



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Algunos resultados de mecánica celeste

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Joaquín Juan Blázquez Martínez

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2021-2022

A mi madre, por todo.

Resumen

El estudio del cielo ha fascinado a las más brillantes mentes de la humanidad desde los comienzos de la misma, cuando se contempló el movimiento cíclico de la bóveda celeste y se denominó *planetas*, literalmente “errantes”, a aquellos cuerpos que se salían de este movimiento cíclico. Sin embargo, no fue hasta 1687 cuando Isaac Newton, con su *ley de gravitación universal*, consiguió formalizar matemáticamente la fuerza de la gravedad, abriendo la puerta a una nueva forma de estudiar rigurosamente el movimiento de los cuerpos celestes, la conocida como *mecánica celeste*.

Este trabajo trata el estudio y formalización de algunos de los resultados más importantes de la mecánica celeste, tratando siempre de introducir los resultados con una cierta perspectiva histórica. Primero se presenta formalmente la mecánica analítica y se usa para describir la gravitación newtoniana, así como para demostrar algunos de los teoremas de conservación más relevantes. Posteriormente se aplican los conocimientos adquiridos para deducir las leyes de Kepler, que a su vez son utilizadas para resolver formalmente los problemas de uno y dos cuerpos. El tercer capítulo consiste en el análisis de dos características muy peculiares del planeta Mercurio, los dobles amaneceres, calculados numéricamente en el cuarto capítulo, y la precesión de su perihelio. Por último se presenta el problema de N cuerpos y se analizan algunas de las propiedades cualitativas más importantes que presentan sus soluciones.

Abstract

The study of the sky has fascinated the most brilliant minds of humanity since its beginnings, when the cyclical movement of the celestial vault was contemplated and the name of *planets*, literally “wanderers”, was given to those objects that did not follow this cyclical movement. However, it was not until 1687 when Isaac Newton, with his *law of universal gravitation*, managed to mathematically formalize the force of gravity, opening the door to a new way of rigorously studying the movement of celestial bodies, the well-known like *celestial mechanics*.

This work deals with the study and formalization of some of the most important results of celestial mechanics, always trying to introduce the results with a certain historical perspective. First, analytic mechanics is formally introduced and used to describe Newtonian gravitation, as well as to prove some of the most relevant conservation theorems. Subsequently, the knowledge acquired is applied to deduce Kepler’s laws, which in turn are used to formally solve the one and two body problems. The third chapter consists of the analysis of two very peculiar characteristics of the planet Mercury, the double sunrises, calculated numerically in the fourth chapter, and the precession of its perihelion. Finally, the N body problem is presented and some of the most important qualitative properties of its solutions are analyzed.

Índice general

1	Bases de mecánica	1
1.1	Mecánica lagrangiana	2
1.1.1	Principio de mínima acción	2
1.1.2	Derivación de la mecánica newtoniana con el lagrangiano	2
1.2	Mecánica hamiltoniana	3
1.2.1	Derivación de la mecánica newtoniana con el hamiltoniano	3
1.2.2	Ventajas e inconvenientes con respecto al lagrangiano	3
1.3	Ejemplo real, el péndulo simple	4
1.3.1	Solución con lagrangiano	4
1.3.2	Solución con hamiltoniano	4
1.4	Principios de conservación	5
1.4.1	Principio de conservación de la energía	5
1.4.2	Teorema de Noether	5
1.4.3	Principio de conservación del momento angular	6
2	El problema de los dos cuerpos	7
2.1	Leyes de gravitación y el problema de un cuerpo	7
2.2	Leyes de Kepler	8
2.2.1	Resultados geométricos preliminares	8
2.2.2	Primera Ley de Kepler	9
2.2.3	Segunda Ley de Kepler	10
2.2.4	Tercera Ley de Kepler	10
2.3	Expresando la solución en función del tiempo	11
2.4	El problema de los dos cuerpos	12
2.5	Solución con funciones de Bessel	14
2.6	Shell theorem	14
3	Dos peculiaridades de Mercurio	15
3.1	El doble amanecer de Mercurio	15
3.1.1	Calculando la velocidad en la órbita	15
3.1.2	Calculando el ángulo del sol	16
3.1.3	Aplicando los conocimientos a Mercurio	17
3.2	La precesión del perihelio de Mercurio	18
3.2.1	Introducción histórica	18
3.2.2	Solución relativista	19
4	Algunos cálculos numéricos	21
5	El problema de N cuerpos	29

5.1 Ausencia de soluciones de equilibrio	30
5.2 El teorema del colapso total de Sundman	31
Bibliografía	33

CAPÍTULO 1

Bases de mecánica

Por todos nosotros es conocida la formulación newtoniana de la mecánica, esta se basa principalmente en las famosas leyes de Newton y constituye la base de la mecánica clásica que se aprende en todos los institutos de secundaria. La segunda de estas leyes describe el movimiento de cuerpos sometidos a fuerzas $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y es esta expresión la que mejor describe la metodología seguida por la mecánica newtoniana para la obtención de soluciones a los problemas físicos. Este método consiste en averiguar todas las fuerzas que interactúan con el sistema y, aplicando las leyes de Newton, calcular las trayectorias seguidas por los elementos del sistema.

Esta metodología tiene el problema de que a menudo es extremadamente complicado tanto encontrar estas fuerzas como tratar con todas ellas simultáneamente, además los sistemas inerciales generan fuerzas ficticias y las posibles ligaduras o restricciones del problema generan otras fuerzas aparentemente ocultas que también deben ser consideradas para un correcto análisis del problema.

Por otra parte, los trabajos posteriores de Joseph-Louis Lagrange y William Rowan Hamilton que desarrollaron respectivamente la mecánica lagrangiana y hamiltoniana supusieron diferentes formulaciones de lo que se consideraría como la mecánica analítica. Esta es una aproximación más abstracta a la mecánica clásica en la que se trata de deducir las ecuaciones del movimiento de cada problema partiendo de unas funciones especiales llamadas lagrangiano y hamiltoniano respectivamente y que contienen toda la información relativa a las energías del sistema, lo que nos permite deducir tanto las ecuaciones del movimiento como las magnitudes que se conservan en el sistema sin tener que hacer las complicadas y enrevesadas operaciones con vectores.

Esta aproximación resultó ser con diferencia mucho más abstracta, general y elegante que la mecánica newtoniana ya que permite el uso de coordenadas generalizadas que pueden a su vez definir las ligaduras simplemente ajustando el lagrangiano o hamiltoniano, quedando el resto del problema reducido a operar con el mismo, como veremos en las siguientes secciones.

Además esta aproximación permitió el desarrollo de mecánicas más avanzadas que utilizan diferentes lagrangianos y hamiltonianos, estas teorías se fundamentan en aspectos físicos más profundos pero las ideas de la mecánica analítica siguen siendo de gran utilidad en campos como la relatividad especial y la mecánica cuántica.

1.1. Mecánica lagrangiana

La mecánica lagrangiana se basa en la función lagrangiano \mathcal{L} que no es más que una función escalar que asigna un valor real a cada posible estado del sistema físico. No entraremos en formalismos matemáticos demasiado profundos porque no es el objetivo de este TFG pero para los curiosos diremos que para un sistema físico con n grados de libertad el espacio de estados es una variedad diferenciable finito-dimensional construida como el fibrado tangente TQ de una variedad n -dimensional y el lagrangiano es una función escalar de la forma $\mathcal{L} : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Por convención, en sistemas físicos donde actúan fuerzas conservativas, podemos calcular el lagrangiano como $\mathcal{L} = T - V$ siendo T la energía cinética y V el potencial cuyo gradiente genera el campo vectorial de las fuerzas que actúan en el sistema $\mathbf{F} = -\nabla V$. Por notación designaremos con negrita a las magnitudes vectoriales.

Cabe observar que el lagrangiano dependerá de las coordenadas que usemos para representar nuestro espacio de estados. En el caso de una partícula libre en \mathbb{R}^3 tendríamos que el espacio de estados es \mathbb{R}^6 por lo que el lagrangiano queda como $\mathcal{L} : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$.

