



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

La teoría de la difracción y el efecto Talbot

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Pablo Fernández Alegre

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2023-2024

Resumen

El propósito de este trabajo es introducir la teoría matemática de la difracción y estudiar el llamado efecto Talbot así como su análogo cuántico en un ejemplo sencillo. Concretamente, el trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primero se comentan algunos aspectos físicos para modelar el problema de la difracción. El resultado matemático básico es la fórmula integral de Kirchhoff. Esta es demasiado complicada como para dar lugar a resultados prácticos. Por tanto, es necesario aplicar una serie de aproximaciones físicas que llevan a los dos tipos principales de difracción, la de Fraunhofer y la de Fresnel, que son el tema del segundo capítulo. La presencia de integrales oscilatorias causa que el principio de fase estacionaria y la integral de Fresnel, tengan relevancia. Las sumas de Gauss son objetos aritméticos que se estudian en el tercer capítulo. Conforman una especie de análogo discreto de la integral de Fresnel y desempeñan un papel fundamental para entender el efecto Talbot. Este efecto se estudia en el capítulo cuarto. Consiste en su versión entera en que los patrones de difracción reproducen la estructura de la red de difracción cuando la pantalla está a múltiplos enteros de cierta distancia, y al considerar múltiplos fraccionarios se obtiene la estructura con algunos cambios de escala y traslaciones. El efecto Talbot también tiene su manifestación en algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger, dando lugar a lo que a veces se llama resurgimiento cuántico. En el último capítulo estudiamos la situación en un ejemplo sencillo y probamos que se obtiene una gráfica de naturaleza fractal.

Abstract

The purpose of this work is to introduce the mathematical theory of diffraction and to study the so-called Talbot effect as well as its quantum analogue in a simple example. Specifically, the work is divided into five chapters. The first discusses some physical aspects to model the problem of diffraction. The basic mathematical result is Kirchhoff's integral formula, which is too complex to yield practical results. Therefore, a series of physical approximations leading to the two main types of diffraction, Fraunhofer's and Fresnel's, are necessary. These are the subject of the second chapter. The presence of oscillatory integrals causes the principle of stationary phase and the Fresnel integral to become relevant. Gauss sums are arithmetic objects which studied in the third chapter. They form a sort of discrete analogue of the Fresnel integral and play a fundamental role in understanding the Talbot effect. This effect is studied in the fourth chapter. In its integer version, the diffraction patterns reproduce the structure of the diffraction grid when the screen is at integer multiples of a certain distance, while considering fractional multiples results in obtaining the structure with some scale changes and translations. The Talbot effect also manifests itself in some solutions of the Schrödinger equation, leading to what is sometimes called quantum revival. In the last chapter, we study the situation in a simple example and prove that it produces a graph of a fractal nature.

Índice general

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | La teoría matemática de la difracción | 1 |
| 1.1 | Introducción | 1 |
| 1.2 | Ondas esféricas monocromáticas | 2 |
| 1.3 | La integral de Kirchhoff | 4 |
| 1.4 | Aproximaciones físicas para modelizar la difracción | 6 |
| 2 | Difracción de Fraunhofer y de Fresnel | 9 |
| 2.1 | La integral de Fresnel | 9 |
| 2.2 | Difracción de Fraunhofer | 10 |
| 2.3 | Difracción de Fresnel | 11 |
| 3 | Sumas de Gauss | 15 |
| 4 | El efecto Talbot clásico | 17 |
| 4.1 | Primer método: partiendo de la difracción de Fresnel | 18 |
| 4.2 | Segundo método: mediante ecuaciones diferenciales | 20 |
| 4.3 | Estudio del patrón mediante sumas de Gauss | 21 |
| 5 | Resurgimiento cuántico | 23 |
| 5.1 | Ecuación de Schrödinger | 23 |
| 5.2 | Efecto Talbot cuántico | 24 |
| 5.3 | Dimensión fractal de una función de onda particular | 26 |
| A | Integral infinita de Fresnel | 33 |
| B | Justificación del sumatorio mediante el Principio de Fase Estacionaria | 35 |
| C | Ejemplos de la difracción de Fraunhofer | 37 |
| D | Prueba de la identidad de Landsberg y Schaar | 39 |
| E | Modificación del primer método para el estudio del efecto Talbot | 45 |
| F | Talbot con la ecuación paraxial | 47 |
| G | Alfombra de Talbot | 49 |
| H | Dimensión de ciertos tipos de funciones | 51 |
| | Bibliografía | 53 |

CAPÍTULO 1

La teoría matemática de la difracción

1.1. Introducción

Antes de empezar a hablar sobre nociones físicas de difracción, repasaremos cierta notación sobre ondas. Cuando pensamos en una **onda unidimensional**, pensamos en un seno o un coseno con esta estructura:

$$u(x, t) = \text{sen}(2\pi(kx - vt)).$$

Aquí $\nu > 0$ es la *frecuencia* ($\nu = 1/T$), el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, y $|k|$ el *número de ondas*, y su inverso $\lambda = |k|^{-1}$ es la *longitud de onda*, es decir la distancia que recorre la onda antes de volver a repetir su comportamiento. En la propagación de un tono se cumple que la onda se desplaza de forma periódica tanto en el tiempo (período T) como en el espacio (longitud de onda λ). Vemos que claramente $\lambda/T = \nu/|k|$. Consecuentemente, $v_p = \nu/|k|$ es la longitud que recorre la onda entre el tiempo que tarda en recorrerla, por lo que tiene sentido llamarla *velocidad de fase*. Sabemos que la onda se mueve en una dirección de \mathbb{R} determinada, entonces, como el período (y en consecuencia la frecuencia) siempre es positivo, el sentido en el que se mueve la onda (respecto al vector director unitario) depende sólo de k .

La **difracción** es un fenómeno ondulatorio por el que las ondas “bordean” los obstáculos. Cuando un rayo de luz atraviesa una pequeña rendija, de tamaño comparable a su longitud de onda, cada punto de ella se comporta como un nuevo foco de luz de donde parten “rayos ondulatorios” en todas las direcciones. Si los rayos que salen en una dirección de un punto de la rendija tienen una *interferencia constructiva* con otros rayos en la misma dirección desde otro punto de la rendija, entonces

$$\delta \sin \alpha = n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

donde δ es la distancia entre los puntos de la rendija, α es el ángulo entre la dirección de los rayos y la rendija y λ es la longitud de onda.

En esta configuración, las ondas (los rayos ondulatorios) llegan a sus puntos de cresta al mismo tiempo (tomando como referencia la normal a la rendija).



Figura 1.1: Ejemplos de interferencia constructiva y destructiva. Fuente: [5]

Sin embargo, si las ondas tienen una *interferencia destructiva*, entonces

$$\delta \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} + n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En esta configuración, cuando una de las ondas llega a su punto de cresta, la otra llega a su punto de valle.

Es por este motivo que, cuando la luz pasa por una rendija, se obtienen anillos de luz y de oscuridad alternados. Obviamente, este modelo es imperfecto, pues no estamos considerando la atenuación de la intensidad de las ondas. El sentido común nos dice que no vamos a encontrar zonas de luz igual de claras cerca que lejos de la rendija.

De ahora en adelante, para no duplicar las fórmulas, utilizaremos un convenio mediante el que escribiremos ondas complejas, aprovechándonos de la relación

$$e^{2\pi i\alpha} = \cos(2\pi\alpha) + i \sin(2\pi\alpha).$$

Siguiendo el modelo que utiliza [5], escribiremos:

$$e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}.$$

1.2. Ondas esféricas monocromáticas

Nos centraremos en este momento en **ondas monocromáticas**, que son las ondas del tipo $u(x, t) = g(x)e(-vt)$. El nombre viene de que en el caso de la luz, la frecuencia indica el color. Esto es factible debido a que mediante filtros o utilizando por ejemplo análisis de Fourier podemos centrarnos tan sólo en una frecuencia.

La ecuación de ondas unidimensionales para velocidad c es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Proposición 1.1. *Todas las ondas monocromáticas que resuelven la ecuación de ondas son del tipo: $u(x, t) = A_1 e(kx - vt) + A_2 e(-kx - vt)$ con velocidad de fase c , esto es, $k = \nu/c$.*

Demostración. Dada la ecuación de onda monocromática

$$(1.1) \quad u(x, t) = g(x)e(-vt),$$

queremos demostrar:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \Rightarrow u(x, t) = A_1 e(kx - \nu t) + A_2 e(-kx - \nu t), \text{ con } k = \frac{\nu}{c}.$$

Derivando respecto a t dos veces y respecto a x dos veces en (1.1) y aplicando la ecuación de onda, obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$-4\pi^2 \nu^2 g(x) = c^2 g''(x).$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de segundo orden, obtenemos la solución:

$$g(x) = A_1 e(kx) + A_2 e(-kx)$$

y el resultado se deduce de (1.1). \square

Dentro de la teoría, son especialmente importantes las *ondas (monocromáticas) esféricas*. Como el nombre sugiere, son aquellas constantes en cada esfera centrada espacial, esto es,

$$u(\vec{r}, t) = g(r) e(-\nu t), \quad \text{con } \vec{r} = (x, y, z), \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es claro que las ondas de la proposición anterior son todas las ondas esféricas en una dimensión. Ahora vamos a reducir el caso tridimensional al unidimensional.

La ecuación de ondas en tres dimensiones es

$$(1.2) \quad u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{con} \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Proposición 1.2. Si $u(\vec{r}, t) = g(r)e(-\nu t)$ es una onda esférica solución de la ecuación de ondas tridimensional en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, entonces $w = rg(r)e(-\nu t)$ es una onda esférica unidimensional en el sentido que cumple $w_{tt} = c^2 w_{rr}$.

Demostración. Suponiendo que la solución es una onda esférica sabemos que es de la forma:

$$(1.3) \quad u((x, y, z), t) = g(r)e(-\nu t), \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cuando cambiamos a coordenadas esféricas, es decir, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, y $z = r \cos \theta$, el laplaciano se convierte en:

$$(1.4) \quad \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Dado que estamos tratando con ondas esféricas, que son simétricas en coordenadas esféricas, no dependen de θ ni de ϕ , por lo que los términos que involucran estas coordenadas se anulan en (1.4). Nos queda:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} u_r + u_{rr}.$$

Sustituyendo el laplaciano de u en la ecuación de onda (1.2):

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{2}{r} u_r + u_{rr} \right).$$

Realizando las derivadas pertinentes en (1.3) y sustituyendo:

$$(1.5) \quad -4\pi^2 k^2 r g(r) = 2g'(r) + r g''(r).$$

Veamos ahora que una ecuación con la forma $w = r g(r) e(-\nu t)$ es efectivamente una onda esférica unidimensional. Para ello, realizando las segundas derivadas, obtenemos:

$$(1.6) \quad w_{tt} = -4\pi^2 \nu^2 r g(r) e(-\nu t), \quad w_{rr} = e(-\nu t) (2g'(r) + r g''(r)).$$

Utilizando la relación dada por (1.5) y que $k = \nu/c$, se obtiene $w_{tt} = c^2 w_{rr}$. \square

Ahora, sabemos que si $u = g(r) e(-\nu t)$ es la fórmula de una onda esférica tridimensional, entonces $w = r g(r) e(-\nu t)$ es una onda esférica unidimensional, y como toda onda unidimensional cumple:

$$w = e(-\nu t) (A_1 e(kr) + A_2 e(-kr))$$

Por lo tanto, determinamos que:

$$g(r) = A_1 \frac{e(kr)}{r} + A_2 \frac{e(-kr)}{r}.$$

De esta afirmación podemos concluir que entonces todas las ondas esféricas en tres dimensiones vienen dadas por

$$(1.7) \quad A_1 \frac{e(kr - \nu t)}{r} + A_2 \frac{e(-kr - \nu t)}{r} \quad \text{con} \quad k = \frac{\nu}{c}.$$

Para terminar esta sección, vamos a ver una fórmula para sintetizar la variación espacial de una onda esférica. Vamos a construir una fórmula para $\nabla (e(kr)/r)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e(k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \left(-\frac{1}{r} + 2\pi i k \right) \frac{x e(kr)}{r^2}.$$

Si hacemos todas las derivadas parciales, vemos que:

$$(1.8) \quad \nabla \left(\frac{e(kr)}{r} \right) = \frac{(x, y, z) e(kr)}{r^2} \left(2\pi i k - \frac{1}{r} \right)$$

1.3. La integral de Kirchhoff

Comenzaremos ahora sí con la teoría matemática de la difracción debida a Gustav Kirchhoff, físico del siglo XIX. Antes de enunciar el teorema central de la sección, vamos a dar una fórmula que usaremos en la demostración. La prueba se puede encontrar en [4].

Lema 1.3 (Fórmula de Helmholtz). Sea $U(x, y, z)e(-\nu t)$ solución de la ecuación de ondas en un dominio cualquiera de \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 4\pi^2 k^2 U(\mathbf{x}).$$

Ahora sí, estudiaremos el siguiente resultado del cálculo vectorial, mediante el cual veremos que la solución de una ecuación de ondas en un dominio con frontera compacta viene dada por los valores en dicha frontera.

Teorema 1.4 (Teorema Integral de Kirchhoff). Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un dominio acotado cuyo borde $\partial\Omega$ es una superficie regular S y sea \mathbf{q} un punto interior de Ω . Si $u(x, y, z, t) = U(x, y, z)e(-\nu t)$ es solución de la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

en un dominio que contiene a Ω ; entonces con la orientación positiva de S ,

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \nabla U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \right) dS(\mathbf{x}).$$

Demostración. La ecuación de ondas es lineal en u por lo que es invariante por traslaciones en el espacio y en el tiempo, por lo que podemos suponer $\mathbf{q} = 0$. Tomamos $\Omega' = \Omega - B_\epsilon$, con $B_\epsilon = B(0, \epsilon)$ y renombramos $\|\mathbf{x}\| = r$.

Usamos la identidad de Green para integración por partes en \mathbb{R}^3 :

$$(1.9) \quad \int_{\partial\Omega'} \left(U \nabla \frac{e(kr)}{r} - \frac{e(kr)}{r} \nabla U \right) dS = \int_{\Omega'} \left(U \Delta \frac{e(kr)}{r} - \frac{e(kr)}{r} \Delta U \right) dV.$$

Tanto $U(\mathbf{x})e(-\nu t)$ como $e(kr)/re(-\nu t)$ satisfacen la ecuación de onda. Por lo tanto, usando el lema 1.3:

$$U \Delta \left(\frac{e(kr)}{r} \right) - \frac{e(kr)}{r} \Delta U = U 4\pi^2 k^2 \frac{e(kr)}{r} - \frac{e(kr)}{r} 4\pi^2 k^2 U = 0.$$

Y por lo tanto la integral de la derecha de (1.9) queda 0.

