



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Sumas de cuadrados y formas modulares

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Marina Lorenzo Gil

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2023-2024

Resumen

En el siguiente trabajo se tratará una introducción a las llamadas formas modulares, que son funciones definidas en el semiplano de los números complejos con parte imaginaria positiva y que cumplen una serie de propiedades que serán estudiadas en este proyecto. Se trabajará también sobre algunos ejemplos importantes de las formas modulares, como la función discriminante o las series de Eisenstein, así como la llamada función theta, que nos servirá como herramienta para demostrar muchos de los objetivos de este proyecto. Se indagará en sus respectivos desarrollos de Fourier y se comprobará cómo se comportan en las cúspides, un concepto que será introducido también, entre otras cosas. Con todo ello el objetivo será obtener fórmulas compactas para calcular el número de representaciones de un número entero positivo como suma de cuadrados. Nos centraremos fundamentalmente en los casos de dos, cuatro y ocho cuadrados, pero veremos que se pueden obtener fórmulas aproximadas para el caso de un número par de cuadrados, en general. Para finalizar, será estudiado un resultado de Ramanujan, que dio con una fórmula para el caso de 24 cuadrados.

Abstract

In the following work, an introduction to the so-called modular forms will be presented. These are functions defined on the upper half-plane of complex numbers with a positive imaginary part, and they satisfy a series of properties that will be studied in this project. We will also work on some important examples of modular forms, such as the discriminant function or the Eisenstein series, as well as the so-called theta function, which will serve as a tool to demonstrate many of the goals of this project. Their respective Fourier expansions will be explored, and we will examine how they behave at the cusps, a concept that will also be introduced, among other things. With all this, the objective will be to obtain compact formulas for calculating the number of representations of a positive integer as a sum of squares. We will focus primarily on the cases of two, four, and eight squares, but we will see that approximate formulas can be obtained for the case of an even number of squares in general. Finally, a result of Ramanujan will be studied, who provided a formula for the case of 24 squares.

Índice general

1	El grupo modular y algunos de sus subgrupos	1
1.1	Introducción	1
1.2	El grupo modular y sus subgrupos	2
2	Formas modulares: definición, ejemplos y dimensión	5
2.1	Definición y ejemplos	5
2.2	La dimensión del espacio vectorial de las formas modulares	9
3	La función theta	13
3.1	Definición de la función theta	13
3.2	La relación de la función theta con las formas modulares	14
4	Representaciones como suma de 2, 4 y 8 cuadrados	19
4.1	El caso de 8 cuadrados	20
4.2	El caso de 4 cuadrados	21
4.3	El caso de 2 cuadrados	22
5	Acerca del caso general	25
5.1	Series de Eisenstein generalizadas	25
5.2	Una fórmula aproximada	26
5.3	La fórmula de Ramanujan	29
	Bibliografía	33
A	Apéndices del capítulo 1	35
A.1	Sobre los subgrupos del grupo modular	35
B	Apéndices del capítulo 2	41
B.1	Sobre la fórmula de valencia	41
B.2	Sobre la dimensión del espacio vectorial de las formas modulares	42
C	Apéndices del capítulo 3	43
C.1	Sobre la función theta	43
C.1.1	Demostración de la proposición 3.5	43
C.1.2	Demostración de la proposición 3.6	44
D	Apéndices del capítulo 4	47
D.1	Sumas de 8, 4 y 2 cuadrados	47
E	Apéndices del capítulo 5	49
E.1	Sobre las series de Eisenstein generalizadas	49
E.2	Sobre la fórmula aproximada para expresar un entero como suma de cuadrados	49
E.3	Sobre la fórmula de Ramanujan	50

CAPÍTULO 1

El grupo modular y algunos de sus subgrupos

1.1. Introducción

En este primer capítulo trabajaremos sobre dos conjuntos importantes:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det(\gamma) = 1\} \quad \text{y} \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\},$$

siendo $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ las matrices 2×2 con coeficientes enteros. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ se definen de manera equivalente, salvo que en el primer caso los elementos de la matriz serán números reales y en el segundo enteros módulo N . Es fácil ver que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, de forma que hereda sus propiedades. A lo largo del capítulo trabajaremos con la siguiente acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H} :

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{para cada} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

El denominador de $\gamma(z)$ suele llamarse $j_\gamma(z)$ y aparece con frecuencia en la teoría de formas modulares.

Es fácil comprobar que si $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, entonces

$$(1.1) \quad \Im(\gamma(z)) = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

Con lo que queda claro que la acción anterior está bien definida sobre \mathbb{H} .

En este trabajo nos interesará también estudiar la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre las semicircunferencias en \mathbb{H} centradas en el eje real y las semirrectas verticales (que las podemos interpretar como semicircunferencias de radio infinito), y este conjunto lo denotaremos por \mathcal{G} .

$$\mathcal{G} = \{x + iy \in \mathbb{H} : (x - x_0)^2 + y^2 = R^2, x_0 \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{R}^+\} \cup \{x_0 + iy \in \mathbb{H} : x_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Cada $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ envía elementos de \mathcal{G} a \mathcal{G} y podemos determinar los elementos de \mathcal{G} a partir de sus extremos. De esta forma, para hallar su imagen nos basta estudiar la imagen de estos extremos (en el caso de las semirrectas, tomaremos ∞ como uno de ellos).

Otra propiedad interesante es la invariancia de la medida $d\mu(z) = y^{-2} dx dy$ por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donde x e y son la parte real e imaginaria de z .

Proposición 1.1. $d\mu(z) = y^{-2} dx dy$ es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, es decir, si $x_1 + iy_1 = \gamma(x_2 + iy_2)$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ entonces para cada región compacta $\mathcal{R} \subset \mathbb{H}$,

$$\int_{\gamma(\mathcal{R})} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} = \int_{\mathcal{R}} \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2}.$$

Demostración. Tenemos que $z_1 = \gamma(z_2) = u(z_2) + iv(z_2)$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann observamos que

$$\left| \frac{\frac{du}{dx_2}}{\frac{dv}{dx_2}} \frac{\frac{du}{dy_2}}{\frac{dv}{dy_2}} \right| = \left(\frac{du}{dx_2} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2} \right)^2 = |\gamma'|^2.$$

Por tanto si $z_1 = \gamma(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \gamma'(z_2) = \frac{1}{(cz_2+d)^2} \Rightarrow |\gamma'(z_2)|^2 = \frac{1}{|cz_2+d|^4}$. Así nos queda, utilizando (1.1):

$$\int_{\gamma(\mathcal{R})} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} = \int_{\mathcal{R}} \frac{|cz_2+d|^4}{\Im(z_2)^2} \frac{1}{|cz_2+d|^4} dx_2 dy_2 = \int_{\mathcal{R}} \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2}.$$

□

1.2. El grupo modular y sus subgrupos

Ahora trabajaremos sobre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y algunos de sus subgrupos. Lo primero que resaltamos es que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo la primera una traslación (en una unidad) y la segunda una inversión, cuando actúan sobre \mathbb{H} . Para más profundidad, ver el apéndice A.1

Empezaremos ahora introduciendo algunos subgrupos interesantes. Dos generalizaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ son:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

y

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

con $N \in \mathbb{Z}^+$. Se puede ver que $\Gamma(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, donde para $N = 1$ se tiene la igualdad y para $N > 1$, las inclusiones son estrictas. Ambos son subgrupos de índice finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Observación 1.1. Si $N > 1$ entonces $\Gamma_0(N)$ no es normal y $\Gamma(N)$ sí lo es.

Un concepto importante asociado a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y sus subgrupos finitos es el *dominio fundamental*.

Definición 1.1. Dado un grupo Γ que actúa sobre \mathbb{H} , un dominio fundamental para Γ es un subconjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{H}$ tal que:

1. El conjunto F es la clausura de su interior.
2. Cada punto de \mathbb{H} es Γ -equivalente a algún punto de F .
3. Ningún par de puntos distintos del interior de F son equivalentes bajo la acción de Γ , es decir, si $z, z' \in F$ son dos puntos distintos y son Γ -equivalentes, entonces $z, z' \in \partial F$.

Es decir, las imágenes de un único punto de \mathbb{H} bajo la acción del grupo Γ forman una órbita de la acción y el dominio fundamental es un subconjunto de \mathbb{H} que contiene exactamente un punto de cada una de esas órbitas (excepto en la frontera). Este concepto será muy útil más adelante, pues cuando queramos estudiar determinadas propiedades de un grupo, podremos limitarnos a estudiarlas solo en su dominio fundamental.

Proposición 1.2. $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}$ es dominio fundamental para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Demostración. Tomamos un $z \in \mathbb{H}$ y vemos que $M = \{mz + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un retículo de \mathbb{C} . Por tanto, $\exists w \in M$ con $w \neq 0$ tal que $|w|$ es mínimo. Sea $w = cz + d \in M$ un punto tal que $|w|$ es mínimo, entonces $(c, d) = 1$ (Si no, podríamos dividir $cz + d$ por un entero y obtendríamos un nuevo punto en M de módulo más pequeño). Además, por la identidad de Bezout, sabemos que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Usando (1.1), obtenemos que $\Im(\gamma_1(z))$ es un máximo de $\{\Im(\gamma(z)) : \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}$, pues $|j_{\gamma_1}(z)|^2$ era mínimo. Definimos ahora $z^* = T^n \gamma_1(z) = \gamma_1(z) + n$ donde n es tal que $|\Re(z^*)| \leq 1/2$. No podemos tener $|z^*| < 1$ porque entonces tendríamos $\Im(\frac{-1}{z^*}) = \frac{\Im(z^*)}{|z^*|^2} > \Im(z^*)$ y eso contradice la maximalidad de $\Im(z^*)$. Así vemos que $z^* \in \mathcal{D}$, y z es equivalente a z^* bajo la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Ahora supongamos que tenemos dos puntos equivalentes bajo la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, z_1 y $z_2 = \gamma(z_1)$, en el interior de \mathcal{D} con $\gamma \neq \pm I$. γ no puede ser de la forma T^n porque esto contradice $|\Re(z_1)|, |\Re(z_2)| < 1/2$. Así que $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c \neq 0$. Notamos que $\Im(z) > \sqrt{3}/2 \forall z$ en el interior de \mathcal{D} y otra vez por (1.1) tenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \Im(z_2) = \Im(\gamma(z_1)) = \frac{\Im(z_1)}{|cz_1 + d|^2} \leq \frac{\Im(z_1)}{c^2 \Im(z_1)^2} = \frac{1}{c^2 \Im(z_1)} < \frac{2}{c^2 \sqrt{3}}$$

y esto se da si y solo si $c = \pm 1$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $\Im(z_1) \leq \Im(z_2)$, pero $|\pm z_1 + d| \geq |z_1| > 1$ y esto nos da una contradicción en $\Im(\gamma(z_1)) = \frac{\Im(z_1)}{|j_\gamma(z_1)|^2}$. Concluimos que no hay dos puntos $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -equivalentes en el interior de \mathcal{D} . \square

Observación 1.2.

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST,$$

siendo esta unión disjunta.

Proposición 1.3. $\mathcal{D} \cup S\mathcal{D} \cup ST\mathcal{D}$ es dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$.

Demostración. Como hemos visto que \mathcal{D} es dominio fundamental de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, podemos escribir $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D} = \cup_{\gamma \in \Gamma_0(2)} \gamma(\mathcal{D} \cup S\mathcal{D} \cup ST\mathcal{D})$. Por eso, cada punto de \mathbb{H} será $\Gamma_0(2)$ -equivalente a algún punto de $\mathcal{D} \cup S\mathcal{D} \cup ST\mathcal{D}$, y como los interiores son disjuntos, ningún par de puntos distintos serán equivalentes bajo la acción de $\Gamma_0(2)$. Así concluimos que se trata de un dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$. \square

Otro subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ importante es el θ -grupo:

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \text{con } a+d \text{ y } b+c \text{ pares} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 - b \equiv 1 - c \pmod{2} \right\}. \end{aligned}$$

Observación 1.3. $\Gamma_0(2)$ y Γ_θ son subgrupos conjugados. Concretamente,

$$\Gamma_\theta = \gamma_0^{-1} \Gamma_0(2) \gamma_0 \quad \text{con} \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar ahora un dominio fundamental para Γ_θ , empezamos notando la siguiente descomposición en cogrupos del grupo modular.

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_\theta \cup \Gamma_\theta T \cup \Gamma_\theta TS.$$

Con esta observación podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.4. $\mathcal{D} \cup T\mathcal{D} \cup T^2\mathcal{D}$ es dominio fundamental de Γ_θ con \mathcal{D} el habitual de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Demostración. $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D} = \cup_{\gamma \in \Gamma_\theta} \gamma(\mathcal{D} \cup T\mathcal{D} \cup T^2\mathcal{D})$. \square

Para ver su forma, se estudia la imagen de las semirrectas y las circunferencias que conforman la frontera de \mathcal{D} . Con ello se obtiene que este dominio es justamente $\mathbb{H} \cap \{-1/2 \leq \Re(z) \leq 3/2\} \cap \{|z| \geq 1\} \cap \{|z-2| \geq 1\}$. Si ahora aplicamos $T^{-2} \in \Gamma_\theta$ a la zona en $\Re(z) \geq 1$ de este conjunto, obtenemos: $T^{-2}(1) = -1$, $T^{-2}(3/2 + i\sqrt{3}/2) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $T^{-2}(3) = 1$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} T^{-2}(z) = \infty$. De forma que nos queda:

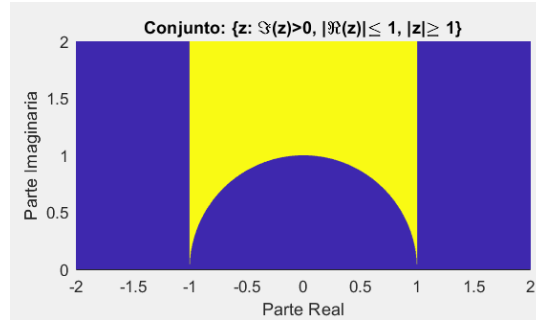


Figura 1.1: D_θ .

Así concluimos que $D_\theta = \{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \leq 1, |z| \geq 1\}$ es dominio fundamental de Γ_θ .

CAPÍTULO 2

Formas modulares: definición, ejemplos y dimensión

2.1. Definición y ejemplos

Una vez introducido el grupo modular, ahora hablaremos propiamente de las formas modulares: su definición, algunos ejemplos interesantes y terminaremos estudiando la dimensión del espacio vectorial que conforman.

Definición 2.1. Una función holomorfa $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es una forma modular de peso $k \geq 0$, con respecto al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ si se cumple:

$$(2.1) \quad f(\gamma z) = j_\gamma^k(z) f(z) \quad \text{para todo } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

y además existe un $\alpha > 0$ tal que $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-\alpha} |f(x + iy)| = 0$. En el caso de que solo se cumpla la primera condición, se las llama funciones modulares o formas débilmente modulares.

Podemos observar que en la primera condición de la definición, k es un entero par (no negativo) puesto que las matrices $\pm\gamma$ actúan de la misma manera en \mathbb{H} , es decir, $\gamma(z) = (-\gamma)(z) \forall z \in \mathbb{H}$. De esta forma, $f(\gamma z) = f((-\gamma)z) \Rightarrow j_\gamma^k(z) f(z) = (-1)^k j_\gamma^k(z) f(z) \Rightarrow (-1)^k = 1$. Por lo que k es par.

Podemos encontrar funciones f holomorfas en \mathbb{H} , que no satisfacen exactamente esta primera condición pero para las que se tiene la siguiente relación

$$f(\gamma z) = \omega_\gamma j_\gamma^k(z) f(z),$$

donde ω_γ es un factor constante de módulo 1. En ese caso a los ω_γ se los llama sistema de multiplicadores.