1.1.1. Principio de mínima acción

La pregunta que surge es cómo podemos usar el lagrangiano para describir las ecuaciones de movimiento del sistema, Pierre Louis Maupertuis había enunciado correctamente en 1744 que “*La naturaleza es económica en todas sus acciones*” refiriéndose a que las trayectorias naturales de los objetos siempre tratan de minimizar la acción, una cantidad que tras los trabajos de Euler y Leibniz quedó definida como:

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad \text{siendo } \mathbf{q}(t) \text{ la trayectoria analizada.}$$

Por lo tanto para predecir las trayectorias debemos buscar aquellas que minimicen la acción (en rigor, que la dejen estacionaria). Por suerte para nosotros, gracias a los trabajos de Euler y Lagrange en cálculo de variaciones se sabía que los extremos de un funcional como la acción deben cumplir las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{siendo } x_i \text{ las coordenadas generalizadas.}$$

1.1.2. Derivación de la mecánica newtoniana con el lagrangiano

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1) al lagrangiano de una partícula libre en \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas $\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$ nos queda precisamente la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

$$\frac{\partial \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \right)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \right)}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

$$F_x - m\ddot{x} = 0.$$

Aplicando lo mismo a y y z al final queda $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$ es decir $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

1.2. Mecánica hamiltoniana

La mecánica hamiltoniana es similar a la lagrangiana pero se basa en el concepto de hamiltoniano \mathcal{H} que al igual que el lagrangiano tiene una forma estándar bajo fuerzas conservativas $\mathcal{H} = T + V$ y de nuevo reúne toda la información sobre las energías en el sistema físico, la diferencia principal radica en que se expresa en función de los momentos conjugados \mathbf{p} en vez de las velocidades generalizadas. Estos momentos se definen como:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{siendo } \dot{q}_i \text{ las velocidades generalizadas.}$$

En este caso las trayectorias a calcular deben cumplir las ecuaciones canónicas de Hamilton, aunque no entraremos en detalles, cabe decir que éstas se derivan del hecho de que el hamiltoniano es la transformada de Legendre del lagrangiano junto con las restricciones impuestas por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(1.2) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \forall i = 1 \dots n.$$

1.2.1. Derivación de la mecánica newtoniana con el hamiltoniano

Si nos fijamos de nuevo en el problema de la partícula libre en \mathbb{R}^3 con coordenadas cartesianas observamos que los momentos conjugados serán:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Por lo que el Hamiltoniano expresado mediante los momentos conjugados será:

$$\mathcal{H} = T+V = \frac{1}{2m} (m^2\dot{x}^2 + m^2\dot{y}^2 + m^2\dot{z}^2) + V(x, y, z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z)$$

y aplicando las ecuaciones canónicas de Hamilton (1.2) obtenemos:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = F_x.$$

Sólo nos queda fijarnos en que $\dot{p}_x = m\ddot{x} = F_x$, por lo que aplicando el mismo argumento al resto de coordenadas obtenemos de nuevo la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

1.2.2. Ventajas e inconvenientes con respecto al lagrangiano

Como hemos podido ver, el hamiltoniano está expresado en función de los momentos conjugados, esto se puede volver muy complicado en algunos casos, sin embargo las ecuaciones del movimiento quedan como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer grado, más fáciles de resolver que las n ecuaciones diferenciales de segundo grado que obtenemos con el lagrangiano. Además, se podría decir que aunque el lagrangiano a menudo es más práctico, es el hamiltoniano el de mayor interés teórico.

1.3. Ejemplo real, el péndulo simple

El problema del péndulo simple consiste en averiguar la ecuación de movimiento de un péndulo formado por una masa puntual m atada a un punto fijo mediante una cuerda de longitud l .

Mediante la mecánica newtoniana tendríamos que tener en cuenta la tensión de la cuerda y la gravedad y necesitaríamos descomponer las componentes de las fuerzas para poder operar con ellas, sin embargo el punto de vista analítico nos permite simplificar los cálculos al darnos cuenta de que el péndulo sólo tiene un grado de libertad, el ángulo θ siendo la correspondencia entre coordenadas:

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta, & \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & y &= -l \cos \theta + l, & \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta. \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = l^2 \dot{\theta}^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto la energía cinética pasa a ser $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2}$ y el potencial gravitatorio $V = mgy$ que daba lugar a la fuerza constante de gravedad $\mathbf{F} = -\nabla V = (0, -mg)$ pasa a ser $V = -mgl \cos \theta + mgl$ siendo la suma de la constante final irrelevante, podría eliminarse sin alterar el resultado. Este potencial da lugar a la fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V = -mgl \sin \theta$.

1.3.1. Solución con lagrangiano

Una vez disponemos de las energías de nuestro sistema expresadas en coordenadas generalizadas sólo nos queda calcular el lagrangiano del sistema y aplicar (1.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) &= T - V = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta - mgl, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 0 \implies -mgl \sin \theta - ml^2 \ddot{\theta} = 0 \implies \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta}.\end{aligned}$$

Dejaremos esta ecuación diferencial como solución final ya que resolverla requiere de integrales elípticas que quedan fuera del objetivo de este TFG.

1.3.2. Solución con hamiltoniano

Para operar con el hamiltoniano primero debemos calcular el momento conjugado y expresar el hamiltoniano en función de la coordenada genérica y el momento.

$$p = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}, \quad \dot{\theta}^2 = \frac{p^2}{m^2 l^4}.$$

Entonces el hamiltoniano es:

$$\mathcal{H}(\theta, p) = V + T = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta + mgl = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta).$$

Finalmente, aplicando (1.2) obtenemos la misma solución que con el lagrangiano:

$$\left. \begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} \implies p = ml^2 \dot{\theta} \implies \dot{p} = ml^2 \ddot{\theta} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta\end{aligned} \right\} ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \implies \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta}.$$

1.4. Principios de conservación

En esta sección vamos a comprobar cómo la mecánica analítica nos permite sacar resultados profundos sobre la conservación de ciertas magnitudes en función de la forma del lagrangiano y hamiltoniano.

1.4.1. Principio de conservación de la energía

Nos fijamos de nuevo en el problema de la partícula libre en \mathbb{R}^3 pero esta vez en coordenadas generalizadas q_i relacionadas con las cartesianas mediante funciones f_i .

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3).$$

Vamos a tratar de demostrar que si de nuevo sólo entran en juego fuerzas conservativas, el hamiltoniano, denominado en este caso como energía total, se conserva independientemente de las coordenadas elegidas. Partimos del hamiltoniano estándar bajo fuerzas conservativas $\mathcal{H} = T + V = 2T - T + V = 2T - \mathcal{L}$. Usando [7, pág 5]:

$$2T = \sum_{i=1}^3 \dot{f}_i p_i = \sum_{i=1}^3 p_i \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial q_j} p_i = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}.$$

Por lo tanto podemos expresar el hamiltoniano como $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}$ y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange que siguen las trayectorias (1.1) podemos deducir:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left(\ddot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0$$

ya que la derivada del lagrangiano coincide con el sumatorio. De este modo hemos demostrado que efectivamente el hamiltoniano, es decir, la energía total, queda constante a través de las trayectorias naturales, las que minimizan la acción.

1.4.2. Teorema de Noether

En 1915 la matemática alemana Emmy Noether formuló un sencillo teorema de importancia capital para la física teórica. Observó que cualquier simetría en un sistema físico resulta en una ley de conservación. Por simetría entendemos que si hacemos depender $q_i(t)$ de un parámetro h se tiene que el lagrangiano $\mathcal{L}(q(t, h), \dot{q}(t, h), t)$ cumple $\frac{d\mathcal{L}}{dh} = 0$, es decir, el lagrangiano no depende de h . Noether demostró que bajo estas hipótesis la magnitud $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$ se conserva en las trayectorias naturales. Una demostración sencilla puede encontrarse en [1, pág 6].

Veámoslo en la práctica con un ejemplo, la transformación:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos h + \operatorname{sen} h & -2 \operatorname{sen} h \\ \operatorname{sen} h & \cos h - \operatorname{sen} h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

deja invariante al lagrangiano $\mathcal{L} = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2$ respecto a h , los cálculos son enrevesados así que los dejaremos como ejercicio para el lector pero al final el lagrangiano queda del mismo modo. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Noether deducimos que la magnitud $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$ se conserva. Procedemos a calcular dicha magnitud:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = 2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)(q_1(-\sin h + \cos h) - 2q_2 \cos h) + (4\dot{q}_2 - 2\dot{q}_1)(q_1 \cos h + q_2(-\sin h - \cos h)).$$

Evaluando en $h = 0$ nos queda $2(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2)$ que es la magnitud que se conserva.

1.4.3. Principio de conservación del momento angular

De manera similar al ejemplo anterior nos podemos fijar en que si tenemos una partícula afectada únicamente por una fuerza central conservativa, esto quiere decir que el potencial solo depende de la distancia al origen, el lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(r)$ siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distancia al origen.

Este lagrangiano cumple que es invariante por rotaciones por lo que tiene simetría esférica, la explicación de esto radica en que si utilizamos las coordenadas genéricas q_i resultantes de rotar rígidamente las coordenadas cartesianas un ángulo h alrededor de cualquier vector unitario \mathbf{u} , la distancia al origen en coordenadas genéricas r_q se mantendrá igual que en las coordenadas cartesianas $r = r_q$, al igual que el módulo de la velocidad se conservará en ambos sistemas de referencia dado que los movimientos rígidos como las rotaciones son isometrías. Por lo tanto el lagrangiano se conservará constante frente a los cambios de h .

