x|=\epsilon} \frac{|x^{w-1}|}{|1+x|} \leq (2\pi - 2\delta_\epsilon)\epsilon \cdot \max_{|x|=\epsilon} \frac{|x|^{w-1}}{1-|x|} = (2\pi - 2\delta_\epsilon) \frac{\epsilon^w}{1-\epsilon} \rightarrow 0$$

cuando  $\epsilon, \delta_\epsilon \rightarrow 0^+$ .

2. De manera análoga, los puntos  $x$  de  $C_2$ , cuya longitud es de  $(2\pi - 2\delta_R)R$ , tienen módulo  $R$ , con lo que se deduce que

$$\left| \int_{C_2} \frac{x^{w-1}}{1+x} dx \right| \leq (2\pi - 2\delta_R)R \cdot \max_{|x|=R} \frac{|x^{w-1}|}{|1+x|} \leq (2\pi - 2\delta_R)R \cdot \max_{|x|=R} \frac{|x|^{w-1}}{|x|-1} = (2\pi - 2\delta_R) \frac{R^w}{R-1} \rightarrow 0$$

si  $R \rightarrow \infty, \delta_R \rightarrow 0^+$  al ser  $w-1 < 0$ .

3. Si en la integral sobre  $C_1$  tomamos los límites cuando  $\epsilon, \delta_\epsilon, \delta_R \rightarrow 0^+$  y  $R \rightarrow \infty$ , recuperamos  $I = \int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x} dx$ .

4. Por otro lado, repitiendo el mismo procedimiento con la integral sobre  $C_3$ , y teniendo en cuenta que ahora el intervalo  $(0, \infty)$  se recorre de derecha a izquierda y con el argumento de los puntos  $x$  igual a  $2\pi$ , al realizar el cambio de variable  $x = e^{2\pi i}s$ , con el que  $dx = e^{2\pi i}ds = ds$ , obtenemos que

$$\int_{C_3} \frac{x^{w-1}}{1+x} dx = \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(w-1)}s^{w-1}}{1+e^{2\pi i}s} ds = -e^{2\pi i(w-1)} \int_0^\infty \frac{s^{w-1}}{1+s} ds = -e^{2\pi i(w-1)}I.$$

Juntando todos los resultados, llegamos a que  $\int_C W(x) dx = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} W(x) dx = I(1 - e^{2\pi i(w-1)})$  para  $w \in (0, 1)$ , pero también sabíamos de antes que  $\int_C W(x) dx = 2\pi i e^{\pi i(w-1)}$  para  $w$  en ese intervalo, así que podemos igualar ambos valores y despejar de ellos la integral  $I$  que realmente nos interesaba:

$$I(1 - e^{2\pi i(w-1)}) = 2\pi i e^{\pi i(w-1)} \Rightarrow I = \int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{\pi i(w-1)}}{1 - e^{2\pi i(w-1)}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)} \quad \forall w \in (0, 1).$$

Acabamos de probar que  $\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)}$  si  $w \in (0, 1)$ . Sin embargo, sabemos que las funciones a ambos lados de la igualdad son holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  y coinciden en el conjunto  $U = (0, 1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , que contiene algunos de sus puntos de acumulación, por lo que el principio de ceros aislados nos asegura que en realidad  $\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)} \forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . ■

El ejemplo más típico de aplicación de la fórmula de reflexión, tomando  $w = 1/2$ , es el cálculo de  $\Gamma(1/2)$ , que nos sirve de base para encontrar, gracias al corolario 8, todos los valores de la forma  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ , tal y como vamos a ver a continuación:

$$\Gamma^2(1/2) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} = \pi.$$

Teniendo en cuenta que, si nos dirigimos a la definición original que dimos para  $1/\Gamma(w)$ ,  $1/\Gamma(1/2)$  es un productorio de términos positivos, deducimos que  $\Gamma(1/2) > 0$  y, por lo tanto, descartamos la raíz negativa al despejar  $\Gamma(1/2)$  en la expresión de arriba:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Por último, para cerrar el capítulo, un comentario a modo de dato curioso que no demostraremos: si en la fórmula de reflexión empleamos  $\Gamma(1-w) = -w\Gamma(-w)$  y el producto infinito con el que presentamos  $1/\Gamma(w)$  al principio, se obtiene la sorprendente fórmula

$$\operatorname{sen}(\pi w) = \pi w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{n^2}\right) \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Procediendo a la inversa, si uno conoce de antemano esta expresión en forma de producto para el seno, se puede deducir la proposición 12 sin calcular ninguna integral.

