



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Matemáticas y física de las resonancias magnéticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Mario Santiago Yepes

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2020-2021

Resumen

Una **imagen por resonancia magnética** (IRM) es una técnica no invasiva que utilizando el fenómeno de la resonancia magnética nuclear (RMN) puede formar una imagen de los tejidos de una sección del cuerpo humano. La IRM es muy útil para detectar y localizar por ejemplo algunos tipos de cáncer. Mediante el uso de IRM, los médicos a veces pueden saber si un tumor es o no cancerígeno, también pueden ayudar a los médicos a planificar el tratamiento ya sea cirugía o radioterapia.

En primer lugar estudiaremos el fenómeno de la *resonancia magnética nuclear*, estudiando el movimiento de precesión, discutiendo en qué condiciones se puede producir y deduciendo las ecuaciones que lo rigen. Posteriormente veremos cómo funciona en general el proceso de creación de las imágenes por resonancia magnética, además de exponer algo de historia sobre los orígenes de esta técnica.

La tercera parte consistirá en entender las leyes clásicas electromagnéticas que explican la interacción de cargas eléctricas con campos magnéticos y ondas electromagnéticas. A continuación "traduciremos" estos resultados de física clásica a la física cuántica para el estudio de los protones, introduciendo el concepto de espín y estudiando su momento angular en un campo magnético.

Estudiaremos después las ecuaciones que describen este momento angular, introduciendo el concepto de tiempo de relajación para así llegar a la *ecuación de Bloch*, de la cual discutiremos sus resultados. Por último introduciremos la técnica de construcción tomográfica mediante la transformada de Radon para formar finalmente las imágenes deseadas.

Abstract

Magnetic resonance imaging (MRI) is a medical non-invasive technique that using the phenomenon of nuclear magnetic resonance (NMR) can form an image of the tissues of a section of the human body. MRI is very useful for detecting and locating, for example, some types of cancer. Through the use of MRI, doctors can sometimes tell whether or not a tumor is cancerous, they can also help doctors plan treatment whether it be surgery or radiotherapy.

In the first place we will study the phenomenon of *nuclear magnetic resonance*, studying the precession movement, discussing under what conditions it can be produced and deducing the equations that govern it. Later we will see how the process of creating magnetic resonance images works in general, in addition we will expose some history about the origins of this technique.

The third part will consist of understanding the classical electromagnetic laws that explain the interaction of electric charges with magnetic fields and electromagnetic waves. We will now "translate" these results from classical physics to quantum physics for the study of protons, introducing the concept of spin and studying its angular momentum in a magnetic field.

We will then study the equations that describe this angular momentum, introducing the concept of relaxation time in order to arrive at the *Bloch equation*, from which we will discuss its results. Finally, we will introduce the tomographic construction technique using the Radon transform to finally form the desired images.

Índice general

1	Oscilaciones armónicas y resonancia.	1
2	Esquema básico de las imágenes por resonancias magnéticas.	7
2.1	Historia del MRI.	9
3	Electrodinámica básica.	11
4	El estado de espín y su medición.	17
4.1	El espín bajo el campo magnético.	18
5	Resonancia y la ecuación de Bloch.	23
6	Tomografía y la transformada de Radon.	29
7	Conclusiones.	33
A	Anexo I: Programa Sage para las soluciones de la ecuación de Bloch	35
B	Anexo II: Ejemplos de soluciones de la ecuación de Bloch	37

CAPÍTULO 1

Oscilaciones armónicas y resonancia.

Para empezar a estudiar osciladores armónicos primero hemos de empezar por un ejemplo simple que todos conocemos, el péndulo. El movimiento que un péndulo de oscilaciones pequeñas realiza sobre un plano se puede expresar mediante la ecuación del *movimiento armónico simple* [1] (para oscilaciones más amplias el movimiento no se puede aproximar de esta forma):

$$(1) \quad x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Donde A es la amplitud del péndulo, ω la frecuencia angular del oscilador y φ el ángulo de fase inicial del péndulo. Esta frecuencia angular se refiere al número de radianes que recorre el péndulo por unidad de tiempo, por lo que a partir de ω podemos obtener el periodo (T) del péndulo, que es el tiempo que tarda en realizar una oscilación, teniendo en cuenta que el movimiento se repite en intervalos de 2π .

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

En el caso del péndulo simple, tratamos con una partícula de masa m que se mueve en un arco de longitud l (la longitud de la cuerda) sobre la cual actúan dos fuerzas: la que se produce por el propio peso de la partícula, $F = mg$ y la que genera la tensión de la cuerda.

Para empezar a calcular la ecuación del movimiento del péndulo aplicamos la Segunda Ley de Newton $-mg \sin(\theta) = ma_t$. Esta a_t o aceleración tangencial, al estar en un movimiento circular se obtendrá como $a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$ donde θ es el desplazamiento angular del péndulo. Esto nos deja:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

Si observamos un péndulo con oscilaciones suficientemente pequeñas ($\sin(\theta) \approx \theta$), entonces la ecuación queda como $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$. Con lo cual ahora tenemos una ecuación diferencial idéntica a la del movimiento armónico simple, cuya solución ya hemos visto

en la ecuación (1), es decir:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{y por tanto} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

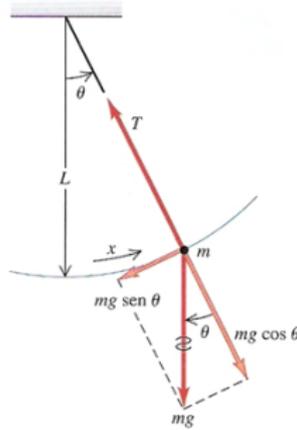


Figura 1.1: Esquema de un péndulo simple

Esta ecuación subestima el periodo exacto del péndulo, sin embargo esto es prácticamente imperceptible para oscilaciones pequeñas. En caso de que queramos saber la amplitud de un péndulo de mayor oscilación, los cálculos son algo más pesados así que vamos a verlo por encima.

En el momento en el cual el péndulo está parado en su posición inicial (en un ángulo θ_0), únicamente posee energía potencial, es decir $E = mgl(1 - \cos\theta_0)$. Una vez soltamos el péndulo este poseerá tanto energía potencial como energía cinética, por lo cual $E = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta}{dt})^2$. Utilizando el principio de conservación de la energía nos queda la ecuación:

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}m(l\frac{d\theta}{dt})^2.$$

Despejando e invirtiendo esta ecuación nos quedamos con la identidad:

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{\frac{1}{(\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

Integramos ahora variando θ entre 0 y θ_0 , es decir, una cuarta parte del periodo del péndulo:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{1}{(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta.$$

Esta identidad nos genera un pequeño problema, ya que en $\theta = \theta_0$ tenemos una singularidad integrable. Para resolver esto podemos expresar la integral como una

integral elíptica [2] (para lo cual hay que hacer ciertos cambios de variables):

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad \text{donde} \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad y \quad \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}.$$

Volviendo al péndulo de oscilaciones pequeñas, vamos a tomar un ejemplo de un objeto colgado de un hilo de 1 metro. En este caso su periodo sería ($g \approx 9,81m/s^2$):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}}.$$

Es decir, que su semiperiodo (tiempo que tarda el péndulo de un extremo a otro) será aproximadamente de 1 segundo, gracias a esto tenemos un péndulo que “cuenta” segundos. Al no depender el periodo de la elongación apenas sufre el efecto del rozamiento (siempre bajo la hipótesis de oscilaciones pequeñas).

La ecuación del oscilador armónico simple amortiguado (con rozamiento) es [9]:

$$x'' + 2ax' + \omega^2 x = F_e \cos(\omega_e t + \varphi_e).$$

La solución general para la ecuación homogénea no tiene demasiada complicación utilizando las técnicas habituales para EDOs

$$x(t) = Ae^{-at} \cos(\tilde{\omega}t) + Be^{-at} \sin(\tilde{\omega}t) \quad \text{con} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - a^2}.$$

Buscar la solución particular es algo más complicado, en primer lugar transformamos la ecuación inicial en una compleja:

$$(2) \quad y'' + 2ay' + \omega^2 y = Fe^{i\omega_e t} \quad \text{donde} \quad F = F_e e^{-i\varphi_e}.$$

Ahora probamos soluciones de la forma $y = Ge^{i\omega_e t}$ y calculamos sus derivadas $y' = Gi\omega_e e^{i\omega_e t}$ $y'' = -G\omega_e^2 e^{i\omega_e t}$. Sustituimos en la ecuación (2) y finalmente tenemos que $G = \frac{F}{-\omega_e^2 + 2ai\omega_e + \omega^2}$. Como este G es también un complejo, podemos expresarlo como $G = Ce^{i\varphi}$. Para regresar ahora a la solución particular real nos quedamos con la parte real de y , es decir $x = C \cos(\omega_e t - \varphi)$ donde:

- $C = |G| = \frac{F_e}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4a^2\omega_e^2}}$.
- φ es el argumento de G . $\varphi = \arctan \frac{-2a\omega_e}{\omega_e^2 - \omega^2}$. Teniendo en cuenta que para un número complejo z , $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$.

Por lo tanto la solución general nos queda:

$$(3) \quad x(t) = Ae^{-at} \cos(\tilde{\omega}t) + Be^{-at} \sin(\tilde{\omega}t) + C \cos(\omega_e t - \varphi).$$

El tercer término de la ecuación (el que contiene C) es la solución estacionaria ya que cuando $t \rightarrow \infty$ los términos que contienen A y B , es decir, los términos

que dependen de las condiciones iniciales se anulan (estos dos términos forman la solución transitoria) y nos quedaremos únicamente con el último término, que es independiente de las condiciones iniciales del oscilador. Este último término es un movimiento armónico de amplitud C y si nos fijamos en el denominador, entonces la amplitud es máxima cuando $\omega = \omega_e$, este fenómeno es el que se conoce como *resonancia*.