Esto nos permite aplicar el Teorema de Noether que nos garantiza que la magnitud $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$ se conserva sea cual sea el vector \mathbf{u} respecto al que estamos rotando. Tomando $u = (1, 0, 0)$ calculamos las coordenadas genéricas:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y \cos h - z \sin h, \quad q_3 = y \sin h + z \cos h$$

y la magnitud conservada:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = m\dot{x} \cdot 0 + m\dot{y}(-y \sin h - z \cos h) + m\dot{z}(y \cos h - z \sin h).$$

Tomando $h = 0$ nos queda que la magnitud conservada es $m(y\dot{z} - \dot{y}z)$. Haciendo lo mismo con los otros vectores canónicos llegamos a que el vector:

$$\mathbf{L} = m(y\dot{z} - \dot{y}z, \dot{x}z - x\dot{z}, x\dot{y} - \dot{x}y) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

al que definimos como momento angular, se conserva en todas las trayectorias.

Este resultado nos deja un corolario muy interesante, si una partícula está sometida únicamente a una fuerza central conservativa entonces su trayectoria tiene lugar en un plano. La demostración es simple, dado que el momento angular se conserva en toda la trayectoria y este debe ser siempre perpendicular al vector posición \mathbf{r} , tenemos que este vector posición siempre debe tener pertenecer al plano que pasa por el origen y tiene como vector normal a \mathbf{L} .

Estos resultados son de gran importancia para las siguientes secciones del TFG puesto que en numerosas simplificaciones del estudio de órbitas se supone que los astros están únicamente afectados por una única fuerza central conservativa, la gravedad.

CAPÍTULO 2

El problema de los dos cuerpos

En este capítulo trataremos con la mecánica celeste propiamente dicha, para ello introduciremos la fuerza gravitatoria, que es la principal responsable de todos los movimientos de los cuerpos celestes. Continuaremos aplicando los conocimientos obtenidos en el capítulo anterior para resolver el problema de un cuerpo y procederemos a deducir, aplicando diferentes resultados geométricos sobre cónicas, las leyes de Kepler. Para terminar usaremos los conocimientos aprendidos para resolver el problema de los dos cuerpos.

2.1. Leyes de gravitación y el problema de un cuerpo

Por todos nosotros es conocida la ley de gravitación universal de Newton que afirma que entre cualesquiera dos masas siempre existe una fuerza de atracción gravitatoria de módulo Gm_1m_2/d^2 siendo d la distancia entre las masas y G la constante de gravitación universal, que tiene un valor aproximado de $6,674 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

La fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 puede escribirse con notación vectorial como $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/r^3$ siendo $r = \|\mathbf{r}\|$ el módulo del vector distancia entre m_1 y m_2 . Es fácilmente demostrable que esta fuerza es conservativa puesto que podemos asociarle el campo escalar $V = -Gm_1m_2/r$ cumpliéndose $\mathbf{F} = -\nabla V$.

Para estudiar las órbitas que describe esta fuerza sobre todos los objetos celestes podemos empezar estudiando el movimiento de la masa m_2 suponiendo la masa m_1 fijada al origen de coordenadas. Este caso es el conocido como problema de un cuerpo y pese a no describir fielmente la realidad física de los objetos celestes, puesto que la masa m_1 se vería atraída hacia m_2 lo que provocaría su movimiento, es una buena aproximación para los casos en los que la masa m_1 es sustancialmente mayor que la masa m_2 , ya que la aceleración provocada en este caso por m_2 sobre m_1 es casi inapreciable.

Bajo estas hipótesis el vector \mathbf{r} puede ser visto como el vector posición de m_2 y la fuerza gravitatoria \mathbf{F} sería una fuerza central. Esto nos permite aplicar el teorema visto en la sección anterior, al ser \mathbf{F} una fuerza central conservativa el movimiento de m_2 se producirá en un plano y por lo tanto podemos usar coordenadas polares para describirlo.

El paso a coordenadas polares es muy útil ya que nos simplifica la solución del problema, esta solución también se puede deducir usando cálculo vectorial o mecánica analítica con las coordenadas cartesianas pero resulta más sencillo y eficaz usar las coordenadas polares.

En coordenadas polares (r, θ) la energía cinética de m_2 queda descrita de esta forma $T = m_2 \|\dot{\mathbf{r}}\|^2/2 = m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2$ y la energía potencial no se modifica quedando el lagrangiano de este modo:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Procedemos a aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1) a nuestro lagrangiano:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \implies m_2\dot{\theta}^2 r - \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{d}{dt} (m_2\dot{r}) \implies \boxed{\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_1}{r^2}}.$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \implies 0 = m_2(\ddot{\theta}r^2 + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \implies \boxed{0 = \ddot{\theta}r + 2\dot{r}\dot{\theta}}.$$

Cabe resaltar que para la última implicación hemos usado que r y m_2 son estrictamente positivos, si se anulasen la fuerza gravitatoria carecería de sentido.

Por desgracia para nosotros este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no tiene solución explícita en función de t , sin embargo a partir de ellas podremos deducir cualidades de las soluciones, recogidas en las leyes de Kepler, y métodos numéricos eficientes que nos permitirán aproximar la solución con precisión arbitraria.

2.2. Leyes de Kepler

2.2.1. Resultados geométricos preliminares

Para empezar veremos un par de lemas geométricos que nos ayudarán a la hora de deducir las leyes de Kepler.

Lema 2.1. Para $0 \leq e < 1$ la curva en polares

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta} \quad \text{describe la elipse centrada en uno de sus focos} \quad \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $\ell = a(1 - e^2)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ la distancia focal y $e = c/a$ la excentricidad.

Demostración. Para probar este lema podemos fijarnos en que $e = c/a$ por lo tanto $c = ae$, por otra parte $c^2 = a^2 - b^2$ por lo que $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)$ lo que nos permite reescribir la ecuación de la elipse como:

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \quad \text{pasando a polares} \quad \frac{(r \cos \theta + ae)^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

Desarrollando nos queda:

$$r^2 \cos \theta + a^2 e^2 + 2aer \cos \theta + \frac{r \sin \theta}{1 - e^2} = a^2.$$

Sumando a ambos lados de la ecuación $r^2 \cos \theta / (1 - e^2) - 1$ y reagrupando llegamos a la siguiente ecuación cuadrática sobre r :

$$r^2 \frac{1 - e^2 \cos \theta}{1 - e^2} + r(2ae \cos \theta) - a^2(1 - e^2) = 0,$$

cuya única solución positiva es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}.$$

Las cuentas son tediosas pero al final se demuestra lo que buscábamos. \square

Cabe resaltar que para $-1 < e \leq 0$ la elipse definida por la ecuación en polares queda “achatada” horizontalmente en vez de verticalmente pero sigue siendo una elipse.

Lema 2.2. *El área de la sección barrida entre θ_1 y θ_2 por una función en polares $r(\theta)$ viene dada por $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$.*

Demostración. Si nos fijamos en que el área de un sector circular de radio r y ángulo θ es $\pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = r^2 \theta / 2$ podemos aplicar el método de exhaustión, ya que cualquier sección barrida por la función $r(\theta)$ podrá aproximarse con precisión arbitraria dividiendo la región como suma de segmentos circulares de ángulo $d\theta$ suficientemente pequeño, pasando al límite llegamos a la expresión $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$. \square

Procedemos a continuación a deducir las leyes de Kepler a partir de las ecuaciones diferenciales que deben seguir las soluciones del problema de un cuerpo.

2.2.2. Primera Ley de Kepler

El enunciado original se refiere al sistema solar pero puede aplicarse formalmente a las soluciones del problema de un cuerpo.

Teorema 2.3. *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.*

Demostración. Debemos demostrar que en efecto, las soluciones del problema de un cuerpo son elipses con la masa m_1 en uno de sus focos. Para esto nos fijamos en que la ecuación (2.1) puede reescribirse como $\mu = r^3 \dot{\theta}^2 - r^2 \ddot{r}$ siendo $\mu = Gm_1$ constante. De modo similar podemos reescribir la ecuación (2.2) como $\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$ lo que implica que $r^2 \dot{\theta} = h$ constante. Combinando ambas ecuaciones podemos reescribir (2.1) como $\mu = h^2 / r^2 - r^2 \ddot{r}$ que aplicando el cambio de variable $u(t) = 1/r(t)$ y reordenando queda como $\mu u^2 = h^2 u^3 - 2\dot{u}^2 / u^3 + \ddot{u} / u^2$. Ahora podemos escribir esta ecuación en

función de $U(\theta)$ siendo $u(t) = U(\theta(t))$, aplicando la regla de la cadena tendríamos $\dot{u} = U_\theta \dot{\theta}$ pero como sabemos que $h = \dot{\theta}r^2$ podemos escribir $\dot{\theta} = h/r^2 = hu^2 = hU^2$ por lo que $\dot{u} = U_\theta hU^2$. Aplicando de nuevo la regla de la cadena, la igualdad $\dot{\theta} = hU^2$ y operando obtenemos $\ddot{u} = h^2U^3(U_{\theta\theta}U + 2U_\theta^2)$. Sustituyendo estos valores en nuestra ecuación y simplificando llegamos a $\mu/h = U_{\theta\theta} + U$ que tiene como solución general $U(\theta) = \mu/h^2 + \lambda_1 \cos(\theta - \lambda_2)$ estando λ_1 y λ_2 determinados por las condiciones iniciales del problema, cabe resaltar que λ_2 sólo afecta provocando una rotación de la trayectoria que puede eliminarse eligiendo adecuadamente el sistema de coordenadas. Hemos concluido entonces que las soluciones al problema de un cuerpo en polares deben cumplir:

$$(2.3) \quad r(\theta) = \frac{1}{\mu/h^2 + \lambda_1 \cos(\theta - \lambda_2)} = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{\lambda_1 h^2}{\mu} \cos(\theta - \lambda_2)}.$$