## B. La ley de reciprocidad cuadrática

Podemos aplicar todos los conocimientos que hemos reunido sobre la función  $\theta$  en una prueba de la llamada *ley de reciprocidad cuadrática*, un sorprendente resultado sobre congruencias que conjeturó Euler y probó Gauss. Entre sus consecuencias está el diseño de un algoritmo efectivo para saber si una ecuación cuadrática tiene solución módulo un entero. Para su enunciado se suele introducir el *símbolo de Legendre*, que para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $p$  primo tal que  $p \nmid n$  se define como

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 \equiv n \pmod{p} \text{ tiene solución,} \\ -1 & \text{si } x^2 \equiv n \pmod{p} \text{ no tiene solución.} \end{cases}$$

Con lo anterior, la ley de reciprocidad cuadrática afirma que si  $p$  y  $q$  son primos impares distintos entre sí, se cumple que

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4},$$

es decir, existe una relación entre la solubilidad de  $x^2 \equiv p \pmod{q}$  y la de  $x^2 \equiv q \pmod{p}$ , lo cual choca bastante porque, en principio, las congruencias con diferentes módulos no tienen absolutamente nada que ver.

En lo sucesivo, sin recordarlo cada vez, supondremos que  $p$  y  $q$  son como en el enunciado anterior ( $p, q > 2$  primos distintos). Además, en nuestra prueba serán importantes las llamadas *sumas de Gauss*, que definiremos para cada fracción irreducible  $M/N$ , con  $M \in \mathbb{Z}$  y  $N \in \mathbb{Z}^+$ , como  $G(M/N) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N}$ .

Vamos a empezar con un resultado auxiliar al que tendremos que hacer alusión al principio del anexo sobre todo:

**Lema 22** *Sea  $p$  un primo impar, y dado  $RC_p = \{x \in \mathbb{Z}_p^* \mid \exists y \in \mathbb{Z}_p^* \text{ tal que } y^2 = x\}$  el conjunto de los residuos cuadráticos módulo  $p$ , entonces  $RC_p$  es un subgrupo de  $\mathbb{Z}_p^*$  tal que  $|RC_p| = (p-1)/2$ .*

**Demostración** Tomamos la aplicación  $f : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  dada por  $f(x) = x^2$ , que verifica que  $f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p^*$  y es, por lo tanto, un homomorfismo de grupos. Bajo esta hipótesis, el teorema de isomorfía nos asegura que  $\mathbb{Z}_p^*/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f)$ , pero  $\operatorname{Im}(f) = RC_p$  por definición de  $f$ . Además, como la imagen de un homomorfismo es siempre un subgrupo del grupo de llegada,  $RC_p < \mathbb{Z}_p^*$ .

En cuanto al núcleo, podemos decir que  $\ker(f) = \{x \in \mathbb{Z}_p^* : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ , y como  $p \neq 2$ , tenemos que  $-1 \neq 1$  y  $|\ker(f)| = 2$ . También sabemos que  $|\mathbb{Z}_p^*| = p-1$  por ser  $p$  primo, así que  $|RC_p| = \frac{|\mathbb{Z}_p^*|}{|\ker(f)|} = (p-1)/2$ . ■

En particular, deducimos del isomorfismo  $\mathbb{Z}_p^*/\{-1, 1\} \cong RC_p$  que los primeros  $(p-1)/2$  elementos de  $\mathbb{Z}_p^*$  dan lugar, al elevarlos al cuadrado, a los  $(p-1)/2$  residuos cuadráticos módulo  $p$ . Por otro lado, las  $(p-1)/2$  clases restantes de  $\mathbb{Z}_p^*$ , que son justo las opuestas de las primeras,

vuelven a dar al cuadrado todos los elementos de  $RC_p$  sin repetición. De esta manera, teniendo también en cuenta que si  $k^2 \equiv m \pmod{p}$ , se cumple que  $e^{2\pi ik^2/p} = e^{2\pi im/p}$ , obtenemos que

$$G(1/p) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi ik^2/p} = 1 + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} e^{2\pi ik^2/p} + \sum_{k=(p+1)/2}^{p-1} e^{2\pi ik^2/p} = 1 + 2 \sum_{m \in RC_p} e^{2\pi im/p}.$$

Por un argumento similar al anterior, ahora introduciendo un  $q > 2$  primo en el exponente de  $e$ , si  $k^2 \equiv m \pmod{p}$ , entonces  $e^{2\pi ik^2q/p} = e^{2\pi imq/p}$ , así que

$$G(q/p) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi ik^2q/p} = 1 + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} e^{2\pi ik^2q/p} + \sum_{k=(p+1)/2}^{p-1} e^{2\pi ik^2q/p} = 1 + 2 \sum_{m \in RC_p} e^{2\pi imq/p}.$$

En concreto, si  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ , es decir, si  $q \in RC_p$ , teniendo en cuenta que  $RC_p$  es un subgrupo según el lema 22, un resultado de álgebra nos asegura que  $q \cdot RC_p = RC_p$ , de donde se extrae que  $\sum_{m \in RC_p} e^{2\pi imq/p} = \sum_{g \in RC_p} e^{2\pi ig/p}$  y, en consecuencia,  $G(q/p) = G(1/p)$ .