A continuación vamos a tratar de resolver esta misma ecuación sin rozamiento ($a = 0$) en el momento en el que se produce el fenómeno de resonancia, es decir, cuando $\omega = \omega_e$. Si observamos la definición de C , en este caso el denominador tendería a 0, lo cual nos daría una onda de amplitud infinita (lo cual es imposible) por lo que buscaremos de nuevo una solución particular de:

$$x'' + \omega^2 x = F_e \cos(\omega_e t + \varphi_e).$$

Esta vez en lugar de hacer el “truco complejo” intentamos soluciones de la forma $y_p = A \cos(\omega_e t + \varphi_e) + B \sin(\omega_e t + \varphi_e)$. Derivando y sustituyendo en la ecuación nos queda que $B = 0$ y $A = \frac{F_e}{\omega^2 - \omega_e^2}$, esto hace que la solución general nos quede:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{F_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t - \varphi).$$

Ahora proponemos las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$, además de tomar $F_e = 2$ y $\varphi = \pi$. De nuevo sustituimos en la ecuación para llegar a: $A = -\frac{2}{\omega^2 - \omega_e^2}$ y $B = 0$. Juntando términos llegamos a la solución:

$$x(t) = \frac{2}{\omega^2 - \omega_e^2} (\cos(\omega_e t - \pi) - \cos(\omega - \pi)).$$

Por supuesto ahora queremos saber qué pasa en resonancia, pero nos encontramos con el problema anterior, es decir, que tenemos una indeterminación $0/0$. Por tanto para resolver la indeterminación vamos a acercarnos a la frecuencia de la fuerza exterior a la frecuencia natural del oscilador (llamaremos x_r a la solución en resonancia y resolvemos el límite por la regla de L'Hopital).

$$x_r(t) = \lim_{\omega_e \rightarrow \omega} \frac{2}{\omega^2 - \omega_e^2} (\cos(\omega_e t - \pi) - \cos(\omega - \pi)) = \frac{t \sin(\omega - \pi)}{\omega}.$$

Tomamos por ejemplo $\omega = \omega_e = 100$ y el resultado final nos queda:

$$x_r(t) = \frac{t}{100} \sin(100t - \pi).$$

Como podemos observar en la Figura 2, $x_r(t)$ es una onda cuya amplitud crece hasta el infinito.

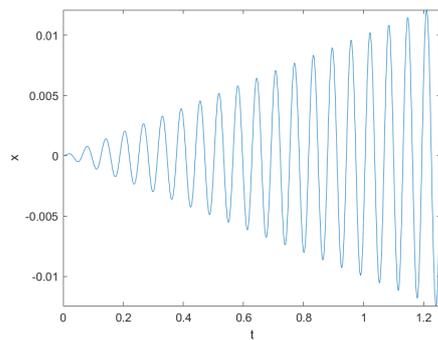
Ahora queremos ver el caso con rozamiento ($a \neq 0$) tomando los valores: $a = 10$, $\omega = \omega_e = 100$, $F_e = 2$, $\tilde{\omega} \approx 99$, $\varphi_e = \varphi = 0$. Sustituimos en la solución general (3):

$$x(t) = Ae^{-10t} \cos(99t) + Be^{-10t} \sin(99t) + C \cos(\omega_e t) \quad \text{donde} \quad C = 5 \cdot 10^{-7}.$$

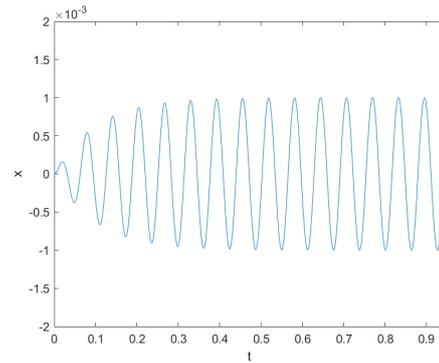
Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ nos queda que $A = -C$ y $B = \frac{10C}{99}$. Finalmente sustituyendo nos queda:

$$x(t) = C(-e^{-10t} \cos(99t) + \frac{10}{99}e^{-10t} \sin(99t) + \cos(\omega_e t)).$$

Esta solución se trata de una onda cuya amplitud crece, al igual que el caso anterior, pero se estabiliza (se acota) a partir de cierto punto.



(a) Resonancia sin rozamiento.



(b) Resonancia con rozamiento.

Figura 1.2: Oscilador en resonancia.

CAPÍTULO 2

Esquema básico de las imágenes por resonancias magnéticas.

En este capítulo veremos cómo funcionan las *imágenes por resonancia magnética* (IRM o MRI), además de explicar qué componentes poseen las máquinas que se encargan de realizar estas imágenes. Las MRI son imágenes que, utilizando el fenómeno de la resonancia magnética nuclear (RMN ó NMR), nos muestran la anatomía o la composición de una parte del cuerpo humano.

La RMN es un fenómeno físico que se basa en las propiedades magnéticas de los núcleos atómicos, en este caso de los átomos de hidrógeno. Nuestro cuerpo está compuesto aproximadamente por un 70 % de agua (H_2O), por lo que realizar un “mapa” de los átomos de hidrógeno de nuestro cuerpo nos daría prácticamente toda la información sobre nuestro interior.

Una propiedad que poseen las partículas subatómicas es el espín, que describe el momento angular intrínseco con el que “rotan” las partículas sobre un eje. La propiedad del espín además provoca que la partícula posea un momento magnético, es decir, que esta se comporta como un diminuto imán. Cuando sometemos un protón a un campo magnético podríamos pensar que el vector del momento magnético de este debería alinearse con el campo magnético inducido, sin embargo, el protón realiza un movimiento de precesión (similar al movimiento de una peonza) alrededor del eje del campo magnético, tanto en el sentido del vector del campo como en el contrario a este. La frecuencia con la que gira el protón se rige por la **ecuación de Larmor**:

$$\omega = \gamma B$$

Dónde γ es una proporción giromagnética (constante) que depende del tipo de núcleo o partícula y B es la intensidad del campo magnético al que está sometido la partícula. Esto es importante ya que podemos controlar la frecuencia de resonancia del protón si controlamos el campo magnético inducido.

Como hemos visto anteriormente, el protón se comporta como un imán que realiza un movimiento de precesión, esto genera una variación del flujo magnético que dependerá de la frecuencia de giro del protón. Si ponemos alrededor de este un conductor, la

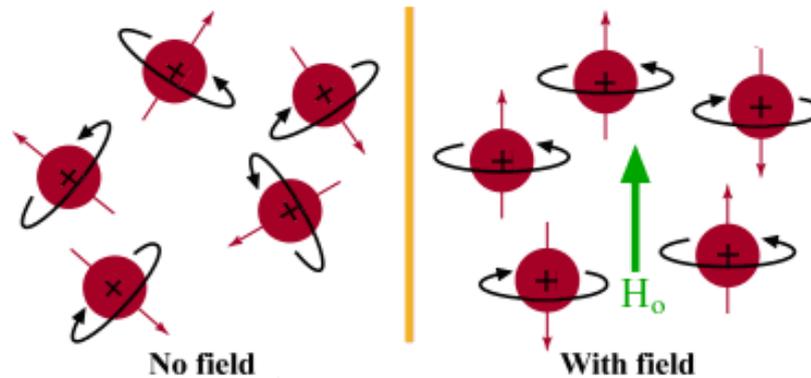


Figura 2.1: Comportamiento de núcleos de hidrógeno sobre un campo magnético.

variación del flujo producirá una corriente eléctrica que será la señal de detectaremos en la máquina de MRI.

Conociendo esto, vamos a describir las fases del experimento del MRI:

- En primer lugar, se somete al cuerpo a un campo magnético constante \vec{B}_0 , que según la máquina puede ser entre 1.5T ó 3T. Esto provoca que los protones del hidrógeno se alineen con el campo magnético (tanto en el sentido del vector director del campo como en el sentido contrario) mientras realizan el movimiento de precesión.
- A continuación se crea un gradiente magnético \vec{B}_1 tanto a lo largo del cuerpo (que será el eje Z) como perpendicular a este a este (que serán los ejes X e Y). Ya que la frecuencia a la que giran los protones es proporcional al campo magnético inducido sobre ellos, esto nos servirá para diferenciar tanto la frecuencia como la fase de la sección del cuerpo de queremos analizar.
- Ahora se lanza un pulso magnético, en este caso un pulso de radiofrecuencia (RF), esto provoca que los núcleos de la sección que hemos elegido mediante los gradientes absorban energía, cambiando la dirección de su momento magnético y haciendo además que precesen en resonancia, lo cual es importante ya que en caso contrario la señal emitida sería tan pequeña que no podríamos detectarla. Una vez termina el pulso, los núcleos regresan a su estado anterior expulsando energía, empleando tiempo en desfasarse (al cual llamaremos relajación T2) y en realinearse con el campo magnético principal (al cual llamaremos relajación T1). Esta energía emitida será la señal que finalmente detectaremos (a la que llamaremos eco) para su posterior estudio [15].

Una vez realizado este proceso, habremos obtenido una secuencia de ecos cuya intensidad es dependiente de la frecuencia de los núcleos que participasen en esta señal gracias al conjunto de gradientes magnéticos. Por tanto para pasar de un dominio de frecuencias a un dominio espacial, ya que lo que queremos finalmente es una imagen espacial, utilizaremos una transformada inversa de Fourier para construirla.

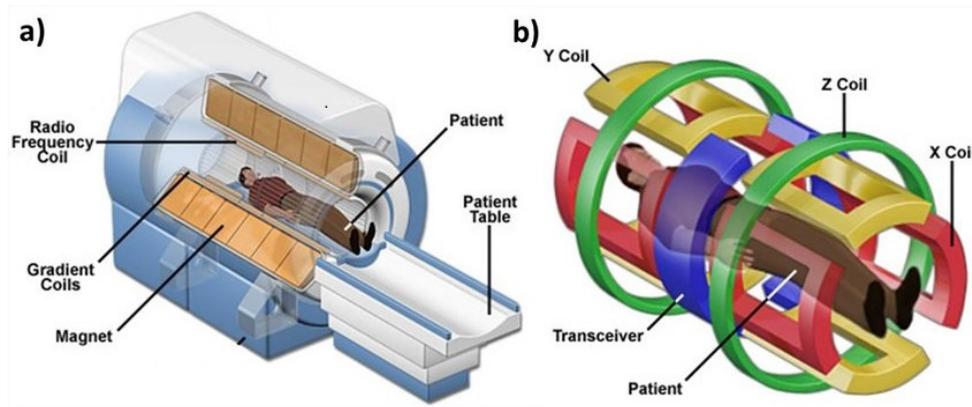


Figura 2.2: Partes de una máquina de MRI.

2.1. Historia del MRI.

La historia del MRI comienza con el físico estadounidense Isaac Rabi, al que se le atribuye el descubrimiento del NMR además de ser reconocido con el Premio Nobel de Física en 1944 gracias a este hallazgo.

Rabi junto con su equipo trataron de investigar las propiedades magnéticas de varios núcleos atómicos como el hidrógeno, el deuterio o el litio. El método que utilizó Rabi consistía en mantener un campo de radiofrecuencia constante y un campo magnético variable sobre moléculas de cloruro de litio (LiCl), gracias a esto observaron que los núcleos de litio y de cloro absorbían energía al variar el campo magnético, a este fenómeno le llamaron Resonancia Magnética Nuclear (NMR). Posteriormente el físico suizo Felix Bloch y el estadounidense Edward Mills Purcell ampliaron y perfeccionaron el experimento de Rabi observando el NMR en diferentes materiales, lo cual les valió también para recibir el Premio Nobel de Física en 1952.