Y podemos concluir por lo visto en el [Lema 2.1](#) que si $|\frac{\lambda_1 h^2}{\mu}| < 1$, como es el caso de todos los planetas del sistema solar, las trayectorias son elipses con m_1 , en nuestro caso el Sol, en uno de los focos. \square

2.2.3. Segunda Ley de Kepler

Teorema 2.4. *El radio vector \mathbf{r} que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.*

Demostración. Si nos fijamos en el [Lema 2.2](#) podemos deducir que el área barrida por \mathbf{r} entre el instante t_0 y el instante t puede expresarse como una función del tiempo $A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} r(\theta)^2 d\theta$. Si tomamos t_0 tal que $\theta(t_0) = 0$ y derivamos $A(t)$ aplicando la regla de la cadena, el teorema fundamental del cálculo y que para nuestras órbitas se cumple que $r^2 \dot{\theta} = h$ constante (visto en la demostración de la primera ley [Teorema 2.3](#)), llegamos a que:

$$(2.4) \quad \dot{A}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\theta(t)} r(\theta)^2 d\theta \right) \dot{\theta}(t) = \frac{1}{2} r(\theta(t))^2 \dot{\theta}(t) = \frac{h}{2} = cte.$$

Por lo tanto, suponiendo que en $t = 0$ el área barrida es 0 tenemos que $A(t) = \frac{ht}{2}$ por lo que el área barrida entre dos tiempos t_1 y t_2 será $A(t_2) - A(t_1) = \frac{h(t_2 - t_1)}{2}$ que depende únicamente de la diferencia de tiempos y no de los valores de θ o r asociados a los mismos, quedando demostrada la segunda ley de Kepler. \square

2.2.4. Tercera Ley de Kepler

Teorema 2.5. *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica, es decir, $\frac{T^2}{a^3} = C$ constante.*

Demostración. Partimos de que la fórmula para el área de una eclipse es $A = \pi ab$. Por otro lado por la fórmula calculada en la demostración del [Teorema 2.4](#) sabemos que esta área debe ser igual a $A = \frac{hT}{2}$ siendo T el periodo orbital, es decir, el tiempo necesario para completar una órbita. Por lo tanto deducimos que debe cumplirse $\pi ab = \frac{hT}{2}$. Si comparamos ahora la fórmula de la elipse en polares del [Lema 2.1](#) con la órbita solución del problema de un cuerpo del [Teorema 2.3](#) podemos observar cómo $\ell = \frac{h^2}{\mu}$ y además sabemos por la demostración del [Lema 2.1](#) que $b^2 = a^2(1 - e^2) = a\ell$ por lo que $\frac{hT}{2} = \pi ab = \pi a\sqrt{a\ell} = \pi a\sqrt{a\frac{h^2}{\mu}} = \pi ah\sqrt{\frac{a}{\mu}}$ elevando al cuadrado tenemos $\frac{h^2T^2}{4} = \frac{\pi^2 a^3 h^2}{\mu}$ por lo que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{Gm_1}$ que es constante para todos los planetas. \square

2.3. Expresando la solución en función del tiempo

Procedemos ahora a deducir la expresión en función del tiempo de la solución al problema de un cuerpo. Ya hemos visto que expresar r y θ en función de t de manera explícita es imposible, sin embargo a partir de las leyes de Kepler podemos deducir expresiones implícitas que, mediante métodos numéricos como el de Newton, nos permitirán localizar eficientemente el cuerpo m_2 para cualquier tiempo t .

Para ello debemos cambiar nuestro sistema de coordenadas de nuevo. Introducimos así el concepto de *anomalía excéntrica* E , definida para una órbita elíptica como el ángulo, medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del cuerpo m_2 sobre la circunferencia principal de la elipse, de radio a , con el eje principal de la misma. Cabe resaltar que al ángulo medido desde el foco derecho de la elipse, al que nosotros denominamos θ , suele conocerse en la literatura como *anomalía verdadera*.

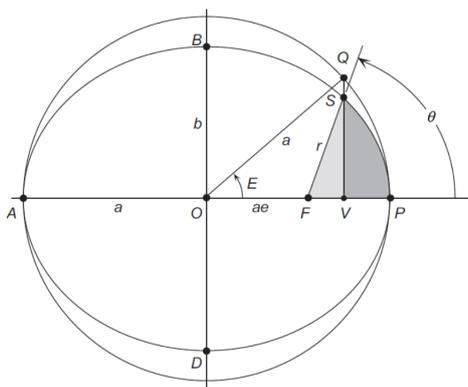


Figura 2.1: Representación de la anomalía excéntrica E y la anomalía verdadera θ .

Con esta definición podemos parametrizar la ecuación de la órbita elíptica, la cual está centrada en el foco derecho F , como:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos E(t) - c \\ y(t) = b \sin E(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = a(\cos E(t) - e) \\ y(t) = a\sqrt{1 - e^2} \sin E(t) \end{cases} .$$

Por lo tanto nos basta con calcular $E(t)$ para poder dar la localización del cuerpo m_2 en cualquier momento. Para hacerlo podemos fijarnos en la [Figura 2.1](#) para comprobar cómo, al ser la elipse un círculo achatado verticalmente por un factor b/a , el área barrida por el vector posición \mathbf{r} , la cual nosotros denominamos $A(t)$, cumple $A(t) = \frac{b}{a}(Q(t) - S(t))$, siendo $Q(t)$ el área barrida por el vector \overrightarrow{OQ} a tiempo t y $S(t)$ el área del triángulo \widehat{FOQ} a tiempo t , como $Q(t)$ es el área de un sector circular de radio a y ángulo E equivale a $\pi a^2 \frac{E(t)}{2\pi} = \frac{a^2 E(t)}{2}$ mientras que el área del triángulo \widehat{FOQ} equivale a $\frac{ae \cdot a \sin E(t)}{2} = \frac{a^2 e \sin E(t)}{2}$ por lo que se cumple la igualdad:

$$A(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{a^2 E(t)}{2} - \frac{a^2 e \sin E(t)}{2} \right) = \frac{ab}{2} (E(t) - e \sin E(t)).$$

Si aplicamos ahora la segunda ley de Kepler [Teorema 2.4](#) que nos garantiza que $A(t)$ es proporcional al tiempo y sabiendo que $A(T) = \pi ab$ ya que en el momento en el que se completa una órbita el área barrida debe coincidir con la de la elipse, podemos concluir que $A(t) = \pi ab \frac{t}{T}$ por lo que $\pi ab \frac{t}{T} = \frac{ab}{2} (E(t) - e \sin E(t))$ y llegamos a:

$$(2.5) \quad \frac{2\pi t}{T} = E(t) - e \sin E(t).$$

Esta es la conocida como *fórmula de Kepler*, la cual nos permite calcular numéricamente $E(t)$ y por lo tanto localizar el cuerpo m_2 en cualquier momento, cabe resaltar que el miembro de la izquierda, que representa la fracción de periodo orbital transcurrido expresado como un ángulo, se conoce comúnmente en la literatura como *anomalía media* M . Puede consultarse el [Capítulo 4](#) para ver el caso de Mercurio.

2.4. El problema de los dos cuerpos

Pasamos ahora a resolver el caso más realista en el que la masa m_1 ya no está fijada al origen. Bajo estas condiciones, la ley de gravitación universal de Newton nos asegura que los dos cuerpos se atraen con fuerzas iguales pero de sentido opuesto que pueden ser descritas gracias al potencial $V = -\frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$ siendo \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 los vectores posición de m_1 y m_2 respectivamente, por lo tanto el lagrangiano queda como:

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - V = \frac{m_1 \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2}{2} + \frac{m_2 \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}.$$

Podemos tratar de expresar este lagrangiano en función de unas nuevas coordenadas \mathbf{R} y \mathbf{r} , relacionadas con las anteriores por:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r},$$

es sencillo comprobar que este cambio de coordenadas equivale a:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Como podemos ver, \mathbf{R} representa el *centro de masa* o *baricentro* del sistema mientras que \mathbf{r} representa el vector posición de m_2 respecto a m_1 .