Veamos ahora que $\partial\Omega'$ está compuesta por $\partial\Omega = S$ y por ∂B_ϵ , esta última negativamente orientada, entonces podemos escribir:

$$\int_S \left(U \nabla \left(\frac{e(kr)}{r} \right) - \frac{e(kr)}{r} \nabla U \right) dS = \int_{\partial B_\epsilon} \left(U \nabla \left(\frac{e(kr)}{r} \right) - \frac{e(k\epsilon)}{\epsilon} \nabla U \right) dS.$$

Es fácil ver que el segundo término de la integral sobre ∂B_ϵ es 0 si $\epsilon \rightarrow 0^+$, ya que $|\partial B_\epsilon| \epsilon^{-1} = 4\pi\epsilon$, que tiende a 0. Entonces sólo falta comprobar:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B_\epsilon} U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(kr)}{r} \right) dS = -4\pi U(0).$$

Como el vector unitario exterior de ∂B_ϵ es $(x, y, z)/\epsilon$, se tiene, por el teorema integral de Gauss:

$$(1.10) \quad \int_{\partial B_\epsilon} \frac{(x, y, z)}{\epsilon} dS = \frac{3}{\epsilon} |B_\epsilon| = 4\pi\epsilon^2.$$

Ahora, empleando el teorema del valor medio para integrales:

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B_\epsilon} U(\mathbf{x}) \nabla \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U(c) \int_{\partial B_\epsilon} -\nabla \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} dS$$

Finalmente, empleando (1.8) y (1.10), obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U(c) \int_{\partial B_\epsilon} -\nabla \frac{e(k\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} dS = 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U(c) \epsilon^2 e(k\epsilon) \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 2\pi i k \frac{1}{\epsilon} \right)$$

y realizando el límite se obtiene el resultado buscado. \square

1.4. Aproximaciones físicas para modelizar la difracción

Analizaremos la siguiente situación física, sobre la cual vamos a realizar una serie de aproximaciones, que, pese a que matemáticamente no son ciertas, concuerdan bien con lo que se observa en los experimentos.

Vamos a suponer una pantalla opaca sobre el eje $z = 0$, y que solamente tiene una pequeña apertura, a la que llamaremos A cuyo centro es el origen. Ahora, colocaremos dos puntos: uno en $z > 0$ que será la fuente de luz y al que llamaremos p ; y otro en $z < 0$ al que llamaremos q . Si nos dejamos llevar por el sentido común, es posible que lleguemos a la conclusión de que si el segmento pq no atraviesa A , es decir, el punto en el segmento pq tal que $z = 0$ no pertenece a A , entonces el punto q no estará iluminado, y sí lo estará en caso contrario. Sin embargo, y debido a la teoría de la difracción que vamos a estudiar, veremos que esto no tiene por qué ser así.

Para ello, haremos uso del teorema 1.4 tomando como dominio Ω todo el subespacio $z \leq 0$, y que por tanto A pertenece a su frontera. Pese al razonamiento llevado a cabo en el párrafo anterior, podemos suponer que en los puntos en la frontera ($z = 0$) que no pertenezcan a A , el valor de U va a ser 0. Esto se debe a que, aunque la óptica geométrica requiere correcciones, tampoco vamos a pensar que los rayos se curvan 90 grados. Por lo tanto:

$$(1.11) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \nabla U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|} \right) \right) dS(\mathbf{x})$$

con A orientada con la normal unitaria hacia arriba $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Se ha visto en (1.7) la forma que tienen las ondas esféricas que parten del origen, lo cual se puede reformular fácilmente si se realiza una traslación a \mathbf{p} . Si sólo consideramos la parte con número de ondas positivo (ondas que avanzan de \mathbf{p} a \mathbf{x}), y si no existiese la pantalla en el eje $z = 0$, entonces:

$$(1.12) \quad U(\mathbf{x}) = K \frac{e(k\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} \quad \text{con } K \text{ una constante.}$$

Tras poner la pantalla, la solución se debería mantener cierta en el semiespacio $z > 0$, y pese a que matemáticamente esto no es del todo cierto, parece ilógico pensar

que interponer una pantalla opaca tenga alguna influencia en la luz que llega a los puntos de la apertura. Por ello, juntando las soluciones de (1.11) y la de (1.12)

$$(1.13) \quad U(\mathbf{q}) = K \int_A \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|} \nabla \frac{e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} - \frac{e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \nabla \frac{e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|} \right) dS(\mathbf{x})$$

con K una constante.

Ahora, haremos varias suposiciones basándonos en el orden de magnitud de las cosas que vamos a valorar. Como el número de ondas k es del orden de millones para la luz visible en el sistema internacional, despreciamos el término $1/r$ en (1.8), es decir, procedemos como si se cumpliera

$$\nabla \left(\frac{e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \right) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{p})e(k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2} 2\pi ik.$$

Sustituyendo ahora en (1.13) y recordando que $\lambda^{-1} = k$,

$$(1.14) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K}{\lambda} \int_A \frac{e(k(\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|))}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|} \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|} \right) dS(\mathbf{x}).$$

donde K es otra constante (distinta a la anterior).

Vamos a suponer también que la apertura A es muy pequeña en comparación con su distancia a los puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} , y que estos están cerca de estar alineados con ella. Es decir, si \mathbf{x} es un punto en A , el ángulo formado entre \vec{n} y el vector $\mathbf{x}\mathbf{p}$ es aproximadamente el mismo que el formado entre \vec{n} y el vector $\mathbf{q}\mathbf{x}$. Por lo tanto, este ángulo es también igual al formado entre \vec{n} y el vector $\mathbf{q}\mathbf{p}$, y lo llamamos β . Entonces,

$$(1.15) \quad \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|} \right) \cdot \vec{n} = \cos(\pi - \beta) - \cos \beta = -2 \cos \beta.$$

Dado que las normas $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|$ no presentan apenas variaciones al integrar en A , podemos simplificarlas por $\|\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{q}\|$ respectivamente. Redefiniendo K de nuevo, sabiendo que $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ considerando A únicamente en el plano XY y juntando (1.14) y (1.15),

$$(1.16) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \iint_A e(k(\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|)) dx dy.$$

Aún tras todas estas aproximaciones, (1.16) es demasiado difícil de calcular explícitamente. Por ello, se van a realizar aproximaciones sobre la fase mediante desarrollos de Taylor. Cuando se toman aproximaciones lineales, se habla de difracción de Fraunhofer, y cuando se toman aproximaciones cuadráticas, se habla de difracción de Fresnel.

CAPÍTULO 2

Difracción de Fraunhofer y de Fresnel

2.1. La integral de Fresnel

Antes de empezar a hablar de los dos tipos de difracción, introduciremos una función compleja de variable real que aparecerá en ambos.

Definición 2.1 (Integral de Fresnel). Definimos la *integral de Fresnel* como la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(x) = \int_0^x e(t^2) dt.$$

Va a ser de gran utilidad resolver el valor cuando x tiende a $\pm\infty$, es decir para $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$. Para ello enunciamos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en el apéndice A.

Proposición 2.2. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la integral de Fresnel. Entonces

$$F(+\infty) = -F(-\infty) = \frac{1+i}{4}.$$

Lo siguiente será encontrar una buena aproximación para $F(x)$ por funciones elementales cuando x es grande. Para comenzar, vemos que cuando $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x e(t^2) dt = \int_0^\infty e(t^2) dt - \int_x^\infty e(t^2) dt = \frac{1+i}{4} - \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \frac{e(u)}{\sqrt{u}} du.$$

Cuando $x < 0$, por la imparidad de $F(x)$ es fácil ver que:

$$F(x) = -\frac{1+i}{4} + \frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \frac{e(u)}{\sqrt{u}} du.$$

Integramos dos veces por partes la integral resultante a la derecha y obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_{x^2}^\infty \frac{e(t)}{\sqrt{t}} dt = -\frac{e(x^2)}{4\pi ix} - \frac{e(x^2)}{16\pi^2 x^3} + \frac{3}{32\pi^2} \int_{x^2}^\infty \frac{e(t)}{\sqrt{t^5}} dt.$$

Por lo tanto, y como x es grande, deducimos la igualdad:

$$(2.1) \quad F(x) = \frac{(1+i)x}{4|x|} + \frac{e(x^2)}{4\pi ix} + R(x) \quad \text{con} \quad |R(x)| < \frac{1}{8\pi^2|x|^3}.$$

La imagen de la integral de Fresnel es conocida como la **espiral de Cornu**. En la imagen de [19] vemos cómo claramente es una función impar que cuando $x \rightarrow \pm\infty$ tiende a $\pm(1+i)/4$. Además, vemos que, la diferencia con el valor cuando se tiende al infinito, tanto para valores positivos como valores negativos de x es $e(x^2)/(4\pi ix) + R(x)$. Como $e(x^2)$ es simétrica respecto al eje Y , y además oscila entre los mismos valores cada vez más rápido explica la forma en espiral. Además, al estar dividida entre x , se explica la paridad de la función.

2.2. Difracción de Fraunhofer

Vamos a comenzar por aproximar la integral oscilatoria de la forma

$$I(x) = \int_{-1/2}^{1/2} A(t) e(xB(t)) dt \quad \text{con} \quad A, B \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ reales y 1-periódicas.}$$

Usaremos un principio físico conocido como *principio de fase estacionaria*, cuya idea es la siguiente: La contribución principal a $I(x)$ proviene de entornos de los valores críticos de B , porque si $B'(t) \neq 0$ entonces en los alrededores de t la función $e(xB(t))$ oscilará mucho (x es grande) y habrá mucha cancelación, mientras que si $B'(t) = 0$ entonces $B(t)$ será como una perturbación de una constante. Esta idea se puede traducir en el siguiente enunciado matemático.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{C} = \{t_\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : B'(t_\nu) = 0\}$ el conjunto de valores críticos de B . Si \mathcal{C} es finito, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \notin \mathcal{C}$ y sus elementos son valores críticos no degenerados, $B''(t_\nu) \neq 0$, entonces para $x > 0$*

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \frac{(1 \pm i)A(t_\nu) e(xB(t_\nu))}{\sqrt{\pm 2B''(t_\nu)}} + R(x) \quad \text{con} \quad |R(x)| < \frac{K}{x^{3/2}}.$$

donde K es cierta constante que depende de A y B y \pm indica el signo de $B''(t_\nu)$.

No veremos la prueba de este resultado. En el apéndice B daremos una idea de por qué esto es natural sin cuantificar el término de error. Para pruebas completas de resultados más generales, véase [17, §VIII.1] y [11, §7.7].

Estudiamos ahora la función:

$$(2.2) \quad h(x) = i \int_{-1/2}^{1/2} e(-x \sin(2\pi t)) \sin(2\pi t) dt.$$

Vemos que la función $h(x)$ es $I(x)$ con $A(t) = i \sin 2\pi t$ y $B(t) = -\sin 2\pi t$. Los puntos críticos de $B(t)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ son $-\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$, así que, utilizando la ecuación dada en la

proposición 2.3,

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{(1+i)i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} e(-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})}{\sqrt{8\pi^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}} + \frac{(1-i)i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2} e(-x \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2})}{\sqrt{-8\pi^2 \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2}}} \right) + R(x).$$

Simplificando el resultado:

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi x - \frac{\pi}{4})}{\pi \sqrt{x}} + R(x) \quad \text{con } x^{3/2}|R(x)| \text{ acotado.}$$

Recapitulemos ahora recordando el desarrollo con el que terminamos el primer capítulo, en el que concluimos que tras varias aproximaciones obtuvimos la fórmula (1.16), y en la que sustituyendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ por sus respectivos polinomios de Taylor lineales, obtenemos:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \iint_A e \left(k \left(\|\mathbf{p}\| - \frac{p_1 x + p_2 y}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{q}\| - \frac{q_1 x + q_2 y}{\|\mathbf{q}\|} \right) \right) dx dy.$$

Llamando $\widehat{\chi}_A$ a la transformada de Fourier en \mathbb{R}^2 de la función característica de A , escribimos:

$$U(\mathbf{q}) = e(k(\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|)) \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \widehat{\chi}_A \left(k \left(\frac{p_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|} \right), k \left(\frac{p_2}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|} \right) \right).$$

Por lo tanto, el valor de $U(\mathbf{q})$ será máximo (en valor absoluto) cuando la integral no sea oscilatoria, es decir cuando

$$k \left(\frac{p_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|} \right) = 0 \quad \text{y} \quad k \left(\frac{p_2}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|} \right) = 0;$$

y esto ocurre si $p_1/\|\mathbf{p}\| = -q_1/\|\mathbf{q}\|$ y $p_2/\|\mathbf{p}\| = -q_2/\|\mathbf{q}\|$. Sabiendo que \mathbf{p} y \mathbf{q} están cada uno a un lado del plano XY, esto implica que:

$$\frac{p_3}{\|\mathbf{p}\|} = -\frac{q_3}{\|\mathbf{q}\|}.$$

Por lo tanto, tenemos que la contribución es máxima cuando \mathbf{p} y \mathbf{q} están alineados respecto a la apertura, es decir, se cumple $\mathbf{p} = -K\mathbf{q}$, con $K > 0$ una constante. Esto explica por qué nos parece que la luz se propaga en línea recta. En el apéndice C se pueden encontrar algunos ejemplos que muestran los patrones de luz que se forman utilizando la difracción de Fraunhofer.