Sin embargo no fue hasta la década de 1970 cuando se utilizaron los estudios previos sobre el NMR para crear imágenes del cuerpo humano. En marzo de 1973, el químico estadounidense Paul C. Lauterbur publicó en la revista *Nature* la primera imagen por resonancia magnética. El experimento consistió en fotografiar dos tubos, uno lleno de agua normal y otro lleno de agua pesada (D_2O) dentro de un campo magnético de 1.4T, a continuación aplicó un gradiente que giraba 45° hasta obtener 4 proyecciones unidimensionales, que mediante reconstrucción tomográfica convirtió en imágenes en 2 dimensiones.

A la par con Lauterbur, en 1973 el físico británico Peter Mansfield descubrió cómo se podía detectar el origen de las señales de respuesta del NMR [14]. Para ello colocó varias capas muy delgadas de alcanfor sobre un campo magnético principal posteriormente aplicó un gradiente magnético lineal perpendicular a este. Después, aplicando un pulso de radiofrecuencia, obtuvo la señal producida por el NMR, en esta observó ciertos picos que correspondían a la respuesta de las láminas de alcanfor. En 1977 Mansfield y su equipo perfeccionaron este método para obtener por primera vez una imagen de un órgano humano, en este caso un dedo. Tanto Lauterbur como Mansfield

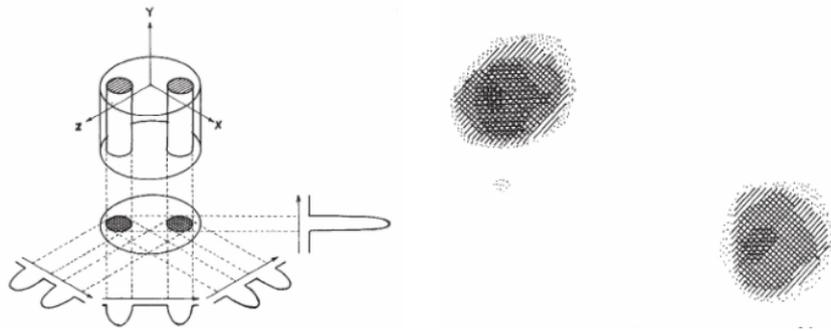


Figura 2.3: Experimento de Lautembur e imagen de dos tubos de agua.

fueron reconocidos con el Premio Nobel de Medicina en 2003 por sus descubrimientos [17].



Figura 2.4: Fotografía de un dedo humano realizad por Mansfield y su equipo utilizando un campo magnético de 0.23T durante 23 minutos.

Cabe destacar también al médico estadounidense Raymond Damadian, que en 1971 publicó en la revista Science [11] pruebas sobre las diferencias en los tiempos de relajación T1 y T2 de las células cancerígenas sobre el resto de células, gracias a lo cual podría llegar a diferenciarlas. En 1977 además patentó la primera máquina MRI de las historia con el objetivo de diagnosticar el cáncer en sus pacientes, que posteriormente comercializó. Sin embargo finalmente el método que utilizaba esta máquina quedó descartado ya que requería mover al paciente escaneando punto por punto la zona a investigar, llegando a tomar 5 horas en construir una imagen.

CAPÍTULO 3

Electrodinámica básica.

El objetivo es entender dos cosas que resultan cruciales para que sean posibles las imágenes por resonancia magnética: la existencia de las ondas electromagnéticas y la precesión de las partículas con momento magnético sometidas a un campo magnético constante [12]. A partir de esto podremos deducir de qué manera se produce la precesión de los protones.

Las ondas electromagnéticas son la combinación de ondas en campos eléctricos y magnéticos producidas por la acción de cargas en movimiento. Una de las formas en las que se crean las ondas electromagnéticas se inicia con una partícula cargada, esta partícula crea un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre otras partículas. Al acelerarse la partícula, oscila en su campo eléctrico, lo que produce un campo magnético. Una vez en movimiento, los campos eléctricos y magnéticos creados por la partícula cargada se auto perpetúan, esto significa, que un campo eléctrico que oscila en función del tiempo producirá un campo magnético y viceversa.

La forma en la que una carga interactúa con un campo electromagnético está descrita mediante la combinación de las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz. Explicar estas leyes será el objetivo principal de esta sección.

Las ecuaciones de Maxwell [8] son un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales que regulan los fenómenos electromagnéticos para la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y la inducción magnética \vec{B} . Estas fueron publicadas por el propio Maxwell en 1873, consiguiendo expresar de forma matemática los resultados de numerosos experimentos que realizaron Coulomb, Gauss, Faraday y Ampère entre otros. Con las unidades llamadas gaussianas, en el espacio libre, sin cargas ni corrientes, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

dónde c es la velocidad de la luz y los operadores $\vec{\nabla} \cdot$ y $\vec{\nabla} \times$ son la divergencia y el rotacional del campo respectivamente. Podemos ver cómo las dos primeras ecuaciones, utilizando el teorema de la divergencia expresan $\int_S \vec{E} = 0$ y $\int_S \vec{B} = 0$ donde S es una superficie cerrada, frontera de una región sólida. Entonces la primera ecuación dice que las líneas de campo eléctricas se compensan (las que entran por un lado de la superficie salen por otro) y la segunda lo mismo para las líneas de campo magnéticas.

Vamos a comenzar estudiando estas ecuaciones para campos eléctricos y magnéticos unidimensionales de la forma $\vec{E} = (0, E(x, t), 0)$ y $\vec{B} = (0, 0, B(x, t))$. Las dos primeras ecuaciones se cumplen idénticamente:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E(x, t)}{\partial y} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B(x, t)}{\partial z} = 0.$$

Ahora desarrollamos las dos ecuaciones siguientes y sustituimos (cabe recordar que el resultado del rotacional es un vector):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \left(\frac{\partial E(x, t)}{\partial z}, 0, \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \right) = \left(0, 0, -\frac{1}{c} \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \vec{B} &= \left(\frac{\partial B(x, t)}{\partial y}, -\frac{\partial B(x, t)}{\partial x}, 0 \right) = \left(0, \frac{1}{c} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}, 0 \right) \end{aligned}$$

Comparamos por ultimo el tercer y segundo término respectivamente de las ecuaciones anteriores, tras lo cual podemos deducir que las cuatro ecuaciones de Maxwell se pueden reducir a:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}.$$

Ambas definen las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos unidimensionales. Podemos comprobar además que estas ecuaciones satisfacen las ecuaciones de ondas electromagnéticas $\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}(x, t)}{\partial t^2} = 0$ (donde \vec{F} puede ser tanto campo magnético como eléctrico).

Un campo eléctrico es un campo de fuerza creado por la atracción y repulsión de cargas eléctricas, de tal modo que cada una de estas cargas ejerce una fuerza sobre el resto descrita por la Ley de Coulomb. Una carga estática y puntual, o lo que es lo mismo un monopolo eléctrico, genera un campo eléctrico (al usar unidades gaussianas para simplificar no aparece la constante K de Coulomb)

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad \text{con} \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad y \quad r = \|\vec{r}\|.$$

Sin embargo en nuestro caso nos interesan los dipolos eléctricos, que son formados por dos cargas opuestas a distancia pequeña (que tiende a 0). Podríamos pensar que las cargas se atraerían con una fuerza muy grande, pero suponemos que se mantienen a una distancia h muy pequeña (en la realidad sí existen estructuras que se comportan como dipolos, como por ejemplo las moléculas de agua), es decir, que tenemos dos cargas a distancia h , una en \vec{r} y otra en $\vec{r} - (h, 0, 0)$. Suponemos que el valor de cada carga es qh^{-1} (una positiva y otra negativa), entonces en el límite cuando $h \rightarrow 0$, el campo generado será $-\frac{\partial E}{\partial x}$ (por la definición de derivada). Esto se puede generalizar al caso en que las dos cargas estén a distancia $h \rightarrow 0$ en la dirección del vector \vec{p} con cargas $\|\vec{p}\|h^{-1}$, entonces lo que obtendremos es que el campo será menos la derivada direccional en la dirección \vec{p} , lo que da lugar al campo eléctrico de un dipolo eléctrico:

$$\vec{E} = 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \quad \text{con} \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad y \quad r = \|\vec{r}\|.$$

Al vector \vec{p} se le conoce como momento dipolar.

Esta explicación se puede utilizar de manera análoga para campos magnéticos (teniendo en cuenta que en la naturaleza no existen monopolos magnéticos), por lo tanto el campo magnético generado por un dipolo magnético será

$$\vec{B} = 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{m}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

donde \vec{m} es el momento dipolar magnético.

Vistos estos dos conceptos, la pregunta que nos hacemos ahora es cómo actúan dos conductores con cargas en movimiento (ya que los imanes no afectan a las cargas estacionarias).

Los experimentos de Ampère indicaban una atracción entre conductores paralelos con corrientes en el mismo sentido, entonces es lógico pensar que el campo eléctrico generado por uno de los conductores atrae a cada carga del otro con una fuerza perpendicular a su velocidad. También podríamos esperar que esta fuerza sea proporcional a la carga y su velocidad, por la definición de corriente. Es decir, que al igual que en un campo eléctrico $\vec{F} = q\vec{E}$, en un campo magnético $\vec{F} = q(\frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{B}$. Estas deducciones nos llevan a que la fuerza que recibe una carga en un campo electromagnético será

$$(1) \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}).$$

donde \vec{v} es el vector velocidad (se divide por c para que sea adimensional). Esta fuerza es la que se conoce como la **Fuerza de Lorentz**.

Vamos a estudiar el caso de la fuerza de Lorentz en un conductor circular dado por la parametrización $x^2 + y^2 = r^2$ con $z = 0$, con una carga q distribuida a lo largo del conductor que se mueve con una velocidad \vec{v} constante sometido a un campo magnético \vec{B} . Utilizando la ecuación (1) tenemos que la fuerza de Lorentz en cada tramo $d\vec{r}$ es:

$$(2) \quad d\vec{F} = dq \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = \frac{qv}{2\pi rc} d\vec{r} \times \vec{B}$$

teniendo en cuenta para la segunda igualdad que dq es la carga en una porción $d\vec{r}$ del conductor y que suponiendo que está distribuida uniformemente $dq = q|d\vec{r}|/(2\pi r)$.