Además, si consideramos las matrices T y S , que generan $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, podemos ver que (2.1) es equivalente a

$$f(z + 1) = f(z) \quad \text{y} \quad f(-1/z) = z^k f(z).$$

Ahora hablaremos de un ejemplo muy importante de formas modulares.

Definición 2.2. Se llaman series de Eisenstein a las funciones

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} (mz + n)^{-k} \quad \text{con } k > 2 \text{ par.}$$

Para ver que $G_k(z)$ es una forma modular empezamos notando que es una función holomorfa en \mathbb{H} , puesto que $(mz + n)^k \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$. Por otro lado, si tomamos $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces

$$G_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} \left(m\frac{az+b}{cz+d} + n\right)^{-k} = j_\gamma^k(z) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} ((ma+nc)z + (bm+nd))^{-k}.$$

Como $ad - bc = 1$, podemos obtener cualquier par $(m', n') \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}$ como $m' = ma + nc$ y $n' = bm + nd$. Por tanto, la última suma doble coincide con $G_k(z)$.

Con esto solo nos falta comprobar la condición de crecimiento, y para ello tomamos $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} |G_k(x+iy)| &= \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \left| \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} ((mx+n) + imy)^{-k} \right| \leq \\ &\leq \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} |(mx+n) + imy|^{-k}, \end{aligned}$$

y este límite es 0 porque al ser $k > 2$, la serie converge y y^{-1} se va rápidamente a 0.

Las formas modulares son 1-periódicas y tienen un desarrollo de Fourier convergente. Debido a la condición de crecimiento, se pueden escribir de la siguiente forma

$$(2.2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)$$

donde $e(t)$ denota $e^{2\pi it}$.

Definición 2.3. Las formas modulares con $a_0 = 0$ en su desarrollo de Fourier se llaman formas cuspidales o parabólicas.

Volviendo a las series de Eisenstein, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.

$$(2.3) \quad G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz)$$

siendo $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ y $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$.

Demostración. Empezaremos estudiando el coeficiente n -ésimo de la serie de Fourier de la función $\pi e(-rx)$ en $[-1/2, 1/2]$ para un $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dado.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1/2}^{1/2} \pi e(-rx) e(-nx) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \pi e(-(r+n)x) dx = \frac{i}{2(r+n)} (-2i(\sin(\pi(r+n)))) = \\ &= \frac{1}{r+n} (\sin(\pi r) \cos(\pi n) + \sin(\pi n) \cos(\pi r)) = (-1)^n (r+n)^{-1} \sin(\pi r). \end{aligned}$$

Con ello tenemos $\pi e(-rx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (r+n)^{-1} \sin(\pi r) e(nx)$, y utilizando la identidad Parseval, llegamos a que

$$\pi^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r+n)^2} \sin^2(\pi r).$$

Ahora, notando que $\text{sen}(z) = (-\text{senh}(iz)/i)$ obtenemos

$$\frac{-\pi^2}{\text{senh}^2(\pi ir)} = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r+n)^2}.$$

Usando la definición de $\text{senh}(z)$, desarrollando el cuadrado y multiplicando y dividiendo por $e(r)$, se llega a que

$$\frac{-\pi^2}{\text{senh}^2(\pi ir)} = \frac{-4\pi^2 e(r)}{e(r)(e(r) + e(-r) - 2)} = \frac{-4\pi^2 e(r)}{e(2r) - 2e(r) + 1} = \frac{-4\pi^2 e(r)}{(1 - e(r))^2}.$$

Ahora, utilizando que $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$, al derivar se observa que $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ para $|x| < 1$. De esta forma, tomando $x = e(r)$ se tiene que $(1 - e(r))^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e(rn)$, y por tanto, $e(r)(1 - e(r))^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e(r(n+1)) = \sum_{n=1}^{\infty} ne(rn)$. Con esto,

$$\frac{-4\pi^2 e(r)}{(1 - e(r))^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne(rn).$$

En resumen, tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r+n)^2} = -\frac{\pi^2}{\text{senh}^2(\pi ir)} = -\frac{4\pi^2 e(r)}{(1 - e(r))^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne(nr) \quad \text{para } r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, sabemos que $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ tiene puntos de acumulación, y todas las funciones que aparecen son holomorfas en $\mathbb{H} \subseteq (\mathbb{C} - \mathbb{Z})$, luego por el principio de extensión analítica, tenemos esas mismas igualdades cambiando r por $z \in \mathbb{H}$.

Ahora nos quedamos con $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne(nz)$ para $z \in \mathbb{H}$ y observamos que derivando k veces se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{k+2}} = (-1)^{k+1} \frac{4\pi^2 (2\pi i)^k}{(k+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1} e(nz).$$

Sustituimos z por mz , hacemos el cambio de variable que envía k a $k-2$ y añadimos el sumatorio sobre m para obtener

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} e(nmz).$$

Notamos que k es par y que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} e(nmz) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} e(nz)$. Por ello, podemos concluir

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz) \quad \text{para } k > 2 \text{ par.}$$

Con todo esto,

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue de que k es par. □

De este desarrollo se deduce la identidad

$$(2.4) \quad (2k-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w+n)^{-2k} = (2\pi i)^{2k} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} e(mw).$$

Ahora pasaremos a otro ejemplo importante dentro de la teoría de formas modulares.

Definición 2.4. Se define la función discriminante como

$$\Delta(z) = e(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(nz))^{24}.$$

Observamos que en el desarrollo de Fourier de la función discriminante, $a_0 = 0$, y utilizando que (2.1) es equivalente a $f(-1/z) = z^k f(z)$, para ver que Δ es una forma cuspidal nos basta con demostrar

$$(2.5) \quad \Delta(-1/z) = z^{12} \Delta(z) \quad \text{para } z \in \mathbb{H}.$$

A su vez, para demostrar (2.5), nos es suficiente demostrarlo para $z = it$ con t un número real positivo, como consecuencia del principio de unicidad. Empezaremos transformando un poco $\Delta(-1/it) = (it)^{12} \Delta(it)$ (donde t es real positivo) para trabajar con una expresión más sencilla.

1. $\Delta(-1/it) = \Delta(i/t) = e(i/t) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(ni/t))^{24} = e^{-2\pi/t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n/t})^{24}.$
2. $(it)^{12} \Delta(it) = t^{12} e(it) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(int))^{24} = t^{12} e^{-2\pi t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi nt})^{24}.$

Igualando ambas expresiones llegamos a que

$$t^{12} = e^{2\pi(t-1/t)} \left(\frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n/t})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi nt})} \right)^{24},$$

y si aplicamos logaritmos a ambos lados

$$12 \log(t) = 2\pi(t - t^{-1}) + 24 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-2\pi n/t}) - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-2\pi nt}) \right).$$

Ahora utilizamos la siguiente propiedad que se sigue por Taylor: $-\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1-x^n)}$ y obtenemos $12 \log(t) = 2\pi(t - t^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \left(\frac{24e^{-2\pi nt}}{1-e^{-2\pi nt}} - \frac{24e^{-2\pi n/t}}{1-e^{-2\pi n/t}} \right)$. Por tanto, obtenemos que demostrar (2.5) es equivalente a demostrar

$$(2.6) \quad 12 \log t = 2\pi(t - t^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{24}{e^{2\pi nt} - 1} - \frac{24}{e^{2\pi n/t} - 1} \right).$$

Para demostrar (2.6) empezaremos considerando la función impar

$$h(z) = \frac{3}{z} \cdot \frac{e(z) + 1}{e(z) - 1} \cdot \frac{e(iz/t) + 1}{e(iz/t) - 1}.$$

Observamos que $e(z) - 1 = 0$ si y solo si $z \in \mathbb{Z}$ y $e(iz/t) - 1 = 0$ si y solo si $z = itn, n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, solo en esos puntos h no es holomorfa. Así que, por el teorema de los residuos y utilizando que h es impar ($\text{Res}(h, n) = \text{Res}(h, -n)$), tenemos la siguiente equivalencia para $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\int_{(N+\frac{1}{2})\mathcal{P}} h(z) dz = 2\pi i \text{Res}(h, 0) + 4\pi i \sum_{n=1}^N (\text{Res}(h, n) + \text{Res}(h, itn)),$$

donde \mathcal{P} es el paralelogramo de vértices $1, it, -1$ y $-it$.

Con un cálculo obtenemos que $2\pi i \operatorname{Res}(h, 0) = 2\pi(t - t^{-1})$ y para $1 \leq n \leq N$

$$\operatorname{Res}(h, n) = \frac{-3i e^{-2\pi n/t} + 1}{n\pi e^{-2\pi n/t} - 1}, \quad \operatorname{Res}(h, itn) = \frac{3i e^{-2\pi nt} + 1}{n\pi e^{-2\pi nt} - 1}.$$

Por ello, obtenemos que el segundo miembro coincide con el de (2.6) si hacemos N tender a ∞ .

Proposición 2.2.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N+\frac{1}{2})\mathcal{P}} h(z) dz = \int_1^{it} \frac{3dz}{z} - \int_{it}^{-1} \frac{3dz}{z} + \int_{-1}^{-it} \frac{3dz}{z} - \int_{-it}^1 \frac{3dz}{z} = 12 \log t.$$

Demostración. Empezaremos viendo que para todo $z = x+iy \in \mathcal{P}$ tal que $xy \neq 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} (N + \frac{1}{2})h((N + \frac{1}{2})z) = 3z^{-1} \operatorname{sgn}(xy)$, donde $\operatorname{sgn}(x)$ es la función signo de x .

$$\begin{aligned} L &= \lim_{N \rightarrow \infty} (N + \frac{1}{2})h((N + \frac{1}{2})z) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{3 e^{2\pi i(N+1/2)x} e^{-2\pi(N+1/2)y} + 1 e^{-2\pi/t(N+1/2)x} e^{-2\pi/t(N+1/2)yi} + 1}{z e^{2\pi i(N+1/2)x} e^{-2\pi(N+1/2)y} - 1 e^{-2\pi/t(N+1/2)x} e^{-2\pi/t(N+1/2)yi} - 1}. \end{aligned}$$

Ahora, al considerar el límite cuando N tiende a infinito, en el segundo factor solo nos interesa el término de la y y en el tercero, el de la x . Notamos que cuando $x, y > 0$, ambos términos tienden a 0 al tomar dicho límite. Por tanto, en este caso $L = 3z^{-1}(-1)^2 = 3z^{-1} \operatorname{sgn}(xy)$. En el caso en el que, $x > 0, y < 0$, el término de la x sigue tendiendo a 0, pero ahora el término de la y tiende a infinito, así que ahora tendríamos $L = -3z^{-1} = 3z^{-1} \operatorname{sgn}(xy)$. Se razona de manera análoga para los dos casos restantes y vemos que siempre obtenemos $L = 3z^{-1} \operatorname{sgn}(xy)$.

De esta forma tendremos que $L = \frac{3}{z}$ para z en el primer y en el tercer cuadrante y $L = -\frac{3}{z}$ para z en el segundo y cuarto cuadrante. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N+\frac{1}{2})\mathcal{P}} h(z) dz &= \int_1^{it} \frac{3dz}{z} - \int_{it}^{-1} \frac{3dz}{z} + \int_{-1}^{-it} \frac{3dz}{z} - \int_{-it}^1 \frac{3dz}{z} = \\ &= -3(\log(1) - \log(it)) + 3(\log(it) - \log(-1)) - 3(\log(-1) + \log(-it)) + 3(\log(-it) - \log(1)) = \\ &= 6(\ln(|t|) + \arg(it) + \ln(|t|) + \arg(-it)) = 12 \log t. \end{aligned}$$

□

Como sabíamos $\int_{(N+\frac{1}{2})\mathcal{P}} h(z) dz = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{24}{e^{2\pi nt} - 1} - \frac{24}{e^{2\pi n/t} - 1} \right)$, tomando límites, obtenemos justo (2.6), y así concluimos que la función discriminante es una forma cuspidal de peso 12.

2.2. La dimensión del espacio vectorial de las formas modulares

Nuestro siguiente punto de interés es la dimensión de los espacios vectoriales que conforman las formas modulares y las formas cuspidales de peso k . A partir de ahora los denotaremos por \mathcal{M}_k y \mathcal{S}_k , respectivamente.

Empezaremos introduciendo la llamada *fórmula de valencia*.

Teorema 2.5. Dada una forma débilmente modular f no nula de peso k en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces

$$\frac{1}{2}n_i(f) + \frac{1}{3}n_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f) + n_\infty(f) + \sum'_z n_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Aquí, $n_\infty(f)$ indica el menor n en (2.2) con $a_n \neq 0$, n_z es el orden de anulación de f en z (cero si $f(z) \neq 0$ y m si z es un cero de orden m) y el sumatorio es sobre un conjunto maximal de elementos de \mathbb{H} que no están relacionados por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ni tampoco están en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})i$ ni en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Observación 2.1. Sabemos que el dominio fundamental nos garantiza la primera restricción, así que podemos hacer la suma sobre

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} - \partial\mathcal{D} \cap \{\Re(z) < 0\} - \left\{i, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\} \quad \text{donde } \partial\mathcal{D} \text{ indica la frontera y}$$

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq 1/2\}.$$

Demostración. Sea f una forma débilmente modular. Consideramos el siguiente contorno.

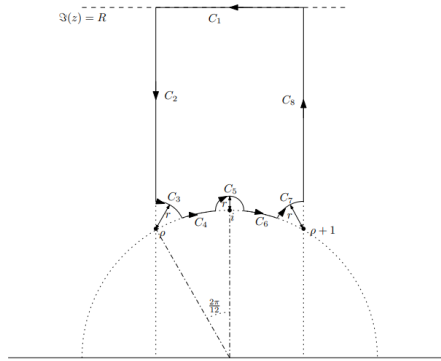


Figura 2.1: Contorno C . Imagen obtenida de [13].

Para demostrar la fórmula, se integra $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sobre el contorno C de dos maneras distintas. En primer lugar, tomamos R suficientemente grande para que el contorno contenga todos los ceros y los polos de \mathcal{B} y aplicamos el teorema de los residuos.

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{p \in \text{int}C} \text{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) = 2\pi i \sum_{z \in \mathcal{B}} n_z(f).$$

La segunda manera consistirá en hacer la suma de las integrales sobre C_1, \dots, C_8 (ver apéndice B.1). Se observa finalmente que al igualar las dos cantidades se obtiene la igualdad deseada. \square

Teorema 2.6. Para k par se tiene que

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases} \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{S}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 12, \\ \dim \mathcal{M}_k - 1 & \text{si } k \geq 12. \end{cases}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x . Mientras que si k es impar, la dimensión es nula.

Para demostrarlo, veremos primero la siguiente proposición.

Proposición 2.3. 1. $\mathcal{M}_k = \{0\}$ si $k = 2$.

2. $\mathcal{S}_k = \{0\}$ si $k < 12$.

3. $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$.

Demostración. 1. Si $k = 2$, fijándonos en el teorema 2.5 tenemos que $1/6 =$ suma de múltiplos no negativos de $1, 1/2$ y $1/3$. Lo cual es imposible.

2. Si f es no nula, $f \in \mathcal{S}_k \Rightarrow n_\infty(f) \geq 1 \Rightarrow k/12 \geq 1 \Rightarrow k \geq 12$.

3. Sea $f \in \mathcal{M}_0$, es decir, $f(\gamma z) = f(z)$, y sea $g = f(\infty) \in \mathcal{M}_0 \Rightarrow f - g \in \mathcal{S}_0 = \{0\} \Rightarrow f = g$ es constante. $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ es el espacio de las funciones constantes en \mathbb{H} . □

Corolario 2.1. $\forall k \mathcal{S}_{k+12} = \Delta \mathcal{M}_k$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}_{k+12}, g = \frac{f}{\Delta}$ es holomorfa en \mathbb{H} porque Δ no se anula en \mathbb{H} . Además, $n_\infty(g) = n_\infty(f) - n_\infty(\Delta) = n_\infty(f) - 1 \geq 0$, esto nos dice que se tiene la condición de crecimiento, pues todos los términos con n negativo del desarrollo de Fourier no aparecen. Por ello, $g \in \mathcal{M}_k$. Así, $f = \Delta g$ con $g \in \mathcal{M}_k$. □

Con todo esto ya tenemos lo necesario para ofrecer una demostración del Teorema 2.6.