Ahora nos vamos a centrar en el caso en el que  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$  o, en otras palabras,  $q \notin RC_p$ . Una primera observación es que, por el razonamiento que hemos descrito tras el lema 22, los  $(p-1)/2$  residuos cuadráticos módulo  $p$  son  $RC_p = \left\{1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$ . Además, como  $RC_p < \mathbb{Z}_p^*$ , la clase lateral  $q \cdot RC_p$ , formada por  $|RC_p| = (p-1)/2$  elementos distintos, o bien coincide con  $RC_p$  o bien satisface que  $q \cdot RC_p \cap RC_p = \emptyset$ . De las dos opciones, llegamos a la conclusión de que la que se cumple es la segunda, ya que  $q \cdot 1^2 = q \in q \cdot RC_p$ , pero  $q \notin RC_p$ , así que no puede ser que  $q \cdot RC_p = RC_p$ . Hemos demostrado, por lo tanto, que entre  $RC_p$  y  $q \cdot RC_p$ , ambos subconjuntos de  $\mathbb{Z}_p^*$ , hay  $p-1$  clases distintas, dando lugar necesariamente su unión a todo  $\mathbb{Z}_p^*$ . El 0 es, entonces, el único número que nos falta para completar  $\mathbb{Z}_p$ .

Teniendo en cuenta que  $a^2 = (-a)^2 \forall a \in \mathbb{Z}_p$ , queda comprobado con el párrafo anterior que  $q(\pm 1)^2, q(\pm 2)^2, \dots, q\left(\pm \frac{p-1}{2}\right)^2, 0, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, \dots, \left(\pm \frac{p-1}{2}\right)^2$  dan todas las clases módulo  $p$  sin repeticiones cuando se fija uno de los dos signos. Con esta información, se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned} G(q/p) + G(1/p) &= 1 + 2 \sum_{m \in RC_p} e^{2\pi imq/p} + 1 + 2 \sum_{m \in RC_p} e^{2\pi im/p} = \\ &= 2 + 2 \left( \sum_{g \in q \cdot RC_p} e^{2\pi ig/p} + \sum_{m \in RC_p} e^{2\pi im/p} \right) = 2e^{2\pi i \cdot 0/p} + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_p^*} e^{2\pi ik/p} = 2 \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi ik/p}. \end{aligned}$$

El último paso es recordar que  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo que nos dice, tomando  $x = e^{2\pi i/p}$  y  $n = p$ , que

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi ik/p} = \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{2\pi i/p} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{2\pi i/p} - 1} = 0,$$

ya que  $e^{2\pi i/p} \neq 1 \forall p$  primo. Llegamos, por consiguiente, a que  $G(q/p) = -G(1/p)$ .

Todo el razonamiento que llevamos hasta ahora nos permite afirmar, finalmente, que dado  $q > 2$  un primo cualquiera distinto de  $p$ ,  $G(q/p) = \left(\frac{q}{p}\right)G(1/p)$ .

Nuestro objetivo ahora es dar una expresión para  $G(1/(pq))$ , para lo que nos van a ser de gran utilidad dos pequeños lemas:

**Lema 23** Si  $p, q$  son dos primos impares distintos entre sí, entonces la aplicación  $f : \mathbb{Z}_{pq}^* \rightarrow RC_{pq}$  dada por  $f(x) = x^2$  es 4-a-1.

**Demostración** Dado  $b \in RC_{pq}$ , por definición de residuo cuadrático,  $b$  es congruente a  $c^2$  módulo  $pq$  para algún  $c \in \mathbb{Z}_{pq}^*$ , de manera que existe el inverso  $c^{-1}$ :

$$x^2 \equiv b \pmod{pq} \Leftrightarrow x^2 \equiv c^2 \pmod{pq} \Leftrightarrow (c^{-1}x)^2 \equiv 1 \pmod{pq} \xLeftrightarrow{c^{-1}x=w} w^2 \equiv 1 \pmod{pq},$$

así que  $b$  tendrá tantas preimágenes por  $f$  como soluciones existan de la ecuación  $w^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ .

Ahora bien, como  $(p, q) = 1$ , por el teorema chino del resto,  $w^2 \equiv 1 \pmod{pq}$  si y solo si  $w^2 \equiv 1 \pmod{p}$  y  $w^2 \equiv 1 \pmod{q}$ , pero cada una de las dos últimas congruencias tiene 2 soluciones ( $w = \pm 1$ ) por ser  $p, q$  primos. De esta forma, existen 4 elementos distintos en  $\mathbb{Z}_{pq}^*$  tales que  $w^2 \equiv 1 \pmod{pq}$  y, como consecuencia,  $f$  es 4-a-1. ■

**Lema 24** Sean  $p, q$  dos primos impares distintos entre sí, los números de la forma  $k_1q^2 + k_2p^2$ , con  $k_1 \in RC_p$  y  $k_2 \in RC_q$ , dan lugar a todos los residuos cuadráticos módulo  $pq$  sin repetición.

**Demostración** Dado que  $(p, q) = 1$ , el teorema chino del resto nos dice que  $\mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ , de donde se extrae que  $\mathbb{Z}_{pq}^* \cong \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$ . Además, este último isomorfismo implica que  $RC_{pq} \cong RC_p \times RC_q$  debido a que, como hemos visto en los lemas 22 y 23,  $RC_p < \mathbb{Z}_p^*$  y  $RC_{pq} < \mathbb{Z}_{pq}^*$  respectivamente. De esta manera, cada par ordenado  $(m, n) \in RC_p \times RC_q$  nos da un elemento de  $RC_{pq}$ , así que nuestro objetivo se reduce a construir esos pares.

En primer lugar, hay que observar que  $q^2 \in RC_p$  por ser el cuadrado de  $q$ , que es coprimo con  $p$  y, como consecuencia, pertenece a  $\mathbb{Z}_p^*$ . Con ello, al ser  $RC_p$  un subgrupo de  $\mathbb{Z}_p^*$ ,  $q^2 \cdot RC_p = RC_p$ , o lo que es lo mismo,  $q^2k_1$  da todos los elementos de  $RC_p$  sin repeticiones cuando  $k_1$  toma valores en  $RC_p$ .

Por el mismo argumento que antes,  $p^2 \in RC_q$ , lo que implica que  $p^2k_2$  genera una sola vez cada número de  $RC_q$  cuando  $k_2$  recorre  $RC_q$ . Hemos visto, por lo tanto, que los pares ordenados  $(q^2k_1, p^2k_2)$  dan lugar, según vamos tomando  $k_1 \in RC_p$  y  $k_2 \in RC_q$ , a todos los elementos de  $RC_p \times RC_q$  sin caer en repeticiones. No obstante, como  $RC_{pq} \cong RC_p \times RC_q$ , en realidad hemos encontrado implícitamente todas las clases de  $RC_{pq}$ , siendo suficiente para hallar su expresión explícita transformar el sistema formado por  $x \equiv q^2k_1 \pmod{p}$  y  $x \equiv p^2k_2 \pmod{q}$  en una sola congruencia módulo  $pq$ :

$$\begin{cases} x \equiv q^2k_1 \pmod{p} \\ x \equiv p^2k_2 \pmod{q} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv q^2k_1 + p^2k_2 \pmod{pq}.$$

Con estos resultados auxiliares, estamos en condiciones de probar una importante identidad:

**Proposición 13** Dados  $p, q$  dos primos impares distintos entre sí, entonces  $G(1/(pq)) = G(q/p)G(p/q)$ .

**Demostración** Vamos a comprobar que los dos términos de la igualdad del enunciado admiten la misma fórmula, empezando por  $G(1/(pq))$ :

$$\begin{aligned} G(1/(pq)) &= \sum_{k=0}^{pq-1} e^{2\pi i k^2 / (pq)} = 1 + \sum_{k=1}^{pq-1} e^{2\pi i k^2 / (pq)} = \\ &= 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq} \setminus \{0\}, p|k} e^{2\pi i k^2 / (pq)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq} \setminus \{0\}, q|k} e^{2\pi i k^2 / (pq)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq}^*} e^{2\pi i k^2 / (pq)}. \end{aligned}$$