Si recordamos los conceptos de densidad de corriente lineal ($\lambda = \frac{q}{r}$ donde r es la longitud del conductor) y de intensidad de corriente ($I = \int_S \lambda v dS$), entonces también podremos expresar (2) de la forma:

$$d\vec{F} = \frac{I d\vec{r}}{c} \times \vec{B}.$$

Si el conductor contiene una sola partícula cargada, cuando v es grande o r es pequeño podemos considerar la fórmula anterior válida ya que nos parecerá un continuo (de hecho en los conductores reales solo hay un número finito de cargas). Entonces el modelo es ahora con una sola partícula que se mueve gobernada por una ecuación de movimiento

$$\vec{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0) \quad \text{dónde } t \text{ es el tiempo.}$$

cuya velocidad es (basta derivar la ecuación de movimiento)

$$\vec{v}(t) = (-wr \sin(wt), wr \cos(wt), 0).$$

Ahora introducimos el concepto de momento angular mecánico, que es la cantidad de movimiento de rotación de un objeto (como es de esperar va a ser importante para definir la precesión de los protones) y se define como $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ donde m es la masa del objeto. Vamos a demostrar una relación que nos va a ser útil:

$$(3) \quad \int_C \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \times \vec{B}.$$

En el lado izquierdo, dentro de la integral tenemos $\vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times \left(\frac{qv}{2\pi rc} d\vec{r} \times \vec{B} \right)$ (recordemos que el producto vectorial no es asociativo). Tomamos $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ y $G = \frac{qv}{2\pi rc}$ que podemos sacar fuera. Siendo $d\vec{r} = (-rw \sin(wt), rw \cos(wt), 0)dt$ resolvemos los productos vectoriales:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= d\vec{r} \times \vec{B} = (B_z rw \cos(wt), -B_z rw \sin(wt), -B_y rw \sin(wt) - B_x rw \cos(wt))dt. \\ \vec{V} &= \vec{r} \times \vec{U} = (-B_y r^2 w \sin^2(wt) - B_x r^2 w \sin(wt) \cos(wt), -B_y r^2 w \sin(wt) \cos(wt) - \\ &\quad - B_x r^2 w \cos^2(wt), -2B_z r^2 w \sin(wt) \cos(wt))dt. \end{aligned}$$

Por último hacemos la integral de cada uno de las componentes de \vec{V} en un periodo de tiempo (sin olvidarnos de la G).

$$(4) \quad G \int_0^T \vec{V} dt = \frac{q}{2c} (-B_y r^2 w, -B_x r^2 w, 0).$$

Ahora en el lado derecho resolvemos de igual manera los productos vectoriales con $H = \frac{q}{2mc}$:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(0, 0, r^2 w).$$

Y por tanto

$$(5) \quad H\vec{L} \times \vec{B} = \frac{q}{2c} (-B_y r^2 w, -B_x r^2 w, 0).$$

Vemos que (4) y (5) coincide, por lo que queda demostrada la relación (3).

Esta relación nos va a servir para simplificar la ecuación que estamos buscando, que es el momento angular en cada "trozo" del conductor. Para ello nos vamos a salir un momento del contexto electromagnético y pararnos en mecánica clásica, en concreto en la segunda ley de Newton $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$. La derivada del momento angular con respecto al tiempo sería

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Volviendo a nuestro caso, la fuerza es la suma de las fuerzas sobre todos los trozos de conductor por lo que $\vec{r} \times \vec{F}$ se ve sustituido por $\int \vec{r} \times \vec{F}$. Utilizando la relación (3) llegamos a la ecuación

$$(6) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} \quad \text{dónde} \quad \gamma = \frac{q}{2mc}.$$

Esta es la ecuación que describe el *movimiento de precesión* de los protones bajo un campo magnético. Entender esta ecuación es crucial para entender la base física, en términos clásicos, de las MRI, por ello vamos ahora a analizar sus soluciones.

Resolver esta ecuación directamente con las técnicas habituales puede ser bastante complicado, por lo que en su lugar vamos a buscar otro método.

En primer lugar, una de las características que podemos extraer de la ecuación (6) es que \vec{L} y $\frac{d\vec{L}}{dt}$ son perpendiculares por las propiedades del producto vectorial. Esto implica que su producto escalar es:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} \cdot \vec{L} = 2\vec{L}' \cdot \vec{L} = 0.$$

y por tanto podemos asumir que $L'(t) = 0$ dónde $L(t) = \|\vec{L}(t)\|$, es decir, que la norma de $\vec{L}(t)$ no depende de t .

Gracias a esto podemos concluir que las soluciones \vec{L} están definidas dentro de una esfera de radio L y por tanto se pueden parametrizar de la siguiente manera:

$$\vec{L}(t) = (L \cos \varphi(t) \sin \alpha(t), L \sin \varphi(t) \cos \alpha(t), L \cos \alpha(t)).$$

Vamos ahora a observar las condiciones iniciales de la ecuación. Fijamos los ejes tal que $\vec{B} = (0, 0, B)$, que será el eje sobre el cual precese $L(t)$, y fijamos también $L(0)$ que partirá del plano $Y = 0$ formando un ángulo α con \vec{B} , es decir, que $L(0) = (L \cos \alpha, 0, L \sin \alpha)$. Comparamos ahora con la expresión de $\vec{L}(t)$ anterior con $t = 0$ y concluimos que las condiciones iniciales serán $\alpha(0) = \alpha$ y $\varphi(0) = 0$. Esto nos deja las soluciones como

$$\vec{L}(t) = (L \cos \varphi(t) \sin \alpha(t), L \sin \varphi(t) \cos \alpha(t), L \cos \alpha(t)) \quad \text{con} \quad \alpha(0) = \alpha \quad \text{y} \quad \varphi(0) = 0.$$

Por último podemos ahora introducir esta expresión en (6) para hallar $\alpha(t)$ y $\varphi(t)$. Desarrollando la derivada y el producto vectorial obtenemos en la tercera coordenada que $\alpha'(t) = 0$ y aplicando las condiciones iniciales llegamos a que $\alpha(t) = \alpha$

Por otro lado, desarrollando la ecuación en cualquiera de las otras coordenadas llegamos a $\varphi'(t) = -\gamma B$. De nuevo aplicado las condiciones iniciales llegamos a que $\varphi(t) = -\gamma B t = -2\pi \nu t$ dónde ν es la **frecuencia de Larmor**:

$$(7) \quad \nu = \frac{\gamma B}{2\pi}.$$

Es decir, se produce la precesión de Larmor que consiste en que \vec{L} gira alrededor del eje marcado por \vec{B} con la frecuencia de Larmor, la cual no depende del ángulo inicial

α y es universal para todos los imanes pequeños. Cabe destacar también que, como he comentado anteriormente, hemos utilizado unidades gaussianas para simplificar las ecuaciones, la fórmula (7) se cumple en ambos sistemas de unidades mientras que (6) se cumple con unidades gaussianas[16] y para que funcione con las del Sistema Internacional solo hay que quitar la c del denominador de γ .

Si una partícula elemental cargada como un electrón o un protón se comporta como un imán podemos pensar que esta tiene corrientes dentro, aunque si realmente creemos que es elemental parece más sensato creer que no hay nada dentro y lo que pasa es que gira sobre sí misma y este giro es el que causa el campo magnético. Este es el origen del término spin (en español traducido a veces como espín), por la palabra inglesa para indicar giros rápidos. Desde tiempos muy tempranos en el siglo XX se vio que para electrones (6) funcionaba como si la fórmula para γ fuera $q/(mc)$, es decir, como si la fuerza del imán del electrón fuera el doble de lo que correspondería a lo que giraba. Para otras partículas subatómicas o conjuntos de ellas también parecía que el γ estaba afectado por una constante inexplicable que actualmente se escribe

$$\gamma = \frac{qg}{2mc} \quad \text{dónde } g \text{ es conocido como } g\text{-factor.}$$

En nuestro caso, el de los protones, se sabe experimentalmente que $g \approx 5,5856$.

Por ejemplo, vamos a tomar un campo magnético de 1,5T (las máquinas de resonancia magnética para uso clínico utilizan por lo general campos magnéticos constantes entre 1,5T y 3T, a más intensidad, mayor definición pero también mayor tamaño, ruido o interacción con otros objetos metálicos), sabemos también que la masa de un protón es $m \approx 1,673 \times 10^{-27}$ y que su carga es $q \approx 1,602 \times 10^{-19}$, por tanto $\gamma \approx 2,675 \times 10^8$ y $\nu \approx 6,386 \times 10^7 \text{ Hz} = 63,86 \text{ MHz}$. En comparación, las radios en FM emiten entre 87,5MHz y 108MHz, mientras que los teléfonos móviles trabajan en diferentes rangos de frecuencias, más o menos comparables a 1GHz

CAPÍTULO 4

El estado de espín y su medición.

El **espín** es un momento angular intrínseco que poseen tanto los electrones como otras partículas. En física clásica el espín corresponde a un momento angular intrínseco, es decir, un giro sobre sí mismo, y como el electrón tiene carga, lo convierte en un pequeño imán como ya habíamos descrito ya anteriormente.

El origen del concepto de espín se remonta experimentalmente a 1922, con el famoso experimento de Stern y Gerlach. El experimento consistía en lanzar un haz muy fino de átomos de plata a través de un campo magnético no homogéneo, en el que las líneas de fuerza estaban más concentradas en uno de los polos. En un primer momento cabría esperar que las partículas serían desviadas de forma aleatoria, sin embargo el resultado fue que los átomos, después de atravesar el campo se desviaban a dos posiciones bien determinadas, “arriba” y “abajo”. En 1925, Samuel A. Goudsmit y George E. Uhlenbeck postularon que el electrón tenía un momento angular intrínseco, independiente de sus características orbitales. En términos clásicos, una esfera de carga podría tener un momento magnético si estuviera girando de tal manera, que la carga en los bordes produjera un bucle de corriente efectiva. Este tipo de razonamientos llevaron a la utilización del “espín” para describir el momento angular intrínseco [7].

El *estado del espín* se representa mediante una combinación lineal compleja no nula de dos posibles estados conocidos como espín arriba (*spin up*) y espín abajo (*spin down*), indicados en física con $|+\rangle$ y $|-\rangle$ o con $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$. Matemáticamente estos estados se representan como los vectores de la base canónica de \mathbb{C}^2 :

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Las combinaciones lineales que difieren en multiplicar por una constante no nula representan el mismo estado de espín y por tanto podemos normalizarlos siempre para que sean vectores unitarios de \mathbb{C}^2 . Dado un vector $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ con ángulos θ y φ (correspondientes a las coordenadas esféricas del vector), se le asocia el estado de espín [18]:

$$(1) \quad |\vec{n}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\rangle.$$

El momento angular indica clásicamente un giro por un eje \vec{n} y $|\vec{n}\rangle$ es su representación cuántica. Por ejemplo $|+\rangle$ representa un giro en sentido positivo sobre el eje Z mientras que $|-\rangle$ representa un giro en el sentido contrario.