Demostración. El resultado de la dimensión de \mathcal{S}_k se sigue de que $\mathcal{S}_k = \{0\}$ si $k < 12$ y para $k \geq 12$, tenemos que $\dim \mathcal{S}_k = \dim \mathcal{M}_{k-12}$ por el corolario 2.1. Como $\lfloor \frac{k-12}{12} \rfloor = \lfloor k/12 \rfloor - 1$, se llega a $\dim \mathcal{S}_k = \dim \mathcal{M}_k - 1$ como queríamos.

Ahora veremos por inducción la dimensión de \mathcal{M}_k . Sabemos $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ y $\mathcal{M}_2 = \{0\}$ y observamos que se cumple $\dim \mathcal{M}_0 = \lfloor 0/12 \rfloor + 1 = 1 = \dim \mathbb{C}$ y $\dim \mathcal{M}_2 = \lfloor 2/12 \rfloor = 0 = \dim \{0\}$. Por otro lado, para los casos $k = 4, 6, 8$ y 10 : $\dim \mathcal{M}_k = 1 + \dim \mathcal{S}_k = 1 = 1 + \lfloor k/12 \rfloor$ (puesto que $\mathcal{S}_k = \{0\}$ por ser $k < 12$).

Ahora si $k \geq 12$: $\dim \mathcal{M}_k = 1 + \dim \mathcal{S}_k = 1 + \dim \mathcal{M}_{k-12}$ y tenemos dos posibilidades. En primer lugar, si $k \equiv 2 \pmod{12}$, entonces $k - 12 \equiv 2 \pmod{12}$ y aplicando la hipótesis de inducción, $1 + \dim \mathcal{M}_{k-12} = 1 + \lfloor \frac{k-12}{12} \rfloor = \lfloor k/12 \rfloor$. Para el caso $k \not\equiv 2 \pmod{12}$, razonando de forma similar obtenemos $1 + \dim \mathcal{M}_{k-12} = 1 + 1 + \lfloor \frac{k-12}{12} \rfloor = 1 + \lfloor k/12 \rfloor$. □

Terminaremos estudiando algunas relaciones bastante interesantes que podemos obtener a partir de las formas modulares con todo lo que hemos demostrado hasta ahora.

Proposición 2.4.

$$G_8(z) = \frac{3}{7} G_4^2(z).$$

Demostración. Empezamos viendo que $3G_4^2 - 7G_8 \in \mathcal{M}_8$ porque tanto G_4^2 como G_8 pertenecen a \mathcal{M}_8 y se trata de un espacio vectorial. Además, por (2.3), sabemos que G_8 y G_4 tienen los siguientes desarrollos de Fourier.

$$G_8(z) = \frac{\pi^8}{4725} + 2 \frac{(2\pi)^8}{7!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) e(nz),$$

$$G_4(z) = \frac{\pi^4}{45} + 2 \frac{(2\pi)^4}{3!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e(nz).$$

Por tanto,

$$G_4^2(z) = \frac{\pi^8}{2025} + \frac{32\pi^8}{135} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)e(nz) + \frac{256\pi^8}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)e(nz).$$

De forma que, $3G_4^2 - 7G_8 = \frac{3\pi^8}{2025} - \frac{7\pi^8}{4725} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(nz) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(nz)$. Por lo tanto, para la serie de Fourier de $3G_4^2 - 7G_8$ tenemos que $|a_0| = 0$, y con todo ello concluimos que es una forma cuspidal de peso 8. Como hemos visto que $\dim \mathcal{S}_8 = 0$, obtenemos que $G_8(z) = \frac{3}{7}G_4^2(z)$. \square

Corolario 2.2.

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

Demostración. Tenemos que $G_8(z) = \frac{3}{7}G_4^2(z)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^8}{4725} + \frac{32\pi^8}{315} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)e(nz) = \\ &= \frac{\pi^8}{4725} + \frac{32\pi^8}{315} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)e(nz) + 120 \frac{32\pi^8}{315} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)e(nz) = \\ &= \frac{\pi^8}{4725} + \frac{32\pi^8}{315} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) \right) e(nz). \end{aligned}$$

De forma que comparando coeficientes n -ésimos, obtenemos la igualdad que queríamos. \square

CAPÍTULO 3

La función theta

3.1. Definición de la función theta

Empezaremos a hablar ahora de la llamada *función theta*, que aunque no satisface exactamente las condiciones de lo que es una forma modular, tiene importancia en este trabajo por su relación con el número de representaciones de un entero como suma de cuadrados. Se define como sigue.

$$(3.1) \quad \theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z/2)$$

y se observa que es holomorfa y 2-periódica en \mathbb{H} .

Como hemos comentado, guarda relación con el número de representaciones de un entero como suma de cuadrados, pues se tiene la siguiente relación para $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$(3.2) \quad \theta^k(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e(nz/2),$$

donde

$$r_k(n) = \#\{(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k : n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2 = n\}.$$

Como ya vimos en el capítulo 1, los elementos S y T son muy relevantes en la teoría de formas modulares, y ahora volveremos a trabajar con ellos. Se observa que θ es invariante por T^2 , mientras que para S tenemos el siguiente resultado.

$$(3.3) \quad \theta(Sz) = \sqrt{z/i} \theta(z) \quad \text{para } z \in \mathbb{H},$$

que nos recuerda a una forma modular de peso $1/2$ exceptuando una constante multiplicativa.

Nos basta demostrar (3.3) para $z = it$ con $t \in \mathbb{R}^+$ gracias al principio de unicidad. Para ello consideraremos la siguiente función: $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t(n+x)^2}$, que es 1-periódica, y empezaremos analizando sus coeficientes de Fourier.

Llamaremos $g(x) = e^{-\pi t x^2}$, de manera que $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(x+m)$. Sabemos que los coeficientes de Fourier de F satisfacen

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(x+m) e(-nx) dx,$$

por lo que con un cambio de variable (cambiando x por $x-m$), y el teorema de la convergencia dominada llegamos a que

$$a_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-m}^{1/2-m} g(x) e(-n(x-m)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} \cos(2\pi n x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} \sin(2\pi n x) dx$$

y la segunda integral se anula por simetría.

Ahora, utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi xy) dx = e^{-\pi y^2}$, se obtiene

$$a_n = t^{-1/2} e^{-\pi n^2/t},$$

y con esto tenemos todo lo necesario para justificar (3.3).

Evaluando nuestra función F en 0, obtenemos por un lado: $F(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t m^2} = \theta(it)$ y por otra parte, si utilizamos el desarrollo de Fourier tenemos: $F(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{-1/2} e^{-\pi n/t^2} = t^{-1/2} \theta(i/t)$. Igualando ambas expresiones se obtiene justo lo que queríamos.

3.2. La relación de la función theta con las formas modulares

Proposición 3.1. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, $\theta^{8k}(\gamma z) = j_{\gamma}^{4k}(z) \theta^{8k}(z)$ para $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle$.

En otras palabras, $\theta^{8k}(z)$ se comporta en cierto modo como una forma modular de peso $4k$ con respecto al grupo $\langle S, T^2 \rangle$.

Demostración. Puesto que queremos demostrarlo para $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle$, estudiaremos primero cómo actúa θ sobre Sz y T^2z .

Utilizando (3.3), tenemos que $\theta^{8k}(Sz) = z^{4k} \theta^{8k}(z) = j_S^{4k}(z) \theta^{8k}(z)$, como queríamos. Por otra parte, $\theta^{8k}(T^2z) = \theta^{8k}(z)$, que también es lo que buscamos porque $j_{T^2}^{4k}(z) = 1$. Ahora para las combinaciones de T^2 y S , se comprueba que $j_{\gamma_1}(\gamma_2 z) j_{\gamma_2}(z) = j_{\gamma_1 \gamma_2}(z)$ (ver apéndice C.1), por lo tanto, $j_{T^2 S}(z) = z$ y $j_{S T^2}(z) = z + 2$. De modo que como $\theta^{8k}(T^2 S z) = z^{4k} \theta^{8k}(z)$ y $\theta^{8k}(S T^2 z) = (z + 2)^{4k} \theta^{8k}(z)$, tenemos justo la igualdad que queríamos. Para combinaciones más largas se razona de la misma manera. \square

Es habitual que a las funciones modulares que actúan sobre grupos de índice finito de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ se les llame también *funciones modulares*. Como consecuencia del siguiente teorema, θ^{8k} se considera una función modular de peso $4k$ con respecto a Γ_{θ} .

Teorema 3.1. $\Gamma_{\theta} = \langle S, T^2 \rangle$.

Demostración. Lo primero que notamos es que para todo $\gamma \in \Gamma_{\theta}$, se tiene que $\gamma = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots S T^{a_n} S$ para ciertos $a_j \in \mathbb{Z}$. Esto es una consecuencia de la sección 1.2. Puesto que Γ_{θ} es un subgrupo de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ y además, $S^4 = Id$, es fácil ver que podemos representar γ de la manera descrita. Ahora intentaremos transformarlo para que todos los a_j sean pares, utilizando la relación $S T^t = T^{-1} S$.

En el caso de que exista algún a_j impar, llamando m al menor entero tal que a_m es impar se tiene que $\gamma = T^{a_1} S \dots T^{a_{m-1}} S T^{a_m} S T^{a_{m+1}} S \dots T^{a_n} S = T^{a_1} S \dots T^{a_{m-1}} S T^{1+a_m} S T^t T^{a_{m+1}} S \dots T^{a_n} S$, y así se consigue $1 + a_m$ par.

Veremos ahora que para todo $\gamma \in \Gamma_{\theta}$, o bien $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle$, o bien $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle T S$, o bien $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle T$. Para comprobarlo utilizaremos las relaciones: $U T^{\pm 1} = (T^2 S)^{\mp 1} U$ y $U S = S T^{-1}$, siendo $U = T^t$. De aquí se deduce también que $U T^{a_k} S = (T^2 S)^{-a_k} S T^{-1}$. Lo demostraremos por inducción sobre n con $\gamma = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots S T^{a_n} S$ para ciertos $a_j \in \mathbb{Z}$.

Si $n = 1$: $\gamma = T^{a_1} S = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto, a_1 es par y $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle$. Ahora nuestra hipótesis de inducción será que $\gamma = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots S T^{a_n} S$ pertenece a uno de los tres conjuntos descritos previamente y lo comprobaremos para $\gamma' = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots S T^{a_n} S T^{a_{n+1}} S$.

1. Si $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle$: Si a_{n+1} es par, $\gamma' \in \langle S, T^2 \rangle$. Si no, $\gamma' = T^{a_1} S T^{a_2} S \dots S T^{a_n} S T^{a_{n+1}-1} T S \in \langle S, T^2 \rangle T S$.
2. Si $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle T S$: $\gamma' = M T S T^{a_{n+1}} S$, donde $M \in \langle S, T^2 \rangle$. Por tanto, $\gamma' = M T^2 T^{-1} S T^{a_{n+1}} S = M T^2 S (T^2 S)^{-a_{n+1}} T^{-2} T \in \langle S, T^2 \rangle T$.
3. Si $\gamma \in \langle S, T^2 \rangle T$: $\gamma' = M T T^{a_{n+1}} S$. De forma que si a_{n+1} es impar, $\gamma' \in \langle S, T^2 \rangle$; y si es par: $\gamma' = M T^{a_{n+1}} T S \in \langle S, T^2 \rangle T S$.

Sin embargo, sabemos que $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_\theta \cup \Gamma_\theta T \cup \Gamma_\theta T S$, y esta unión es disjunta. Por ello, como $\gamma \in \Gamma_\theta$, las dos últimas posibilidades no pueden ocurrir y se concluye que $\Gamma_\theta = \langle S, T^2 \rangle$. \square

Introduciremos ahora una variante de las series de Eisenstein. Definimos la siguiente función.

$$G_{\theta,2k}(z) = \sum_{2 \nmid c+d} \sum_{d} \frac{(-1)^{kc}}{(cz+d)^{2k}} \quad \text{donde } c \text{ y } d \text{ recorren los enteros, para } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Sumar primero en c y después en d o viceversa nos da el mismo resultado, y a pesar de que para $k = 1$ la serie no converge absolutamente, se sigue obteniendo el mismo resultado gracias a la cancelación inducida por $(-1)^c$. Veremos además que es interesante cómo esta función comparte ciertas propiedades con θ^{4k} .

Proposición 3.2. $G_{\theta,2k}(T^2 z) = G_{\theta,2k}(z)$ y $G_{\theta,2k}(S z) = (-1)^k z^{2k} G_{\theta,2k}(z)$.

Demostración.

$$G_{\theta,2k}(T^2 z) = G_{\theta,2k}(z+2) = \sum_{2 \nmid c+d} \sum_{d} \frac{(-1)^{kc}}{(cz+(d+2c))^{2k}}.$$

Ahora, con el cambio de variable $d = l - 2c$, tenemos que $2 \nmid l + c$ y nos queda: $G_{\theta,2k}(T^2 z) = G_{\theta,2k}(z)$.

$$G_{\theta,2k}(S z) = G_{\theta,2k}\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} \sum_{2 \nmid c+d} \sum_{d} \frac{(-1)^{kd} (-1)^{(c-d)k}}{(dz-c)^{2k}}.$$

Notando que $c - d$ es impar y con el cambio $l = -c$, obtenemos: $G_{\theta,2k}(S z) = (-1)^k z^{2k} G_{\theta,2k}(z)$. \square

Con esto probamos que $G_{\theta,2k}(z)$ es una función modular de peso $2k$ sobre Γ_θ , con un sistema de multiplicadores inducido por un signo.

Estudiaremos ahora su desarrollo de Fourier, que guarda cierto parecido con el de $G_{2k}(z)$.

Proposición 3.3.

$$2^{2k-1} (G_{\theta,2k}(z) - a_0) = (-1)^k \sum_{d=1, 2 \nmid d}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(dz/2+n)^{2k}} + \sum_{d=1, 2 \nmid d}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(dz/2+1/2+n)^{2k}}$$

donde $a_0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2m+1)^{-2k} = 2\zeta(2k)(1-2^{-2k})$.

Demostración. Agrupando los términos con c positivo y negativo, respectivamente, se tiene

$$G_{\theta,2k}(z) = \sum_{2 \nmid c+d} \sum_{d} \frac{(-1)^{kc}}{(cz+d)^{2k}} = 2 \sum_{c=1, 2 \nmid c}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}, 2 \nmid d} \frac{(-1)^k}{(cz+d)^{2k}} + 2 \sum_{c=1, 2 \nmid c}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}, 2 \nmid d} \frac{1}{(cz+d)^{2k}} + a_0,$$

donde $a_0 = \sum_{d \in \mathbb{Z}, 2 \nmid d} d^{-2k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2m+1)^{-2k}$.

Por tanto,

$$G_{\theta,2k}(z) - a_0 = (-1)^k 2^{1-2k} \sum_{c=1, 2 \nmid c}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{cz}{2} + n\right)^{-2k} + 2^{1-2k} \sum_{c=1, 2|c}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{cz}{2} + \frac{1}{2} + n\right)^{-2k},$$

donde $n = d/2$ en el primer sumatorio y $d/2 = n + 1/2$ en el segundo (por ser d par o impar).