Sabemos que los múltiplos de  $p$  en  $\mathbb{Z}_{pq} \setminus \{0\}$  son  $p, 2p, \dots, (q-1)p$ , mientras que los de  $q$  en ese mismo conjunto son, de manera análoga,  $q, 2q, \dots, (p-1)q$ . Esto nos permite, si además aplicamos otras identidades ya vistas en la sección, hacer las siguientes simplificaciones:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq} \setminus \{0\}, p|k} e^{2\pi i k^2 / (pq)} = \sum_{j=1}^{q-1} e^{2\pi i (jp)^2 / (pq)} = \sum_{j=1}^{q-1} e^{2\pi i j^2 p / q} = G(p/q) - 1 = 2 \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i mp / q};$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq} \setminus \{0\}, q|k} e^{2\pi i k^2 / (pq)} = \sum_{j=1}^{p-1} e^{2\pi i (jq)^2 / (pq)} = \sum_{j=1}^{p-1} e^{2\pi i j^2 q / p} = G(q/p) - 1 = 2 \sum_{n \in RC_p} e^{2\pi i n q / p}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que, de manera similar a ocasiones anteriores,  $e^{2\pi i k^2 / (pq)} = e^{2\pi i b / (pq)}$  si  $k^2 \equiv b \pmod{pq}$ , y aplicando el lema 23, llegamos a que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_{pq}^*} e^{2\pi i k^2 / (pq)} = 4 \sum_{b \in RC_{pq}} e^{2\pi i b / (pq)},$$

así que finalmente nos queda

$$G(1/(pq)) = 1 + 2 \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i m p / q} + 2 \sum_{n \in RC_p} e^{2\pi i n q / p} + 4 \sum_{b \in RC_{pq}} e^{2\pi i b / (pq)}.$$

Ahora nos centramos en el producto  $G(q/p)G(p/q)$ , que desarrollamos haciendo uso de las propiedades que ya hemos estudiado de  $G(q/p)$  para  $q, p$  primos impares distintos entre sí:

$$\begin{aligned} G(q/p)G(p/q) &= \left(1 + 2 \sum_{n \in RC_p} e^{2\pi i n q / p}\right) \left(1 + 2 \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i m p / q}\right) = \\ &1 + 2 \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i m p / q} + 2 \sum_{n \in RC_p} e^{2\pi i n q / p} + 4 \sum_{n \in RC_p} \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i (nq^2 + mp^2) / (pq)} = \\ &1 + 2 \sum_{m \in RC_q} e^{2\pi i m p / q} + 2 \sum_{n \in RC_p} e^{2\pi i n q / p} + 4 \sum_{b \in RC_{pq}} e^{2\pi i b / (pq)}, \end{aligned}$$

donde el último paso se deduce usando el lema 24 y, de nuevo, el hecho de que, si  $nq^2 + mp^2 \equiv b \pmod{pq}$ , entonces  $e^{2\pi i (nq^2 + mp^2) / (pq)} = e^{2\pi i b / (pq)}$ . ■

Con el trabajo que llevamos hasta ahora, la ley de reciprocidad cuadrática se desprende fácilmente si suponemos que  $G(1/N) = \sqrt{N} e^{\pi i (N-1)^2 / 8}$  para  $N \in \mathbb{N}$  impar, algo que demostraremos luego. De momento, vamos al enunciado que motiva la sección:

**Teorema 7** Si  $p, q > 2$  son dos primos diferentes, entonces  $\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$ .

**Demostración** Por un lado, el primer acercamiento que hicimos a las sumas de Gauss nos permitió comprobar que  $G(q/p) = \left(\frac{q}{p}\right) G(1/p)$  para  $p, q$  primos impares distintos entre sí, así que bajo esa condición sobre  $p$  y  $q$ ,

$$G(p/q)G(q/p) = \left(\frac{p}{q}\right) G(1/q) \left(\frac{q}{p}\right) G(1/p).$$

Sin embargo, la proposición 13 nos asegura, también para  $p$  y  $q$  de la forma que necesitamos, que  $G(1/(pq)) = G(p/q)G(q/p)$ , lo que nos conduce necesariamente a la igualdad

$$G(1/(pq)) = \left(\frac{p}{q}\right) G(1/q) \left(\frac{q}{p}\right) G(1/p),$$

con la que ya podemos trabajar sustituyendo las sumas de Gauss por sus correspondientes evaluaciones. Para ello, observamos que nos podemos encontrar ante las dos siguientes situaciones:

$$N \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow N = 3 + 4k \Rightarrow \frac{(N-1)^2}{8} = \frac{(2+4k)^2}{8} = \frac{4+16k+16k^2}{8} = \frac{1}{2} + 2k + 2k^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{N} e^{\pi i (N-1)^2 / 8} = \sqrt{N} e^{\pi i (\frac{1}{2} + 2k + 2k^2)} = \sqrt{N} e^{\pi i / 2} e^{2\pi k i (1+k)} = i \sqrt{N};$$

$$N \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow N = 1 + 4k \Rightarrow \frac{(N-1)^2}{8} = \frac{(4k)^2}{8} = \frac{16k^2}{8} = 2k^2 \Rightarrow \sqrt{N} e^{\pi i (N-1)^2 / 8} = \sqrt{N} e^{2\pi k^2 i} = \sqrt{N}.$$