Utilizando ahora las propiedades del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos deducir que:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2 &= \langle \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_1 \rangle = \left\langle \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \right\rangle = \\ &= \|\dot{\mathbf{R}}\|^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle. \end{aligned}$$

De igual forma llegamos a que:

$$\|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2 = \|\dot{\mathbf{R}}\|^2 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle.$$

Sustituyendo estos valores en el lagrangiano y simplificando concluimos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2) \|\dot{\mathbf{R}}\|^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 \right) + \frac{G m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Cabe mencionar que a partir de ahora nombraremos M a la *masa total* ($m_1 + m_2$) y μ a la *masa reducida* $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1) a este lagrangiano obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}_1} \right) \implies 0 = M \ddot{\mathbf{R}}_1 \implies \mathbf{R}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 t,$$

aplicándoselo al resto de coordenadas de \mathbf{R} deducimos que $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t$, estando los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} determinados por las condiciones iniciales. Esto quiere decir que el baricentro del problema se mueve con movimiento rectilíneo uniforme y por lo tanto, si tomamos este baricentro como origen de coordenadas estableciendo así un sistema de referencia que sigue siendo inercial, llegaremos a un lagrangiano exactamente igual en el que $\mathbf{R} = 0$. Esto nos simplifica el lagrangiano a:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{G m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|},$$

que coincide exactamente con el lagrangiano del problema de un cuerpo de masa μ , por lo tanto, aplicando la solución que hemos obtenido anteriormente, podemos deducir que el vector \mathbf{r} describirá una órbita elíptica. Además como estamos suponiendo $\mathbf{R} = 0$ debe cumplirse que:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r},$$

por lo que podemos encontrar directamente la órbita para \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 a partir de la órbita de \mathbf{r} , estas órbitas serán de nuevo elipses al ser homotecias de la elipse de \mathbf{r} , lo que nos deja resuelto el problema de los dos cuerpos.

Cabe resaltar que \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 tienen la misma dirección, la de \mathbf{r} , pero diferente sentido, lo que provoca que la línea que los une pase siempre por el origen. Esto cuadra con haber puesto nuestro sistema de referencia en el baricentro, el cual debe estar ineludiblemente en la recta que une ambos cuerpos.

2.5. Solución con funciones de Bessel

A principios del siglo XIX, F. W. Bessel, conocedor de la fórmula de Kepler para relacionar las anomalías media y excéntrica, trató de expresar E como una serie trigonométrica en función de M , aplicando los recientes resultados publicados por J. Fourier sobre funciones periódicas, las conocidas como series de Fourier.

Fue así como encontró una serie de senos cuyos coeficientes de Fourier dependían de unas funciones no explícitas que acabaron bautizándose como funciones de Bessel, y que aparecen de forma natural en numerosos problemas de matemáticas y física. Por desgracia, la lenta convergencia de esta serie la hace computacionalmente ineficiente frente a otros métodos numéricos que resuelven con menos esfuerzo la ecuación de Kepler. Para profundizar más sobre este tema puede consultarse [5, p.47].

2.6. Shell theorem

Durante todo nuestro análisis hemos supuesto que las masas de los cuerpos celestes eran puntuales, esta no es una mala aproximación dado que los radios de los cuerpos celestes son prácticamente despreciables en comparación con las distancias que los separan, pero realmente la masa de estos cuerpos se distribuye a lo largo de toda la esfera que los conforma, además la densidad del cuerpo celeste varía, ya que a menudo los núcleos son más densos que las zonas cercanas a la superficie. Lo bueno es que esta variación de densidad suele producirse con simetría esférica, siendo ésta prácticamente igual para todos los puntos situados a la misma distancia del centro del cuerpo celeste. Esto es debido a los procesos de formación de la mayoría de estos cuerpos celestes.

Cabe preguntarse si la fuerza gravitatoria se ve afectada por estas circunstancias. El propio Newton consiguió demostrar que la simetría esférica garantiza que su ley de gravitación se cumple para todos los puntos fuera del planeta, mientras que los de dentro dependen únicamente de la masa situada a menor distancia que la del punto al centro de masas del cuerpo. Este es el conocido como *Shell Theorem* y puede demostrarse fácilmente usando la *ley de Gauss de la gravedad* en vez de los enrevesados argumentos geométricos que usó Newton.

La ley de Gauss de la gravedad es equivalente a la ley de gravitación universal de Newton, pero a menudo es más cómodo trabajar con ella. En su forma integral estipula que $\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi GM$ siendo \mathbf{F} el campo gravitatorio, V cualquier región con superficie ∂V cerrada y M la masa acumulada en la región V .

Si tomamos V como una esfera de radio r centrada en el centro de masas, y observando que la simetría esférica en la distribución de la masa provoca que \mathbf{F} también posea simetría esférica y por lo tanto podamos escribir $F = g(r)\mathbf{n}$ siendo \mathbf{n} el vector distancia normalizado entre el centro de masas y cada punto, entonces se cumple $\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial V} g(r)\mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} = g(r) \oint_{\partial V} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} = g(r)4\pi r^2$, aplicando la ley de Gauss tenemos que también debe equivaler a $-4\pi GM$ de donde deducimos que $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$.

Con esto queda comprobado que, en nuestros casos, es correcto usar la ley de Newton suponiendo masas puntuales situadas en los centros de los cuerpos celestes.

CAPÍTULO 3

Dos peculiaridades de Mercurio

En este capítulo procederemos a aplicar los conocimientos obtenidos anteriormente para hacer un análisis de ciertos comportamientos anómalos que presenta el planeta Mercurio. Para hacer esto tendremos que seguir profundizando en las soluciones que hemos obtenido de los problemas de uno y dos cuerpos, deduciendo nuevas propiedades sobre las órbitas solución.

3.1. El doble amanecer de Mercurio

La primera peculiaridad sobre Mercurio es que en ciertos puntos determinados del planeta y en un momento concreto del año, tomando como año el periodo T de la órbita de Mercurio, se puede contemplar un doble amanecer. Con doble amanecer nos referimos a que el sol sale ligeramente por el este pero procede a retroceder en su movimiento ocultándose en el horizonte, a continuación vuelve a salir definitivamente por el este. Como deduciremos a continuación, Mercurio es el único planeta del sistema solar que presenta este comportamiento, esto se debe a la peculiar relación que presenta entre la duración de los días y los años junto con la gran excentricidad de su órbita.

Procedemos a calcular ciertas propiedades que nos servirán para justificar este comportamiento.

3.1.1. Calculando la velocidad en la órbita

Para comenzar debemos encontrar una fórmula que nos dé la magnitud de la velocidad de m_2 en cualquier punto de la órbita. Para ello comenzamos definiendo el *perihelio* r_p como la distancia mínima entre las masas m_1 y m_2 en la órbita solución del problema de un cuerpo. Recordando lo visto en la primera ley de Kepler [Teorema 2.3](#), podemos expresar esta órbita solución como una elipse en coordenadas polares rotadas un ángulo λ_2 , que queda definido por las condiciones iniciales, de modo que el origen de coordenadas coincida con el foco derecho de la elipse. Bajo este sistema de coordenadas tenemos que el perihelio se alcanza en el ángulo 0, es decir:

$$(3.1) \quad r_p = r(0) = \frac{\ell}{1 + e \cos 0} = \frac{\ell}{1 + e} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e) = a - ae = a - c.$$

Por otra parte, tomando por convenio que en el origen de tiempos m_2 pasa por el perihelio, tenemos que $\theta(0) = 0$. Si vemos ahora r como una función del tiempo y teniendo en cuenta que, por definición, r_p es un mínimo de $r(t)$ que es función C^1 , podemos concluir que $\dot{r}(0) = 0$. Lo mismo ocurre con el *afelio* como máximo de $r(t)$.

Podemos usar este hecho para calcular la velocidad de m_2 a su paso por el perihelio, recordamos que la velocidad de un objeto en coordenadas polares viene dada por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{cases},$$

$$(3.2) \quad \|\mathbf{v}\|^2 = \dot{r}^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 \dot{\theta}^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Cuando m_2 pasa por el perihelio, es decir con $t = 0$, hemos visto que $\dot{r}(0) = 0$ por lo que la velocidad en el perihelio será $v_p = \|\mathbf{v}(0)\| = r(0)\dot{\theta}(0) = r_p\dot{\theta}(0) = \frac{h}{r_p}$ habiendo usado en la última igualdad que, como ya sabíamos, $r^2\dot{\theta} = h$ constante. Además como sabemos que $\ell = \frac{h^2}{\mu} = \frac{b^2}{a}$ podemos deducir que $h = \sqrt{\frac{b^2\mu}{a}}$ y por lo tanto $v_p = \frac{b}{r_p} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$.