La notación más común para representar un estado normalizado es $|\Psi\rangle$ ya que es el nombre usual para las funciones de onda que representan los estados cuánticos. Ya que $|\Psi\rangle$ es un vector en \mathbb{C}^2 , representaremos el producto escalar de dos estados $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_2\rangle$ con la notación $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle$, por ejemplo:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{2+i}{3}|+\rangle + \frac{2}{3}|-\rangle \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1+i}{2}|+\rangle + \frac{1-i}{2}|-\rangle, \quad \text{entonces} \quad \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \frac{5-i}{2}$$

En física cuántica, las mediciones del estado del espín únicamente pueden dar dos resultados de forma probabilística a diferencia del momento angular clásico, que puede tomar cualquier valor. Más concretamente, si medimos un estado de espín normalizado $|\Psi\rangle$ en la dirección del vector \vec{n} obtendremos $|\vec{n}\rangle$ con probabilidad $p = |\langle\vec{n}|\Psi\rangle|^2$ y $|-\vec{n}\rangle$ con probabilidad $1-p$.

Por ejemplo vamos a tomar dos vectores (en coordenadas esféricas) unitarios muy próximos $\vec{n}_1 = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ y $\vec{n}_2 = (\sin(\theta) \cos(\varphi + \epsilon), \sin(\theta) \sin(\varphi + \epsilon), \cos(\theta))$ dónde $\epsilon \rightarrow 0$ es el ángulo que forman. La probabilidad de que al medir $|\vec{n}_1\rangle$ en la dirección de \vec{n}_2 obtengamos $|\vec{n}_2\rangle$ es :

$$p = |\langle\vec{n}_1|\vec{n}_2\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\varphi} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{-i(\varphi+\epsilon)} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-i\epsilon} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2$$

que tiende a 1 cuando ϵ tiende a 0.

Es decir, que es casi seguro obtener $|\vec{n}_1\rangle$ y extremadamente improbable obtener $|-\vec{n}_1\rangle$. Como observación extra, podemos obtener una relación entre esta probabilidad y el ángulo entre los vectores. Para dos vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 separados por un ángulo α y dentro del plano YZ (es decir, $\varphi = 0$), la probabilidad de que al medir $|\vec{n}_1\rangle$ en la dirección de \vec{n}_2 lleguemos a $|\vec{n}_2\rangle$ es :

$$p = \left| \cos\frac{\theta}{2} \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \right|^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Esta fórmula en términos del ángulo es válida en general, no solo en el plano YZ, pero es más difícil de probar.

4.1. El espín bajo el campo magnético.

La evolución de los sistemas cuánticos viene dada por la **ecuación de Schrödinger** [6]. En el caso de estados de espín sometidos a un campo magnético dado por $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ la ecuación queda de la forma:

$$(2) \quad i \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} |\Psi\rangle$$

dónde $\vec{\sigma}$ es el vector $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ formado por las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las *matrices de Pauli* permiten invertir la correspondencia entre vectores unitarios de \mathbb{R}^3 y estados de espín de la siguiente manera, la cual vamos a demostrar:

$$(3) \quad \vec{n} = (\langle \vec{n} | \Psi_1 \rangle, \langle \vec{n} | \Psi_2 \rangle, \langle \vec{n} | \Psi_3 \rangle) \quad \text{donde} \quad \Psi_j = \sigma_j | \vec{n} \rangle.$$

Tomamos $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ cuyo estado de espín es $| \vec{n} \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\varphi} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$.

Calculamos primero las componentes ψ_j :

$$\Psi_1 = \left(e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); \quad \Psi_2 = \left(-ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right);$$

$$\Psi_3 = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

Por último, utilizando la fórmula de Euler calculamos las componentes del vector:

$$\langle \vec{n} | \Psi_1 \rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi) = \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\langle \vec{n} | \Psi_2 \rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) i (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\varphi) = \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\langle \vec{n} | \Psi_3 \rangle = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos \theta.$$

Podemos observar que los valores coinciden con las coordenadas del vector \vec{n} .

Ahora vamos al objetivo de este capítulo, que es ver en qué sentido hay precesión cuando se usan las ecuaciones cuánticas. Consideremos, como en la hoja anterior, el caso $\vec{B} = (0, 0, B)$ con un \vec{n}_0 inicial que forma un ángulo α con el eje Z y ángulo azimutal (el φ de las esféricas) nulo. Vamos a resolver la ecuación de Schrödinger (2) imponiendo como condición inicial $|\Psi\rangle_{t=0} = | \vec{n}_0 \rangle = |(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)\rangle$. Teniendo en cuenta que la solución $|\Psi\rangle$ es un vector de \mathbb{C}^2 resolvemos el sistema:

$$i \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{2} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}; \quad i \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Esto nos deja el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = iax \\ y'(t) = -iay \end{cases}$$

Dónde $a = \frac{\gamma B}{2}$ y cuya solución es (teniendo ya en cuenta las condiciones iniciales):

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} e^{iat} \\ \sin \frac{\alpha}{2} e^{-iat} \end{pmatrix}.$$

El vector unitario que gira con frecuencia ν en sentido antihorario alrededor del eje Z formando un ángulo α con él es:

$$\vec{n}(t) = (\cos(2\pi\nu t) \sin \alpha, -\sin(2\pi\nu t) \sin \alpha, \cos \alpha).$$

Sea $|\Psi\rangle$ la solución de la ecuación de Schrödinger que hemos calculado anteriormente y sea $\nu = \frac{\gamma B}{2\pi}$ la frecuencia de Larmor que calculamos en el capítulo anterior, vamos a calcular la probabilidad de que al medir $|\Psi\rangle$ en la dirección $\vec{n}(t)$ obtengamos $|\vec{n}(t)\rangle$ de la siguiente manera:

$$|\vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ e^{-2\pi i \nu t} \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}; \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} e^{iat} \\ \sin \frac{\alpha}{2} e^{-iat} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $a = \frac{\gamma B}{\hbar} = \pi\nu$ obtenemos:

$$p = |\langle \vec{n} | \Psi \rangle|^2 = |\cos^2(\frac{\alpha}{2})e^{iat} + \sin^2(\frac{\alpha}{2})e^{-iat}|^2 = |e^{iat}|^2 = 1.$$

Este resultado muestra finalmente que el estado de espín sufre una precesión con frecuencia igual a la frecuencia de Larmor del caso clásico.

Todas estas demostraciones han sido probadas considerando el caso $\vec{B} = (0, 0, B)$, esto vale para cualquier otro caso siempre y cuando las soluciones de la ecuación de Schrödinger (2) sean invariantes por giros. En el capítulo anterior, mientras tratábamos el caso clásico también utilizábamos esta simplificación, la cual es correcta y para comprobarlo vamos a demostrar que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} \quad \text{equivale a} \quad \frac{dG\vec{L}}{dt} = \gamma G\vec{L} \times G\vec{B}$$

donde G es la matriz de un giro, es decir, una matriz ortogonal de determinante 1. Para simplificar los cálculos, basta justificar que para dos vectores \vec{u} y \vec{v} :

$$G(\vec{u} \times \vec{v}) = G\vec{u} \times G\vec{v}.$$

Utilizando la propiedad $\vec{u}^t(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ (conocido como “producto mixto”), para cada componente j del vector $G(\vec{u} \times \vec{v})$ tenemos:

$$\begin{aligned} (G(\vec{u} \times \vec{v}))_j &= \vec{e}_j \cdot G(\vec{u} \times \vec{v}) = e_j^t G(\vec{u} \times \vec{v}) = (G^t \vec{e}_j)^t (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= \det[G^t \vec{e}_j, \vec{u}, \vec{v}] = \det G \det[G^t \vec{e}_j, \vec{u}, \vec{v}] = \det[GG^t \vec{e}_j, G\vec{u}, G\vec{v}] \\ &= \det[\vec{e}_j, G\vec{u}, G\vec{v}] = \vec{e}_j \cdot (G\vec{u} \times G\vec{v}) = (G\vec{u} \times G\vec{v})_j. \end{aligned}$$

Geoméricamente también tiene sentido, ya que el resultado del producto vectorial es un vector perpendicular a ambos operandos, y en caso de realizar el mismo giro en los dos vectores, el resultado también será un vector afectado con el mismo giro.

La justificación de que en el caso cuántico no es trampa tomar $\vec{B} = (0, 0, B)$ es mucho más complicada y por ello no lo vamos a demostrar por completo. Esta

explicación consiste en que si G es el giro de ángulo β alrededor de un vector unitario \vec{b} , entonces tenemos:

$$|G\vec{n}\rangle = A_{\vec{b}}(\beta)|\vec{n}\rangle \quad \text{dónde} \quad A_{\vec{b}}(\beta) = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{\sigma}.$$

En este caso I es la matriz identidad 2×2 y $A_{\vec{b}}(\beta)$ es una matriz compleja 2×2 . Dando esta igualdad por supuesta, vamos a comprobar que para cualquier vector $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ con norma $B \neq 0$ la solución de la ecuación de Schrödinger (2) con condiciones $|\Psi\rangle_{t=0} = |\vec{n}_0\rangle$ se puede expresar como:

$$(3) \quad |\Psi\rangle = A_{\vec{b}}(-\gamma Bt)|\vec{n}_0\rangle \quad \text{con} \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}.$$

Como observación previa a la demostración, es fácil comprobar que para $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ la matriz

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \cos\varphi - i\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi + i\sin\theta \sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

tiene autovalores ± 1 , por tanto $(\vec{b} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$. Utilizando esto vamos a demostrar (3), teniendo en cuenta que $|\vec{n}_0\rangle$ no depende de t , basta comprobar que:

$$i\frac{d}{dt}A_{\vec{b}}(-\gamma Bt) = -\frac{\gamma B}{2}\vec{b} \cdot \vec{\sigma}A_{\vec{b}}(-\gamma Bt).$$

Al desarrollar el primer término de la igualdad obtenemos:

$$\frac{-\gamma B}{2}\cos\left(\frac{-\gamma Bt}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{\sigma} + i\frac{\gamma B}{2}\sin\left(\frac{-\gamma Bt}{2}\right).$$

Y el segundo nos queda:

$$\frac{-\gamma B}{2}\vec{b} \cdot \vec{\sigma}\left(\cos\left(\frac{-\gamma Bt}{2}\right) - i\sin\left(\frac{-\gamma Bt}{2}\right)\vec{b} \cdot \vec{\sigma}\right).$$

Es fácil comprobar que ambos términos son iguales teniendo en cuenta la observación anterior.