Así que cambiando c por d y multiplicando por 2^{2k-1} se obtiene lo que queríamos.

Finalmente, se comprueba

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2m+1)^{2k}} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2k}} = 2\zeta(2k) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}} = 2\zeta(2k) - 2\zeta(2k)2^{-2k} = \\ &= 2\zeta(2k)(1 - 2^{-2k}). \end{aligned}$$

□

Con esto podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *El desarrollo de Fourier de $G_{\theta,2k}(z)$ es*

$$(3.4) \quad G_{\theta,2k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz/2)$$

donde a_0 es como antes y

$$a_n = \frac{2\pi^{2k} n^{2k-1}}{(2k-1)!} \left(\sum_{d|n, 2 \nmid d} d^{1-2k} + \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{k+n/d} d^{1-2k} \right) \quad \text{para } n > 0.$$

Demostración. Utilizando la proposición 3.3 y la identidad (2.4) llegamos a

$$G_{\theta,2k}(z) - a_0 = \frac{2(-1)^k (\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d=1, 2 \nmid d}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} e(m \frac{dz}{2}) + \frac{2(\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d=1, 2|d}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} e(m \frac{dz+1}{2}).$$

Por tanto,

$$G_{\theta,2k}(z) = a_0 + \frac{2\pi^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{d=1, 2 \nmid d}^{\infty} m^{2k-1} e(m \frac{dz}{2}) + \sum_{d=1, 2|d}^{\infty} (-1)^k m^{2k-1} (-1)^m e(m \frac{dz}{2}) \right).$$

Por último, aplicando el cambio $m = n/d$, llegamos al resultado. □

Definición 3.2. Dado un dominio fundamental (cerrado) F de un subgrupo de índice finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, llamamos cúspides a los puntos situados en el “borde” de \mathbb{H} . Es decir, son cúspides los elementos de $F \cap \mathbb{R}$ y también $i\infty$ (en caso de estar en F).

Para funciones modulares de peso k , en cada cúspide \mathfrak{a} consideramos la condición: $|j_{\gamma_{\mathfrak{a}}}^{-k}(x + iy)f(\gamma_{\mathfrak{a}}(x + iy))|y^{-\alpha} \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow +\infty$ para algún $\alpha > 0$ y $\gamma_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\gamma_{\mathfrak{a}}(i\infty) = \mathfrak{a}$. Las funciones modulares que satisfacen esta condición de crecimiento se llaman también *formas modulares*. Teniendo esto en cuenta, para estudiar nuestras funciones f cerca de \mathfrak{a} , estudiamos $f \circ \gamma_{\mathfrak{a}}$ cerca de $i\infty$.

En el caso del dominio fundamental estudiado en la primera sección, \mathcal{D}_{θ} , tendríamos que las cúspides son $i\infty, 1$ y -1 . Para comprobar el comportamiento de nuestras funciones θ , y $G_{\theta,2k}$, nos basamos en que si uno tiene un desarrollo de Fourier convergente de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz),$$

entonces $\lim_{y \rightarrow +\infty} |f(x + iy)| = |a_0|$. Por lo tanto, como consecuencia de (3.1) y (3.4) se tiene

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \theta(z) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} G_{\theta, 2k}(z) = a_0 = 2\zeta(2k)(1 - 2^{-2k}).$$

Ahora, sea $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, se cumple $\gamma_1(i\infty) = 1$. Por lo mencionado anteriormente, si queremos estudiar nuestras funciones cerca de 1, las estudiaremos en $\gamma_1(z)$ cuando $\Im(z) \rightarrow +\infty$. Los resultados están recogidos en las dos proposiciones siguientes, cuyas pruebas, incluidas en el apéndice C.1.1 y C.1.2, apelan a ciertas simetrías y a

$$(3.5) \quad \lim_{\Im(w) \rightarrow +\infty} e(-w) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w + n)^{-2k} = (2\pi i)^{2k} / (2k - 1)!,$$

que es consecuencia directa de (2.4).

Proposición 3.5.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z/8)\theta(\gamma_1 z)}{\sqrt{z/i}} = 2.$$

Proposición 3.6.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z)G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = \frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k - 1)!} \quad \text{si } 2 \mid k,$$

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z/2)G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = -\frac{4\pi^{2k}}{(2k - 1)!} \quad \text{si } 2 \nmid k.$$

CAPÍTULO 4

Representaciones como suma de 2, 4 y 8 cuadrados

En este nuevo capítulo empezaremos a utilizar todo lo estudiado en capítulos anteriores para obtener fórmulas explícitas para el cálculo del número de representaciones de enteros como suma de 2, 4 y 8 cuadrados. Esto es muy interesante, puesto que hacerlo a mano resultaría muy laborioso o incluso imposible en algunos casos.

Empezaremos introduciendo una variante de la fórmula de valencia, vista en el capítulo 2, pero ahora para el subgrupo Γ_θ .

Proposición 4.1. *Sea f una forma modular no nula de peso k con respecto a Γ_θ sin sistema de multiplicadores. Entonces*

$$(4.1) \quad \frac{1}{2}n_i(f) + n_\infty(f) + n_1(f) + \sum'_z n_z(f) = \frac{k}{4}.$$

Demostración. (Esquema). La demostración es casi idéntica a la del caso $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, solo que ahora cambiaremos un poco el dominio de integración. Evitamos las cúspides equivalentes 1 y -1 e integramos sobre

$$\mathcal{D}_{\theta,\epsilon} = \mathcal{D}_\theta \cap \{\Im(z) \leq \epsilon^{-1}\} \cap \{|z+1-i\epsilon/2| \geq \epsilon/2\} \cap \{|z-1-i\epsilon/2| \geq \epsilon/2\}.$$

Igual que hicimos en el caso de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ integramos de dos maneras diferentes: utilizando el principio del argumento directamente e integrando “a trozos”. Para integrar en la frontera recta superior utilizamos el desarrollo en el infinito $f(z) = \sum_{n=n_\infty(f)}^\infty a_n e(nz/2)$. Para el arco de circunferencia cerca de 1 hacemos el cambio de variable que envía z a $\gamma_1^{-1}(z)$, que transforma este arco en el segmento que une $1/2 + i\epsilon^{-1}$ con $i\epsilon^{-1}$; y cerca de -1 , hacemos el cambio de variable correspondiente para transformar el arco en el segmento que une $i\epsilon^{-1}$ con $-1/2 + i\epsilon^{-1}$. Después, se usa que $j_{\gamma_1}^{-k} f(\gamma_1 z)$ es 1-periódica y tiene un desarrollo $\sum_{n=n_1(f)}^\infty a_n e(nz/2)$, luego podemos integrar como antes. \square

Otra diferencia con respecto al caso $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es la definición de $n_\infty(f)$ y de $n_1(f)$, el orden de anulación en las cúspides. Estos son los enteros no negativos que satisfacen que los siguientes límites existen y son no nulos

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} f(z) e\left(-\frac{zn_\infty(f)}{2}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(\gamma_1 z) e(-zn_1(f)) \quad \text{con } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que las formas modulares con respecto a Γ_θ son 2-periódicas y por ello, su desarrollo de Fourier es de la forma $\sum_{n=0}^\infty a_n e(nz/2)$. Igual que antes, tendremos que $n_\infty(f)$ será el menor

n con a_n no nulo. Para $n_1(f)$, utilizamos $\gamma_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y vemos su comportamiento en el infinito. Se comprueba que $j_{\gamma_1}^{-k}(z)f(\gamma_1 z)$ es una función 1-periódica, por lo que tiene un desarrollo de Fourier del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)$ y $n_1(f)$ vuelve a ser el menor n tal que $a_n \neq 0$.

Por ejemplo, tomamos $f = G_{\theta,4}$ y observando su desarrollo de Fourier, obtenido en el capítulo 3, vemos que el mínimo n tal que a_n es no nulo es $n = 0$, pues para $G_{\theta,4}$ teníamos que $a_0 = 2\zeta(4)(1 - 2^{-4}) = \pi^4/48$. De forma que $n_{\infty}(f) = 0$.

Además, también en el capítulo 3 vimos que

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} z^{-4} G_{\theta,4}(\gamma_1 z) e(-z) = \frac{16\pi^4}{3}, \quad \text{es decir, es finito y no nulo.}$$

Por ello, se deduce que $n_1(f) = 1$. Además, si tuviéramos $n_i(f) \geq 1$ o $n_z(f) \geq 1$ para algún z del sumatorio en la fórmula de valencia, esta ya no se cumpliría, por lo que se deduce que $f(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{H}$.

4.1. El caso de 8 cuadrados

Pasaremos ahora a obtener las fórmulas para las representaciones de enteros como suma de cuadrados. Nuestro primer objetivo será la fórmula de la suma de 8 cuadrados.

Proposición 4.2. $\theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ es forma modular de peso cero con respecto al grupo Γ_{θ} .

Demostración. Lo primero que observamos es que como $G_{\theta,4}(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$, tenemos que $\theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ es holomorfa en \mathbb{H} .

Lo siguiente que necesitamos es que $\theta^8(\gamma z)/G_{\theta,4}(\gamma z) = \theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ para todo $\gamma \in \Gamma_{\theta}$. Por la proposición 3.2, $\theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ es invariante por T^2 y S , y de aquí se deduce que lo es por Γ_{θ} .

Para la condición de crecimiento, como sabemos que θ^8 es forma modular, existe un α tal que $\frac{|\theta^8(z)|}{\Im(z)^{\alpha}}$ tiende a 0. Tomamos ese α y entonces tenemos que

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{|\theta^8(z)|}{|G_{\theta,4}(z)|} \frac{1}{\Im(z)^{\alpha}} = 0 \frac{1}{|a_0|} = 0,$$

donde a_0 se refiere al término del desarrollo de Fourier de $G_{\theta,4}$. □

Corolario 4.1. $\theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ es constante.

Demostración. Como es una forma modular de peso 0, $\frac{\theta^8(z)}{G_{\theta,4}(z)} - \frac{\theta^8(i)}{G_{\theta,4}(i)}$ también lo es. Sin embargo, para esta forma modular no se satisface (4.1) porque al anularse en i , el lado izquierdo es mayor que 0, luego es distinto del lado derecho por ser $k = 0$. Por tanto, tiene que ser idénticamente nula. Por ello, $\frac{\theta^8(z)}{G_{\theta,4}(z)} = \frac{\theta^8(i)}{G_{\theta,4}(i)}$, es decir, es constante. □

Utilizaremos esta forma modular para obtener la fórmula que buscamos.

Teorema 4.1.

$$r_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3.$$

Demostración. Utilizando lo que sabemos del capítulo 3, llegamos a que

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e^8(-z/8)\theta^8(\gamma_1 z)}{z^4} = 2^8, \quad \lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z)G_{\theta,4}(\gamma_1 z)}{z^4} = \frac{2^4\pi^4}{3}.$$

Como $e^8(-z/8) = e(-z)$ y $2^8 = \left(\frac{2^4\pi^4}{3}\right) \frac{48}{\pi^4}$, se deduce, por el Corolario 4.1, que

$$(4.2) \quad \theta^8(z) = \frac{48}{\pi^4} G_{\theta,4}(z).$$

También en el capítulo 3 vimos sus respectivos desarrollos de Fourier.

$$\theta^8(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_8(n)e(nz/2), \quad G_{\theta,4}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz/2),$$

donde $a_0 = \pi^4/48$ y $a_n = \frac{\pi^4 n^3}{3} \left(\sum_{d|n, 2 \nmid d} d^{-3} + \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} d^{-3} \right)$, para $n > 0$. Por tanto, multiplicando el segundo por $48/\pi^4$ e igualando coeficientes obtenemos que

$$r_8(n) = 16n^3 \sum_{d|n, 2 \nmid d} d^{-3} + 16n^3 \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} d^{-3} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Con argumentos elementales de teoría de números incluidos en el apéndice D.1, esta expresión se simplifica a la del enunciado. \square

Utilizando únicamente lo que hemos estudiado hasta ahora acerca de las formas modulares hemos obtenido una forma muy compacta. Por ejemplo si quisiéramos obtener el número de representaciones de 1111 como suma de 8 cuadrados, nos resultaría imposible hacerlo a mano, pero ahora sabemos que esto es

$$r_8(1111) = 16((-1)^{1112}1^3 + (-1)^{1122}11^3 + (-1)^{1212}101^3 + (-1)^{2222}1111^3) = 2,19 \cdot 10^{10}.$$

4.2. El caso de 4 cuadrados

Queremos ahora deducir una fórmula para el caso de 4 cuadrados, y para ello seguiremos el mismo procedimiento que antes.

Proposición 4.3. $G_{\theta,2}(z)/\theta^4(z)$ es forma modular de peso cero con respecto al grupo Γ_θ y es constante.

Demostración. La relación (4.2) nos garantiza que $\theta^4(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}$, pues sabíamos que $G_{\theta,4}(z)$ no se anula en \mathbb{H} . De forma que $G_{\theta,2}(z)/\theta^4(z)$ es holomorfa en \mathbb{H} . Por otro lado, ya vimos en el capítulo 3 que tanto θ^4 como $G_{\theta,2}$ eran funciones modulares de peso 2 con respecto a Γ_θ con un sistema de multiplicadores dado por un signo. Así que al dividir las, se cancelará el factor $j_\gamma^2(z)$, y el signo quedará positivo. De manera que para todo $\gamma \in \Gamma_\theta$

$$\frac{G_{\theta,2}(\gamma z)}{\theta^4(\gamma z)} = \frac{G_{\theta,2}(z)}{\theta^4(z)}.$$

La condición de crecimiento se demuestra exactamente igual que en la proposición 4.2, utilizando ahora que $G_{\theta,2}$ es forma modular. Además, razonando igual que antes obtenemos que es constante. \square

Teorema 4.2.

$$r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d.$$

Demostración. Otra vez aplicamos los resultados ya conocidos del capítulo 3.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z/2)G_{\theta,2}(\gamma_1 z)}{z^2} = -4\pi^2, \quad \lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e^4(-z/8)\theta^4(\gamma_1 z)}{z^2} = -16.$$

Vemos que $e^4(-z/8) = e(-z/2)$ y $-16 = -4\pi^2(4/\pi^2)$. De aquí se deduce finalmente $\theta^4(z) = 4\pi^{-2}G_{\theta,2}(z)$.

Nos fijaremos de nuevo en sus desarrollos de Fourier para igualar sus coeficientes y obtener una relación.

$$\theta^4(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_4(n)e(nz/2) \quad G_{\theta,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz/2),$$

donde $a_0 = \pi^2/4$ y $a_n = 2\pi^2 n \left(\sum_{d|n, 2 \nmid d} d^{-1} - \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} d^{-1} \right)$, para $n > 0$. Por tanto, multiplicamos el segundo por $4/\pi^2$ e igualamos los coeficientes obteniendo

$$r_4(n) = 8n \sum_{d|n, 2 \nmid d} d^{-1} - 8n \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} d^{-1} \quad \text{para } n > 0.$$

De nuevo, un argumento elemental incluido en el apéndice D.1 reduce esta expresión a la del enunciado. \square

4.3. El caso de 2 cuadrados

Nos gustaría ahora seguir el mismo procedimiento para obtener la fórmula para 2 cuadrados. Sin embargo, θ^2 es de peso 1, y no hay ninguna $G_{\theta,2k}$ de peso 1 para $k \in \mathbb{Z}^+$. Por esta razón, introduciremos una función suplente que definimos como sigue.

$$(4.3) \quad G(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec(n\pi z).$$

Sorprendentemente, su desarrollo de Fourier es el formalmente obtenido sustituyendo $k = 1/2$ en el desarrollo de Fourier de $G_{\theta,2k}$.