Lo anterior nos motiva a separar cuatro escenarios distintos según las clases módulo 4 a las que pertenezcan  $p$  y  $q$ :

1. Si  $p, q \equiv 3 \pmod{4}$ , tenemos que  $pq \equiv 3 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{4}$ , así que  $\sqrt{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)i\sqrt{q}\left(\frac{q}{p}\right)i\sqrt{p}$  o, de manera equivalente,  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ .
2. Por otro lado, si  $p, q \equiv 1 \pmod{4}$ , se verifica que  $pq \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{4}$ , de donde se deduce que  $\sqrt{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q}\left(\frac{q}{p}\right)\sqrt{p}$  y, en consecuencia,  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ .
3. Cuando  $p \equiv 1 \pmod{4}$  y  $q \equiv 3 \pmod{4}$ , sabemos que  $pq \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{4}$ , de forma que  $i\sqrt{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)i\sqrt{q}\left(\frac{q}{p}\right)\sqrt{p}$  y, simplificando,  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ .
4. Finalmente, el caso en el que  $p \equiv 3 \pmod{4}$  y  $q \equiv 1 \pmod{4}$  es simétrico al último que hemos visto.

En particular,  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  si al menos uno de los dos primos es congruente a 1 módulo 4, mientras que cuando  $p, q \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ . Esto mismo, escrito de manera sintética, se reduce a  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$ . ■

Para cerrar el apéndice, vamos a dedicarnos a la evaluación de  $G(1/N)$  con  $N \in \mathbb{N}$  impar, que hemos utilizado en la prueba anterior y ha sido imprescindible para ella. Usaremos la función  $\theta$ , pero con la nueva notación  $\vartheta(z, \tau) = \theta(z, e^{i\pi\tau})$ , más ligera y que nos permite distinguir  $q = e^{i\pi\tau}$  del primo  $q$ .

**Lema 25** *Sea  $M/N$  una fracción irreducible con  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , se tiene que  $\vartheta\left(0, \frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \ell M/N} \vartheta\left(\frac{\ell M}{N}, i\varepsilon^2\right)$ .*

**Demostración** Vamos a verificar que se cumple la identidad manipulando el lado derecho para llegar al izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \ell M/N} \vartheta\left(\frac{\ell M}{N}, i\varepsilon^2\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} e^{2\pi i (n-k)\ell M/N} \stackrel{1}{=} \\ &\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i (n-k)\ell M/N} \stackrel{2}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n \equiv k \pmod{N}} e^{2\pi i k^2 M/N} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} \stackrel{3}{=} \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n \equiv k \pmod{N}} e^{2\pi i n^2 M/N} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \left(\frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right)} = \vartheta\left(0, \frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right). \end{aligned}$$

Hay tres pasos, marcados con los números 1, 2 y 3, que requieren de una justificación más profunda:

1. La sucesión  $a_{\ell, n} = e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} e^{2\pi i (n-k)\ell M/N}$  cumple que

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{\ell, n}| = \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} = \sum_{\ell=0}^{N-1} (1 + 2C) = N(1 + 2C) < \infty,$$

donde  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon^2} = C < \infty$  por el criterio de la raíz, ya que  $(e^{-\pi n^2 \varepsilon^2})^{1/n} = e^{-\pi n \varepsilon^2} \rightarrow 0 < 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De esta forma, tenemos convergencia absoluta y, por el teorema de Fubini, podemos intercambiar el orden de los sumatorios.