Si aplicamos ahora el principio de conservación de la energía, visto en la sección 1.4.1, podemos deducir que la energía total $E = T + V$ es constante en toda la trayectoria. Calculándola en $t = 0$ tenemos $E = \frac{m_2 v_p^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{r_p}$, es decir, $\frac{E}{m_2} = \frac{b^2\mu}{2ar_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$. Para t arbitrario tenemos $\frac{E}{m_2} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$ por lo que se cumple:

$$\frac{b^2\mu}{2ar_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \longrightarrow v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{2a} \frac{b^2 - 2ar_p}{r_p^2} + \frac{1}{r} \right)}.$$

Para simplificar se han omitido cuentas intermedias. Si nos fijamos ahora en la ecuación (3.1) podemos sustituir r_p por $a - c$, además como $c^2 = a^2 - b^2$ se cumple:

$$\frac{b^2 - 2ar_p}{r_p^2} = \frac{b^2 - 2a(a - c)}{(a - c)^2} = \frac{b^2 - 2a^2 + 2ac}{a^2 + c^2 - 2ac} = \frac{-(2a^2 - b^2 - 2ac)}{2a^2 - b^2 - 2ac} = -1.$$

Por lo que concluimos que $v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right)}$ siendo $d = 2a$ el diámetro de la elipse.

3.1.2. Calculando el ángulo del sol

Procedemos ahora a calcular el ángulo γ que forma el sol con el vector este del horizonte astronómico de un observador situado en el ecuador de un planeta, es decir, la inclinación del sol respecto al este. Con horizonte astronómico nos referimos al plano que pasa por el centro del planeta y tiene como vector normal al vector distancia entre el observador y el centro del planeta. Este horizonte divide la esfera celeste en dos partes iguales y, debido a las grandes distancias que separan los objetos astronómicos, podemos tomarlo como una aproximación muy buena del horizonte real del observador.

Bajo la aproximación de que el eje de rotación del planeta sea perpendicular al plano orbital del mismo, aproximación muy buena para el caso de Mercurio en el

que este ángulo es de $89,99^\circ$, podemos deducir fácilmente que el amanecer, cénit, atardecer y cualquier otro momento del día, ocurre al mismo tiempo para todos los puntos situados a la misma latitud geográfica. Cabe mencionar que inclinaciones entre π y 2π implican que sea de noche para el observador, una inclinación de 0 quiere decir que el Sol está saliendo por el este y una inclinación de π que se está poniendo por el oeste.

Tomando como referencia al observador que está viendo amanecer en el ecuador del planeta al paso del mismo por el perihelio, es decir $\gamma(0) = 0$, podemos ver que la inclinación del sol vendrá dada por la suma de los dos movimientos que afectan al planeta, la rotación y la traslación. La rotación al ser un movimiento uniforme hace que la inclinación del sol sea proporcional a la fracción de rotación completada. Se denomina *día sideral* τ al tiempo que tarda un planeta en completar una rotación sobre sí mismo por lo que la rotación añade $\frac{2\pi t}{\tau}$ radianes a la inclinación del sol.

Por otra parte, si suponemos que el movimiento de traslación se produce en el mismo sentido que el de rotación, lo cual es verdadero para todos los planetas del sistema solar con la excepción de Venus y Urano, podemos fijarnos en que este movimiento resta $\theta(t)$ radianes a la inclinación del sol, esto provoca que el tiempo necesario para que el planeta vuelva a apuntar al sol tras rotar sobre sí mismo, lo que se conoce como *día solar verdadero* sea siempre superior al día sideral, en el caso de Venus y Urano el día sideral es mayor que el día solar verdadero.

Sumando ambos movimientos podemos deducir que $\gamma(t) = \frac{2\pi t}{\tau} - \theta(t)$ por lo que $\dot{\gamma}(t) = \frac{2\pi}{\tau} - \dot{\theta}(t)$. Usando ahora la ecuación (3.2) podemos deducir que $\dot{\theta} = \frac{1}{r}\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}$. Aplicando que, como demostramos en el apartado anterior, tanto en el perihelio como en el afelio $\dot{r} = 0$, podemos concluir que en ambos puntos se cumple $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$ y por lo tanto $\dot{\gamma}(t) = \frac{2\pi}{\tau} - \frac{v}{r}$. Para una fórmula más sencilla y general podemos usar que, como ya habíamos visto, $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ por lo que $\dot{\gamma}(t) = \frac{2\pi}{\tau} - \frac{h}{r^2}$ que nos aporta información extra ya que nos muestra que la derivada se minimiza cuando lo hace r , es decir en el perihelio, mientras que se maximiza también cuando lo hace r , es decir, en el afelio.

3.1.3. Aplicando los conocimientos a Mercurio

Si consultamos en cualquier base de datos de observaciones podremos encontrar fácilmente que, en el caso de Mercurio, se cumple que $\tau = 5067014s$ unos 59 días terrestres, $T = 7600530s$ unos 88 días terrestres, $a = 5,791 \cdot 10^{10}m$ y $e = 0,206$, por lo tanto $\ell = a(1 - e^2) = 5,545 \cdot 10^{10}m$. Gracias a la ecuación (3.1) sabemos que $r_p = \frac{\ell}{1+e} = 4,598 \cdot 10^{10}m$, de igual modo el afelio r_a se alcanza en $\theta = \pi$ por lo que $r_a = \frac{\ell}{1-e} = 6,984 \cdot 10^{10}m$. Por otra parte $\mu = Gm_{sol} = 6,674 \cdot 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}kg = 1,327 \cdot 10^{20}m^3s^{-2}$ por lo que, como $h = \sqrt{\ell\mu}$, deducimos que $h = 2,713 \cdot 10^{15}m^2s^{-1}$.

Usando ahora la fórmula $\dot{\gamma}(t) = \frac{2\pi}{\tau} - \frac{h}{r^2}$ y aplicándosela al afelio y al perihelio obtenemos que $\dot{\gamma}_a = 6,838 \cdot 10^{-7}$ y que $\dot{\gamma}_p = -4,313 \cdot 10^{-8}$. Observamos que $\dot{\gamma}_a$ y $\dot{\gamma}_p$ tienen signos distintos, esto quiere decir que la inclinación en el perihelio retrocede, es decir, el sol se mueve de oeste a este. Esto es totalmente único de Mercurio ya que el resto de planetas del sistema solar mantienen el signo positivo de $\dot{\gamma}_p$.

Como $\gamma(t) \in C^1$, debe existir un entorno de $t = 0$ en el que el sol se mueva de manera retrógrada. En el [Capítulo 4](#) se ha procedido a calcular numéricamente este entorno partiendo de que $\theta = 2 \arctan(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2})$, este resultado es puramente geométrico por lo que su justificación se ha omitido por cuestiones de espacio, una demostración sencilla puede encontrarse en [10, eq.22].

Observando los resultados obtenidos podemos comprobar que este movimiento retrógrado del Sol es de hecho muy lento. Un observador que acabe de ver amanecer en Mercurio cuatro días terrestres antes del paso de Mercurio por el perihelio verá como el Sol invierte su movimiento durante los siguientes ocho días terrestres, esto provocará que el sol se oculte de nuevo. Cuatro días terrestres después del paso por el perihelio el movimiento del Sol retomará su sentido habitual brindando de nuevo un amanecer al observador. Cabe resaltar que ocurriría un hecho análogo con el atardecer para un observador en el meridiano opuesto del planeta.

3.2. La precesión del perihelio de Mercurio

La segunda peculiaridad sobre Mercurio que vamos a analizar es que su órbita presenta un comportamiento poco usual debido a su proximidad al Sol.

3.2.1. Introducción histórica

En el siglo XIX las mejoras en las técnicas de observación astronómica permitieron a los astrónomos de la época medir experimentalmente las órbitas de los planetas del sistema solar con la suficiente precisión como para contemplar que la órbita de Mercurio precedía, es decir, su perihelio y afelio presentaban un movimiento de rotación respecto al Sol. Una representación exagerada de este movimiento puede verse en la siguiente figura, extraída de [2, p.73].

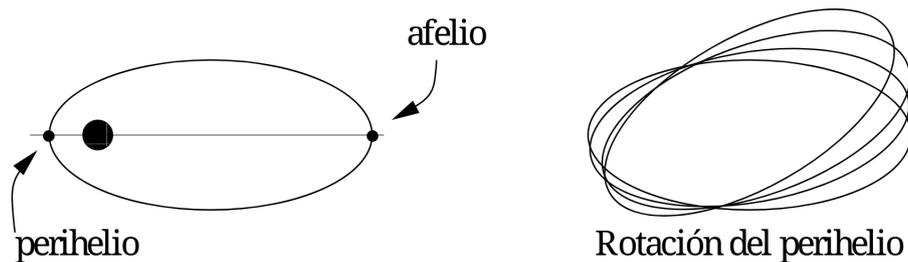


Figura 3.1: Representación exagerada del movimiento de rotación del perihelio.