2.3. Difracción de Fresnel

Nos limitaremos a considerar un ejemplo, lo cual está más cerca de lo que hizo en realidad el propio Fresnel [12, §3.1]. Para ello, primero cambiaremos el sistema de referencia (giro y traslación) suponiendo que \mathbf{p} está “abajo” ($p_3 < 0$) y \mathbf{q} “arriba” ($q_3 > 0$) y ambos en el plano XZ. Cualquier curva regular se aproxima por rectas, entonces el estudio de una apertura cuyo borde sea una línea recta nos puede dar

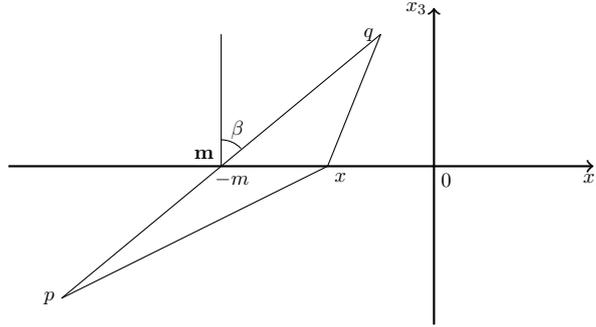


Figura 2.1: Situación en la que estudiaremos la difracción de Fresnel. Fuente: Recreación de una figura de [12] con la librería *tikz* de \LaTeX

una idea aproximada general de los fenómenos de difracción. Con la notación de [5], consideramos

$$A = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, z = 0\}.$$

Para llegar a la fórmula (1.16) desde la fórmula (1.14), habíamos hecho la hipótesis de que A tenía un tamaño reducido, lo cual ahora es falso. Sin embargo, las consideraciones con respecto al ángulo en (1.15) son correctas si limitamos la \mathbf{x} a un entorno del punto $\mathbf{m} = (m, 0, 0)$ en la intersección del plano $z = 0$ con la línea que une \mathbf{p} y \mathbf{q} , como podemos observar en la figura 2.1.

En ese caso, β es el ángulo formado por $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ y $(0, 0, 1)$ y aproximaremos $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ y de $\|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ por $\|\mathbf{m} - \mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{m} - \mathbf{q}\|$. En definitiva, en lugar de (1.16), en este caso tendremos:

$$(2.3) \quad U(\mathbf{q}) = \frac{K \cos \beta}{\lambda \|\mathbf{m} - \mathbf{p}\| \|\mathbf{m} - \mathbf{q}\|} \iint_{\mathcal{U}} e^{i(k(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|))} dx dy.$$

y donde \mathcal{U} es un la intersección de un entorno de \mathbf{m} con A , ya que no descartamos que \mathbf{m} corresponda a un \mathbf{q} ligeramente en la zona de sombra, es decir, $\mathbf{m} \notin A$ cercano al borde. Por último, vamos a suponer también que $k > 0$ y por tanto, $k = \lambda^{-1}$. Cambiar de signo k únicamente conmutaría el resultado.

Calculemos ahora el polinomio de Taylor de $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$ alrededor de $\mathbf{m} = (m, 0, 0)$, y para ello podemos recurrir al desarrollo hecho al final del primer capítulo. Sabemos que $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ y que $\mathbf{p} = (p_1, 0, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_1, 0, q_3)$. Por ello, realizando las derivadas necesarias para obtener el polinomio, y escribiendo $\mathbf{p}_m = \mathbf{m} - \mathbf{p}$ y $\mathbf{q}_m = \mathbf{m} - \mathbf{q}$, tenemos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| \approx \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| + \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}{2\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|} ((x - m)^2 \cos^2 \beta + y^2).$$

Después de esta aproximación, debemos integrar en un entorno de $(m, 0)$, pero el principio de fase estacionaria sugiere que la contribución fuera de ese entorno es poco relevante (porque allí la derivada de $(x - m)^2$ o de y^2 están lejos de anularse). Sin entrar en una justificación matemática más precisa, reemplazaremos \mathcal{U} por A . Por

lo tanto, introduciendo el desarrollo de Taylor en (2.3) y recordando que $k = 1/\lambda$, obtenemos:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{Ke(k\|p - q\|) \cos \beta}{\lambda\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 e\left(\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}{2\lambda\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|}((x - m)^2 \cos^2 \beta + y^2)\right) dx dy.$$

Calculemos ahora la integral doble. Llamando $w = \sqrt{\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \cos^2 \beta}{2\lambda\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|}}$, hacemos los cambios $r = w(x - m)$ y $s = \frac{w}{\cos \beta} y$, y obtenemos:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{\cos \beta}{w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-mw} e(r^2 + s^2) dr ds = \frac{\cos \beta}{w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e(s^2) ds \int_{-\infty}^{-mw} e(r^2) dr.$$

Simplificando el resultado usando la proposición 2.2:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{\cos \beta}{4w^2} ((2 + 2i)F(-mw) + i) = \frac{Ke(k\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|)}{2\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|} ((2 + 2i)F(-mw) + i).$$

Comprobamos entonces la intensidad de la luz que es lo que realmente se vería si hicieramos los experimentos. Para ello:

$$|U(\mathbf{q})|^2 \approx \frac{K^2 |e(2k\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|)|}{4\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2} |(2 + 2i)F(-mw) + i|^2 = \frac{K^2 H(-mw)}{2\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2}$$

con $H(x) = |2F(x) + (1 + i)/2|^2$. Utilizando la aproximación para $F(x)$ en (2.1):

$$H(x) \approx \begin{cases} (2\pi x)^{-2} & \text{si } x < 0; \\ 2\left|1 - \frac{1+i}{4\pi x} e(x^2)\right|^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Entonces, si suponemos que \mathbf{p} y \mathbf{q} no están muy alejados ($\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}{2\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|}$ no sea muy pequeño) y que $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ no es muy horizontal ($\cos \beta$ no sea muy pequeño), $\frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \cos^2 \beta}{2\|\mathbf{p}_m\|\|\mathbf{q}_m\|}$ estará controlado por una constante, por lo que podemos escribir $w = \sqrt{C/\lambda}$. Por lo tanto, vemos que, cuando $x < 0$:

$$|U(\mathbf{q})|^2 \approx \frac{K^2}{2\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2} \frac{\lambda}{4\pi^2 m^2 C};$$

que tiende rápidamente a 0. Sin embargo, para $x > 0$:

$$|U(\mathbf{q})|^2 \approx \frac{K^2}{2\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2} \left|1 - \frac{(1+i)\lambda}{4\pi^2 m^2 C} e(m^2 C \lambda)\right|^2;$$

que nos indica que se observarán unas pequeñas oscilaciones cuadráticas antes de que se establezca la intensidad de la luz.

Cuando $|x|$ es pequeño, podemos usar el desarrollo de Taylor lineal alrededor de 0 para aproximar $F(x)$, y como $F(0) = 0$ y $F'(0) = 1$, tenemos entonces que $F(x) \approx x$, y directamente deducimos, cuando $x < 0$ y $|x|$ es pequeño:

$$H(x) \approx \left|2x + \frac{1+i}{2}\right|^2 \approx 2x + 1/2.$$

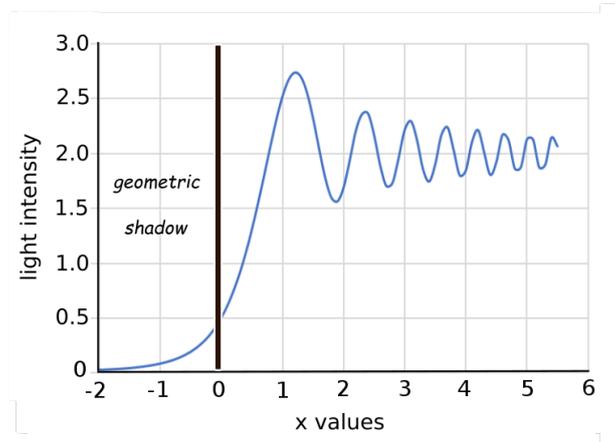


Figura 2.2: Aproximación de la función $H(x)$. Fuente: [20]

Escribiendo esta aproximación ahora en la fórmula para calcular la luz observable:

$$|U(\mathbf{q})|^2 \approx \frac{K^2}{2\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2} \left(-2mw + \frac{1}{2} \right).$$

Esto indica que, tanto en la zona de luz, como, quizás sorprendentemente, en la zona de sombra, observaremos una variación lineal de la intensidad cuando nos encontremos cerca de la apertura.

En la figura 2.2, observamos una aproximación de la función $H(x)$ (salvo un cambio de escala). Observamos que, efectivamente para valores negativos de x tiende a 0 rápidamente, pero aún así muy cerca del 0 se observaría luz. Mientras tanto, para valores de x positivos, observamos un comportamiento lineal al principio, y luego unas oscilaciones que se van atenuando poco a poco.

CAPÍTULO 3

Sumas de Gauss

Definición 3.1 (Sumas de Gauss). Dados $a \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ coprimos, se definen las sumas de Gauss (cuadráticas) como

$$G(a; q) = \sum_{n=1}^q e\left(\frac{an^2}{q}\right).$$

Cuando se añade un término lineal, se obtienen las sumas de Gauss generalizadas:

$$G(a, b; q) = \sum_{n=1}^q e\left(\frac{an^2 + bn}{q}\right) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}^+ \quad (a \text{ y } q \text{ coprimos}).$$

En principio $G(a, b; q)$ admite una evaluación que esencialmente proviene de la de $G(a, q)$ y esta última de la de $G(1, q)$. Sin embargo, no hay una fórmula sencilla para tal evaluación de $G(a, b; q)$ pues requiere distinguir varios casos. Por lo tanto, evaluaremos primero $|G(a, b; q)|$, que es mucho más sencillo que evaluar $G(a, b; q)$, y después procederemos con $G(1; q)$.

Proposición 3.2. *Sea $G(a, b; q)$ una suma de Gauss generalizada. Entonces,*

$$|G(a, b; q)| = \begin{cases} \sqrt{q} & \text{si } 2 \nmid q, \\ \frac{1+(-1)^{b+q/2}}{\sqrt{2}} \sqrt{q} & \text{si } 2 \mid q. \end{cases}$$

Demostración. Vamos a desarrollar en primera instancia $|G(a, b; q)|^2$:

$$\begin{aligned} |G(a, b; q)|^2 &= \sum_{n=1}^q e\left(\frac{an^2 + bn}{q}\right) \sum_{m=1}^q e\left(\frac{-am^2 - bm}{q}\right) \\ &= \sum_{n, m=1}^q e\left(\frac{a(n^2 - m^2) + b(n - m)}{q}\right). \end{aligned}$$

Como $e((a(n^2 - m^2) + b(n - m))/q)$ es q -periódica, podemos realizar el cambio $n \rightarrow n + m$ (mód q)

$$\begin{aligned} |G(a, b; q)|^2 &= \sum_{n, m=1}^q e\left(\frac{a((n+m)^2 - m^2) + b((n+m) - m)}{q}\right) \\ &= \sum_{n=1}^q e\left(\frac{an^2 + bn}{q}\right) \sum_{m=1}^q e\left(\frac{2amn}{q}\right). \end{aligned}$$

Si $q \mid 2an$, entonces en particular $q \mid 2n$ ya que a y q son coprimos. En este caso, la suma interior es q y en otro caso es nula ya que es una progresión geométrica de razón $e(2an/q)$. Si q es impar, entonces $q \mid 2n$ sólo ocurre cuando $n = q$, y si q es par, se cumple además para $n = q/2$. Entonces,

$$|G(a, b; q)|^2 = \begin{cases} q e(aq + b) = q & \text{si } q \nmid 2; \\ q(e(aq + b) + e(\frac{aq}{4} + \frac{b}{2})) = q(1 + (-1)^{b+aq/2}) & \text{si } q \mid 2. \end{cases}$$

En el caso $q \mid 2$, el valor es igual a $2q$ si $b + aq/2$ es par y 0 si es impar. Como a y q son coprimos, a no es par, por lo que que $b + aq/2$ sea impar es equivalente a que $b + q/2$ sea impar, que a su vez es equivalente a que $(2b + q + 2) \mid 4$. Finalmente, haciendo la raíz cuadrada de ambas expresiones, obtenemos el resultado que buscábamos. \square

La evaluación de $G(1; q)$ es más complicada. La vamos a deducir de la siguiente identidad, que demostraremos en el apéndice D:

Proposición 3.3 (Identidad de Landsberg y Schaar). Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{n=1}^q e\left(\frac{pn^2}{q}\right) = \frac{1+i}{2} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{2p} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) \quad \text{para } p, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Para p y q coprimos, el primer miembro es $G(p; q)/\sqrt{q}$. Dividiremos el desarrollo dependiendo de la congruencia de q módulo 4. Si $q \equiv 0$ (mód 4) ($q = 4q'$):

$$\frac{1}{\sqrt{q}} G(1; q) = \frac{1+i}{2} \left(e(-q') + e(-4q') \right) = 1 + i.$$

Si $q \equiv 1$ (mód 4) ($q = 4q' + 1$):

$$\frac{1}{\sqrt{q}} G(1; q) = \frac{1+i}{2} \left(e\left(-\frac{4q'+1}{4}\right) + e(-4q' - 1) \right) = \frac{1+i}{2} (1 - i) = 1.$$

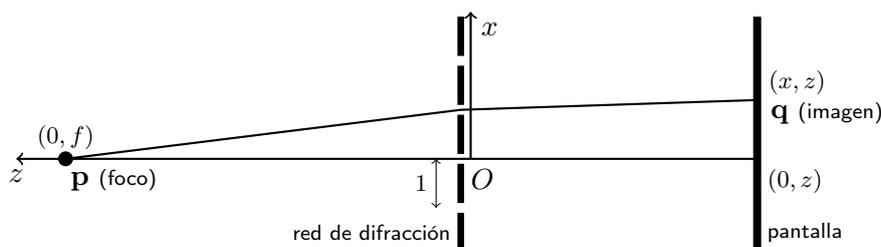
De la misma manera se procede para obtener los casos $q \equiv 2$ (mód 4) y $q \equiv 3$ (mód 4). En definitiva, obtenemos:

$$(3.1) \quad G(1; q) = \begin{cases} (1+i)\sqrt{q} & \text{si } q \equiv 0 \pmod{4}, \\ \sqrt{q} & \text{si } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0 & \text{si } q \equiv 2 \pmod{4}, \\ i\sqrt{q} & \text{si } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

CAPÍTULO 4

El efecto Talbot clásico

El *efecto Talbot* es el fenómeno poco intuitivo presente cuando se hace pasar la luz por una *red de difracción* (una serie de rendijas igualmente espaciadas). Entonces, los patrones de difracción observados son periódicos respecto a la distancia a la pantalla y a ciertas distancias se reproduce la estructura de la red.



En la figura TikZ anterior, mostramos el esquema con el que vamos a trabajar. Es el mismo esquema con el que hemos trabajado en el segundo capítulo reduciendo en uno la dimensión (se quita la coordenada y) para simplificar debido a la simetría del problema. Ahora \mathcal{A} está formado por la red de difracción. Suponemos que los centros de las rendijas están en los valores enteros de x , en particular, están a distancia 1. De esta forma, la función característica en x de la red de difracción es:

$$D(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi\left(\frac{x+n}{w}\right) \quad \text{con} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $0 < w < 1$ indica el ancho de cada rendija.