2. Si  $n \equiv k \pmod{N}$ ,  $n - k = \alpha N$  para algún  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , por lo que  $e^{2\pi i (n-k)\ell M/N} = e^{2\pi i \alpha M} = 1$  y, como consecuencia,

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i (n-k)\ell M/N} = \sum_{\ell=0}^{N-1} 1 = N.$$

Sin embargo, en el caso en el que  $N \nmid (n - k)$ , como  $N$  tampoco divide a  $M$  por ser  $M/N$  irreducible con  $N \geq 2$ , sabemos que  $(n - k)M/N \notin \mathbb{Z}$ , así que  $r = e^{2\pi i (n-k)M/N} \neq 1$ . De esta

forma, podemos aplicar sin problemas la fórmula para la suma de series geométricas finitas, por la que  $\sum_{\ell=0}^{N-1} r^\ell = \frac{1-r^N}{1-r}$ . En nuestro caso,

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i(n-k)\ell M/N} = \frac{1 - e^{2\pi i(n-k)M}}{1 - e^{2\pi i(n-k)M/N}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi i(n-k)M/N}} = 0.$$

3. Se cumple que  $k \equiv n \pmod{N}$  y, en particular,  $k^2 \equiv n^2 \pmod{N}$ , de donde se deduce, de manera similar a como hemos hecho otras veces, que  $e^{2\pi i k^2 M/N} = e^{2\pi i n^2 M/N}$ . ■

Si aplicamos la fórmula de transformación (2) del primer capítulo a la función  $\vartheta$  que aparece en el término derecho de la identidad que acabamos de ver, llegamos a que

$$\begin{aligned} \vartheta\left(0, \frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \ell M/N} \cdot \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2}{N^2 \varepsilon^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M}{iN\varepsilon^2}, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) = \\ &= \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} e^{-2\pi i k \ell M/N} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2}{N^2 \varepsilon^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M}{iN\varepsilon^2}, \frac{i}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

así que multiplicando ambos lados por  $\varepsilon$  y haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \vartheta\left(0, \frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} e^{-2\pi i k \ell M/N} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2}{N^2 \varepsilon^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M}{iN\varepsilon^2}, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} e^{-2\pi i k \ell M/N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2}{N^2 \varepsilon^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M}{iN\varepsilon^2}, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \vartheta\left(0, \frac{i}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

donde el último paso se desprende de que los límites para  $\ell \in \{1, \dots, N-1\}$  salen todos nulos, ya que la función  $g(x) = e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2 x^2}{N^2}}$  con  $\ell > 0$  pertenece a la clase de Schwartz por ser una gaussiana, así que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2}{N^2 \varepsilon^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M}{iN\varepsilon^2}, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) \stackrel{x=1/\varepsilon}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{\pi \ell^2 M^2 x^2}{N^2}} \vartheta\left(\frac{\ell M x^2}{iN}, i x^2\right) = 0$$

debido al decrecimiento rápido de  $g$ .

Nos queda solo estudiar el comportamiento de  $\vartheta\left(0, \frac{i}{\varepsilon^2}\right)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$\begin{aligned} \vartheta\left(0, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\varepsilon^2}} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-\frac{\pi n^2}{\varepsilon^2}} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \vartheta\left(0, \frac{i}{\varepsilon^2}\right) = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-\frac{\pi n^2}{\varepsilon^2}} \stackrel{\text{TCU}}{=} \\ &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\pi n^2}{\varepsilon^2}} = 1, \end{aligned}$$

con las siglas TCU indicando que metemos el límite dentro del sumatorio gracias al teorema de convergencia uniforme, que hemos podido usar porque como discutimos en la demostración del teorema 2,  $T(\tau) = \vartheta(z_0, \tau)$  converge uniformemente sobre compactos en  $H = \{\tau \in \mathbb{C} : \Im(\tau) > 0\}$  para cualquier  $z_0 \in \mathbb{C}$  fijo, y todos los números de la forma  $i/\varepsilon^2$ , con  $\varepsilon > 0$ , pertenecen a  $H$ . De esta forma, concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \vartheta\left(0, \frac{2M}{N} + i\varepsilon^2\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k^2 M/N} = \frac{1}{N} G(M/N).$$

Como en nuestro argumento hasta ahora solo hemos supuesto que  $\varepsilon > 0$  y que  $M/N$  es una fracción irreducible con  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ , podemos reescribir el límite de arriba en el caso en el que  $\varepsilon = 2\delta/N$ , con  $\delta > 0$ , y  $M/N = 1/N$ , donde  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  es un valor prefijado:

$$\frac{1}{N} G(1/N) = \lim_{\frac{2\delta}{N} \rightarrow 0^+} \frac{2\delta}{N} \vartheta\left(0, \frac{2}{N} + \frac{4i\delta^2}{N^2}\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2\delta}{N} \vartheta\left(0, \frac{2}{N} + \frac{4i\delta^2}{N^2}\right) = \frac{2}{N} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta\left(0, \frac{2}{N} + \frac{4i\delta^2}{N^2}\right),$$

con la segunda igualdad dada porque, al ser  $2/N$  una constante positiva,  $2\delta/N \rightarrow 0^+$  si y solo si  $\delta \rightarrow 0^+$ . Así, obtenemos finalmente que

$$G(1/N) = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, \frac{2}{N} + \frac{4i\delta^2}{N^2} \right),$$

a partir de donde podemos deducir una evaluación explícita para  $G(1/N)$  si  $N \in \mathbb{N}$  es impar:

**Proposición 14** *Dado  $N$  un número natural impar, entonces  $G(1/N) = \sqrt{N} e^{\pi i(N-1)^2/8}$ .*

**Demostración** El caso  $N = 1$  es trivial, ya que  $G(1/1) = e^{2\pi i \cdot 0^2 \cdot 1/1} = 1 = \sqrt{1} e^{\pi i(1-1)^2/8}$ . Por otro lado, para el resto de impares podemos hacer uso de la expresión en forma de límite a la que hemos llegado arriba para  $G(1/N)$ , que era válida para  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ :

$$\begin{aligned} G(1/N) &= 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, \frac{2}{N} + \frac{4i\delta^2}{N^2} \right) = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \left( -\frac{2i}{N} + \frac{4\delta^2}{N^2} \right)^{-1/2} \vartheta \left( 0, -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{Ni}{2} \right)^{1/2} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right) = \sqrt{N}(1+i) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se deriva al aplicar (2) del primer capítulo a la función  $\vartheta$  con la que estamos trabajando. En particular, existe  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right)$  y es igual a  $\frac{G(1/N)}{\sqrt{N}(1+i)}$ .

Si ahora observamos que  $-N/4$  es una fracción irreducible por ser  $N$  impar, podemos concluir, utilizando uno de los resultados del razonamiento previo a la proposición, que  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \vartheta \left( 0, -\frac{N}{2} + i\delta^2 \right)$  también existe y vale  $\frac{G(-N/4)}{4}$ . De esta forma, tiene sentido hablar de la diferencia entre este límite y el anterior:

$$\begin{aligned} \frac{G(-N/4)}{4} - \frac{G(1/N)}{\sqrt{N}(1+i)} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \delta \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N}{2} + i\delta^2 \right)} \right) - \delta \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right)} \right) \right) = \\ &= \left( \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \right) \cdot \left( \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N}{2} + i\delta^2 \right)} \right) - \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right)} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

pero  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} e^{\pi i \left( -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right)} - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} e^{\pi i \left( -\frac{N}{2} + i\delta^2 \right)} = 0$  y, tal y como vimos en la prueba del teorema 2,  $\theta$  es holomorfa (y por lo tanto continua) en su segunda variable  $q = e^{\pi i \tau}$  si  $\Im(\tau) > 0$ , de manera que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N}{2} + i\delta^2 \right)} \right) - \theta \left( 0, e^{\pi i \left( -\frac{N^2}{2N + 4i\delta^2} \right)} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{G(-N/4)}{4} = \frac{G(1/N)}{\sqrt{N}(1+i)}.$$

Solo nos queda, entonces, evaluar  $G(-N/4)$  para  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  impar:

$$G(-N/4) = \sum_{k=0}^3 e^{-2\pi i k^2 N/4} = 1 + e^{-2\pi i N/4} + e^{-2\pi i N} + e^{-2\pi i \cdot 9N/4} =$$

$$1 + e^{-2\pi i N/4} + 1 + e^{-4\pi i N} e^{-2\pi i N/4} = 2 + 2e^{-2\pi i N/4} = 2(1 + e^{-\pi i N/2}) = \begin{cases} 2(1+i) & \text{si } N \equiv 3 \pmod{4} \\ 2(1-i) & \text{si } N \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{G(1/N)}{\sqrt{N}} = \frac{(1+i)G(-N/4)}{4} = \begin{cases} i & \text{si } N \equiv 3 \pmod{4}, \\ 1 & \text{si } N \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Como ya comprobamos en la demostración del teorema 7 que  $e^{\pi i(N-1)^2/8}$  es igual a  $i$  si  $N \equiv 3 \pmod{4}$ , mientras que vale 1 si  $N \equiv 1 \pmod{4}$ , finalmente escribimos, de manera más compacta, que  $\frac{G(1/N)}{\sqrt{N}} = e^{\pi i(N-1)^2/8}$  para todo  $N \in \mathbb{N}$  impar. ■

Con la evaluación de las sumas de Gauss  $G(1/N)$ , con  $N$  impar, hemos completado todos los detalles de la prueba de la ley de reciprocidad cuadrática, apoyándonos para ello de forma inesperada en las propiedades de la función  $\theta$ .