Con esto hemos demostrado que el estado de espín $|\Psi\rangle$ se puede expresar como un giro de ángulo $-\gamma Bt$ partiendo de un estado inicial $|\vec{n}_0\rangle$. Este ángulo es el mismo que calculamos en el capítulo anterior para el momento angular $L(\vec{t})$, que era $\varphi(t) = -2\pi\nu t = -2\pi\left(\frac{\gamma B}{2\pi}\right)t = -\gamma Bt$. Por tanto hemos demostrado finalmente que el estado de espín precesa con una frecuencia igual a la frecuencia de Larmor ν de la misma forma que en el caso clásico.

CAPÍTULO 5

Resonancia y la ecuación de Bloch.

En este capítulo vamos a estudiar la ecuación que controla la resonancia de los protones teniendo en cuenta también los tiempos de relajación. La **ecuación de Bloch** [3], introducida por el físico Felix Bloch en 1946, es un modelo matemático que describe la interacción entre un campo magnético oscilante con un material en presencia de un campo magnético externo.

En capítulos anteriores vimos que la ecuación fundamental que regulaba el momento angular del protón desde el punto de vista clásico (lo que corresponde al espín con la perspectiva cuántica) era

$$(1) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}.$$

Si \vec{B} era un campo magnético constante (originariamente en la dirección del eje Z), ya habíamos visto que se producía la precesión. Ahora lo que vamos a estudiar es qué ocurre si este campo es variable con la frecuencia de resonancia. Antes de nada, comprobemos que, sea cual sea \vec{B} , la ecuación (1) implica una ley de conservación: el momento angular puede cambiar de dirección pero no de tamaño, para ello basta demostrar que $\|\vec{L}(t)\| = \|\vec{L}(0)\|$. Teniendo en cuenta que $\|\vec{L}(t)\|^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$:

$$\frac{d\|\vec{L}(t)\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{L} \cdot \vec{L})}{dt} = 2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\gamma \vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{B}) = 0.$$

Esto implica que $\|\vec{L}(t)\| = k = \|\vec{L}(0)\|$ con k constante. Con la interpretación clásica del espín como giro, esto significa que no es posible hacer que el protón gire más deprisa.

Consideramos un campo magnético variable con oscilaciones armónicas en las dos primeras coordenadas:

$$\vec{B} = (B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), B_0).$$

La idea es que B_1 sea pequeño en comparación con B_0 . Es decir, fundamentalmente seguimos teniendo un campo magnético en la dirección del eje Z pero ahora hay unas ligeras oscilaciones periódicas en el plano XY . En la máquina de resonancias, B_0 viene producido por el imán principal y los términos oscilatorios, por radiofrecuencia.

Para simplificar los cálculos vamos a expresar la ecuación (1) con este \vec{B} como $\frac{d\vec{L}}{dt} = A(t)\vec{L}$. Calculamos entonces:

$$\vec{L} \times \vec{B} = (L_2B_0 - L_3B_1 \sin(\omega t), L_3B_1 \cos(\omega t) - L_1B_0, L_1B_1 \sin(\omega t) - L_2B_1 \cos(\omega t)).$$

Por tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = A(t)\vec{L} \quad \text{con} \quad A(t) = \gamma \begin{pmatrix} 0 & B_0 & -B_1 \sin(\omega t) \\ -B_0 & 0 & B_1 \cos(\omega t) \\ B_1 \sin(\omega t) & -B_1 \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver la ecuación con las técnicas habituales para EDOs necesitamos que la matriz A sea independiente de t (constante). Para solventar este problema vamos a hacer un cambio de variable:

$$\vec{L} = C(t)\vec{V} \quad \text{con} \quad C(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que

$$C^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C(-t)$$

es decir, que al ser $C(t)$ un giro de ángulo ωt su inversa será un giro en el sentido contrario $C(-t)$. Derivando el cambio anterior obtenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = C'(t)\vec{V} + C(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = C(t)A(t)\vec{V}(t).$$

Tomando $D = C^{-1}(t)A(t)C(t) - C^{-1}(t)C'(t)$ y despejando $\frac{d\vec{V}}{dt}$ obtenemos finalmente la ecuación

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = D\vec{V} \quad \text{dónde} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega + \gamma B_0 & 0 \\ -\omega - \gamma B_0 & 0 & \gamma B_1 \\ 0 & -\gamma B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución de esta ecuación será $\vec{V}(t) = \exp(Dt)\vec{V}(0)$. Para el resto de los cálculos vamos a tratar el caso de la resonancia $\omega = -\omega_0$ con ω_0 la frecuencia de Larmor, $\omega_0 = \gamma B_0$, también tomaremos $\omega_1 = \gamma B_1$, lo que simplifica D . El signo negativo en ω indica el sentido de giro.

En este caso el único cálculo no trivial es la exponencial de la matriz al no ser esta una matriz diagonal. Por tanto calculando los autovalores, que son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos(\omega_1 t) - i \sin(\omega_1 t)$ y $\lambda_3 = \cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t)$, además de los vectores propios $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, i, 1)$ y $v_3 = (0, -i, 1)$ obtenemos la exponencial mediante la fórmula $\exp(Dt) = S \exp(Jt) S^{-1}$ con

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_1 t) - i \sin(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver la ecuación simplemente debemos deshacer el cambio de variable, teniendo en cuenta que $L(\vec{0}) = V(\vec{0})$ nos queda que la solución general de (1) es

$$L(\vec{t}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \text{sen}(\omega_0 t) & 0 \\ -\text{sen}(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_1 t) & \text{sen}(\omega_1 t) \\ 0 & -\text{sen}(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} \vec{L}(0).$$

De acuerdo con nuestra hipótesis, ω_1 es mucho menor que ω_0 . Así tenemos en general un giro rápido alrededor de un eje (inicialmente, el eje Z) que a su vez se va moviendo, en comparación, lentamente. Solo hay una solución en la que ese giro lento del eje no se manifiesta, que es precisamente el caso $\vec{L}(t) = (\cos(\omega_0 t), -\text{sen}(\omega_0 t), 0)$ (teniendo en cuenta que $\vec{L}(\vec{0}) = (1, 0, 0)$ es fácil comprobar que es solución de (1)).

Por lo que hemos visto en capítulos anteriores, sabemos que esta solución corresponde al caso en que se hace resonar al protón, pero la teoría anterior muestra que es solo un caso particular. Con una condición inicial $\vec{L}(\vec{0})$ que no estuviera en el plano XY siempre aparecería el giro lento del eje.

Para apreciar mejor este fenómeno vamos a tomar $\vec{L}(\vec{0}) = (1, 1, 0)$ y $\vec{L}(\vec{0}) = (1, 0, 0)$ con $\omega_0 = 1$ y $\omega_1 = 1/20$ y dibujar la curva que describe $(L_1(t), L_2(t))$ cuando $t \in [0, 2k\pi]$ ($k = 1, 7$) con $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ la solución de (*). Con $k = 1$ tenemos

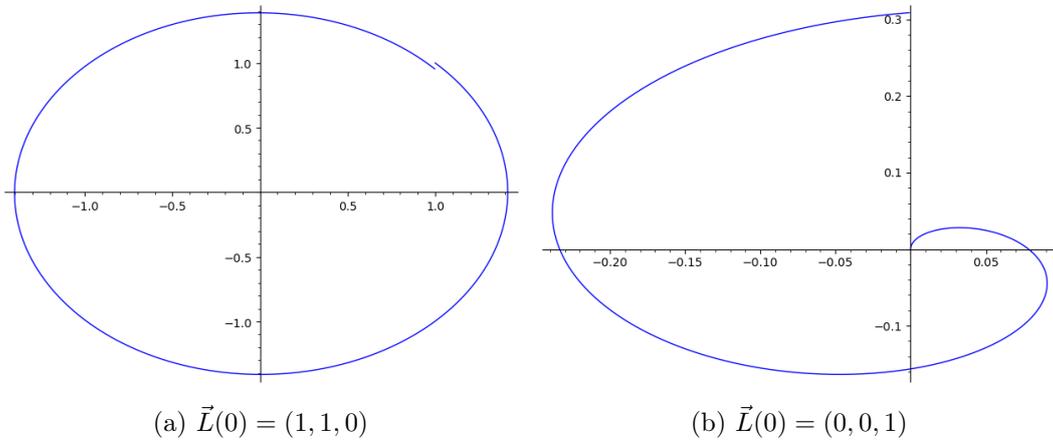
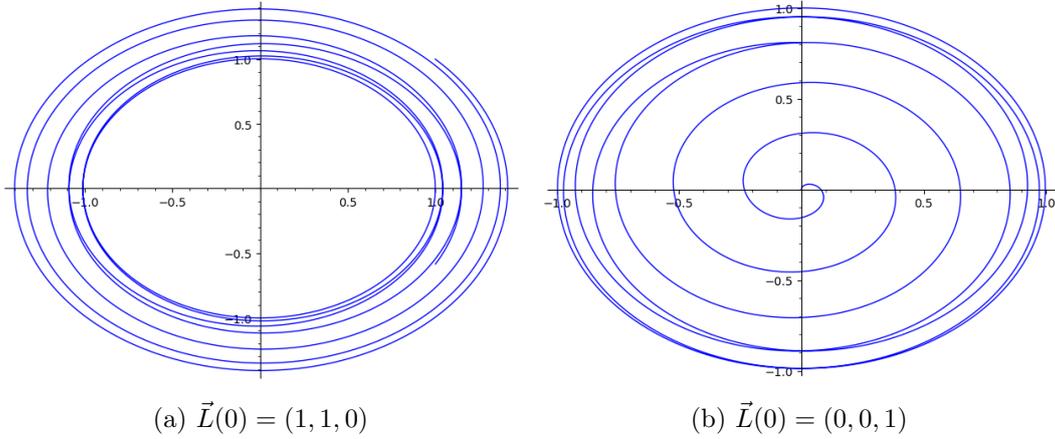


Figura 5.1: $(L_1(t), L_2(t))$ con $k = 1$.

Podemos apreciar que en la figura de la derecha, cuando cambiamos $\vec{L}(\vec{0})$ aparece el giro lento que hemos mencionado anteriormente. Esto se aprecia mejor al completar más vueltas, en este caso con $k = 7$.