Es fácil ver que $\chi((x+n)/w)$ sólo vale 1 si $|x+n| \leq w/2$, y esto sólo ocurre a lo sumo una vez para cada valor de x . Entonces, $D(x) = 1$ si $(x, 0)$ está en una de las rendijas (se encuentra a distancia menor que $w/2$ de un entero) y 0 si no.

Proposición 4.1. *Sea $D(x)$ como antes. Entonces en los puntos de continuidad*

$$D(x) = w + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{\text{sen}(\pi w k)}{\pi k} e(ikx).$$

Demostración. Hallamos el desarrollo de Fourier de la función característica, es decir los coeficientes $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ tal que $D(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(ikx)$ (salvo en los puntos de discontinuidad). Sabiendo que $D(x)$ es 1-periódica, entonces, si $k \neq 0$:

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D(t) e(-ikt) dt = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} e(-ikt) dt = \frac{\text{sen}(\pi wk)}{\pi k}.$$

Por otro lado, es obvio que c_0 es igual a w . □

Se llama *red de Ronchi* a la red de difracción en la que la separación entre rendijas consecutivas es igual ancho de cada rendija, entonces claramente y dado que la separación entre rendijas es 1, en nuestro caso para la red de Ronchi $w = 1/2$. Por tanto, en particular los coeficientes para el desarrollo de Fourier de la red de Ronchi son:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \quad \text{para } m \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad c_{2m} = 0 \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}.$$

Para justificar el efecto Talbot, vamos a ver dos enfoques distintos. El primero va a ser en la línea de lo que hemos visto hasta ahora, pero vamos a requerir de varias hipótesis difíciles de justificar matemáticamente. El segundo es mucho más sistemático a partir de una hipótesis bien formulada, pero es menos versátil.

4.1. Primer método: partiendo de la difracción de Fresnel

Para la primera justificación, tomamos como punto de partida (2.3). En el nuevo contexto bidimensional, la integral que aparece allí, teniendo en cuenta nuestro dibujo, viene dada por:

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t) e(k\sqrt{t^2 + f^2} + k\sqrt{(x-t)^2 + z^2}) dt.$$

Ahora, en vez de integrar en un entorno U , integramos en todo \mathbb{R} pero dentro de la integral aparece la función característica de la red de difracción. Tomamos $\mathbf{p} = (0, f)$ y $\mathbf{q} = (x, z)$ e integramos sobre los puntos con la coordenada horizontal nula, es decir $\mathbf{x} = (t, 0)$.

Como ahora no hay un solo orificio sino infinidad de rendijas, debemos reinterpretar el coeficiente de $I(x, z)$ en la fórmula para $U(\mathbf{q}) = U(x, z)$. Suponemos que la mayor contribución proviene de las rendijas que están enfrente de \mathbf{q} y que solo consideramos valores moderados de x , por tanto $\cos \beta$ es aproximadamente constante. Si la fuente de luz y la pantalla no están cercanas a la red de difracción, siempre pensando en la mayor contribución de las rendijas frente a \mathbf{q} , parece lógico pensar que $\|\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{q}\|$ se pueden sustituir por f y $|z| = -z$. Consideramos que k y f son constantes, por tanto, después de todas estas reducciones, nos quedamos con:

$$(4.1) \quad U(x, z) = K|z|^{-1}I(x, z) \quad \text{siendo } K \text{ cierta constante.}$$

Vamos a aproximar $I(x, z)$ haciendo un desarrollo de Taylor de orden 2 de la primera raíz en t y de la segunda raíz en $x - t$, esperando que los valores para los que la aproximación sea mala no contribuyan significativamente ya que están lejos de ser puntos de fase estacionaria. Entonces, recordando que $z < 0$ ($|z| = -z$), el desarrollo de las raíces sería:

$$\sqrt{t^2 + f^2} \approx f + \frac{t^2}{2f}, \quad \sqrt{(x-t)^2 + z^2} \approx -z - \frac{(x-t)^2}{2z}.$$

Reescribiendo la integral, obtenemos

$$I(x, z) \approx e(kf - kz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e(nt) e\left(k\left(\frac{t^2}{2f} - \frac{(x-t)^2}{2z}\right)\right) dt.$$

Ahora, si efectuamos el cambio $t \mapsto x - t$ (se puede hacer sin cambiar el signo ya que tanto $D(x)$ como $e(x)$ son funciones pares), conseguimos la aproximación:

$$(4.2) \quad I(x, z) \approx e(kf - kz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n b_n(x, z) e(nx);$$

donde

$$b_n(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e\left(k\frac{(x-t)^2}{2f} - k\frac{t^2}{2z} - nt\right) dt.$$

La situación en la que aparece el efecto Talbot es cuando f es muy grande, de esta forma los rayos de luz llegan perpendicularmente a la red de difracción. Cabe esperar entonces que el término $k(x-t)^2/(2f)$ sea irrelevante, por lo que:

$$U(x, z) \approx K|z|^{-1} e(-kz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e\left(-k\frac{t^2}{2z} - nt\right) dt e(nx).$$

Queremos obtener una integral de Fresnel, por lo que hacemos que la variable t aparezca solo dentro de un cuadrado:

$$U(x, z) \approx K|z|^{-1} e(-kz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e\left(-\frac{k}{2z}\left(t + \frac{zn}{k}\right)^2 + \frac{zn^2}{2k}\right) dt e(nx).$$

Hacemos el cambio $-\sqrt{k/2z}(t + zn/k) \rightarrow y$ y aplicando el valor conocido para las integrales de Fresnel, tenemos:

$$(4.3) \quad U(x, z) \approx K|z|^{-1/2} e(-kz) F(x, z) \quad \text{con} \quad F(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx + \frac{1}{2}\lambda n^2 z\right)$$

para una constante K .

Como se ha explicado antes, lo que se mide en los laboratorios es la intensidad de la onda $|U|^2$, por tanto, el factor $e(-kz)$ no tiene ninguna influencia sobre el patrón de difracción. Por otro lado, el factor $|z|^{-1/2}$ solo afecta al brillo del patrón, es decir, indica cómo se atenúan las ondas luminosas según avanzan. En definitiva,

$F(x, z)$ guarda toda la información acerca del aspecto del patrón de difracción. En el apéndice E vemos otro análisis con una pequeña modificación de este método.

A $z_T = 2\lambda^{-1}$ se le llama *distancia de Talbot*. Podemos comprobar de forma sencilla que F es z_T periódica en z :

$$F(x, 2\lambda^{-1} + z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx + \frac{1}{2}\lambda n^2 z\right) e(n^2) = F(x, z);$$

y que se cumple $D(x) = F(x, -nz_T)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$F(x, -n2\lambda^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e(nx) e(-n^3) = D(x).$$

Esto es claramente una manifestación del efecto Talbot: al situar la pantalla en múltiplos enteros de z_T se replica la estructura de la red de difracción.

Si estudiamos $F(x, -\frac{1}{2}z_T)$, vemos que:

$$F(x, -\frac{1}{2}z_T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx - \frac{1}{2}n^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = D\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Esto explica el aspecto de la sección $z_T/2$ de la imagen G.1 o de la sección $1/2$ en la imagen de [21], en el que aparece el patrón inverso de la red de difracción. Es decir, se repite el efecto de la red de difracción pero como si los centros de las rendijas estuviesen en $k + 1/2$ para $k \in \mathbb{Z}$.

4.2. Segundo método: mediante ecuaciones diferenciales

Ahora vamos con una segunda forma de explicar el efecto Talbot desde principios más básicos y unas hipótesis matemáticamente más concretas.

En el plano xz , una onda monocromática, es de la forma $u(x, z, t) = g(x, z)e(-kct)$ con $k = \lambda^{-1}$. Vamos a buscar una ecuación en derivadas parciales que sea verificada por las ondas de este tipo que viajen a lo largo de $-z$ sin deformarse mucho en esta dirección. Físicamente lo que se tiene en mente es una ecuación entre cuyas soluciones estén rayos que no sean muy oblicuos. Matemáticamente la condición que se pide es que $g(x, z) = a(x, z)e(-kz)$ con a_{zz} despreciable. Entonces, bajo estas hipótesis, vamos a buscar a partir la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{zz})$ dicha ecuación:

$$u_{tt} = -(2\pi k c)^2 g e(-kct), \quad u_{xx} = g_{xx} e(-kct), \quad u_{zz} = g_{zz} e(-kct).$$

Derivamos $g(x, z)$ eliminando el término a_{zz} :

$$\begin{aligned} g_x &= a_x e(-kz), & g_{xx} &= a_{xx} e(-kz); \\ g_z &= (a_z - 2\pi i k a) e(-kz), & g_{zz} &= (-4\pi i k a_z - (2\pi k)^2 a) e(-kz). \end{aligned}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación de ondas, se tiene:

$$-4\pi^2 k^2 g = a_{xx} e(-kz) - (4\pi i k a_z - 8\pi^2 k^2 a) e(-kz) + 4\pi^2 k^2 a e(-kz).$$

Finalmente, expresando la ecuación en términos de $g(x, z)$ y sus derivadas:

$$g_{xx} - 4\pi i k g_z + 8\pi^2 k^2 g = 0.$$

A esta ecuación (o a su análoga en términos de a) se le llama *ecuación paraxial* y está estrechamente emparentada con la *ecuación de Schrödinger* que veremos en el siguiente capítulo. Usando el método de separación de variables (véase el apéndice F) se prueba que la solución de esta ecuación bajo $g(x, 0) = D(x)$ es

$$g(x, z) = K e(-kz) F(x, z) \quad \text{con} \quad F(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx + \frac{1}{2}\lambda n^2 z\right)$$

para cierta K constante. Esta es igual que la fórmula que había aparecido en (4.3), sin el factor $|z|^{-1/2}$. Esta ausencia, que da la atenuación en z de las ondas, es natural, dada la hipótesis hecha de que haya poca deformación en dicha dirección. Si no estamos lejos de la red de difracción, esto es más realista que en el primer método, el cual colapsa para z pequeño.

4.3. Estudio del patrón mediante sumas de Gauss

Ahora estudiaremos el efecto Talbot fraccionario utilizando las sumas de Gauss. En lo sucesivo suponemos que a/q es una fracción irreducible, esto es, $(a, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ con a y q coprimos. Estudiamos la siguiente expresión para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(a, -m; q) e\left(\frac{nm}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^2}{q}\right) \sum_{m=0}^{q-1} e\left(\frac{m(n-k)}{q}\right).$$

Por el mismo argumento que realizamos para obtener el valor de $|G(a, b; q)|$, es fácil ver que $\sum_{m=0}^{q-1} e(m(n-k)/q) = 0$ si $n-k$ no es un múltiplo de q (es decir, $k = n - hq$, donde $h \in \mathbb{Z}$), en cuyo caso el valor es q . Entonces:

$$\frac{1}{q} \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^2}{q}\right) \sum_{m=0}^{q-1} e\left(\frac{m(n-k)}{q}\right) = \frac{1}{q} e\left(\frac{a(n-hq)^2}{q}\right) q = e\left(\frac{an^2}{q}\right).$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$(4.4) \quad e\left(\frac{an^2}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(a, -m; q) e\left(\frac{nm}{q}\right).$$

Recordando la definición de F y aplicando la identidad (4.4):

$$F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx - \frac{an^2}{q}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e(nx) \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(-a, -m; q) e\left(\frac{nm}{q}\right).$$

Intercambiando los sumatorios, obtenemos:

$$(4.5) \quad F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(-a, -m; q) D\left(x + \frac{m}{q}\right).$$

Repitiendo el cálculo que hemos hecho en la sección 4.1.1, deberíamos obtener que a distancia $z_T/2$, se debería observar luz en los puntos medios entre centros de las rejillas. Entonces, para $a/q = 1/2$:

$$F\left(x, -\frac{z_T}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(D(x) \left(e\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \right) + D\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\left(e\left(-\frac{1}{2}\right) \right)^2 + 1 \right) \right) = D\left(x + \frac{1}{2}\right);$$

y por la 1-periodicidad de $D(x)$, este es el mismo resultado que habíamos obtenido antes. La ecuación (4.5) es una versión general del efecto Talbot que muestra que en posiciones fraccionarias obtenemos una combinación de trasladados de la red de difracción.

De nuevo volviendo a (4.5), vamos a suponer que $w < q^{-1}$. Entonces si m toma todos los valores entre 0 y $q-1$, solamente para uno de ellos el valor de $D(x + m/q)$ podría ser 1, mientras que para el resto el valor será 0. Por lo tanto:

$$\left| F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right) \right| = \begin{cases} \frac{1}{q} \left| G(-a, -m; q) \right| & \text{si } \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } D(x + m/q) = 1; \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

que no depende de a como habíamos visto en la proposición 3.2. Además, si $w = (2q)^{-1}$, entonces $|F|$ no vale 0 si para algún $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left| x + \frac{m}{q} + n \right| \leq \frac{w}{2}, \quad \text{equivalentemente,} \quad |qx + m + nq| \leq \frac{qw}{2} = \frac{1}{4}.$$

Como $m \in \{0, \dots, q-1\}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $m + nq$ puede ser cualquier entero, por lo que podemos hacer el cambio $m + nq \rightarrow n$, y vemos que la condición que se ha de cumplir es, que para algún $n \in \mathbb{Z}$:

$$|qx + n| \leq \frac{1}{4},$$

que es igual a la condición para la función característica en qx de la red de Ronchi. Por lo tanto:

$$\left| F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right) \right| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q}} D_R(qx) & \text{si } 2 \nmid q; \\ \frac{1+(-1)^{-m+q/2}}{\sqrt{2q}} D_R(qx) & \text{si } 2 \mid q. \end{cases}$$

donde D_R es la D correspondiente a la red de Ronchi.

A modo de ejemplo, en el apéndice G se ha generado una imagen que muestra una alfombra de Talbot para $w = 0,1$ y $1/\lambda = 100$.

CAPÍTULO 5

Resurgimiento cuántico

5.1. Ecuación de Schrödinger

La ecuación fundamental de la mecánica cuántica básica es la *ecuación de Schrödinger*, que tiene la forma general $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$ donde H es un operador conocido como *hamiltoniano* relacionado con la energía que depende del problema y \hbar es la *constante de Planck reducida*, que en el sistema internacional está cerca de $1,0510^{-34}$.