Proposición 4.4.

$$G(z) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nz/2)}{1 + e(nz)} = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{2d+1|n} (-1)^d e(nz/2).$$

En particular, $G(i\infty) = 1$.

Demostración. Empezamos viendo que si multiplicamos y dividimos la expresión $\frac{e(nz/2)}{1+e(nz)}$ por $e^{-\pi inz}$ nos queda

$$\frac{1}{e^{-\pi inz} + e^{\pi inz}} = \frac{1}{2 \cos(\pi nz)} = \frac{1}{2} \sec(n\pi z).$$

Por lo tanto

$$G(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sec(n\pi z) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nz/2)}{1 + e(nz)}, \text{ como queríamos.}$$

Para la segunda igualdad lo primero que observamos es que $1/(1+e(nz))$ es una serie geométrica, y por tanto

$$\frac{1}{1 + e(nz)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e(nmz).$$

Con esto tenemos

$$\frac{e(nz/2)}{1 + e(nz)} = e(1nz/2) - e(3nz/2) + e(5nz/2) - \dots$$

y así se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nz/2)}{1 + e(nz)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d e\left((2d+1)n\frac{z}{2}\right).$$

Aplicamos el cambio $m = (2d+1)n$ y nos queda

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(2d+1)|m} (-1)^d e(mz/2).$$

Por último, como $\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} G(z) = |a_0| = 1$, se concluye que $G(i\infty) = 1$. \square

Nos ocuparemos ahora de demostrar que $G(z)$ satisface una relación modular, y para ello seguiremos un procedimiento parecido al que utilizamos en el capítulo 3 para el caso de la función θ .

Proposición 4.5. $G\left(\frac{-1}{z}\right) = -izG(z)$.

Demostración. Nos damos cuenta primero de que, una vez más, nos basta demostrar el resultado para $z = it$ con $t \in \mathbb{R}^+$. Ahora definimos la función $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sech}(\pi t(n+x))$, que es 1-periódica, y estudiamos sus coeficientes de Fourier.

Llamamos $g(x) = \operatorname{sech}(\pi tx)$, de forma que $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(x+m)$. Los coeficientes de su serie de Fourier satisfacen

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(x+m)e(-nx) dx,$$

por lo que con el cambio de variable que envía x a $x-m$ y usando el teorema de la convergencia dominada, obtenemos que

$$a_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2-m}^{1/2-m} g(x)e(-n(x-m)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{\cosh(\pi tx)} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{\cosh(\pi tx)} dx,$$

donde la segunda integral se anula por simetría.

Ahora, utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\pi x) \cos(2\pi \xi x) dx = \operatorname{sech}(\pi \xi)$ y con el cambio de variable que envía x a x/t se concluye que

$$a_n = t^{-1} \operatorname{sech}(\pi n/t).$$

Por tanto, si evaluamos $F(0)$ de dos maneras distintas.

1. $F(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\pi mit) = -i(it)t^{-1}G(it)$.
2. $F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{-1} \operatorname{sech}(\pi in/t) = t^{-1}G(-1/it)$.

Igualando ambas expresiones, obtenemos la igualdad para $z = it$ y por el principio de unicidad, lo tenemos para todo $z \in \mathbb{H}$. \square

Proposición 4.6. $G(\gamma_1 z) = -iz \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sech}(\pi(n+1/2)z)$

Demostración. Empezamos viendo que para $z = it$ teníamos $F(1/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-1} \operatorname{sech}(\pi n/t) e^{\pi i n}$. Por lo tanto, para $z \in \mathbb{H}$ resulta

$$F(1/2) = iz^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec\left(\frac{n\pi}{z}\right) (-1)^n.$$

Por otro lado

$$G(\gamma_1 z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec\left(n\pi - \frac{n\pi}{z}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec\left(\frac{n\pi}{z}\right) (-1)^n = -izF(1/2).$$

Ahora calcularemos $F(1/2)$ de otra forma. Sabíamos que para $z = it$ teníamos $F(1/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sech}(\pi t(n + 1/2))$. Así que para $z \in \mathbb{H}$

$$F(1/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right).$$

Juntándolo todo se obtiene la igualdad deseada. \square

Corolario 4.2. $e(-z/4)G(\gamma_1 z)/z \rightarrow -4i$ para $\Im(z) \rightarrow +\infty$.

Demostración. Por la proposición 4.6, tenemos que hallar

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} -i(e(-z/4) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sec\left(\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2e^{-2\pi i(x+iy)/4}}{e^{i\pi(n+1/2)(x+iy)} + e^{-i\pi(n+1/2)(x+iy)}}.$$

Ahora nos fijamos en que si la parte oscilatoria de alguno de los dos sumandos del denominador es mucho mayor que $e^{-\pi iz/2}$, entonces el límite tiende a 0. Por lo tanto, los únicos valores de n para los que el límite no es 0 son $n = 0$ y $n = -1$, y para cada uno de ellos, el límite cuando $\Im(z) \rightarrow +\infty$ es 2. Concluimos entonces que el límite es $-2i - 2i = -4i$. \square

Con todo esto, tenemos todos los ingredientes necesarios para obtener una fórmula explícita para el caso de 2 cuadrados, igual que hemos hecho con 8 y con 4.

Teorema 4.3.

$$r_2(n) = 4 \sum_{2d+1|n} (-1)^d.$$

Demostración. Sabemos del capítulo 3

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e^2(-z/8)\theta^2(\gamma_1 z)}{z/i} = 4.$$

Notamos que esta fracción es igual a $i \frac{e^2(-z/4)\theta^2(\gamma_1 z)}{z}$, así que utilizando el corolario 4.2, deducimos que $\theta^2(z) = G(z)$. Nos fijamos a continuación en el desarrollo de Fourier de la primera

$$\theta^2(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)e(nz/2).$$

Con esto y la proposición 4.4, igualamos coeficientes y obtenemos el resultado. \square

Veremos ahora un ejemplo de que este resultado es coherente calculando el número de representaciones de 90 como suma de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} 90 &= 3^2 + 9^2 = (-3)^2 + 9^2 = 3^2 + (-9)^2 = (-3)^2 + (-9)^2 = 9^2 + 3^2 = 9^2 + (-3)^2 = (-9)^2 + 3^2 \\ &= (-9)^2 + (-3)^2, \end{aligned}$$

con lo cual $r_2(90) = 8$. Ahora para aplicar la fórmula del Teorema 3, tomamos los divisores impares de 90 y obtenemos

$$r_2(90) = 4((-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^7 + (-1)^{22}) = 8.$$

CAPÍTULO 5

Acerca del caso general

Para terminar el trabajo, en esta última sección trataremos el caso general de la representación de un entero como suma de cuadrados. Solo abordaremos el caso de un número par de sumandos, pues el caso impar es muy distinto.

5.1. Series de Eisenstein generalizadas

Empezaremos introduciendo una generalización de la función $G_{\theta,2k}$, definida en el tercer capítulo.

$$G_{\theta,k}(z) = i^{-k} \sum_{2 \nmid c} \sum_{2 \mid d} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(c+1)k}}{(cz+d)^k} + \sum_{2 \nmid d} \sum_{2 \mid c} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k}}{(cz+d)^k},$$

donde c y d recorren los enteros.

Lo primero que notamos es que si cambiamos k por $2k$, obtenemos la definición que dimos en el tercer capítulo y que, efectivamente, es una generalización de esta.

$$G_{\theta,2k}(z) = (-1)^k \sum_{2 \nmid c} \sum_{2 \mid d} \frac{1}{(cz+d)^k} + \sum_{2 \nmid d} \sum_{2 \mid c} \frac{1}{(cz+d)^k}.$$

Nos damos cuenta de que si $2 \mid c$ y $2 \nmid d$, o viceversa, entonces $2 \nmid (c+d)$. Además, si $2 \nmid c$, entonces tanto si $2 \mid k$ como si no, se tiene que $(-1)^k = (-1)^{kc}$, y si $2 \mid c$ entonces $1 = (-1)^{kc}$. Por lo tanto, nos queda

$$G_{\theta,2k}(z) = \sum_{2 \nmid (c+d)} \sum_{\substack{c,d \\ c+d=2n}} \frac{(-1)^{kc}}{(cz+d)^k}.$$

Proposición 5.1. $G_{\theta,k}$ es una función modular con respecto a Γ_{θ} con el mismo sistema de multiplicadores que θ^{2k} .

Demostración. La prueba es similar a la de la proposición 3.2. (Véase el apéndice E.1). □

Además, procediendo de igual manera que hicimos en el tercer capítulo, podemos encontrar su desarrollo de Fourier.

$$G_{\theta,k}(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(nz/2), \quad \text{donde } a_0 = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{rk}}{(2r+1)^k}$$

$$\text{y } a_n = \frac{2\pi^k n^{k-1}}{(k-1)!} \left(\sum_{\substack{d \mid n \\ 2 \nmid d}} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k} d^{1-k} + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} \sum_{\substack{d \mid n \\ n/d+k \text{ par}}} (-1)^{\frac{1}{2}(n/d+k)} d^{1-k} \right) \text{ para } n \geq 1.$$

5.2. Una fórmula aproximada

Definición 5.1. Llamaremos $\mathcal{M}_{\theta,k}$ al espacio vectorial que conforman las formas modulares de peso k con respecto a Γ_θ y con el mismo sistema de multiplicadores que θ^{2k} .

Con todo lo visto hasta ahora, sabemos que θ^{2k} y $G_{\theta,k}$ pertenecen a este espacio vectorial. Además, a pesar de que para $k = 1$, la segunda de estas no converge, sí que tiene un desarrollo de Fourier que, si redefinimos a_0 como $a_0 + \pi/2$, coincide con el de $\pi G - \pi/2$, donde G es la definida en (4.3).

Observación 5.1. *Supondremos $\dim \mathcal{M}_{\theta,k} = 1$ para $1 \leq k \leq 4$.*

Proposición 5.2. $r_{2k}(n) = \frac{a_n}{a_0}$ para $1 \leq k \leq 4$, donde los a_n son los coeficientes de Fourier de $G_{\theta,k}$ que acabamos de definir.

Demostración. Para demostrarlo utilizaremos la observación 5.1. Por lo tanto, como $\theta^{2k}, G_{\theta,k} \in \mathcal{M}_{\theta,k}$, tendremos que $\theta^{2k} = \lambda G_{\theta,k}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Utilizaremos ahora sus desarrollos de Fourier.

1. Empezamos con $1 < k \leq 4$.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{2k}(n)e(nz/2) = \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n e(nz/2).$$

Comparando los coeficientes de Fourier se deduce $\lambda = 1/a_0$ y, por lo tanto, $r_{2k}(n) = a_n/a_0$.

2. Para $k = 1$ se tiene que

$$\pi G - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \sum_{2d+1|n} (-1)^d e(nz/2).$$

Con la redefinición de a_0 indicada anteriormente, tendremos $a_0 = \pi$ y $a_n/a_0 = 4 \sum_{2d+1|n} (-1)^d = r_2(n)$, como vimos en el capítulo 4.

□

Definición 5.2.

$$f(z) = \theta^{2k}(z) - \frac{1}{a_0} G_{\theta,k}(z).$$

Esta función está también en $\mathcal{M}_{\theta,k}$. Además, si su desarrollo de Fourier es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(nz/2),$$

sustituyendo los coeficientes de las series de θ^{2k} y $\frac{1}{a_0} G_{\theta,k}$ se tiene que $r_{2k}(n) = \frac{a_n}{a_0} + c_n$.

Se conoce que la igualdad $r_{2k}(n) = a_n/a_0$ no se cumple para valores de k mayores que 4. Por tanto, empezaremos a trabajar ahora en fórmulas aproximadas en lugar de en fórmulas exactas. Nuestro objetivo es ver que para $k > 4$, a pesar de que no se tenga la igualdad, a_n/a_0 sigue siendo una buena aproximación de $r_{2k}(n)$.

Por ejemplo,

$$r_{24}(101) = 258\,331\,314\,292\,899\,028\,896 \quad \text{y} \quad \frac{a_{101}}{a_0} = 2,58\,331\,310 \dots \cdot 10^{20}.$$

Para demostrarlo, es suficiente ver

$$(5.1) \quad |c_n| \leq Kn^{k/2}$$

para cierta constante K , pues si encontramos dicha cota tendremos el siguiente teorema.

Teorema 5.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{2k}(n)}{a_n/a_0} = 1 \quad \text{y, de hecho,} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|r_{2k}(n) - a_n/a_0|}{n^{k/2}} < \infty.$$

Demostración. Sabemos que $r_{2k}(n) = \frac{a_n}{a_0} + c_n$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{2k}(n)}{a_n/a_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c_n}{a_n/a_0}\right)$, y si tenemos que $c_n \leq Kn^{k/2}$, para K constante, como los sumatorios que aparecen en la fórmula de los a_n están acotados, se deduce que a_n/n^{k-1} está entre dos constantes positivas, es decir, $a_n/a_0 > Cn^{k-1}$, donde C es otra constante. Así se concluye que ese límite es 1. El segundo límite superior es inmediato porque $|r_{2k}(n) - a_n/a_0| = |c_n| \leq Kn^{k/2}$. \square

Por lo tanto, encontrando esa cota, vemos que c_n es despreciable en comparación con a_n/a_0 , concluyendo por eso que a_n/a_0 es una buena aproximación para $r_{2k}(n)$.

Empezaremos definiendo una función $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 5.4. $g(z) = |\Im(z)|^{k/2} |f(z)|$.

Proposición 5.3. $g(z) = g(\gamma z)$ para todo $\gamma \in \Gamma_\theta$.

Demostración. Basta ver $g(Sz) = g(z)$ y $g(T^2z) = g(z)$.

$$g(Sz) = g(-1/z) = \frac{|\Im(z)|^{k/2}}{|z|^k} \left(\frac{|z|}{|i|}\right)^k |f(z)| = g(z).$$

$$g(T^2z) = g(z+2) = |\Im(z+2)|^{k/2} |f(z+2)| = |\Im(z)|^{k/2} |f(z)| = g(z).$$

\square

Proposición 5.4. g está acotada en \mathbb{H} .

Demostración. Como consecuencia de la proposición 5.3, es suficiente ver que g está acotada en el dominio fundamental $D_\theta = \{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \leq 1, |z| \geq 1\}$. Para ello, basta ver lo que ocurre en los “extremos” (cuando $\Im(z)$ tiende a ∞ , y cuando $z \rightarrow \pm 1$), pues si está acotada ahí, estará acotada en todo el dominio fundamental. Recordamos que $f(z) = \theta^{2k}(z) - \frac{1}{a_0} G_{\theta,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(\frac{nz}{2})$.

Observamos que cuando $\Im(z) \rightarrow \infty$, digamos $z = a + i\lambda$, entonces $\Im(z)^{k/2} e(\frac{nz}{2}) = \lambda^{k/2} e^{-\pi n\lambda} e^{\pi ina}$, que tiende a 0 cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $g(z) \rightarrow 0$ cuando $\Im(z) \rightarrow \infty$ de modo que g está acotada.

De forma que nos preocupa lo que ocurre cuando $z \rightarrow \pm 1$, y por simetría basta ver si g está acotada cuando $z \rightarrow 1$. Para ello, recordamos que para estudiar nuestras funciones cerca de 1, las podemos evaluar en $\gamma_1(z)$ con $\Im(z) \rightarrow \infty$. Así que nos preocupamos de si g está acotada cuando $\Im(z) \rightarrow \infty$. Veamos primero que $\frac{e(-z/2)f(\gamma_1 z)}{z^k}$ está acotada para $\Im(z)$ grande.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z/2)f(\gamma_1 z)}{z^k} = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z/2)\theta^{2k}(\gamma_1(z))}{z^k} - \frac{1}{a_0} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z/2)G_{\theta,k}(\gamma_1(z))}{z^k}.$$

Estudiaremos cada uno de estos dos límites por separado.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z/2)\theta^{2k}(\gamma_1(z))}{z^k} = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \left(\frac{e(-z/8)\theta(\gamma_1 z)}{\sqrt{z/i}} \right)^{2k} e\left(\frac{-z}{2}\right) e\left(\frac{kz}{4}\right) i^{-k} = 0.$$

Este resultado se obtiene porque en el capítulo 3 vimos que el primer factor tiende a 2^{2k} , mientras que el producto de los otros dos tiende a 0 al ser $k > 4$.