En diversos modelos matemáticos se establece que la variación de cierta cantidad (en nuestro caso el momento angular) es proporcional a la diferencia con cierto valor de equilibrio. Si la constante de proporcionalidad es negativa, el modelo mostrará una resistencia a separarse del valor de equilibrio y, en ausencia de otras acciones, tenderá a la larga a él. Consideramos la ecuación $y' = -\kappa(y - \ell)$ donde κ corresponde a la

Figura 5.2: $(L_1(t), L_2(t))$ con $k = 7$.

constante de proporcionalidad y ℓ el valor de equilibrio. Las soluciones de este modelo serán

$$y(t) = \ell + ce^{-\kappa t}.$$

Es importante darse cuenta de que sea cual sea el valor inicial $y(0)$, se tiene que $y(t) \rightarrow \ell$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Además $y(\kappa^{-1} \log 2) = \ell + \frac{1}{2}c$, por lo que $\kappa^{-1} \log 2$ es el tiempo que debe transcurrir para que y adquiera un valor a medio camino entre $y(0) = \ell + c$ y ℓ , que en el contexto de las desintegraciones radiactivas se conoce como la vida media.

En el caso de las resonancias magnéticas, hay una interacción entre un protón y los núcleos del resto de los átomos que provoca cierta resistencia a que el espín de una zona localizada de los núcleos atómicos de hidrógeno deje de estar alineado con el campo magnético principal $(0, 0, B_0)$. Con esta idea en mente, Bloch [3] consideró que la ecuación (1) debía añadir un término en cada componente similar a este $-\kappa(y - \ell)$, donde $\ell = 0$ para las dos primeras coordenadas. De esta forma se llega a la ecuación de Bloch:

$$(2) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} + (-\beta L_1, -\beta L_2, -\alpha(L_3 - L_{30})).$$

En este caso L_{30} es el valor de la tercera coordenada del momento angular inicial (en teoría, para Bloch, incluso antes de conectar el campo variable). Las constantes α y β están relacionadas con dos tipos de interacciones [4] (espín-retículo y espín-espín, respectivamente). El primer término tiene unidades de momento angular entre tiempo, por tanto α y β tienen unidades de inversos de tiempo, lo que motiva definir los tiempos de relajación

$$T_1 = \alpha^{-1} \quad \text{y} \quad T_2 = \beta^{-1}.$$

La ecuación original (1) corresponde a $T_1 = T_2 = \infty$. Fuera de este caso, deja de ser cierto que el momento angular $\|\vec{L}\|$ se conserve.

Para analizar la evolución a la larga de las soluciones. Vamos a simplificar la ecuación considerando por ahora el caso $T_1 < \infty$, $T_2 = \infty$ (que no es muy realista porque en la práctica α es menor que β). Aplicamos ahora el cambio de variable $\vec{L} = C(t)\vec{V}$ que habíamos hecho antes con $\beta = 0$ en el caso de resonancia $\omega = -\omega_0$, teniendo en cuenta que ahora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = A(t)\vec{L} + \vec{h} \quad \text{con} \quad \vec{h} = (0, 0, -\alpha(L_3 - L_{30}))$$

derivando podemos concluir que la ecuación queda de la forma

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (C^{-1}(t)A(t)C(t) - C^{-1}(t)C'(t))\vec{V}(t) + \vec{h}$$

y utilizando los cálculos realizados anteriormente con estas matrices concluimos que

$$(3) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = (0, \gamma B_1 V_3, -\gamma B_1 V_2 - \alpha(V_3 - L_{30})).$$

Podemos observar que V_1 es constante, por tanto nos planteamos la siguiente aplicación lineal aplicando el cambio de variable $(V_2, V_3) = (W_2 + \alpha L_{30}/(\gamma B_1), W_3)$

$$(4) \quad (W_2, W_3) \mapsto (\gamma B_1 W_3, -\gamma B_1 W_2 - \alpha W_3).$$

Más concretamente queremos analizar las soluciones de la ecuación

$$(5) \quad \frac{d(W_2, W_3)}{dt} = (\gamma B_1 W_3, -\gamma B_1 W_2 - \alpha W_3).$$

Para ello podemos expresar esta ecuación de otra manera utilizando la matriz de la aplicación (3), en este caso

$$\frac{d(W_2, W_3)}{dt} = A \begin{pmatrix} W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma B_1 \\ -\gamma B_1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Los autovalores λ_i de esta matriz corresponden a las soluciones de $\lambda^2 + \alpha\lambda + \gamma^2 B_1^2$ cuya parte real es $\frac{-\alpha}{2} < 0$.

Ya que la solución general de este tipo de sistemas es $x_i = k_i e^{\lambda_i t}$ entonces podemos concluir que todas las soluciones de la ecuación (5) cumplen $W_2(t), W_3(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Volviendo ahora al caso de la ecuación (3), deshaciendo el cambio de variable anterior las soluciones cumplen $V_3(t) \rightarrow 0$ y $V_2(t) \rightarrow \frac{\alpha L_{30}}{\gamma B_1}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si aplicamos las conclusiones a la ecuación de Bloch, recordando el cambio de variable $\vec{L} = C(t)\vec{V}$ podemos concluir a la larga que:

- $L_1(t)$ es constante.

- $L_2(t)$ a la larga será de la forma $C(t) \cdot (0, \frac{\alpha L_{30}}{\gamma B_1}, 0)$ donde recordamos que $C(t)$ es una matriz de giro con respecto al eje X de velocidad $\omega = -\omega_0$.
- $L_3(t)$ tiende a 0.

Es decir, que la solución de la ecuación de Bloch bajo las hipótesis anteriores ($\beta = 0, \omega = -\omega_0$) tiende a ser un vector \vec{L} que gira con velocidad angular ω_0 en el plano XY .

En el anexo I (A) al final del documento se incluye un programa sage que genera las soluciones de la ecuación de Bloch, además hay varios experimentos numéricos con los resultados de este programa en el anexo II (B).

El caso $\beta > 0$ se trata de forma parecida y aunque en este caso no se cumple que \vec{L} tienda a estar constreñido al plano XY , sí es cierto que, bajo las condiciones numéricas prácticas, su tercera coordenada es mucho más pequeña que su la norma límite de $\|\vec{L}\|$.

CAPÍTULO 6

Tomografía y la transformada de Radon.

Hasta ahora sabemos de las oscilaciones colectivas de los protones con una frecuencia característica que depende del campo magnético principal pero nosotros queremos distinguir densidades, zonas con huecos de otras que no los tienen. Centrémonos en un plano XY e imaginemos que añadimos un campo magnético secundario (un gradiente de campo [13]) que crece a lo largo del eje OX , lo cual se consigue en la práctica con electroimanes móviles. Entonces los protones que están más a la derecha (x mayor) oscilarán más rápido y los de la izquierda más lentos.

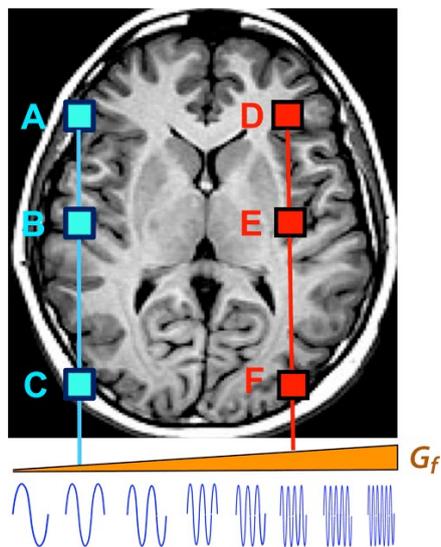


Figura 6.1: Señal que emiten los protones en función del gradiente

En el caso de la figura 1 los protones A, B y C resonarán a la misma frecuencia mientras que D, E y F resonarán también resonarán a la misma frecuencia mayor que las anteriores. Desde fuera detectaremos una superposición de estas oscilaciones en forma de radiofrecuencia, ya que no tenemos manera de medir estas señales por separado.

El análisis de Fourier, concretamente la transformada de Fourier, da el contenido que tiene una señal de cada frecuencia por tanto podemos distinguir cuántos protones hay en cada vertical. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de protones en la “rodaja” que estamos examinando, sabremos $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) dy$ para cada x [10].

Si la variación del campo magnético se produce en otras direcciones, tendremos información sobre otras integrales de la densidad. El modelo matemático es que los datos obtenidos (tratados con la transformada de Fourier) nos dan la función

$$P_{\theta}(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho \quad \text{con} \quad r_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \sin \theta = t.$$

Esto es lo que se llama, a veces con una normalización diferente, **transformada de Radon** [5]. En este caso $r_{\theta,t}$ es la recta a distancia t del origen con vector normal $(\cos \theta, \sin \theta)$ formando un ángulo θ con el eje OX . También se conoce a este modelo como transformada de rayos X, ya que podemos considerar la familia $r_{\theta,t}$ como un fino haz de rayos que atraviesan la muestra.

Por ejemplo, la TAC (tomografía axial computarizada) es una técnica donde se toman muchas radiografías unidimensionales en muchas direcciones contenidas en el plano que quiere examinarse. Lo que se hace es reconstruir la sección a partir de sus “sombras”, teniendo en cuenta que el tejido es semitranslúcido a los rayos X.

El problema que se plantea es cómo recuperar ρ a partir de $P_{\theta}(t)$, que idealmente se conocería posicionando los campos magnéticos secundarios en infinitas direcciones. Usando la definición de integral de línea de una función escalar con la parametrización de $r_{\theta,t}$ dada por $x = t \cos \theta - u \sin \theta$, $y = t \sin \theta + u \cos \theta$, se tiene:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) du.$$

Ahora tomamos un ρ fijo y utilizamos la transformada de Fourier.

$$\widehat{P}_{\theta}(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) e^{-2\pi i r t} dt du$$

lo cual siguiendo la parametrización anterior nos deja

$$\widehat{P}_{\theta}(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) e^{-2\pi i (rx \cos \theta + ry \sin \theta)} dx dy.$$

Para el último paso, tenemos que introducir la transformada de Fourier en varias variables aplicando la propia transformada en cada variable. Por tanto para dos dimensiones

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi, \eta) e^{2\pi i (\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad \text{con} \quad \widehat{f}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2\pi i (-\xi x - \eta y)} dx dy.$$

Utilizando esto podemos concluir que

$$\widehat{P}_{\theta}(r) = \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

y por tanto utilizando la primera ecuación de la transformada de Fourier utilizando coordenadas polares ($\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$) llegamos a la fórmula de reconstrucción buscada

$$\rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \widehat{P}_\theta(r) e^{2\pi i(xr \cos \theta + yr \sin \theta)}.$$

Como conclusión, este modelo nos dice que si tenemos un número infinito de proyecciones unidimensionales de un objeto obtenido desde un número infinito de ángulos, podemos reconstruir perfectamente el objeto original.