Para una partícula cuántica de masa m que se mueve en un espacio unidimensional bajo la acción de un potencial V , $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$. La ecuación se convierte entonces en:

$$(5.1) \quad i\hbar\Psi_t = -\frac{\hbar^2\Psi_{xx}}{2m} + V\Psi.$$

Aquí Ψ es una función compleja de x (espacio) y t (tiempo), mientras que por otro lado el potencial V es una función real. Para cada t fijo, $|\Psi(x, t)|^2$ indica la densidad de probabilidad de detectar la partícula en la posición x .

Para que esto tenga sentido, debemos partir de una condición inicial $f(x) = \Psi(x, 0)$ que esté *normalizada*, es decir, que $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = 1$ y probar que la probabilidad no desaparece, esto es, que la normalización se conserva a lo largo del tiempo. Para ello vamos a estudiar $|\Psi(x, t)|^2$, partiendo de su derivada respecto al tiempo. Denotando $\bar{\Psi}$ al conjugado de Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\Psi\bar{\Psi} = \Psi_t\bar{\Psi} + \Psi\bar{\Psi}_t.$$

A partir de (5.1), obtenemos:

$$\Psi_t = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2\Psi_{xx}}{2m} - V\Psi\right) \quad \text{y} \quad \bar{\Psi}_t = \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2\bar{\Psi}_{xx}}{2m} + V\bar{\Psi}\right).$$

Introduciendo estos resultados en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{\hbar}{2im}\left(\bar{\Psi}_{xx}\Psi - \Psi_{xx}\bar{\Psi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hbar}{2im}(\bar{\Psi}_x\Psi - \Psi_x\bar{\Psi})\right).$$

Teniendo en cuenta que $\bar{z} - z = -2i\Im(z)$ (donde \Im indica la parte imaginaria):

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar}{m} \Im(\bar{\Psi} \Psi_x) \right).$$

De esta última identidad podemos deducir que si Ψ y Ψ_x son regulares y tienden lo suficientemente rápido a cero cuando $x \rightarrow \infty$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar}{m} \Im(\bar{\Psi} \Psi_x) \right) dx = \frac{\hbar}{m} \Im(\bar{\Psi} \Psi_x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Así pues, $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x, t)|^2 dx$ es una función constante en el tiempo, por lo que si en el instante inicial Ψ está normalizada, lo estará siempre.

La ecuación de Schrödinger es una *ecuación dispersiva*, es decir, ondas de diferentes frecuencias tienen diferentes velocidades. Normalmente esto hace que las soluciones se dispersen (de ahí el nombre) y la distribución de probabilidad tienda a uniformizarse en algún sentido según avanza el tiempo. Sin embargo, a veces hay una periodicidad exacta o aproximada en el tiempo y con cierta frecuencia se recuperan las condiciones iniciales. En esa situación se habla de *efecto Talbot cuántico* o de *resurgimiento cuántico*.

5.2. Efecto Talbot cuántico

Vamos a considerar un ejemplo en el que aparece este resurgimiento cuántico. Para simplificar y no estar arrastrando constantes físicas, suponemos $\hbar = 1$ (conocido como *unidades naturales*) e imponemos $V = 0$ (se dice que es una *partícula libre*). Además escogemos $m = \pi$. Finalmente, imaginamos que nuestra partícula está confinada a un anillo de longitud 1, lo que matemáticamente se traduce en que solo vamos a considerar soluciones 1-periódicas en x . Con todo esto (5.1) se convierte en:

$$(5.2) \quad 2\pi i \Psi_t + \Psi_{xx} = 0, \quad \text{con} \quad \Psi(x, t) = \Psi(x + 1, t).$$

La condición de normalización ahora solo hay que pedirla en un intervalo de longitud 1. Por ejemplo, $\int_{-1/2}^{1/2} |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1$. La conservación de la probabilidad se sigue cumpliendo con un argumento similar al anterior.

Por tanto, vamos a intentar resolver ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} 2\pi i \Psi_t + \Psi_{xx} = 0; \\ \Psi(x, 0) = f(x); \end{cases}$$

donde f es una función 1-periódica regular. Siguiendo los mismos pasos que en el apéndice F, escribimos $\Psi(x, t) = X(x)T(t)$ con X 1-periódica. Por la primera ecuación:

$$2\pi i \frac{T'}{T} = -\frac{X''}{X}.$$

Entonces, de nuevo tenemos que $X(x)$ es una combinación lineal de $e(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$, y, para un n particular:

$$\frac{T'}{T} = -2\pi n^2 i;$$

por lo que $T(t) = e(-n^2 t)$ salvo multiplicar por constantes. Juntando todas las soluciones, tenemos que

$$(5.3) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx - n^2 t).$$

Introduciendo ahora la condición de frontera, nos queda la expresión:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx) = f(x);$$

por lo que los valores a_n deben ser los coeficientes de Fourier de f .

Si consideramos ahora $\Psi(x, a/q)$, recordando la identidad (4.4):

$$\Psi\left(x, \frac{a}{q}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e\left(nx - \frac{an^2}{q}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx) \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(-a, -m; q) e\left(\frac{nm}{q}\right).$$

Reordenando los sumatorios y recordando que los a_n son los coeficientes de Fourier de f :

$$\Psi\left(x, \frac{a}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(-a, -m; q) f\left(x + \frac{m}{q}\right);$$

y vemos que se tiene una versión del efecto Talbot fraccionario, análogo al de la difracción sustituyendo la función indicatriz de la rejilla por la nueva función f . El efecto Talbot cuántico es para este ejemplo el hecho trivial de que $\Psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx - n^2 t)$ es 1-periódica en t . Si pensamos en términos clásicos, esto suena natural: una partícula que se mueve en un anillo sin la acción de fuerzas ($V = 0$) describe trayectorias periódicas.

En el caso del efecto Talbot clásico, considerábamos como condición inicial la función característica de la red de difracción, que al ser discontinua causa que el estudio de la convergencia (que no abordamos) no sea nada trivial, además de que las derivadas que aparecen en la ecuación paraxial pierden su sentido cuando no hay regularidad suficiente. Estos mismos problemas aparecen en el caso cuántico. Hay técnicas matemáticas para dar algún significado a estas manipulaciones (soluciones débiles, teoría de distribuciones) en las que no entraremos. Lo que vamos a ver es que nuestro ejemplo, bajo condiciones de baja regularidad, da lugar a gráficas fractales, de dimensión fraccionaria. Esto aparece con más generalidad, aunque no demasiado rigor, en los artículos [2], [1] o [3].

5.3. Dimensión fractal de una función de onda particular

Consideraremos la función $\Psi(x, t)$ que cumple la ecuación diferencial anterior con $f(x) = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2} - |x|)$ en $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ que está normalizada en este intervalo, es decir, $\int_J |f|^2 = 1$. Su extensión 1-periódica viene dada por:

$$f(x) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \left|x - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor\right|\right).$$

Realizamos ahora su desarrollo de Fourier, recordando que los coeficientes vienen dados por $a_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e(-nt)dt$. Entonces:

$$a_n = \sqrt{3} \int_{-1/2}^{1/2} e(-nt)dt + 2\sqrt{3}\left(\int_{-1/2}^0 te(-nt)dt - \int_0^{1/2} te(-nt)dt\right).$$

La primera integral vale 1 si $n = 0$ y 0 si $n \neq 0$. Para la segunda y la tercera, si $n = 0$ valen $-1/8$ y $1/8$ respectivamente. Si $n \neq 0$, integrando por partes:

$$\int_a^b te(-nt)dt = \frac{ti}{2\pi n} e(-nt)|_a^b + \frac{1}{2\pi in} \int_a^b e(-nt)dt = \left(\frac{ti}{2\pi n} + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right) e(-nt)|_a^b.$$

Sustituyendo para ambas integrales, obtenemos:

$$- \int_{-1/2}^{1/2} |t|e(-nt)dt = \begin{cases} -\frac{2}{8} & \text{si } n = 0; \\ 0 & \text{si } 2 \mid n \text{ y } n \neq 0; \\ \frac{1}{\pi^2 n^2} & \text{si } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Juntando los resultados:

$$a_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n = 0; \\ \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} \sqrt{3} & \text{si } n \in \mathbb{Z} - \{0\}. \end{cases}$$

Sustituyendo este resultado en (5.3), se deduce que la función de ondas correspondiente a la condición inicial dada por la extensión periódica de f es

$$(5.4) \quad \Psi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}, 2 \nmid k} \frac{e(kx - k^2 t)}{k^2}.$$

Definición 5.1 (Dimensión fractal). Sean $I_\ell = [\frac{\ell}{N}, \frac{\ell+1}{N}]$, $0 \leq \ell \leq N - 1$. Se define la *dimensión fractal*, también llamada *de Minkowski* o *por cajas*, de la gráfica Γ de cualquier función acotada $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como el límite

$$\dim(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(N + N \sum_{\ell=0}^{N-1} \Delta_\ell)}{\log N} \quad \text{con} \quad \Delta_\ell = \sup_{\substack{t \in I_\ell, u \in I \\ |t-u| < N^{-1}}} |F(t) - F(u)|.$$

El límite, y por tanto la dimensión, podría no existir, pero siempre existirán el límite inferior y el límite superior llamados dimensión inferior y dimensión superior,

denotados con $\underline{\dim}(\Gamma)$ y $\overline{\dim}(\Gamma)$. No vamos a ver en qué sentido esto refleja el concepto intuitivo de dimensión, que está relacionado con el número de cuadrados de lado N^{-1} que se necesitan para recubrir la gráfica. Esto se puede ver más en detalle en [13]. En el apéndice H probaremos que la dimensión está siempre ente 1 y 2 y que es 1 cuando la función tiene derivada acotada, lo que concuerda con que las curvas regulares son unidimensionales.

Definición 5.2 (Fractal). Diremos que Γ es fractal si $\dim(\Gamma) \in (1, 2)$, es decir, si su dimensión no es entera. Podemos extender el concepto diciendo que Γ es fractal si $\underline{\dim}(\Gamma)$ y $\overline{\dim}(\Gamma)$ están ambas en $(1, 2)$.

Proposición 5.3. Sea $F(t) = \Psi(0, -t)|_{t \in [0,1]}$ y Γ su gráfica asociada en el intervalo $[0, 1]$. Entonces Γ es fractal.

Daríá igual poner t en lugar de $-t$, porque solo aplica una simetría a la gráfica, y fijar el intervalo $[0, 1]$ o cualquier otro de longitud 1 es irrelevante. Para demostrar esta proposición, vamos a acotar la dimensión inferior y la dimensión superior por separado.

Lema 5.4. Sea $F(t) = \Psi(0, -t)|_{t \in [0,1]}$ y Γ su gráfica asociada en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $\overline{\dim}(\Gamma) \leq \frac{3}{2}$.

Demostración. Recordando la expresión de Ψ (5.4), escribimos

$$F(t) - F(u) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{2\|k| \leq \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{2\|k| > \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2}.$$

Si estudiamos el primer sumatorio en valor absoluto, podemos acotarlo utilizando el teorema del valor medio:

$$\left| \sum_{2\|k| \leq \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} \right| \leq 4\pi \sum_{2\|k| \leq \sqrt{N}} |t - u| \max_{x \in [u,t]} |e(k^2x)| \leq 8\pi |t - u| \sqrt{N}.$$

Vamos ahora con el segundo sumatorio. Primero, veamos que para $M \in \mathbb{Z}_{>1}$:

$$\sum_{k=M}^{\infty} k^{-2} \leq \sum_{k=M}^{\infty} ((k-1)^{-1} - k^{-1}) = (M-1)^{-1}.$$

Observamos que el valor de dentro del sumatorio es igual para $\pm k$, por lo que podemos reescribirlo como:

$$\left| \sum_{2\|k| > \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} \right| = 2 \left| \sum_{2\|k| > \sqrt{N}} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} \right|.$$

Como $|e(x)| = 1$, tenemos que:

$$\left| \sum_{k \geq \lceil \sqrt{N} \rceil} \frac{e(k^2t) - e(k^2u)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=\lceil \sqrt{N} \rceil}^{\infty} \frac{2}{k^2} \leq 2([\sqrt{N}] - 1)^{-1}.$$

Entonces, si aplicamos el valor absoluto a $F(t) - F(u)$:

$$|F(t) - F(u)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{\pi^2} \left(\pi|t - u|\sqrt{N} + \frac{1}{\lceil\sqrt{N}\rceil - 1} \right).$$

A partir de esto, podemos deducir que, para $N \in \mathbb{Z}_{>1}$ y $0 \leq k < N$:

$$\sqrt{N}\Delta_k \leq \frac{8\sqrt{3}}{\pi^2} \sqrt{N} \left(\frac{\pi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\lceil\sqrt{N}\rceil - 1} \right).$$

Por lo tanto, el valor de $\sqrt{N}\Delta_k$ está uniformemente acotado por una constante (llamémosla C). Volviendo de nuevo a la expresión para $\overline{\dim}(\Gamma)$, la reescribimos de la siguiente manera:

$$\overline{\dim}(\Gamma) = \frac{1}{2} + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\sqrt{N} + \sum_{\ell=0}^{N-1} \sqrt{N}\Delta_\ell)}{\log N}.$$

Utilizando la cota que hemos hallado para $\sqrt{N}\Delta_\ell$:

$$\overline{\dim}(\Gamma) \leq \frac{1}{2} + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\sqrt{N} + NC)}{\log N} = \frac{3}{2}.$$

Deducimos entonces que $\overline{\dim}(\Gamma) \leq 3/2$. □

Dar una cota para la dimensión inferior es más complicado, y para ello vamos a introducir varios resultados previos. Vamos a seguir esencialmente [7]. Para simplificar la notación introducimos el conjunto de primos

$$\mathcal{P}_N = \left\{ \frac{3}{4}\sqrt{N} < q < \sqrt{N} : q \text{ primo}, q \equiv 3 \pmod{4} \right\}$$

y para cada q en este conjunto, denotamos el conjunto de los residuos cuadráticos módulo q

$$\mathcal{R}_q = \{0 < a < q : a \equiv r^2 \pmod{q} \text{ para algún } r \in \mathbb{Z}\}.$$

Lema 5.5. *Sea $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$, $0 \leq k \leq N - 1$. Entonces I_k contiene a lo más una fracción a/q con $q \in \mathcal{P}_N$ y $a \in \mathcal{R}_q$.*