Para el segundo límite, en el caso en el que k sea par, podemos hacer el cambio $k \rightarrow 2k$, y como ya vimos en el capítulo 3, este límite es igual a $-4\pi^{2k}/(2k-1)!$ si k es impar. En cambio, si k es par tenemos

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z/2)G_{\theta,2k}(\gamma_1(z))}{z^{2k}} = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z)G_{\theta,2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} e(z/2) = \frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!} 0 = 0.$$

Cuando k es impar, se hace un cálculo similar al que hicimos en el capítulo 3 y también obtendremos algo acotado.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} g(\gamma_1(z)) &= \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} |\Im(\gamma_1 z)|^{k/2} |f(\gamma_1 z)| \\ &= \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} |\Im(\gamma_1 z)|^{k/2} |z|^k e(z/2) \left| \frac{e(-z/2)f(\gamma_1 z)}{z^k} \right| = 0. \end{aligned}$$

El resultado del límite se obtiene porque el último factor está acotado y el producto de los otros tres tiende a 0. Con esto se concluye que $g(\gamma_1 z)$ está acotada cuando $\Im(z) \rightarrow \infty$. \square

Corolario 5.1. *Sea c el segmento en \mathbb{H} que va de i/n a $2 + i/n$. Entonces*

$$|c_n| = \frac{1}{2} \left| \int_c f(z) e(-nz/2) dz \right| \leq e^\pi n^{k/2} \sup_{z \in \mathbb{H}} |g(z)|.$$

Demostración. Para la primera igualdad observamos que como f es una forma modular con respecto a Γ_θ , f es 2-periódica, y por ello admite un desarrollo de Fourier del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e(nz/2)$ donde $c_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f(z) e(-nz/2) dz$.

Ahora, sea $\gamma : [0, 2] \rightarrow c$ definida por $z = \gamma(t) = \frac{i}{n} + t$, tendremos que

$$|c_n| = \frac{1}{2} \left| \int_c f(z) e(-nz/2) dz \right|.$$

Por otra parte, esta cantidad es menor o igual que

$$\frac{1}{2} \int_c |f(z)| |e(-nz/2)| dz = \frac{1}{2} \int_c |g(z)| |\Im(z)|^{-k/2} |e(-nz/2)| dz.$$

Ahora sustituimos z por $\gamma(t)$, notando que $dz = \gamma'(t)dt = dt$ y utilizamos que g está acotada en \mathbb{H} . Así obtenemos que esta última cantidad es menor o igual que

$$\frac{1}{2} \sup_{z \in \mathbb{H}} |g(z)| \int_0^2 n^{k/2} e^\pi dt = e^\pi n^{k/2} \sup_{z \in \mathbb{H}} |g(z)|.$$

\square

De esta forma hemos encontrado la cota que queríamos para c_n en (5.1) con $K = e^\pi \sup_{z \in \mathbb{H}} |g(z)|$.

5.3. La fórmula de Ramanujan

Para concluir el trabajo, nuestro último objetivo es demostrar la fórmula de Ramanujan para r_{24} , que es la siguiente.

Teorema 5.5.

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691} \left(\sum_{d|n} d^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11} \right) - \frac{2^7}{691} (2^9 \tau(n/2) + (-1)^n 259 \tau(n)),$$

donde $\tau : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ es la función aritmética definida mediante

$$\Delta(z) := e(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(nz))^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e(nz).$$

Por lo tanto, $\tau(n/2) = 0$ cuando n es impar.

Para demostrar dicha fórmula empezaremos con la siguiente proposición.

Proposición 5.5. *La fórmula de Ramanujan se deduce de la siguiente igualdad.*

$$F(z) := \theta^{24}(z) - \frac{1}{a_0} G_{\theta,12}(z) + \frac{2^7}{691} \left(2^9 \Delta(z) + 259 \Delta\left(\frac{z+1}{2}\right) \right) = 0.$$

Demostración. Observamos que los dos primeros sumandos que aparecen en F son lo que habíamos definido como $f(z)$ para $k = 12$, del que sabíamos que su desarrollo de Fourier era

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e(nz/2).$$

Por otro lado, utilizando el desarrollo de Fourier de la función discriminante tenemos que

$$-\frac{2^7}{691} \left(2^9 \Delta(z) + 259 \Delta\left(\frac{z+1}{2}\right) \right) = -\frac{2^7}{691} \left(2^9 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e(nz) + 259 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e\left(\frac{nz}{2} + \frac{n}{2}\right) \right).$$

Hacemos el cambio de variable que envía n a $n/2$ para el primer sumando del paréntesis y observamos que $e\left(\frac{nz}{2} + \frac{n}{2}\right) = (-1)^n e(nz/2)$. Por lo tanto, se obtiene

$$-\frac{2^7}{691} \left(2^9 \Delta(z) + 259 \Delta\left(\frac{z+1}{2}\right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^7}{691} \left(2^9 \tau\left(\frac{n}{2}\right) + (-1)^n 259 \tau(n) \right) e\left(\frac{nz}{2}\right).$$

De modo que si asumimos $F(z) = 0$, podemos igualar los coeficientes de Fourier y obtenemos

$$c_n = -\frac{2^7}{691} \left(2^9 \tau\left(\frac{n}{2}\right) + (-1)^n 259 \tau(n) \right),$$

y puesto que sabíamos que $r_{24}(n) = \frac{a_n}{a_0} + c_n$ nos queda que

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691} \left(\sum_{d|n, 2 \nmid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} + 2^{-11} \sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} (-1)^{\frac{n}{2d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} \right) + c_n,$$

utilizando que $a_0 = 2\zeta(12)(1 - 2^{-12}) = \frac{691\pi^{12}}{8 \cdot 11!}$, como se demuestra en [21], y la definición de a_n indicada previamente para $k = 12$.

Por lo tanto, lo único que nos queda por ver para tener la fórmula de Ramanujan es

$$\sum_{d|n, 2 \nmid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} + 2^{-11} \sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} (-1)^{\frac{n}{2d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} = \sum_{d|n} d^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11}.$$

Esto se sigue con un argumento elemental (véase el apéndice E.3) □

El objetivo, por lo tanto, es ver que efectivamente se tiene $F(z) = 0$. Lo demostraremos mediante una serie de proposiciones.

Proposición 5.6. F es una forma modular de peso 12 con respecto al grupo Γ_θ .

Demostración. Con todo lo demostrado hasta ahora, solo necesitamos ver que $\Delta(\frac{z+1}{2})$ es modular. Denotaremos $h(z) = \Delta(\frac{z+1}{2})$.

1. Tanto $\Delta(z)$, como $\frac{z+1}{2}$ son holomorfas en \mathbb{H} . Luego $h(z)$ también lo es.
2. Queremos ver ahora $h(Sz) = z^{12}h(z)$ y $h(T^2z) = h(z)$. Lo primero de lo que nos damos cuenta es que $\frac{S(z)+1}{2} = \gamma(\frac{z+1}{2})$, con $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. De esta forma

$$h(S(z)) = \Delta\left(\frac{S(z)+1}{2}\right) = \Delta\left(\gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\right).$$

Ahora utilizamos que $\Delta(z)$ es una forma modular respecto a $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, con lo que se obtiene

$$h(S(z)) = \left(2\frac{z+1}{2} - 1\right)^{12} \Delta\left(\frac{z+1}{2}\right) = z^{12}h(z).$$

Por otro lado,

$$h(T^2(z)) = \Delta\left(\frac{T^2(z)+1}{2}\right) = \Delta\left(\frac{z+3}{2}\right) = \Delta\left(T\left(\frac{z+1}{2}\right)\right) = \Delta\left(\frac{z+1}{2}\right) = h(z).$$

Con esto se concluye que $h(\gamma z) = j_\gamma^{12}(z)h(z)$ para todo $\gamma \in \Gamma_\theta$.

3. La condición de crecimiento se tiene porque $\Delta(z)$ la cumple, por ser una forma cuspidal como dijimos en el capítulo 2.

□

Proposición 5.7. $n_\infty(F) \geq 3$ y $n_1(F) \geq 1$.

Demostración. Empezaremos con $n_\infty(F)$. Sabemos que si el desarrollo de Fourier de F es de la forma $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e(nz/2)$, entonces $n_\infty(F)$ será el menor n tal que $b_n \neq 0$.

Utilizando los desarrollos de Fourier de θ^{24} , $G_{\theta,12}$ y Δ se tiene que

$$b_0 = 0, \quad b_n = r_{24}(n) - \frac{a_n}{a_0} + \frac{2^7}{691} \left(2^9 \tau\left(\frac{n}{2}\right) + (-1)^n 259 \tau(n)\right) \text{ para } n \geq 1.$$

Ahora utilizamos que $r_{24}(1) = 48$, puesto que la única manera de obtener 1 como suma de 24 cuadrados es tener todo ceros y un 1 o -1 ; $r_{24}(2) = \binom{24}{2}4 = 1104$, porque para expresar 2 como suma de 24 cuadrados, tendremos que tener 22 ceros y en las dos posiciones restantes, 1 o -1 ; $\tau(1) = 1$ y $\tau(2) = -24$. Con todo esto, al sustituir estas cantidades en la fórmula de b_n para $n = 1$ y $n = 2$, se obtiene $b_1 = 0$ y $b_2 = 0$. De forma que se concluye que $n_\infty(F) \geq 3$.

Por otro lado, para ver que $n_1(F) \geq 1$, lo único que tenemos que ver es que $z^{-12}F(\gamma_1 z) \rightarrow 0$ cuando $\Im(z) \rightarrow \infty$, pues en ese caso, $n_1(F) \neq 0$, y, por tanto, es mayor o igual que 1.

$$\begin{aligned} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}F(\gamma_1 z) &= \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}\theta^{24}(\gamma_1 z) - \frac{1}{a_0} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}G_{\theta,12}(\gamma_1 z) + \\ &+ \frac{2^{16}}{691} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}\Delta(\gamma_1 z) + 259 \frac{2^7}{691} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}\Delta\left(\frac{\gamma_1(z)+1}{2}\right). \end{aligned}$$

De nuevo estudiaremos estos límites por separado.

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12} \theta^{24}(\gamma_1 z) = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \left(\frac{e(-z/8)\theta(\gamma_1 z)}{\sqrt{z/i}} \right)^{24} e(3z)i^{-12} = 0.$$

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12} G_{\theta,12}(\gamma_1 z) = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \frac{e(-z)G_{\theta,12}(\gamma_1 z)}{z^{12}} e(z) = 0.$$

Para el tercero, usaremos que Δ es forma modular y por ello $\Delta(\gamma_1 z) = z^{12}\Delta(z)$. Por lo tanto, $\lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12}\Delta(\gamma_1 z) = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \Delta(z) = 0$, por ser Δ una forma cuspidal. Por último,

$$\begin{aligned} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12} \Delta\left(\frac{\gamma_1(z)+1}{2}\right) &= \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12} \Delta\left(\frac{2z-1}{2z}\right) = \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} z^{-12} \Delta(\gamma_1(2z)) \\ &= 2^{12} \lim_{\Im(z) \rightarrow \infty} \Delta(z) = 0. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.2. *F es idénticamente nula.*

Demostración. Utilizamos (4.1) para $k = 12$.

$$\frac{1}{2}n_i(f) + n_\infty(f) + n_1(f) + \sum'_z n_z(f) = 3.$$

Utilizando la proposición 5.7 tenemos que el lado izquierdo es mayor o igual que 4. Por lo tanto, no se cumple la fórmula de valencia y esto implica que F es idénticamente 0. □

Con todo esto, podemos demostrar el Teorema 5.5.

Demostración. (del Teorema 5.5) Como F es idénticamente nula, podemos usar la proposición 5.6. □

Bibliografía

- [1] C. L. Siegel. A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$. *Mathematika*, 1:4, 1954.
- [2] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.
- [3] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [4] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [5] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials Matemàtics*, pages 1–27, 2017. <https://mat.uab.cat/web/matmat/v2017n02/>.
- [6] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [7] H. Cohen. An introduction to modular forms. arXiv:1809.10907 [math.NT], 2018.
- [8] H. Cohen and F. Strömberg. *Modular forms*, volume 179 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. A classical approach.
- [9] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.
- [10] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [11] I. Stewart and D. Tall. *Algebraic number theory and Fermat’s last theorem*. CRC Press, Boca Raton, FL, fourth edition, 2016.
- [12] K. Ono. Representations of integers as sums of squares. *J. Number Theory*, 95(2):253–258, 2002.
- [13] M. Masdeu. Modular forms. <https://mat.uab.cat/~masdeu/teaching/>, 2015.
- [14] P. Garrett. Fourier transform of sech. https://www-users.cse.umn.edu/~garrett/m/real/notes_2019-20/08e_Fourier_transform_sech.pdf, 2022.
- [15] ProofWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — ProofWiki. https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452, 2023. [Online; accessed 26-December-2023].

-
- [16] R. A. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977.
- [17] R. A. Rankin. Sums of squares and cusp forms. *Amer. J. Math.*, 87:857–860, 1965.
- [18] S. C. Milne. Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions. *Ramanujan J.*, 6(1):7–149, 2002.
- [19] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [20] Wikipedia contributors. Identity theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Identity_theorem&oldid=1168073046, 2023. [Online; accessed 9-October-2023].
- [21] Wikipedia contributors. Particular values of the Riemann zeta function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function&oldid=1185241818, 2023. [Online; accessed 13-February-2024].
- [22] Wikipedia contributors. Poincaré half-plane model — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Poincar%C3%A9_half-plane_model&oldid=1155587333, 2023. [Online; accessed 14-September-2023].
- [23] Wikipedia contributors. Ramanujan tau function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ramanujan_tau_function&oldid=1165535000, 2023. [Online; accessed 9-October-2023].

APÉNDICE A

Apéndices del capítulo 1

A.1. Sobre los subgrupos del grupo modular

Vamos a demostrar la identidad (1.1). Si $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$\Im(\gamma(z)) = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Lo primero que notamos es que $j_\gamma(z) \neq 0$ puesto que $\Im(z) > 0$. Ahora, si $z = \alpha + \beta i$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$:

$$\gamma(z) = \frac{a(\alpha + \beta i) + b}{c(\alpha + \beta i) + d} = \frac{((a\alpha + b)(c\alpha + d) + ac\beta^2) + i(a\beta(c\alpha + d) - c\beta(a\alpha + b))}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

Por tanto, notando que $ad - bc = 1$:

$$\Im(\gamma(z)) = \frac{\beta(ad - bc)}{|j_\gamma(z)|^2} = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

□

Con esto vemos que la acción anterior está bien definida sobre \mathbb{H} .

Veamos ahora dos ejemplos de cómo hallar la imagen a través de un $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de la semicircunferencia unidad centrada en el origen.