El valor de la velocidad angular de esta rotación se estimó en aproximadamente 575 segundos de arco por cada siglo juliano, que denotaremos como $575''$ por siglo. Esto equivale a una rotación completa del perihelio cada 2254 siglos, se trataba pues de un movimiento extremadamente lento y sutil que requería ser explicado con rigor.

La primera aproximación para explicar este movimiento fue argumentar que era producido debido a los efectos gravitatorios del resto de planetas del sistema solar, sin

embargo, tras hacer los cálculos, esto sólo justificaba una rotación de $532''$ por siglo. Numerosas aproximaciones se tomaron para tratar de explicar la procedencia de los $43''$ por siglo restantes que quedaban por justificar, entre estas la que más destaca posiblemente fue la suposición de que existía otro planeta entre el Sol y Mercurio, al que se bautizó como *Vulcano* y cuya existencia se trató de demostrar experimentalmente por numerosos astrónomos de la época. Eventualmente las observaciones astronómicas eliminaron casi por completo la posibilidad de que esta rotación extra se debiera a cuerpos celestes no tomados en cuenta.

No fue hasta principios del siglo XX que la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, publicada en 1915, revolucionó por completo nuestro concepto de la gravedad, pasando esta a ser producida por la curvatura en la geometría del espacio-tiempo provocada por la presencia de materia o energía. De hecho, el propio problema de la precesión del perihelio de Mercurio desempeñó un papel fundamental en el desarrollo y comprobación experimental de esta teoría.

3.2.2. Solución relativista

A continuación trataremos de justificar matemáticamente cómo la teoría de la relatividad general justifica la precesión extra de $43''$ por siglo del perihelio de Mercurio que no puede explicarse por las interacciones con otros cuerpos celestes.

La relatividad general parte de la idea de que el espacio-tiempo es una variedad de Lorentz de cuatro dimensiones con signatura $(1, 3)$, es decir, una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales. Aplicando complicados argumentos de geometría diferencial y álgebra tensorial, que quedan fuera del objetivo de este trabajo, se puede deducir que la solución $r(\theta)$ al problema de un cuerpo viene dada por la siguiente ecuación diferencial, siendo $u(\theta) = 1/r(\theta)$, A , B constantes y c la velocidad de la luz:

$$(u')^2 = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = r_0 u^3 - u^2 + Bu + A = P(u) \quad \text{con} \quad r_0 = 2\frac{\mu}{c^2} = 2\frac{Gm_{sol}}{c^2} \approx 2954m.$$

Aplicando de nuevo que el afelio y el perihelio son extremos de r podemos deducir que también lo son de u y por lo tanto u' se debe anular en u_a y u_p (los valores de u en el afelio y el perihelio) por lo que deben ser raíces de $P(u)$. Además las raíces de $P(u)$ serán las mismas que las de $Q(u) = P(u)/r_0$ que es un polinomio mónico de grado tres y por lo tanto sus tres raíces u_a, u_p, u_x deben cumplir:

$$\begin{aligned} Q(u) &= u^3 - \frac{1}{r_0}u^2 + \frac{B}{r_0}u + \frac{A}{r_0} = (u - u_a)(u - u_p)(u - u_x) = \\ &= u^3 - (u_a + u_p + u_x)u^2 + (u_a u_p + u_a u_x + u_p u_x)u - u_a u_p u_x. \end{aligned}$$

Esto no es más que una aplicación de las fórmulas de Cardano-Vieta, de la que deducimos que $\frac{1}{r_0} = u_a + u_p + u_x$ es decir, $u_x = \frac{1}{r_0} - u_a - u_p$ y por lo tanto:

$$P(u) = r_0(u - u_a)(u - u_p)\left(u - \frac{1}{r_0} + u_a + u_p\right) = (u - u_a)(u - u_p)(r_0(u + u_a + u_p) - 1).$$

Si regresamos a la ecuación diferencial que cumple la solución al problema de un cuerpo, $(u')^2 = P(u)$, podemos comprobar que tiene sentido dado que $P(u)$ es siempre

positiva en el intervalo (u_a, u_p) , que es el dominio que nos interesa. Esto se debe a que $r_0(u + u_a + u_p) < 1 \forall u \in (u_a, u_p)$, de hecho este valor es muy cercano a 0 para todos los planetas del sistema solar.

Ahora podemos reescribir la ecuación diferencial como $\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1$ estando entonces el signo de $\pm\sqrt{P(u)}$ obligado a ser el mismo que el de u' . Es directo e intuitivo notar que $u(\theta)$ es decreciente en el intervalo (θ_p, θ_a) , es decir, cuando vamos del perihelio al afelio, y creciente en el intervalo $(\theta_a, \theta_{p'})$, es decir, desde el afelio al siguiente perihelio. Nuestro objetivo es calcular la diferencia entre $\theta_{p'}$ y θ_p que será igual a $2\pi + \Delta$ siendo Δ la precesión del perihelio por cada órbita completada.

Teniendo esto en cuenta, si integramos la ecuación $\frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1$ en estos intervalos y aplicamos el teorema fundamental del cálculo obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta_a - \theta_p &= \int_{\theta_p}^{\theta_a} 1d\theta = \int_{\theta_p}^{\theta_a} \frac{u'}{-\sqrt{P(u)}}d\theta = \int_{u_p}^{u_a} \frac{1}{-\sqrt{P(u)}}du = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{+\sqrt{P(u)}}du, \\ \theta_{p'} - \theta_a &= \int_{\theta_a}^{\theta_{p'}} 1d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_{p'}} \frac{u'}{+\sqrt{P(u)}}d\theta = \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{+\sqrt{P(u)}}du.\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\theta_{p'} - \theta_p = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{+\sqrt{P(u)}}du \quad \text{por lo que} \quad \Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{+\sqrt{P(u)}}du - 2\pi.$$

Ahora sólo nos quedaría calcular el valor de esta integral, que por desgracia no tiene solución explícita, para ello una opción perfectamente válida es usar métodos numéricos, pero si buscamos una mayor elegancia matemática o una fórmula explícita que nos permita calcular una buena aproximación, podemos usar el siguiente lema extraído de [3, eq.8.3], su demostración puede consultarse en la referencia pero se omite en este documento por cuestiones de espacio.

Lema 3.1. *Sea $P(x) = \epsilon x^3 - bx^2 + cx - d$ con $\epsilon, b > 0$ y con tres raíces reales, positivas y diferentes $0 < x_1 < x_2 < x_3$ entonces:*

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{+\sqrt{P(x)}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{b}} + \frac{3\pi}{4b^{3/2}}(x_1 + x_2)\epsilon \quad \text{cuando} \quad \frac{\epsilon x_2}{b} \quad \text{es cercano a } 0.$$

En nuestro caso tenemos que $x_1 = u_a$, $x_2 = u_p$, $\epsilon = r_0$ y $b = 1$ por lo que:

$$\Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{1}{+\sqrt{P(u)}}du - 2\pi \approx 2\left(\pi + \frac{3\pi}{4}(u_p + u_a)r_0\right) - 2\pi = \frac{3\pi}{2}r_0\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p}\right).$$

Si aplicamos esta fórmula a los datos de Mercurio obtenemos prácticamente el mismo valor que con la integración numérica, este valor es $\Delta = 5,02 \cdot 10^{-7}rad$ por órbita completada, como en un siglo juliano se completan 415,2 órbitas de Mercurio tenemos que la velocidad angular de rotación es de $5,02 \cdot 10^{-7} \cdot 415,2 = 2,085 \cdot 10^{-4}rad$ por siglo, que equivale a los $43''$ por siglo que estábamos buscando.

CAPÍTULO 4

Algunos cálculos numéricos

En este capítulo procederemos a utilizar las librerías *numpy*, *scipy* y *matplotlib* del lenguaje de programación *Python* con el fin de aplicar métodos numéricos eficientes que nos permitan calcular, para el caso del planeta Mercurio, la anomalía verdadera θ en función de la anomalía media M , la cual sabemos que es proporcional al tiempo ya que $M = \frac{2\pi t}{T}$.

Estos cálculos nos permitirán calcular la derivada de la elevación del Sol respecto al vector este de un observador situado en el ecuador del planeta. Cabe resaltar que esta elevación puede ajustarse de modo que nos muestre el ángulo del Sol respecto al plano horizonte del observador, para ello basta simplemente con asegurarse de que las inclinaciones $\gamma \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ se conviertan en $\pi - \gamma$ de modo que el ángulo sea siempre menor o igual a $\frac{\pi}{2}$, las inclinaciones mayores a π no interesan puesto que sería de noche.

Con este hecho podemos calcular el ángulo del Sol con el horizonte en otras latitudes diferentes de cero, para hacerlo basta con fijarse en que, por pura geometría, se cumple que el ángulo del Sol a una latitud γ_ℓ debe cumplir que $\gamma_\ell(t) = \cos(\ell)\gamma(t)$ siendo $\gamma(t)$ el ángulo del Sol para un observador a la misma longitud pero en el ecuador del planeta.