Demostración. Para un mismo q , es evidente ya que $1/q > 1/\sqrt{N} > |I_k|$. Supongamos entonces a/q y a'/q' con $q \neq q'$. Entonces:

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \frac{1}{qq'} |aq' - a'q| > \frac{1}{N} |aq' - a'q|$$

Nos falta ver que $|aq' - a'q| \geq 1$. El único caso en el que no se cumpliría es que $aq' = a'q$, pero q es primo, y como $a < q$ y q' es primo distinto de q esto es imposible. □

A partir de este resultado, deducimos que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k \geq \sum_{q \in \mathcal{P}_N} \sum_{a \in \mathcal{R}_q} \left| F\left(\frac{a}{q}\right) - F\left(\frac{a}{q} + v\right) \right|$$

donde v es un valor cualquiera tal que $(a/q + v) \in I$ y $v < 1/N$. Elegimos arbitrariamente $v = 1/2q^2$ que cumple ambas condiciones. Recordando que $|z| \geq \Im(z)$, obtenemos:

$$(5.5) \quad \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k \geq \sum_{q \in \mathcal{P}_N} |S_q| \geq \sum_{q \in \mathcal{P}_N} \Im(S_q) \quad \text{con } S_q = \sum_{a \in \mathcal{R}_q} \left(F\left(\frac{a}{q}\right) - F\left(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\right) \right).$$

Proposición 5.6. *Sea S_q el definido anteriormente. Entonces existen dos constantes $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ y $C_{N_0} > 0$ tal que si $N > N_0$ entonces $\sqrt{q} \Im S_q \geq C_{N_0}$ para todo $q \in \mathcal{P}_N$.*

Demostración. Vamos a utilizar una consecuencia no trivial de las sumas de Gauss. Primero, observamos que si tomamos $r_1 \in [1, 2, \dots, q-1]$ y $r_2 = q - r_1$, entonces $r_2^2 = q^2 - 2qr_1 + r_1^2$, que es congruente a r_1^2 módulo q . Por lo tanto, es claro que $|\mathcal{R}_q| \leq (q-1)/2$. Además, se puede comprobar que si $i^2 \equiv j^2 \pmod{q}$, entonces $i \equiv \pm j \pmod{q}$, por lo que en particular $|\mathcal{R}_q| = (q-1)/2$. A partir de esto, tenemos la igualdad:

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{n^2 a}{q}\right) = \sum_{r=1}^{(q-1)/2} e\left(\frac{(nr)^2}{q}\right).$$

Si $q \nmid n$, entonces multiplicar n por los elementos de \mathbb{Z}_q solamente permuta los elementos. Podríamos pensar que al multiplicar por n dos valores de r distintos, para uno de ellos obtuvieramos a y para el otro $-a$, por lo que el residuo cuadrático fuera el mismo. Sin embargo, si esto fuera cierto se cumpliría que, para n coprimo con q y $r_1, r_2 \in [1, \dots, (q-1)/2]$ tales que $nr_1 = -nr_2$ módulo q . Entonces, $r_2 = -r_1$ módulo q , y por lo tanto $r_2 \notin [1, \dots, (q-1)/2]$. Por lo tanto:

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{n^2 a}{q}\right) = \sum_{r=1}^{(q-1)/2} e\left(\frac{r^2}{q}\right).$$

Por lo que hemos visto, sabemos que

$$\sum_{r=1}^q e\left(\frac{r^2}{q}\right) = 2 \sum_{r=1}^{(q-1)/2} e\left(\frac{r^2}{q}\right) + 1,$$

y como conocemos el valor de la primera suma (3.1) ya que $q \equiv 3 \pmod{4}$, entonces

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{n^2 a}{q}\right) = \sum_{r=1}^{(q-1)/2} e\left(\frac{r^2}{q}\right) = \frac{\sum_{r=1}^q e\left(\frac{r^2}{q}\right) - 1}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{q}}{2}.$$

Por otro lado, si $q \mid n$

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{n^2 a}{q}\right) = \sum_{r=1}^{(q-1)/2} 1 = \frac{q-1}{2}.$$

Vamos a estudiar ahora cada sumando de S_q por separado. Vemos que:

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{2 \nmid k} \frac{1}{k^2} \sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{k^2 a}{q}\right) = \sum_{2 \nmid k} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{q \nmid k} \frac{-1 + i\sqrt{q}}{2} + \sum_{q \mid k} \frac{q-1}{2} \right);$$

cuya parte imaginaria, que es la que nos interesa, es

$$\Im\left(\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q}\right)\right) = \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{\sqrt{q}}{2k^2}.$$

Para el segundo sumando, tenemos:

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\right) = \sum_{2 \nmid k} \frac{e\left(\frac{k^2}{2q^2}\right)}{k^2} \sum_{a \in \mathcal{R}_q} e\left(\frac{k^2 a}{q}\right).$$

Utilizando la expresión obtenida para el primer sumando y el desarrollo en coseno y seno de $e(k^2/(2q^2))$:

$$\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\right) = \sum_{2 \nmid k} \frac{1}{k^2} \left(\cos\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right) \right) \left(\sum_{q \nmid k} \frac{-1 + i\sqrt{q}}{2} + \sum_{q \mid k} \frac{q-1}{2} \right).$$

Multiplicando y tomando la parte imaginaria:

$$\Im\left(\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\right)\right) = \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{2k^2} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right) + \sqrt{q} \cos\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right) \right).$$

Utilizando la propiedad $\cos(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(x/2)$, reescribimos:

$$\Im\left(\sum_{a \in \mathcal{R}_q} F\left(\frac{a}{q} + \frac{1}{2q^2}\right)\right) = \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{2k^2} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right) + \sqrt{q} - 2\sqrt{q} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k^2}{2q^2}\right) \right).$$

Uniendo ambos resultados, obtenemos:

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}} \Im(S_q) = \sqrt{q} \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k^2}{2q^2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k^2}{q^2}\right).$$

Ahora, teniendo en cuenta que hay $(q+1)/4$ números impares en $(q/2, q]$ cuando $q \in \mathcal{P}_N$, escribimos la siguiente cota inferior para el primero de los dos sumatorios de la fórmula anterior.

$$\sqrt{q} \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k^2}{2q^2}\right) \geq 2\sqrt{q} \sum_{2 \nmid k, k \in (q/2, q]} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k^2}{2q^2}\right) \geq \sqrt{q} \frac{q+1}{2q^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Para el segundo sumatorio, vamos a separarlo de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \sum_{2 \nmid k, q \nmid k} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k^2}{q^2} \right) = \sum_{2 \nmid k, 0 < k \leq q} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k^2}{q^2} \right) + \sum_{2 \nmid k, q \nmid k, k > q} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k^2}{q^2} \right).$$

El primer término aporta sólo valores positivos, ya que $k^2/q^2 \in (0, 1]$, entonces, utilizando que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$:

$$\sum_{2 \nmid k, 0 < k \leq q} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k^2}{q^2} \right) \leq \frac{(q+1)\pi}{2q^2}.$$

Si estudiamos el segundo término en valor absoluto, está claro que

$$\left| \sum_{2 \nmid k, q \nmid k, k > q} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k^2}{q^2} \right) \right| \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{q}.$$

Por lo tanto, tenemos que el primer sumatorio es mayor que una constante por una función del orden de $q^{-1/2}$ y el segundo es menor en valor absoluto que otra función del orden de q^{-1} , por lo que comparativamente para valores altos de N este último es despreciable. \square

Por último, vamos a introducir el siguiente resultado de teoría de números cuya prueba se puede encontrar en [16].

Lema 5.7. *Sea P_N el conjunto definido anteriormente. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#P_N \log N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{4}.$$

Lema 5.8. *Sea $F(t) = \Psi(0, -t)|_{t \in [0, 1]}$ y Γ su gráfica asociada en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $\underline{\dim}(\Gamma) \geq \frac{5}{4}$.*

Demostración. Partiendo de (5.5) y utilizando el resultado 5.6, tenemos:

$$N \sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k \geq N \sum_{q \in P_N} \mathfrak{S}(S_q) \geq N^{3/4} \#P_N C$$

Por la identidad 5.7, $\#P_N \sim \frac{\sqrt{N}}{4 \log N}$ cuando $N \rightarrow \infty$, tenemos que $N^{3/4} \#P_N C \sim \frac{N^{5/4} C}{4 \log N}$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por tanto:

$$\underline{\dim}(\Gamma) \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \left(N + \frac{N^{5/4} C}{4 \log N} \right)}{\log N}.$$

Realizando el límite obtenemos el resultado que buscamos. \square

Entre la cota para la dimensión inferior y la cota para la superior no hay ningún entero, por tanto estamos ante un objeto fractal.

APÉNDICE A

Integral infinita de Fresnel

Proposición A.1. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la integral de Fresnel. Entonces

$$F(+\infty) = -F(-\infty) = \frac{1+i}{4}.$$

Demostración. Vamos a considerar $e(z^2)$ con z en \mathbb{C} , así que vamos a comprobar que la función $e(z^2)$ es holomorfa. Para ello, basta comprobar que cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, donde $u = \Re(e(z^2))$ y $v = \Im(e(z^2))$. Si $z = x + iy$:

$$e(z^2) = e^{-4\pi xy}(\cos 2\pi(x^2 - y^2) + i \operatorname{sen} 2\pi(x^2 - y^2)).$$

Entonces,

$$u(x, y) = e^{-4\pi xy} \cos(2\pi(x^2 - y^2)) \quad y \quad v(x, y) = e^{-4\pi xy} \operatorname{sen}(2\pi(x^2 - y^2)).$$

Es fácil comprobar que se cumplen las ecuaciones, y por lo tanto la función es holomorfa.

Vamos a estudiar su integral sobre la curva γ cerrada de la figura A.1. Como vemos, γ está compuesta por tres curvas distintas. Las llamamos γ_1 a la curva azul (orientada hacia la derecha), γ_2 a la curva amarilla (orientada hacia arriba) y γ_3 a la curva roja (orientada hacia la izquierda). La curva γ es una curva cerrada que cumple las condiciones del teorema de Cauchy, cuya prueba se puede encontrar por ejemplo en [18], por lo que la integral de $e(z^2)$ sobre esta curva es 0. Por lo tanto,

$$\int_{\gamma} e(z^2) dz = \int_{\gamma_1} e(z^2) dz + \int_{\gamma_2} e(z^2) dz - \int_{\gamma_3} e(z^2) dz = 0.$$

Veamos ahora que si $x \rightarrow \infty$, donde x es la longitud de γ_1 , entonces $\int_{\gamma_2} e(z^2) dz \rightarrow 0$. Primero, haciendo el cambio $z = xe^{it}$:

$$\left| \int_{\gamma_2} e(z^2) dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{2\pi i(x^2 e^{2it})} i x e^{it} dt \right| = \left| x \int_0^{\pi/4} e^{i(2\pi x^2 \cos(2t)+t) - 2\pi x^2 \operatorname{sen}(2t)} dt \right|.$$

Recordando que $|e^{it}| = 1$ ya que t es real:

$$\left| \int_{\gamma_2} e(z^2) dz \right| \leq x \int_0^{\pi/4} e^{-2\pi x^2 \operatorname{sen}(2t)} dt$$

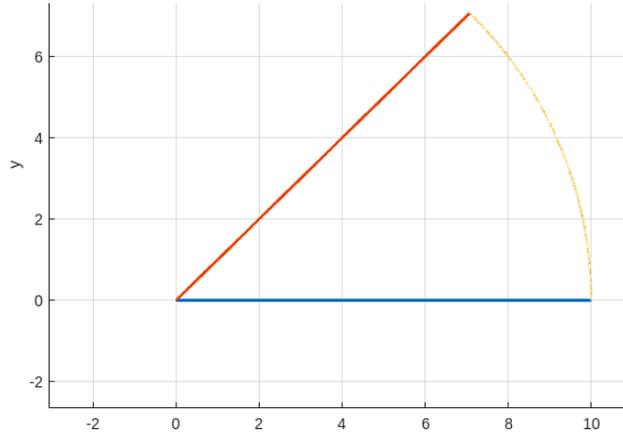


Figura A.1: Curvas sobre las que vamos a estudiar la integral. Fuente: MATLAB

Por la desigualdad de Jordan, tenemos $\sin t \geq (2t)/\pi$, entonces:

$$\left| \int_{\gamma_2} e(z^2) dz \right| \leq x \int_0^{\pi/4} e^{-8x^2 t} dt = \frac{1}{8x} (1 - e^{-2\pi x^2}) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$(A.1) \quad \int_{\gamma_1} e(z^2) dz = \int_{\gamma_3} e(z^2) dz \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Ahora vamos a calcular el valor de $\int_{\gamma_3} e(z^2) dz$ cuando $x \rightarrow \infty$. Conocemos el valor de la integral de Euler $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, y, por la paridad de e^{-x^2} , evaluada de 0 a $+\infty$ es $\sqrt{\pi}/2$. Sabiendo esto, haciendo el cambio $z = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi/4}$:

$$\int_{\gamma_3} e(z^2) dz = \int_0^x e^{2\pi i \frac{\rho^2}{2\pi} e^{i\pi/2}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} d\rho = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2} d\rho.$$

Calculando el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{4}$$

y por la igualdad vista en (A.1) obtenemos el resultado. \square

APÉNDICE B

Justificación del sumatorio mediante el Principio de Fase Estacionaria

Vamos a ver de dónde sale el sumatorio de la proposición 2.3 a la luz del principio de fase estacionaria. Según este y usando para A y B aproximaciones de Taylor de orden 0 y de orden 2, se debería tener para cierto $\delta > 0$:

$$I(x) \approx \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \int_{t_\nu - \delta}^{t_\nu + \delta} A(t) e(xB(t)) dt \approx \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \int_{-\delta}^{\delta} A(t_\nu) e(xB(t_\nu) + \frac{x}{2} B''(t_\nu) t^2) dt.$$

Entonces, si desarrollamos cada una de las integrales:

$$\int_{-\delta}^{\delta} A(t_\nu) e(xB(t_\nu) + \frac{x}{2} B''(t_\nu) t^2) dt = 2A(t_\nu) e(xB(t_\nu)) \int_0^{\delta} e(\frac{x}{2} B''(t_\nu) t^2) dt.$$

Ahora, llamamos $x_\nu = |xB''(t_\nu)/2|^{1/2}$, y si $B''(t_\nu) > 0$, haciendo el cambio $u = x_\nu t$:

$$\int_0^{\delta} e(x_\nu^2 t^2) dt = \frac{1}{x_\nu} \int_0^{\delta x_\nu} e(u^2) du = \frac{F(\delta x_\nu)}{x_\nu}.$$