1. Para hallar su imagen por la transformación $z \mapsto (3z+5)/(z+2)$, simplemente estudiamos la imagen de sus extremos, que en este caso son $z = 1$ y $z = -1$. Para ello, definimos $S = \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$ y consideramos la matriz $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ahora, como $S \subseteq \mathcal{G}$ y como $\gamma_1(1) = \frac{8}{3}$, $\gamma_1(-1) = 2$ y $\gamma_1(S) \subseteq \mathcal{G}$, la imagen de S será la circunferencia de centro $\frac{7}{3}$ y radio $\frac{1}{3}$. Es decir: $\gamma_1(S) = \{z \in \mathbb{H} : |z - \frac{7}{3}| = \frac{1}{3}\}$.
2. Si queremos hallar su imagen por $z \mapsto (2z+1)/(z+1)$, consideramos $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Como $\gamma_2(1) = \frac{3}{2}$, $\lim_{z \rightarrow -1} \gamma_2(z) = -\infty$ y $\gamma_2(S) \subseteq \mathcal{G}$, podemos concluir que $\gamma_2(S) = \{\frac{3}{2} + iy : y > 0\}$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por S y por T . Para verlo, primero haremos algunas observaciones.

Observación A.1.

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad y \quad T^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cn & b + dn \\ c & d \end{pmatrix},$$

Así, podemos ver que para cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $\gamma_{11}\gamma_{21} \neq 0$, el valor de $\min(|\gamma_{11}|, |\gamma_{21}|)$ se puede reducir premultiplicando por $T^n S$ o por T^n , eligiendo un $n \in \mathbb{Z}$ adecuado. Notamos primero que:

$$T^n S \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_{21} + \gamma_{11}n & -\gamma_{22} + \gamma_{12}n \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

En el caso en el que $\min(|\gamma_{11}|, |\gamma_{21}|) = |\gamma_{11}|$, premultiplicamos por $T^{\lfloor \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} \rfloor} S$ y obtendremos que $\min(|-\gamma_{21} + \gamma_{11} \lfloor \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} \rfloor|, |\gamma_{11}|) = |-\gamma_{21} + \gamma_{11} \lfloor \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} \rfloor| < |\gamma_{11}|$. Mientras que si $\min(|\gamma_{11}|, |\gamma_{21}|) = |\gamma_{21}|$, premultiplicamos por $T^{\lfloor \frac{-\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \rfloor}$ y obtenemos que $\min(|\gamma_{11} + \gamma_{21} \lfloor \frac{-\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \rfloor|, |\gamma_{21}|) = |\gamma_{11} + \gamma_{21} \lfloor \frac{-\gamma_{11}}{\gamma_{21}} \rfloor| < |\gamma_{21}|$.

Observación A.2. Para cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si $\gamma_{11}\gamma_{21} = 0$, entonces $\gamma \in \langle T, S \rangle$.

Primero observamos que

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si $\gamma_{21} = 0$, tendremos que $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$ o $\gamma_{11} = \gamma_{22} = -1$. En el primer caso, $\gamma = T^{\gamma_{12}}$, mientras que en el segundo tendremos que $\gamma = S^2 T^{-\gamma_{12}}$. Por otro lado, si $\gamma_{11} = 0$, tenemos de nuevo dos opciones: la primera sería que $\gamma_{12} = -1$ y $\gamma_{21} = 1$, y en ese caso $\gamma = S T^{\gamma_{22}}$. Mientras que si $\gamma_{12} = 1$ y $\gamma_{21} = -1$, tendremos que $\gamma = S^3 T^{-\gamma_{22}}$. Por tanto, podemos concluir $\gamma \in \langle T, S \rangle$.

Lema A.1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle$.

Demostración. Sea $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. De las observaciones anteriores obtenemos que premultiplicando γ por T^n o $T^n S$ iterativamente un número finito de veces (eligiendo n como antes) obtendremos $\gamma_{11}\gamma_{21} = 0$ y, por tanto, podremos escribir cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ como un elemento de $\langle T, S \rangle$. Por tanto, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \langle T, S \rangle$. Ahora como $T, S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ entonces, $\langle T, S \rangle \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. \square

Daremos ahora una demostración de que $\Gamma_0(N)$ y Γ_N son subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, y que el primero no es normal pero el segundo sí lo es.

Demostración. 1. $\Gamma_0(N) \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.

$A(A')^{-1} = \begin{pmatrix} ad' - bc' & -ab' + ba' \\ cd' - dc' & -cb' + da' \end{pmatrix} = M$. Notamos que $\det(M) = 1$ y $cd' - dc' \equiv 0$ (mód N) porque $c \equiv c' \equiv 0$ (mód N). Por tanto, $M \in \Gamma_0(N)$.

2. $\Gamma(N) \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: Ahora sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ y sea $M = A(A')^{-1}$.

Igual que antes, $\det(M) = 1$, y ahora teniendo en cuenta que $a \equiv d \equiv a' \equiv d' \equiv 1$ (mód N) y $b \equiv c \equiv b' \equiv c' \equiv 0$ (mód N) deducimos que $ad' - bc' \equiv 1$ (mód N),

$-ab' + ba' \equiv 0 \pmod{N}$, $cd' - dc' \equiv 0 \pmod{N}$ y $-cb' + da' \equiv 1 \pmod{N}$ y por tanto, $M \in \Gamma(N)$.

Para ver que $\Gamma_0(N)$ no es normal, tomamos

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad y \quad M = \begin{pmatrix} N+1 & 1 \\ N & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Por tanto, $\gamma^{-1}M\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2N-1 & N \end{pmatrix}$ y observamos que $2N-1$ no es congruente con 0 (mód N) para $N > 1$, de forma que $\gamma^{-1}M\gamma \notin \Gamma_0(N)$. Así concluimos que $\Gamma_0(N)$ no es normal. Por otro lado, para ver que $\Gamma(N)$ sí lo es, definimos el homomorfismo $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ consistente en tomar módulo N en cada entrada de la matriz. Notamos que $\mathrm{Ker}(\phi) = \Gamma(N)$ y sabemos que $\mathrm{Ker}(\phi) \trianglelefteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, por lo que $\Gamma(N) \trianglelefteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. \square

Nuestro siguiente objetivo será ofrecer una demostración de que

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST.$$

Demostración. Basta ver que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST$ porque la otra inclusión es trivial. Para ello, tomamos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

1. Si $c \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow M \in \Gamma_0(2) \subseteq \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST$.

2. Si $c \equiv 1 \pmod{2}$:

a) Si $d \equiv 0 \pmod{2}$ tomamos $\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ y tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} S.$$

Por lo que $M \in \Gamma_0(2)S \subseteq \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST$.

b) Si $d \not\equiv 0 \pmod{2}$ tomamos $\begin{pmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ y tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{pmatrix} ST.$$

Por lo que $M \in \Gamma_0(2)ST \subseteq \Gamma_0(2) \cup \Gamma_0(2)S \cup \Gamma_0(2)ST$.

Además, podemos ver que esta unión es disjunta. Sean $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$.

Es decir, $c, c' \equiv 0 \pmod{2}$. Entonces, $\gamma'S = \begin{pmatrix} b' & -a' \\ d' & -c' \end{pmatrix}$. Por tanto, $\gamma'S = \gamma$ si y solo si

$\gamma' = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$, que pertenece a $\Gamma_0(2)$ si y solo si $d \equiv 0 \pmod{2}$. Pero en ese caso tendríamos

que $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 2k & 2l \end{pmatrix}$ para ciertos $k, l \in \mathbb{Z}$, por lo que $\det(\gamma) = 2al - 2bk$, que es imposible que sea igual a 1 para $a, b, l, k \in \mathbb{Z}$. Luego $\gamma'S \notin \Gamma_0(2)$. Razonamos de manera similar con Γ_0ST . \square

Queremos describir la forma del dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$. Para describir su forma, estudiaremos la imagen a través de S y ST de los extremos de las circunferencias o semirrectas que constituyen la frontera de \mathcal{D} . Es decir, para $|z| \geq 1$, estudiamos $S(1) = -1, S(-1) = 1, ST(1) = -1/2$ y $\lim_{z \rightarrow -1} ST(z) = -\infty$. Mientras que para $|\Re(z)| \leq 1/2$, estudiamos $S(1/2 + i\sqrt{3}/2) = -1/2 + i\sqrt{3}/2, S(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1/2 + i\sqrt{3}/2, \lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = 0, ST(1/2 + i\sqrt{3}/2) = -1/2 + i\sqrt{3}/6, ST(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} ST(z) = 0$. Con todo esto, se puede ver que la forma de $\mathcal{D} \cup S\mathcal{D} \cup ST\mathcal{D}$ es de la siguiente manera.

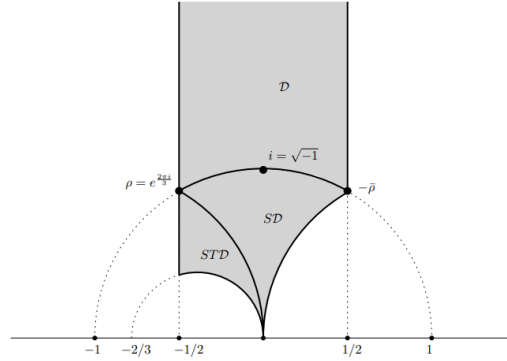


Figura A.1: Dominio fundamental para $\Gamma_0(2)$. Imagen obtenida de [13].

Proposición A.1.

$$\Gamma_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 - b \equiv 1 - c \pmod{2} \right\}$$

Demostración. Observamos que $a + d$ y $b + c$ pares implica que $a \equiv d \pmod{2}$ y $1 - b \equiv 1 - c \pmod{2}$. Además, si suponemos que $a \equiv d \equiv b \equiv c \pmod{2}$ tendríamos que $ad - bc \equiv 0 \pmod{2}$, pero $ad - bc = 1$, luego tendríamos una contradicción. Así que deducimos que a y b tienen distinta paridad y, por tanto, $a + b \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a \equiv 1 - b \pmod{2}$. De aquí obtenemos que la condición $a + d$ y $b + c$ pares, es equivalente a $a \equiv d \equiv 1 - b \equiv 1 - c \pmod{2}$, por lo que ambos conjuntos son iguales. \square

Corolario A.1. Γ_θ es un subgrupo de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Demostración. Sean $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_\theta \Rightarrow a$ y d, b y c, a' y d', b' y c' tienen la misma paridad, mientras que a y b, a' y b' tienen distinta paridad.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ad' - bc' & -ab' + ba' \\ cd' - dc' & -cb' + da' \end{pmatrix} = M.$$

1. $a, d' \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow ad' - bc'$ es impar, $-cb' + da'$ es impar, $-ab' + ba'$ es par y $cd' - dc'$ es par $\Rightarrow M \in \Gamma_\theta$.
2. $a \equiv 0 \pmod{2}$ y $d' \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow ad' - bc'$ es par, $-cb' + da'$ es par, $-ab' + ba'$ es impar y $cd' - dc'$ es impar $\Rightarrow M \in \Gamma_\theta$.

\square

A continuación, veremos la prueba de que $\Gamma_0(2)$ y Γ_θ son subgrupos conjugados, y la descomposición de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ a partir de este último en cogrupos.

Demostración. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2) \Rightarrow ad - bc = 1, c \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow ad - bc = ad - 2kb$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow ad - 2kb = 1 \Rightarrow ad = 1 + 2kb \Rightarrow ad$ es impar $\Rightarrow a$ y d son impares.

$$\gamma_0^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \gamma_0 = \begin{pmatrix} b+d & b-a-c+b+d \\ -b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Observamos que $a'+d' = a+d$ es par porque a, d son impares. Mientras que $b'+c' = -a-c+d$ es par porque c es par y a, d son impares $\Rightarrow \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_\theta$. Así concluimos $\gamma_0^{-1}\Gamma_0(2)\gamma_0 \subseteq \Gamma_\theta$.

Ahora sea, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_\theta \Rightarrow a'+d', b'+c'$ son pares. Tomamos $\begin{pmatrix} d'-c' & -c' \\ a'-b'+c'-d' & a'+c' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ porque $a'-b'+c'-d' \equiv 0 \pmod{2}$ por ser $a'+d', b'+c'$ pares; y tenemos

$$\gamma_0^{-1} \begin{pmatrix} d'-c' & -c' \\ a'-b'+c'-d' & a'+c' \end{pmatrix} \gamma_0 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\Gamma_\theta \subseteq \gamma_0^{-1}\Gamma_0(2)\gamma_0$.

Para ver la descomposición de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a partir de Γ_θ en cogrupos, tomamos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Para esta M se tiene:

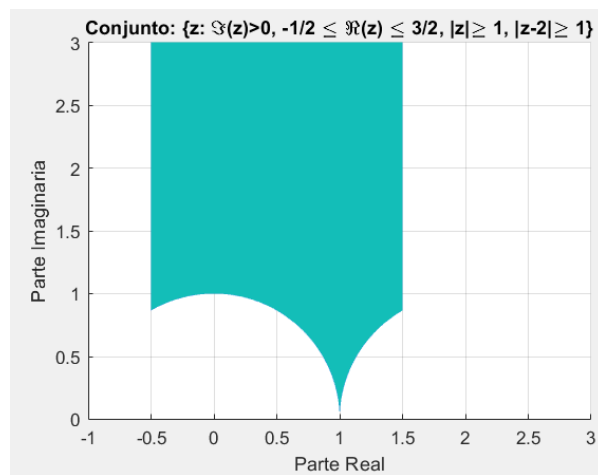
$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ c & d-c \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{pmatrix} TS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ahora analizaremos los diferentes casos posibles:

1. Se descartan los casos en los que a, b, c o d es impar y el resto son pares; a, b son pares y c, d son impares o viceversa; y a, b, c y d son todos pares o impares, pues en todos estos casos el determinante de la matriz M es par, por lo que $\det(M) \neq 1$.
2. Si a, d son pares y b, c son impares o viceversa, entonces $M \in \Gamma_\theta$.
3. Si a, c son impares y b, d son pares; si a, b, d son impares y c es par; o si b, c, d son impares y a es par, entonces $a+d-c$ es par y $c+b-a$ es par, por lo que $M \in \Gamma_\theta T$.
4. Si b, d son impares y a, c son pares; si b, c, a son impares y d es par; o si c, d, a son impares y b es par, entonces $-b+c+d$ es par y $-d+a+b$ es par, por tanto, $M \in \Gamma_\theta TS$.

□

Estudiaremos en profundidad cómo hallar la forma del dominio fundamental de Γ_θ . Para ello, analizaremos la imagen de las semirrectas y las circunferencias que conforman la frontera de \mathcal{D} : $T(1) = 2, T(-1) = 0, T(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 3/2 + i\sqrt{3}/2, T(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, y $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$. Con esto obtenemos $T\mathcal{D}$. Mientras que para $TS\mathcal{D}$: $TS(1) = 0, TS(-1) = 2, TS(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1/2 + i\sqrt{3}/2, TS(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = 3/2 + i\sqrt{3}/2$, y $\lim_{z \rightarrow \infty} TS(z) = 1$. Así se obtiene:

Figura A.2: Dominio fundamental de Γ_θ .

Se aprecia por tanto, que este dominio es justamente: $\mathbb{H} \cap \{-1/2 \leq \Re(z) \leq 3/2\} \cap \{|z| \geq 1\} \cap \{|z-2| \geq 1\}$.

APÉNDICE B

Apéndices del capítulo 2

B.1. Sobre la fórmula de valencia

Veremos con más detalle cómo integrar el contorno C descrito en la demostración de la fórmula de valencia, haciendo la suma de las integrales sobre C_1, \dots, C_8 .

1. Para integrar sobre C_1 , hacemos el cambio de variable $q(z) = e^{2\pi iz}$, de modo que $q(C_1)$ es una circunferencia centrada en 0 y de radio $e^{-2\pi R}$ (en sentido horario). También tenemos que $dz = (2\pi iq)^{-1}dq$ y $\frac{d}{dz}f(q) = 2\pi iqf'(q)$. Juntándolo todo,

$$\int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{q(C_1)} \frac{f'(q)}{f(q)} dq = -2\pi i n_\infty(f).$$

Esta última igualdad viene dada porque si $f(z) = \sum_{n=n_\infty(f)}^\infty a_n e(nz)$, al integrar sobre $q(C_1)$, solamente “sobrevive” $n_\infty(f)$.