La notación $\rho(x, y)$ que hemos utilizado para referirnos a la densidad de protones es más utilizada en TAC, sin embargo este modelo es igualmente válido para la señal, llamémosla $s(x, y)$, que emiten los protones en el punto (x, y) . Por tanto conociendo esta señal basta codificarla para obtener una imagen completa de la región deseada.

CAPÍTULO 7

Conclusiones.

En este estudio hemos podido comprobar las leyes físicas y modelos matemáticos que regulan la técnica del MRI dentro del campo de la medicina. Gracias a ello disponemos de una técnica no invasiva, a diferencia de por ejemplo los rayos X, para poder obtener imágenes del interior del cuerpo humano.

Hemos estudiado el fenómeno de la resonancia magnética, que es muy importante a la hora de obtener una señal de respuesta que podamos capturar. Además de las MRI este fenómeno es importante en otros ámbitos como por ejemplo la audición, las cavidades resonantes en algunos instrumentos musicales o los microondas convencionales, en general está estrechamente relacionado con la vibración.

También hemos visto la relación entre resultados de física clásica que tienen que ver con el momento angular con conceptos de física cuántica, en este caso los estados de espín, a pesar de que los fenómenos que se estudian en ambos campos no suelen ser compatibles.

En la última parte hemos estudiado también el proceso de obtención de imágenes y las bases matemáticas de la reconstrucción tomográfica. Estas imágenes nos muestran detalles de numerosos tipos de tejidos así como también de los pulmones, huesos y vasos sanguíneos. Además es posible ampliar estas técnicas para realizar reconstrucciones tridimensionales para por ejemplo localizar lesiones en el cráneo que no se pueden visualizar con imágenes 2D.

APÉNDICE A

Anexo I: Programa Sage para las soluciones de la ecuación de Bloch

El programa Sage usado para computar las soluciones de la ecuación de Bloch es:

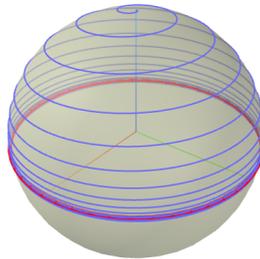
```
1 # Ajuste alfa, beta, la frecuencia y el L inicial
2 alp = 0.07
3 bet = 0.0
4 ome = -1
5 Linic = [0.0,0.0,1.0]
6
7 B1 = 0.05
8 # Se entiende que frecuencia cero, significa
9 # que hemos desconectado el campo externo
10 if ome == 0: B1 = 0
11
12 L30 = 1
13
14 # Cuanto mayor sea N, mas es la precision y mas lento es el programa
15 N = 100
16 tn = srange(0.0,200.0,1.0/N)
17
18 L1,L2,L3,t=var('L1,L2,L3,t')
19
20 # Este es el segundo miembro de la ecuacion
21 f = [L2-B1*sin(ome*t)*L3-bet*L1, -L1+B1*cos(ome*t)*L3-bet*L2
22 ,B1*sin(ome*t)*L1-B1*cos(ome*t)*L2 -alp*(L3-L30), 1.0+0.0*t]
23
24 sol = desolve_odeint(f, Linic+[0.0],tn,[L1,L2,L3,t])
25 L1n, L2n, L3n = list(sol[:,0]), list(sol[:,1]), list(sol[:,2])
26
27 v = list(zip(L1n,L2n,L3n))
28 w = [vector(v[i]) for i in range(len(L1n))]
29 w1 = [w[i].normalized() for i in range(len(L1n))]
30
31 def axes(xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1,zmin=-1,zmax=1,**kwds):
32     ex = vector((1,0,0))
33     ey = vector((0,1,0))
34     ez = vector((0,0,1))
35     G = line3d([xmin*ex,xmax*ex]**kwds)
36     G += line3d([ymin*ey,ymax*ey]**kwds)
37     G += line3d([zmin*ez,zmax*ez]**kwds)
38     return G
39
40 show(line3d(w1,thickness = 2)+
41 sphere(opacity=0.5,color='#EAEC6') + circle((0,0),1,color =
42 'red',thickness = 6),frame=False,axes=True)
```


Anexo II: Ejemplos de soluciones de la ecuación de Bloch

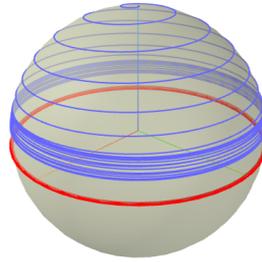
Vamos a hacer a continuación algunos experimentos numéricos con la ecuación de Bloch. Para ello vamos a utilizar el programa sage que ya utilizamos para generar las gráficas anteriores (incluido en el anexo I) que genera las soluciones L_1, L_2 y L_3 dónde $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ tomando un rango amplio de valores de t .

Para ilustrar mejor los resultados representaremos la aproximación numérica de $\vec{L}(t)/\|\vec{L}(t)\|$, de esta forma representaremos las soluciones en la superficie de la esfera unidad con el ecuador destacado en rojo, donde además \vec{e}_j son los vectores de la base canónica. Vamos a ver entonces unos ejemplos:

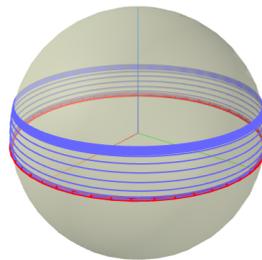
- $\alpha = 0,07, \beta = 0,0, \omega = -1, \vec{L}(0) = \vec{e}_3$. La solución tiende a un plano cercano al ecuador, como vimos en el capítulo anterior.



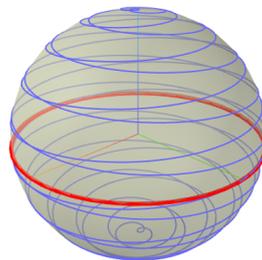
- $\alpha = 0,05, \beta = 0,015, \omega = -1, \vec{L}(0) = \vec{e}_3$. Ejemplo con $\beta \neq 0$ de que todavía se produce la localización a la larga cercana a un plano.



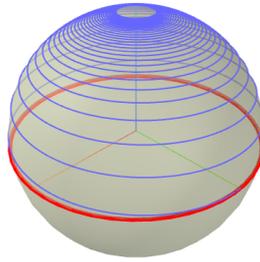
- $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,015$, $\omega = -1$, $\vec{L}(0) = \vec{e}_2$. El mismo caso que el ejemplo anterior pero ahora partiendo del ecuador.



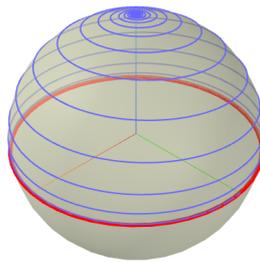
- $\alpha = 0,0$, $\beta = 0,0$, $\omega = -1$, $\vec{L}(0) = \vec{e}_3$. El caso de resonancia pura sin el “rozamiento” representado por α y β . Como vimos en el capítulo anterior, se combinan dos rotaciones.



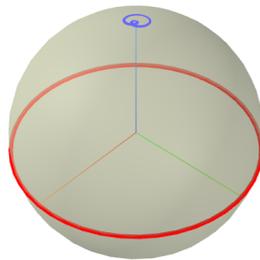
- $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,01$, $\omega = 0$, $\vec{L}(0) = \vec{e}_2$. Si desconectamos el campo variable, α atrae a \vec{L} a la vertical pero si β es muy pequeña, la rotación se mantiene.



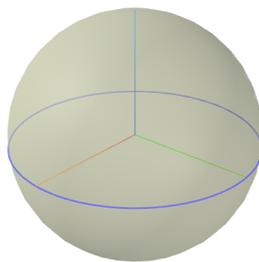
- $\alpha = 0,01, \beta = 0,5, \omega = 0, \vec{L}(0) = \vec{e}_2$. La situación recíproca a la anterior: cuando desconectamos el campo variable con β significativo, solo se aprecian unos pocos giros.



- $\alpha = 0,0, \beta = 0,0, \omega = -2, \vec{L}(0) = \vec{e}_3$. En el caso en que no hay resonancia $\omega \neq -\omega_0$, la amplitud es pequeña.



- $\alpha = 0,0, \beta = 0,0, \omega = -1, \vec{L}(0) = \vec{e}_1$. Para el caso de resonancia pura con $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ se tiene la solución $\vec{L}(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ que parte de \vec{e}_1 .



Bibliografía

- [1] M. Alonso and E. J Finn. *Fundamental university physics. 1. Mechanics and thermodynamics*. Addison-Wesley, 1973.
- [2] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] F. Bloch. Nuclear induction. *Phys. Rev.*, 70:460–474, Oct 1946.
- [4] F. Bloch, W. W. Hansen, and M. Packard. The nuclear induction experiment. *Phys. Rev.*, 70:474–485, Oct 1946.
- [5] F. Chamizo. Modelización II (un pase de modelos). <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/libreria.html>, 2004.
- [6] F. Chamizo. Consideraciones muy básicas sobre la ecuación de Schrödinger. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/schr.pdf>, 2013.
- [7] F. Chamizo. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/physics.html>, 2015.
- [8] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. <http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html>, 2016.
- [9] F. Chamizo. A course on signal processing. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/libreria.html>, 2020.
- [10] F. Chamizo. *La Matemática y la Ciencia oculta*. UAM Ediciones, 2020.
- [11] R. Damadian. Tumor detection by nuclear magnetic resonance. *Science*, 171(3976):1151–1153, 1971.
- [12] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.
- [13] W. S. Hinshaw and A. H. Lent. An introduction to NMR imaging: From the Bloch equation to the imaging equation. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):338–350, 1983.

-
- [14] P. C. Lauterbur. Image formation by induced local interactions: examples employing nuclear magnetic resonance. *Nature*, 242(5394):190–191, 1973.
- [15] L. Wald. MR Image Encoding. Disponible en <https://ocw.mit.edu/courses/health-sciences-and-technology/hst-584j-magnetic-resonance-analytic-biochemical-and-imaging-techniques-spring-2006/readings/imageencoding.pdf> (es parte del curso OCW MIT HST.584J/22.561J), 2006.
- [16] Wikipedia contributors. Gaussian units — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 4-November-2020].
- [17] Wikipedia contributors. History of magnetic resonance imaging — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 7-October-2020].
- [18] B. Zwiebach. Quantum physics II. MIT OpenCourseWare. Notas del curso en <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/>, 2013.