Para $B''(t_\nu) < 0$ el resultado es igual pero con la F conjugada:

$$\int_0^{\delta} e(\frac{x}{2} B''(t_\nu) t^2) dt = \frac{\overline{F}(\delta x_\nu)}{x_\nu}.$$

Una vez visto esto, vamos a observar que multiplicando esta aproximación por \sqrt{x} y tomando el límite cuando $x \rightarrow \infty$ obtenemos el sumatorio en (2.3). Si $B''(t_\nu) > 0$:

$$\sqrt{x} I(x) \approx \sqrt{x} \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} 2A(t_\nu) e(xB(t_\nu)) \frac{F(\delta x_\nu)}{x_\nu}.$$

Tomando el límite y utilizando el resultado (2.2):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} I(x) \approx \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \frac{A(t_\nu) e(xB(t_\nu)) (1+i)}{\sqrt{2B''(t_\nu)}}.$$

Para $B''(t_\nu) < 0$ el resultado es igual pero cambiando un par de signos. Juntando ambos casos, obtenemos:

$$I(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \frac{(1 + \operatorname{sgn}(B''(t_\nu))i)A(t_\nu) e(xB(t_\nu))}{\sqrt{\operatorname{sgn}(B''(t_\nu))2B''(t_\nu)}}.$$

APÉNDICE C

Ejemplos de la difracción de Fraunhofer

Si tenemos una apertura cuadrada de lado δ , $A = [-\delta/2, \delta/2] \times [-\delta/2, \delta/2]$, la transformada de Fourier de la función característica para A es

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{sen}(\pi\xi_1\delta) \text{sen}(\pi\xi_2\delta)}{\pi^2\xi_1\xi_2}.$$

Si suponemos la fuente de luz en $(0, 0, p_3)$, entonces

$$(C.1) \quad \left| \widehat{\chi}_A\left(k \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}, k \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|}\right) \right|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 \frac{\text{sen}^2(\pi\delta k \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}) \text{sen}^2(\pi\delta k \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|})}{\pi^2 k^2 q_1^2 q_2^2}.$$

Por este motivo, si ponemos una segunda pantalla en un $z = q_3$ fijado, veremos un esquema de luces y sombras en función de q_1 y q_2 correspondientes a los valores de (C.1).

Si por otra parte, tenemos una apertura circular de radio δ , entonces, si D es el disco centrado de radio δ tenemos:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \iint_{D_\delta} e(-\xi_1 x - \xi_2 y) dx dy.$$

Dado $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, sean R y α_0 su radio y su ángulo, es decir, $\xi_1 = R \cos \alpha_0$, $\xi_2 = R \sin \alpha_0$:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \iint_{D_\delta} e(-R \cos \alpha_0 x - R \sin \alpha_0 y) dx dy.$$

Realizamos el cambio $x = r \sin(\theta + \alpha_0)$, $y = -r \cos(\theta + \alpha_0)$:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} r e(-Rr(\cos \alpha_0 \sin(\theta + \alpha_0) - \sin \alpha_0 \cos(\theta + \alpha_0))) d\theta dr.$$

Recordando que $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen} \beta$:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} r e(-Rr \text{sen} \theta) d\theta dr.$$

Haciendo ahora el cambio de polares a cartesianas habitual:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\sqrt{\delta^2-y^2}}^{\sqrt{\delta^2-y^2}} e(-Ry) dx dy = 2 \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\delta^2-y^2} e(-Ry) dy.$$

Con el cambio $y = \delta \operatorname{sen}(2\pi t)$:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\delta^2-y^2} e(-Ry) dy = 2\pi\delta^2 \int_{-1/4}^{1/4} \cos^2(2\pi t) e(-R\delta \operatorname{sen}(2\pi t)) dt.$$

Integrando por partes y utilizando ahora la simetría de $\cos^2(2\pi t)$ y $\operatorname{sen}(2\pi t)$:

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{2\pi\delta}{R} i \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi t) e(-R\delta \operatorname{sen}(2\pi t)) dt = \frac{\delta}{R} h(R\delta) \quad \text{donde } h \text{ es (2.2).}$$

Recordando el límite asintótico de $h(x)$, hemos obtenido que cuando $R\delta \rightarrow \infty$,

$$\widehat{\chi}_A(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{\sqrt{\delta}}{\pi R^{3/2}} \operatorname{sen}\left(2\pi R\delta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Y de nuevo, si suponemos la fuente de luz en $(0, 0, p_3)$, entonces

$$\left| \widehat{\chi}_A\left(k \frac{q_1}{\|\mathbf{q}\|}, k \frac{q_2}{\|\mathbf{q}\|}\right) \right|^2 \approx \frac{\delta}{\pi^2 R^3} \operatorname{sen}^2\left(2\pi R\delta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{con } R = k \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{\|\mathbf{q}\|}.$$

Este resultado muestra un esquema de difracción en anillos, que se separan más cuanto menor es el tamaño de la apertura. Realizando ciertas aproximaciones, nos podemos dar cuenta de que para apreciar este fenómeno de forma notable, necesitamos aperturas con radio de 1 micra.

APÉNDICE D

Prueba de la identidad de Landsberg y Schaar

Para deducir la proposición de Landsberg y Schaar 3.3 partiremos de la siguiente identidad mucho más sencilla.

Lema D.1. *Sea $t \in \mathbb{R}^+$. Entonces,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t}.$$

Observación D.2. *Aunque habitualmente se establece así, por continuación analítica, en realidad es válida para todo $t \in \mathbb{C}$ con $\Re(t) > 0$ con la rama habitual de la raíz.*

Demostración. Vamos a partir del desarrollo de Fourier de $F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(m+x)^2 t}$. Como es 1-periódica y regular, sabemos que admite un desarrollo de Fourier $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx)$ con coeficientes $a_n = \int_{-1/2}^{1/2} F(x) e(-nx) dx$. Vamos a desarrollar a_n realizando el cambio $m + x \rightarrow u$:

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\pi(m+x)^2 t} e(-nx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2 t} e(-nu) du.$$

Entonces, hemos obtenido que $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2 t} e(-nu) du e(nx)$. Para la identidad que queremos demostrar, estamos en el caso $F(0)$:

$$F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 t} e(-nx) dx.$$

Procediendo como en [14], derivamos cada $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 t} e(-nx) dx$:

$$\frac{\partial}{\partial n} a_n = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 t} x e(-nx) dx.$$

Integrando por partes con $u = e(-nx)$, $dv = x e^{-\pi t x^2}$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial n} a_n = -\frac{2\pi n}{t} a_n.$$

Por lo tanto, deducimos que $a_n = Ae^{-\pi n^2/t}$. Para calcular A , calculamos a_0 :

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 t} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

obteniendo así la identidad. \square

Seguimos ahora desarrollando la identidad y lo siguiente que haremos es realizar un cambio de t por $t - 2ip/q$, donde $t > 0$ y $p, q \in \mathbb{Z}^+$, y definimos

$$M_1 := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2(t-2ip/q)} = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{pn^2}{q}\right) e^{-\pi n^2 t};$$

$$M_2 := \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2}{t-2ip/q}} = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{-pn^2 t'}{qt}\right) e^{-\pi n^2 t'};$$

donde $t' = t/(t^2 + 4p^2/q^2)$. Entonces tenemos:

$$(D.1) \quad 1 + 2M_1 = \frac{1 + 2M_2}{\sqrt{t - 2ip/q}}.$$

Lema D.3. Sea $t > 0$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión compleja acotada. Se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi n^2 t} \leq \max_{1 \leq m \leq q} \left| \sum_{n=1}^m b_n \right|.$$

Demostración. Vamos a estudiar la integral $2\pi t \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} b_n dx$. Si la reescribimos como un sumatorio infinito de integrales entre m y $m+1$:

$$2\pi t \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} b_n dx = 2\pi t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m b_n \int_m^{m+1} x e^{-\pi t x^2} dx.$$

Realizando la integral entre m y $m+1$, nos queda una serie telescópica, y evaluándola:

$$2\pi t \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} b_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi n^2 t}.$$

Si además b_n es q -periódica ($b_n = b_{n+q}$) y $b_1 + b_2 + \dots + b_q = 0$ entonces:

$$\left| 2\pi t \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} b_n dx \right| \leq 2\pi t \max_{1 \leq m \leq q} \left| \sum_{n=1}^m b_n \right| \left| \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} dx \right|.$$

Si hacemos la integral, obtenemos el resultado del lema. \square

Proposición D.4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada y q -periódica. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2q} \sum_{n=1}^q a_n.$$

Demostración. Partimos de la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{\sum_{m=1}^q a_m}{q} \right) e^{-\pi n^2 t}.$$

La sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $b_k = a_k - (1/q) \sum_{n=1}^q a_n$, es q -periódica y $b_1 + b_2 + \dots + b_q = 0$, entonces por el lema D.3 esta serie permanece acotada. Sabiendo esto:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} \right) = 0.$$

Por lo tanto, los límites de ambas series multiplicados por \sqrt{t} serán iguales:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t}.$$

De nuevo, sabemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{q} \sum_{n=1}^q a_n \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t} - 1}{2}.$$

Utilizando D.1 en el segundo sumatorio:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} = \frac{1}{2q} \left(\sum_{n=1}^q a_n \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2/t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \sum_{n=1}^q a_n \right).$$

“Deshaciendo” el cambio en el límite de los sumatorios:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{q} \sum_{n=1}^q a_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} = \frac{1}{2q} \sum_{n=1}^q a_n \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2/t} + 1 \right)$$

y el último límite es 1 ya que $e^{-\pi m^2/t}$ tiende rápidamente a 0. \square

Sustituyendo para M_1 ya que $e(\frac{pn^2}{q})$ es tanto acotada como q -periódica:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{pn^2}{q}\right) e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2q} \sum_{n=1}^q e\left(\frac{pn^2}{q}\right).$$

Nos falta hallar un límite ahora para M_2 , para lo cual vamos a acotar la expresión:

$$\left| M_2 - \sum_{n=1}^{\infty} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) e^{-\pi n^2 t'} \right|.$$

Metemos el valor absoluto dentro del sumatorio:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{-pn^2}{qt^2 + 4p^2/q}\right) - e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) \right| e^{-\pi n^2 t'} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| e\left(\frac{-pn^2}{qt^2 + 4p^2/q}\right) - e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) \right| e^{-\pi n^2 t'}.$$

Por el teorema del valor medio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| e\left(\frac{-pn^2}{qt^2 + 4p^2/q}\right) - e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) \right| e^{-\pi n^2 t'} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2t \max_{x \in [0, t]} \left| \frac{\partial}{\partial x} e\left(\frac{-pn^2}{qx^2 + 4p^2/q}\right) \right| e^{-\pi n^2 t'}.$$

Realizando la derivada, y llamando a la parte constante C , se obtiene:

$$\left| M_2 - \sum_{n=1}^{\infty} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) e^{-\pi n^2 t'} \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} (nt')^2 e^{-\pi n^2 t'}.$$

Observamos ahora que el segundo sumatorio, si escribimos $t' = 1/N^2$, se puede considerar una suma de Riemann de forma que:

$$\sum_{n=1}^N (nt')^2 e^{-\pi n^2 t'} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} (n/N)^2 e^{-\pi (n/N)^2}.$$

Entonces, cuando $t' \rightarrow 0^+$, tenemos que $N \rightarrow +\infty$ y, sabiendo $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\pi x^2} dx < \infty$:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} (nt')^2 e^{-\pi n^2 t'} = \lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\pi x^2} dx = 0.$$

Por tanto, recapitulando, tenemos que:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} \left(M_2 - \sum_{n=1}^{\infty} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) e^{-\pi n^2 t'} \right) = 0.$$

Escribimos la igualdad entre los límites:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} M_2 = \lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} \sum_{n=1}^{\infty} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right) e^{-\pi n^2 t'}.$$

Entonces, como $e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right)$ es acotada y $2p$ -periódica, tenemos por la proposición D.4:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} M_2 = \frac{1}{4p} \sum_{n=1}^{2p} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right).$$

A su vez, por definición de t' , si $t \rightarrow 0$ también $t' \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} \sqrt{t'} M_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_2.$$

Si reescribimos t' observamos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_2 = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_2}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t^2 + 4p^2/q^2}} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_2}{2p/q}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} M_2 = \frac{1}{2q} \sum_{n=1}^{2p} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right).$$

Una vez calculados estos, podemos deducir finalmente la identidad desde la igualdad (D.1):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t}(1 + 2M_1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \frac{1 + 2M_2}{\sqrt{t - 2ip/q}}.$$

Realizando los límites:

$$\frac{1}{2q} \sum_{n=1}^q e\left(\frac{pn^2}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt{-2ip/q}} \frac{1}{2q} \sum_{n=1}^{2p} e\left(-\frac{qn^2}{4p}\right).$$

Operando el coeficiente, se obtiene la proposición 3.3.

APÉNDICE E

Modificación del primer método para el estudio del efecto Talbot

Como contrapunto y siguiendo [9], veamos que una modificación del primer método tratado en la sección 4.1 permite tratar el caso en que \mathbf{p} no se supone infinitamente lejos. Digamos que $1/f$ es pequeño en términos absolutos y en comparación con $-1/z$, pero no despreciamos el término $(x-t)^2/(2f)$. Entonces,

$$b_n(x, z) = e\left(\frac{kx^2}{2f}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e\left(-t\left(\frac{kx}{f} + n\right) + \frac{kt^2}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z}\right)\right) dt.$$

Llamando z_* a $(z^{-1} - f^{-1})^{-1}$, y completando cuadrados en el paréntesis de la integral obtenemos la siguiente expresión:

$$b_n(x, z) = e\left(\frac{kx^2}{2f} + \frac{z_*(\frac{kx}{f} + n)^2}{2k}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e\left(\frac{k}{2|z_*|}\left(t + \frac{\frac{kx}{f} + n}{k}z_*\right)^2\right) dt.$$

Hacemos el cambio $\sqrt{k/2|z_*|}(t + (kx/f + n)z_*/k) \rightarrow y$ para obtener de nuevo una integral de Fresnel:

$$b_n(x, z) = K e\left(\frac{kx^2}{2f} + \frac{z_*kx^2}{2f^2} + \frac{z_*n^2}{2k} + \frac{z_*xn}{f}\right) |z_*|^{1/2}.$$

Simplificando, tenemos:

$$b_n(x, z) = K e\left(\frac{kx^2}{2(f-z)} + \frac{1}{2}\lambda n^2 z_* + \frac{zx}{f-z}n\right) |z_*|^{1/2}.$$

Entonces, introduciendo este término en la ecuación de U combinada de las ecuaciones (4.1) y (4.2):

$$U(x, z) = K |z|^{-1} |z_*|^{1/2} e\left(\frac{kx^2}{2(f-z)} - kz\right) F\left(\frac{fx}{f-z}, z_*\right) \quad \text{para cierta } K \text{ constante.}$$

Por tanto, si z_* es un múltiplo entero de $-z_T$:

$$F\left(\frac{fx}{f-z}, z_*\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(n\frac{fx}{f-z} + \frac{1}{2}\lambda n^2 z_*\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(n\frac{f}{f-z}x\right) = D\left(\frac{f}{f-z}x\right).$$

Es decir, se obtiene una versión agrandada por un factor $(f - z)/f$ de la red de difracción. Esto es en cierto modo natural: la sombra de un objeto se agranda cuanto más próxima está la fuente de luz y más lejos la pantalla en la que se proyecta.