2. Las contribuciones sobre C_2 y C_8 se anulan.
3. Para las integrales sobre C_4 y C_6 consideramos el cambio de variable que envía z a $S(z)$ y transforma C_4 en $-C_6$. Sabemos por (2.1) que $f(z) = z^{-k}f(S(z))$, y por tanto, $f'(z) = -kz^{-k-1}f(S(z)) + z^{-k}f'(S(z))S'(z)$. Con todo esto,

$$\int_{C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{C_4} \frac{-k}{z} dz + \int_{C_4} \frac{f'(S(z))S'(z)}{f(S(z))} dz = 2\pi i \frac{k}{12} + \int_{-C_6} \frac{f'(s)}{f(s)} ds.$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_4+C_6} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow 2\pi i \frac{k}{12} \text{ cuando } r \rightarrow 0.$$

4. Para las integrales sobre C_5, C_3 y C_7 aplicamos el principio del argumento.

$$\int_{C_5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow -\frac{1}{2}2\pi i n_i(f), \quad \int_{C_3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow -\frac{1}{6}2\pi i n_\rho(f),$$

ambos límites cuando $r \rightarrow 0$ y

$$\int_{C_7} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow -\frac{1}{6}2\pi i n_{\rho+1}(f) = -\frac{1}{6}2\pi i n_\rho(f) \text{ cuando } r \rightarrow 0.$$

Juntándolo todo, nos queda la igualdad que queríamos demostrar.

B.2. Sobre la dimensión del espacio vectorial de las formas modulares

Antes de ver la dimensión de \mathcal{M}_k , se puede dar una cota de esta.

$$\dim \mathcal{M}_k \leq \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Demostración. Sea $m = \lfloor k/12 \rfloor + 1$, elegimos m puntos distintos de i , $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y ∞ , $p_i \in \mathcal{B}$. Dadas $f_1, \dots, f_{m+1} \in \mathcal{M}_k$ podemos encontrar una combinación lineal $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{m+1} f_{m+1}$ que se anula en todos los p_i . Pero entonces tendríamos $m > k/12$ y por la fórmula de valencia, f debe ser idénticamente cero. Por ello, f_1, \dots, f_{m+1} son linealmente dependientes y $\dim \mathcal{M}_k \leq \lfloor k/12 \rfloor + 1$. Ahora si, $k \equiv 2 \pmod{12}$ podemos mejorar un poco esta cota. Para cada $f \in \mathcal{M}_k - \{0\}$ se tiene, por la fórmula de valencia: $\frac{1}{2}n_i(f) + \frac{1}{3}n_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f) + N = \frac{k}{12}$ * donde N es un entero positivo. Multiplicando esta ecuación por 6 obtenemos que $3n_i(f) + 2n_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f) \equiv \frac{k}{2} \pmod{6}$. Por tanto, si reducimos módulo 2 y 3 llegamos a que $n_i(f) \equiv 1 \pmod{2}$ y $n_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f) \equiv 2 \pmod{3}$. De forma que los dos primeros términos de la ecuación * contribuyen por lo menos $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$. Con todo esto, si llamamos d a la dimensión, tendremos infinitas $f \in \mathcal{M}_k - \{0\}$ que sean combinación lineal de los d elementos de la base, y se anularán en $d-1$ puntos del interior del dominio fundamental prefijados. Por tanto, $N \geq d-1 \Rightarrow \frac{7}{6} + d-1 \leq \frac{k}{12} \Rightarrow d \leq \frac{k-2}{12} = \lfloor k/12 \rfloor$.

□

APÉNDICE C

Apéndices del capítulo 3

C.1. Sobre la función theta

Lema C.1. $j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z) = j_{\gamma_1\gamma_2}(z)$.

Demostración. Sean

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z) &= j_{\gamma_1}\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right)j_{\gamma_2}(z) = \left(c\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + d\right)(c'z + d') = \\ &= \frac{c'z^2(ca' + dc') + z(cc'b' + cd'a' + c'dd' + dd'c') + d'(cb' + dd')}{c'z + d'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{\gamma_1\gamma_2}(z) &= (ca' + dc')z + (cb' + dd') = \\ &= \frac{c'z^2(ca' + dc') + z(cc'b' + cd'a' + c'dd' + dd'c') + d'(cb' + dd')}{c'z + d'}. \end{aligned}$$

□

C.1.1. Demostración de la proposición 3.5

Demostración. Empezamos notando que $\theta(\gamma_1 z) = (\theta(z/4) - \theta(z))\sqrt{z/i}$. Esto se puede ver fácilmente gracias a (3.3), pues nos dice que $(\theta(z/4) - \theta(z))\sqrt{z/i} = 2\theta(S(z/4)) - \theta(Sz) = 2\theta(-4/z) - \theta(-1/z)$. Ahora utilizando la definición de θ , vemos que esto es igual a $2\sum_{n \in \mathbb{Z}} e(-2n^2/2z) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(-n^2/2z)$, y notando que el primer sumatorio solo incluye a los enteros pares, mientras que el segundo incluye a todos, al hacer la resta nos queda: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e(-n^2/2z)$, que es justamente $\theta(\gamma_1 z)$.

Utilizando esta igualdad se tiene que,

$$\frac{e(-z/8)\theta(\gamma_1 z)}{\sqrt{z/i}} = e(-z/8)(\theta(z/4) - \theta(z)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{z}{8}(n^2 - 1)\right) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} -e\left(\frac{z}{8}(4n^2 - 1)\right).$$

Por tanto, utilizando $\lim_{y \rightarrow +\infty} |f(x + iy)| = |a_0|$, se tiene que el límite de la proposición tiende a 2. □

C.1.2. Demostración de la proposición 3.6

Empezaremos con algunas observaciones.

$$(C.1) \quad z^{-2k} G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z) = \sum_{2|c+d} \sum \frac{(-1)^{kc}}{((c+d)z-c)^{2k}} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{nk}}{((2m+1)z+n)^{2k}}.$$

Estas igualdades se deducen directamente de la definición de $G_{\theta, 2k}$. Con esto y con (3.5), tenemos lo necesario para demostrar la proposición.

Demostración. Empezamos con el caso en el que k es par. Utilizando (C.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{e(-z)G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} &= 2e(-z) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((2m+1)z+n)^{2k}} = \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} e(2mz)e(-(2m+1)z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((2m+1)z+n)^{2k}}. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando (3.5) y notando que $e(2mz)$ tiende rápidamente a 0, salvo para $m = 0$, que toma el valor uno¹, llegamos finalmente a que

$$\lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} \frac{e(-z)G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = \frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!}.$$

Para el caso en el que k es impar, necesitamos hacer una observación más.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n (w+n)^{-2k} &= 2^{-2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{((w+n)/2)^{2k}} \\ &= 2^{-2k} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(w/2+n)^{2k}} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((w+n)/2)^{2k}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(w/2+n)^{2k}} \right) \\ &= 2^{-2k} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w}{2} + n \right)^{-2k} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w+n}{2} \right)^{-2k} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w}{2} + n \right)^{-2k} \right) \\ &= 2^{1-2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w/2+n)^{-2k} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (w+n)^{-2k}. \end{aligned}$$

De nuevo por (C.1) tenemos

$$\frac{e(-z/2)G_{\theta, 2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = 2e(-z/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{((2m+1)z+n)^{2k}},$$

y con la última observación, esto nos da lugar a

$$2e(-z/2) \sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{1-2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((2m+1)\frac{z}{2} + n)^{-2k} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((2m+1)z+n)^{-2k} \right).$$

Notamos que

$$2e(-z/2) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{1-2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((2m+1)\frac{z}{2} + n)^{-2k} \text{ tiende a } \frac{-4\pi^{2k}}{(2k-1)!},$$

¹El teorema de la convergencia dominada nos permite intercambiar una suma infinita y un límite.

por el mismo argumento que en el caso en el que k era par. Solo resta comprobar que

$$e(z/2)2e(-z) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((2m+1)z + n)^{-2k}$$

no contribuye al límite. Otra vez con el mismo argumento que antes tenemos que lo que aparece a la derecha de $e(z/2)$ converge a una constante, y debido a que $\Im(z)$ tiende a ∞ , se tiene que $e(z/2)$ converge a 0. \square

APÉNDICE D

Apéndices del capítulo 4

D.1. Sumas de 8, 4 y 2 cuadrados

Veamos la justificación del final de la demostración de los teorema 4.1 y 4.2..

Para el teorema 4.1 basta demostrar

$$\sum_{d|n, 2 \nmid d} \left(\frac{n}{d}\right)^3 + \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} \left(\frac{n}{d}\right)^3 = \sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3.$$

1. Si n es impar, entonces $2 \nmid d$ para todo d divisor de n y $n + d$ es par. De forma que en el lado de la izquierda de la igualdad nos quedamos solo con el primer sumando (que incluye a todos los divisores) y notamos que si $d | n$ entonces $(n/d) | n$. Así nos queda que la parte izquierda es igual a la suma de los divisores al cubo de n . Como $n + d$ es par, esto es exactamente el lado de la derecha de la igualdad.
2. Para n par empezaremos con el lado derecho. $\sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3 = \sum_{d|n, 2 \nmid d} -d^3 + \sum_{d|n, 2|d} d^3$.
Para el lado izquierdo nos fijamos en que al cambiar n/d por d obtenemos $\sum_{d|n, 2 \nmid (n/d)} d^3 + \sum_{d|n, 2|(n/d)} (-1)^d d^3$. Como n es par, en el primer sumatorio, necesariamente $2 | d$, por lo que obtenemos que el lado izquierdo es equivalente a $\sum_{d|n, 2 \nmid (n/d), 2|d} d^3 + \sum_{d|n, 2|(n/d), 2|d} d^3 + \sum_{d|n, 2|(n/d), 2 \nmid d} -d^3 = \sum_{d|n, 2 \nmid d} -d^3 + \sum_{d|n, 2|d} d^3$, es decir, es igual al lado derecho.

Para el teorema 4.2, nos basta demostrar

$$\sum_{d|n, 4 \nmid d} d = \sum_{d|n, 2 \nmid d} \frac{n}{d} - \sum_{d|n, 2|d} (-1)^{n/d} \frac{n}{d}.$$

Empezamos viendo que $\sum_{d|n, 4 \nmid d} d = \sum_{d|n} d - \sum_{d|n, 4|d} d$. Ahora, para este segundo sumando sustituimos n por $2n$ añadiendo la condición de que $2 | (2n/d)$, y nos queda $\sum_{d|n} d - \sum_{d|2n, 4|d, 2|(2n/d)} d$. Hacemos el cambio de variable que envía d a $2d$ para obtener

$$\sum_{d|n} d - 2 \sum_{2|d, d|n, 2|(n/d)} d = \sum_{d|n} d - \sum_{d|n, 2|(n/d)} (1 + (-1)^d) d = \sum_{d|n, 2 \nmid (n/d)} d - \sum_{d|n, 2|(n/d)} (-1)^d d.$$

Por último, hacemos el cambio d por n/d y obtenemos lo que queríamos.

APÉNDICE E

Apéndices del capítulo 5

E.1. Sobre las series de Eisenstein generalizadas

Vamos a ofrecer una prueba detallada de la Proposición 5.1.

Demostración. Basta ver que $G_{\theta,k}(T^2z) = G_{\theta,k}(z)$ y $G_{\theta,k}(Sz) = (z/i)^k G_{\theta,k}(z)$.

$$G_{\theta,k}(T^2z) = G_{\theta,k}(z+2) = i^{-k} \sum_{2 \nmid c} \sum_{2 \mid d} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(c+1)k}}{(cz + (2c+d))^k} + \sum_{2 \nmid d} \sum_{2 \mid c} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k}}{(cz + (2c+d))^k}.$$

Hacemos el cambio de variable $d = l - 2c$ y cuando $2 \mid c$, se tiene que $(-1)^{\frac{1}{2}(l-2c-1)k} = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)k}$. Así nos queda que, $G_{\theta,k}(T^2z) = G_{\theta,k}(z)$.

$$G_{\theta,k}(Sz) = G_{\theta,k}(-1/z) = \left(\frac{z}{i}\right)^k \left(i^k \sum_{2 \nmid d} \sum_{2 \mid c} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k}}{(dz - c)^k} + \sum_{2 \nmid c} \sum_{2 \mid d} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(c+1)k}}{(dz - c)^k} \right).$$

Ahora hacemos el cambio de variable $l = -c$ y vemos que $(-1)^{\frac{1}{2}(-l+1)k} = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)k}$ y que $(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)k} = (-1)^{\frac{1}{2}(d+1)k}(-1)^{-k}$.

$$G_{\theta,k}(Sz) = \left(\frac{z}{i}\right)^k \left(\left(\frac{i}{-1}\right)^k \sum_{2 \nmid d} \sum_{2 \mid l} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d+1)k}}{(dz + l)^k} + \sum_{2 \nmid l} \sum_{2 \mid d} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(l-1)k}}{(dz + l)^k} \right) = \left(\frac{z}{i}\right)^k G_{\theta,k}(z).$$

□

E.2. Sobre la fórmula aproximada para expresar un entero como suma de cuadrados

Veamos a modo de curiosidad cómo evaluar una serie infinita a partir del caso $k = 3$ de la Proposición 5.2.

Corolario E.1.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la existencia de la fórmula para r_6 . La proposición nos dice que $a_0 r_6(1) = a_1$.

Utilizando las fórmulas para a_n y a_0 obtenemos

$$a_1 = \frac{3\pi^3}{4}, \quad a_0 = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^3}.$$

Por otra parte $r_6(1) = 12$, pues la única forma de obtener 1 como suma de 6 cuadrados es sumando 5 veces 0 y una vez 1 o -1 . De forma que juntándolo todo tenemos que

$$24 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^3} = \frac{3\pi^3}{4},$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar. \square

E.3. Sobre la fórmula de Ramanujan

Para concluir la fórmula de Ramanujan nos faltaba comprobar que

$$\sum_{d|n, 2 \nmid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} + 2^{-11} \sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} (-1)^{\frac{n}{2d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} = \sum_{d|n} d^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11}.$$

Para ello, lo primero que notamos es que

$$\sum_{d|n} d^{11} = \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} = \sum_{d|n, 2 \nmid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} + \sum_{d|n, 2 \mid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11}.$$

Así que basta demostrar

$$2^{-11} \sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} (-1)^{\frac{n}{2d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} = \sum_{d|n, 2 \mid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11}.$$

Desarrollaremos el lado izquierdo de la igualdad, que es igual a lo siguiente

$$\begin{aligned} 2^{-11} \left(\sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} - 2 \sum_{d|n, 2 \mid d, 2 \nmid (d/2)} d^{11} \right) &= 2^{-11} \sum_{d|n, 2 \mid \frac{n}{d}} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} - 2^{-10} \sum_{d|n, 2 \mid d, 4 \nmid d} d^{11} = \\ &= 2^{-11} \sum_{\frac{2n}{d} | n} \left(\frac{2n}{d}\right)^{11} - 2^{-10} \sum_{d|n, 2 \mid d} d^{11} + 2^{-10} \sum_{d|n, 4 \mid d} d^{11} = \\ &= \sum_{\frac{2n}{d} | n} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} - 2^{-10} \sum_{2d|n} (2d)^{11} + 2^{-10} \sum_{4d|n} (4d)^{11} = \sum_{d|n, 2 \mid d} \left(\frac{n}{d}\right)^{11} - 2 \sum_{2d|n} d^{11} + 2^{12} \sum_{4d|n} d^{11}. \end{aligned}$$