APÉNDICE F

Talbot con la ecuación paraxial

Nuestro objetivo es resolver la ecuación paraxial bajo la condición de frontera en $z = 0$ que impone la red de difracción. Es decir,

$$(F.1) \quad \begin{cases} g_{xx} - 4\pi ik g_z + 8\pi^2 k^2 g = 0, \\ g(x, 0) = D(x). \end{cases}$$

Con este fin, utilizamos el método de separación de variables. Esto es, buscamos soluciones de la forma $X(x)Z(z)$ y las superponemos ajustando los coeficientes para que se cumpla $g(x, 0) = D(x)$, siguiendo el modelo en [10, §4.1].

$$X''(x)Z(z) - 4\pi ik X(x)Z'(z) + 8\pi^2 k^2 X(x)Z(z) = 0.$$

Entonces, en los puntos en los que $X(x) \neq 0$ y $Z(z) \neq 0$:

$$(F.2) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 4\pi ik \frac{Z'(z)}{Z(z)} - 8\pi^2 k^2.$$

Como el lado izquierdo solo depende de x y el lado derecho solo depende de z , concluimos que tanto $X''(x)/X(x)$ como $Z'(z)/Z(z)$ deben ser constantes. En particular, podemos deducir que $X(x)$ es una combinación lineal de $e^{\pm x\sqrt{K}}$ para K una constante, y que $Z(z) = Ce^{Lz}$, para C y L constantes.

Tenemos además que la solución debe de ser 1-periódica en x , ya que el problema es invariante para $x \rightarrow x + 1$. Entonces, bajo esta hipótesis adicional:

$$e^{\pm x\sqrt{K}} = e^{\pm(x+1)\sqrt{K}} \implies \sqrt{K} = 2\pi in, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A partir de K hallamos L utilizando (F.2):

$$L = -i \left(\frac{K}{4\pi k} + 2\pi k \right) = 2\pi i \left(\frac{n^2}{2k} - k \right).$$

Ya sabemos la forma que tienen las soluciones que satisfacen la primera condición, por lo que tenemos que ver que combinación lineal de estas satisface también la frontera. Esto es, hallar las a_n en:

$$g(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx) e \left(\left(\frac{n^2}{2k} - k \right) z \right)$$

tales que se satisfaga la condición de frontera. Para ello:

$$g(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx) = D(x) \implies a_n = c_n.$$

Finalmente, obtenemos:

$$g(x, z) = K e(-kz) F(x, z) \quad \text{con} \quad F(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx + \frac{1}{2} \lambda n^2 z\right)$$

para cierta K constante.

APÉNDICE G

Alfombra de Talbot

El siguiente código de MATLAB genera la imagen [G.1](#), que muestra una alfombra de Talbot para $w = 0,1$ y $1/\lambda = 100$. En esta imagen, el eje x es el eje vertical y el eje z es el eje horizontal, y se muestra el efecto en una distancia de Talbot. El código ha sido tomado de [\[6\]](#), salvo una pequeña modificación ya que la F que aparece allí es diferente a la fórmula que hemos obtenido nosotros, y se han modificado también las etiquetas del eje horizontal para mostrarlo en relación a la distancia de Talbot.

```
1 % Classic Talbot
2 % Density plot of sqrt( |F|^2 )
3 %
4
5 linv = 100; % lambda inverse
6 w = 0.1; % width
7 wf = @(x) w*sinc(w*x); % width function
8 pr = 300; % precision
9 tol = -1; % tolerance
10
11 [X,Y] = meshgrid(linspace(0,2*linv , pr) , linspace(-1,1,pr));
12
13 R = 0; % Matrix sqrt( |F|^2 )
14
15 for n = -linv:linv
16     amp = wf(n);
17     R = R + amp * exp(2*pi * 1i * (n*Y + 0.5 * (1/linv) * n^2 * X));
18 end
19
20 R = abs(R);
21
22 if tol>0
23     M = max(max(R))*tol;
24     R = sign(R-M);
25 end
26
27 figure(1)
28 surf(X,Y,R)
29 colormap(jet(256));
30 shading interp;
31 view(0,90)
32 colorbar
33 grid off
34
35 zT = 2 * linv;
36 xticks([0, zT/4, zT/3, zT/2, 3*zT/5, 5*zT/6, zT])
37 xticklabels({'0', 'zT/4', 'zT/3', 'zT/2', '3zT/5', '5zT/6', 'zT'})
38
39 saveas(gcf, 'talbotclassic.png')
```

En la figura [G.1](#) (si no se ve claro, se puede ver también en la imagen de [\[21\]](#)) parece que en general, cuanto mayor es el denominador q , más puntos brillantes hay. Sin embargo, también se observa que esta propiedad falla para $a/q = 1/4$ y $a/q = 1/3$.

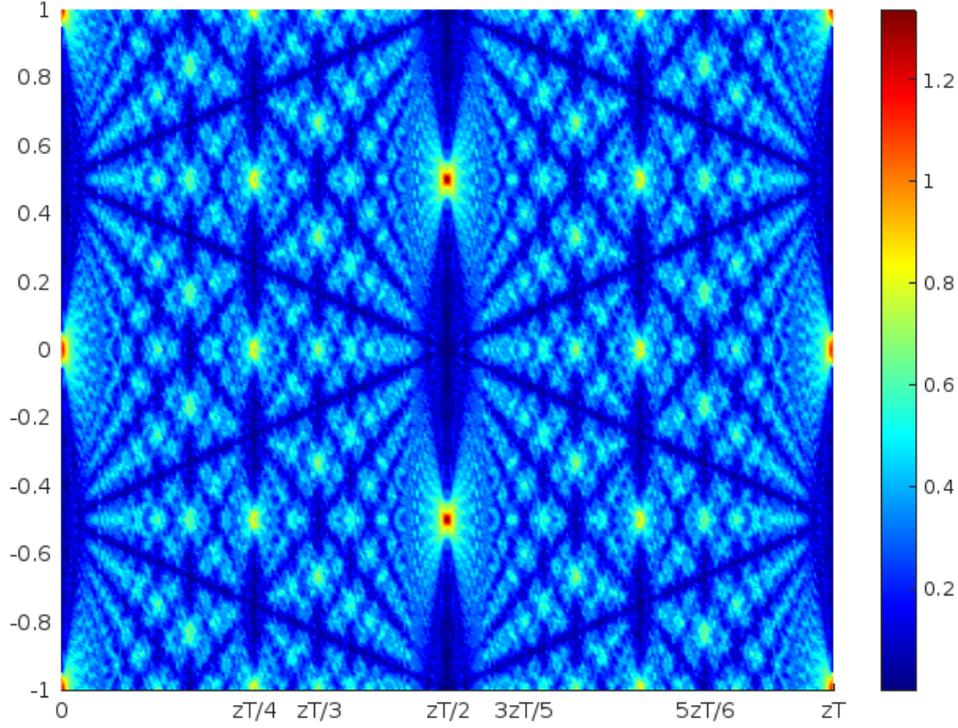


Figura G.1: Alfombra de Talbot. Fuente: MATLAB

Esto se debe a que, como vemos en la fórmula, para valores pares de q , hay puntos que pese a que valgan 1 evaluados en $D(x + m/q)$, si $-2m + q + 2$ es múltiplo de 4 entonces $|F(x, -az_T/q)| = 0$. Por lo tanto, el número de puntos brillantes para un denominador q , $B(q)$, en un intervalo $[-1, 1]$ dependerá en particular de si $2 \mid q$ y de si $4 \mid q$. En concreto, si q es impar, habrá valores de x brillantes para cada valor de $m \in \{-q, \dots, q\}$. Si q es par pero no múltiplo de 4, entonces solo habrá puntos brillantes para los valores de m impares, y si q es múltiplo de 4, entonces habrá puntos brillantes para los valores de m pares, incluyendo $m = \pm q$, entonces:

$$B(q) = \begin{cases} 2q + 1 & \text{si } 2 \nmid q; \\ q & \text{si } 2 \mid q \text{ pero } 4 \nmid q; \\ q + 1 & \text{si } 4 \mid q. \end{cases}$$

APÉNDICE H

Dimensión de ciertos tipos de funciones

Proposición H.1. *Sea F una función acotada $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ y Γ su gráfica asociada. Entonces $1 \leq \underline{\dim}(\Gamma) \leq \dim(\Gamma) \leq \overline{\dim}(\Gamma) \leq 2$.*

Demostración. Reescribimos:

$$\dim(\Gamma) = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \sum_{\ell=0}^{N-1} \Delta_\ell)}{\log N}.$$

Calculamos el límite inferior, es decir:

$$\underline{\dim}(\Gamma) = 1 + \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \sum_{\ell=0}^{N-1} \Delta_\ell)}{\log N}.$$

Es claro que $\log(1 + \sum_{\ell=0}^{N-1} \Delta_\ell) / (\log N) \geq 0$, por lo que $\underline{\dim}(\Gamma) \geq 1$. Vamos ahora con el límite superior, esto es:

$$\overline{\dim}(\Gamma) = 1 + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \sum_{\ell=0}^{N-1} \Delta_\ell)}{\log N}.$$

Acotando el sumatorio, dado que F está acotada, vemos que:

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \sup_{\substack{t \in I_\ell, u \in I \\ |t-u| < N^{-1}}} |F(t) - F(u)| \leq N \sup_{\substack{\ell \in [0, \dots, N-1] \\ t \in I_\ell, u \in I \\ |t-u| < N^{-1}}} (|F(t)| + |F(u)|) \leq KN;$$

donde $K > 0$ es una constante acotada. Por tanto, el límite queda acotado también por:

$$\overline{\dim}(\Gamma) \leq 1 + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + KN)}{\log N} = 2.$$

□

Proposición H.2. *Sea F una función acotada $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable en $[0, 1]$ y Γ su gráfica asociada. Entonces $\dim(\Gamma) = 1$.*

Demostración. Aplicando el teorema del valor medio para cada N :

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \sup_{\substack{t \in I_\ell, u \in I \\ |t-u| < N^{-1}}} |F(t) - F(u)| \leq 2 \sum_{\ell=0}^{N-1} \sup_{\substack{t \in I_\ell, u \in I \\ |t-u| < N^{-1}}} |t-u| \max_{x \in [u,t]} |F'(x)| < 2 \max_{x \in [0,1]} |F'(x)|;$$

donde $\max_{x \in [0,1]} |F'(x)| = L$ es otra constante. Entonces, para el límite, tenemos:

$$\overline{\dim}(\Gamma) \leq 1 + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + 2L)}{\log N} = 1.$$

□

Bibliografía

- [1] M. V. Berry. Quantum and optical arithmetic and fractals. In *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, volume 24 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 281–294. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [2] M. V. Berry. Quantum fractals in boxes. *J. Phys. A*, 29(20):6617–6629, 1996.
- [3] M. V. Berry and S. Klein. Integer, fractional and fractal Talbot effects. *J. Modern Opt.*, 43(10):2139–2164, 1996.
- [4] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, Oxford-New York-Paris, revised edition, 1965. With contributions by A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman and W. L. Wilcock.
- [5] F. Chamizo. Matemáticas de la difracción y su interpretación física. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/diffraction.pdf>, 2013.
- [6] F. Chamizo. Talbot carpets. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/dark/d_talbot.html, 2023.
- [7] F. Chamizo and A. Córdoba. Erratum: “The fractal dimension of a family of Riemann’s graphs” [C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 5, 455–460;]. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(5):649–650, 1995.
- [8] E. T. Copson. *Asymptotic expansions*. Volume 55 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Reprint of the 1965 edition.
- [9] J. M. Cowley and A. F. Moodie. Fourier images. I. The point source. *Proc. Phys. Soc. Sect. B.*, 70:486–496, 1957.
- [10] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [11] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.

-
- [12] A. Komech and A. Merzon. *Stationary diffraction by wedges*. Volume 2249 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2019. Method of automorphic functions on complex characteristics.
- [13] E. Pearse. An introduction to dimension theory and fractal geometry: fractal dimensions and measures. <https://pi.math.cornell.edu/~erin/docs/dimension.pdf>, 2003.
- [14] ProofWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — ProofWiki. Retrieved March 3, 2024, from https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452.
- [15] F. Revilla (2014, March 2). Integrales de Fresnel. Retrieved February 5, 2024, from <https://fernandorevilla.es/2014/03/02/integrales-de-fresnel/>
- [16] A. Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions. *Canad. J. Math.*, 2:66–78, 1950.
- [17] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of T. S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [18] D. Vukotic (2019). Tema 5: El Teorema de Cauchy Retrieved February 2, 2024, from https://verso.mat.uam.es/~dragan.vukotic/grado/var_com_I-19-20/varcomI_2019-20_apuntes5_tma-cauchy.pdf
- [19] Wikimedia Commons. (2003, July 18). Cornu spiral. Retrieved February 5, 2024, from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cornu_spiral.png
- [20] Wikimedia Commons (2021, January 28). Fresnelintegral-4.svg. Retrieved 23:04, February 16, 2024 from <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Fresnelintegral-4.svg&oldid=528831499>
- [21] Wikipedia contributors. (2024, February 10). Talbot effect. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 14:32, January 30, 2024, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Talbot_effect&oldid=1205963917.
- [22] B. Zwiebach. Quantum physics I. MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>, 2016.