Con estos cálculos comprobaremos cómo al paso de Mercurio por su perihelio, un observador en el ecuador del planeta vería el Sol moverse de oeste a este. Esto se debe a que la inclinación del Sol adquiere una derivada negativa. Procederemos a computar numéricamente la duración de este efecto anómalo.

Podemos deducir que como el factor $\cos(\ell)$ siempre es positivo, el movimiento retrógrado calculado se dará para todas las latitudes, no sólo para la del ecuador.

Procedemos a calcular numéricamente la duración del movimiento retrógrado del Sol visto desde Mercurio.

Primero importamos los módulos necesarios.

```
[1]: import numpy as np
import math
from functools import partial
import numpy
import scipy.optimize
import matplotlib.pyplot as pp
```

Guardamos en variables los datos reales sobre la órbita de Mercurio. Estos datos son la excentricidad e , el periodo de rotación τ , el periodo orbital T y la relación $k = T/\tau$.

```
[2]: e = 0.206 # Excentricidad
tau = 5067014.4 # Duración del día sideral en segundos
T = 7600530.24 # Duración del año sideral en segundos
k = T/tau # Relación entre el año sideral y el día sideral
```

Podemos observar cómo k es prácticamente 1.5.

```
[3]: k
```

```
[3]: 1.500001705146131
```

Esto se debe a que, gracias a la gran excentricidad de Mercurio, la mayor de entre todos los planetas del sistema solar, la rotación del planeta no se ha visto afectada por lo que se conoce como rotación síncrona, “tidal locking” en inglés, que es un efecto que sufren muchos pares de cuerpos celestes, como es el caso del par Luna-Tierra, en el que el cuerpo de menor masa adquiere o pierde velocidad angular hasta llegar a una rotación estable con un ratio 1:1 con su periodo de traslación alrededor del cuerpo de mayor masa.

En el caso de Mercurio se observa que, gracias a su elevada excentricidad, ha conseguido alcanzar una resonancia orbital, “spin-orbit resonance” en inglés, estable de ratio 3:2.

Procedemos a aplicar la ecuación de Kepler para hallar la anomalía excéntrica E a partir de la anomalía media M , que es proporcional al tiempo.

Recordamos que $M = \frac{2\pi t}{T}$ y que E cumple $M = E - e \sin E$.

```
[4]: n=200000 # Número de puntos a calcular numéricamente

def z(x, y):
    return y - e*np.sin(y) - x

M_window = 0, 2*math.pi
E_window = 0, 2*math.pi

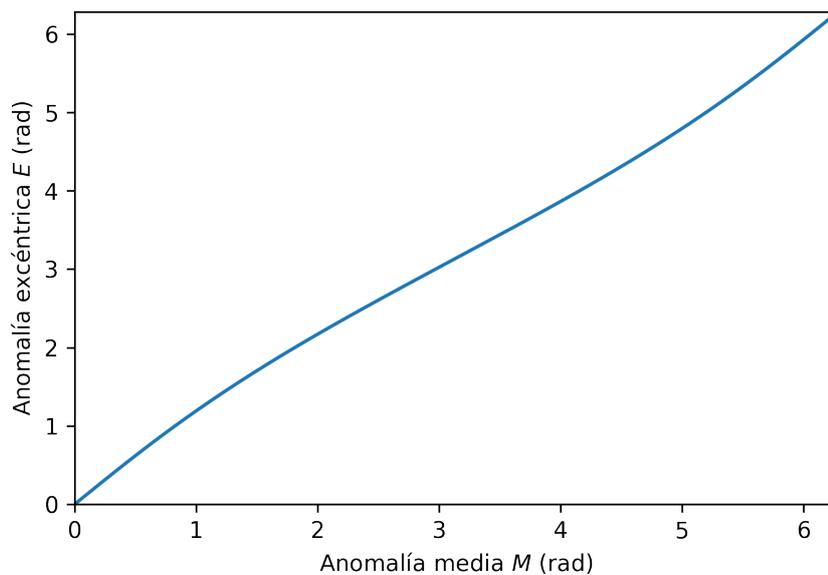
M = []
E = []
```

```

for x in numpy.linspace(*M_window, num=n):
    try:
        y = scipy.optimize.brentq(partial(z, x), *E_window)
    except ValueError:
        print(f"Solución no encontrada para el valor {x}")
        pass
    else:
        M.append(x)
        E.append(y)

pp.plot(M, E)
pp.xlim(*M_window)
pp.ylim(*E_window)
pp.ylabel("Anomalía excéntrica $E$ (rad)")
pp.xlabel("Anomalía media $M$ (rad)")
pp.savefig('E_M.png', dpi=300)

```

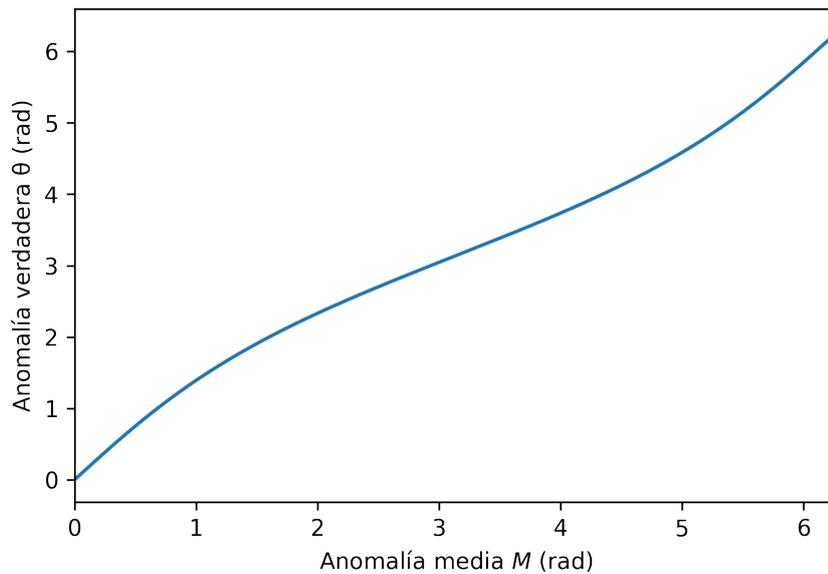


Procedemos a calcular la anomalía verdadera usando la siguiente fórmula vista en el capítulo 3:

$$\theta = 2 \arctan \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \arctan \frac{E}{2}.$$

Esto nos permitirá expresar la anomalía verdadera θ en función de la anomalía media M .

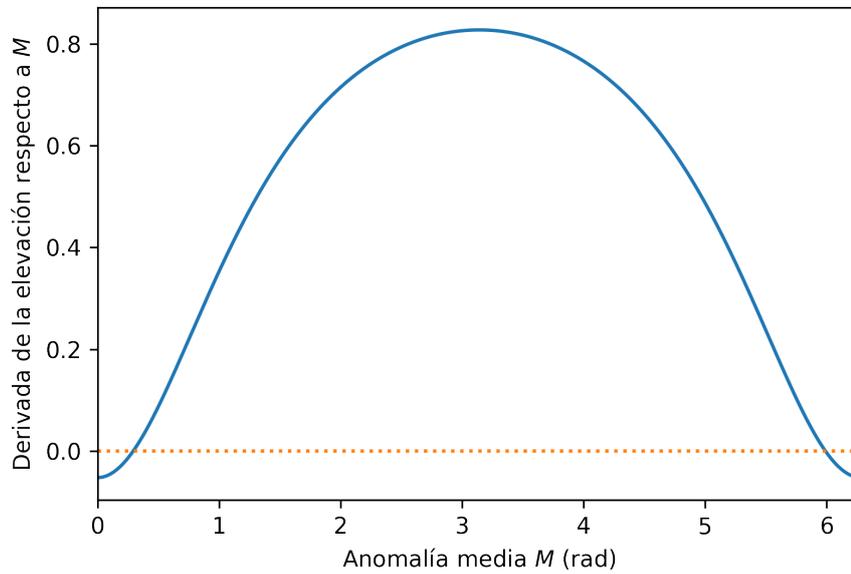
```
[5]: Th = 2*np.arctan(np.sqrt((1+e)/(1-e))*np.tan(np.divide(E,2)))
Th[int(n/2):]=Th[int(n/2):]+2*np.pi
pp.plot(M, Th)
pp.xlim(*M_window)
pp.ylabel("Anomalía verdadera  $\theta$  (rad)")
pp.xlabel("Anomalía media  $M$  (rad)")
pp.savefig('T_M.png', dpi=300)
```



Ahora procedemos a calcular la derivada de la inclinación con respecto a M .

Usando la fórmula $\dot{\gamma}(t) = \frac{2\pi}{\tau} - \dot{\theta}(t)$ podemos deducir que $\frac{d\gamma}{dM} = \dot{\gamma} \frac{dt}{dM} = \frac{T}{\tau} - \frac{d\theta}{dM}$. Aplicándola a nuestro caso con Mercurio obtenemos:

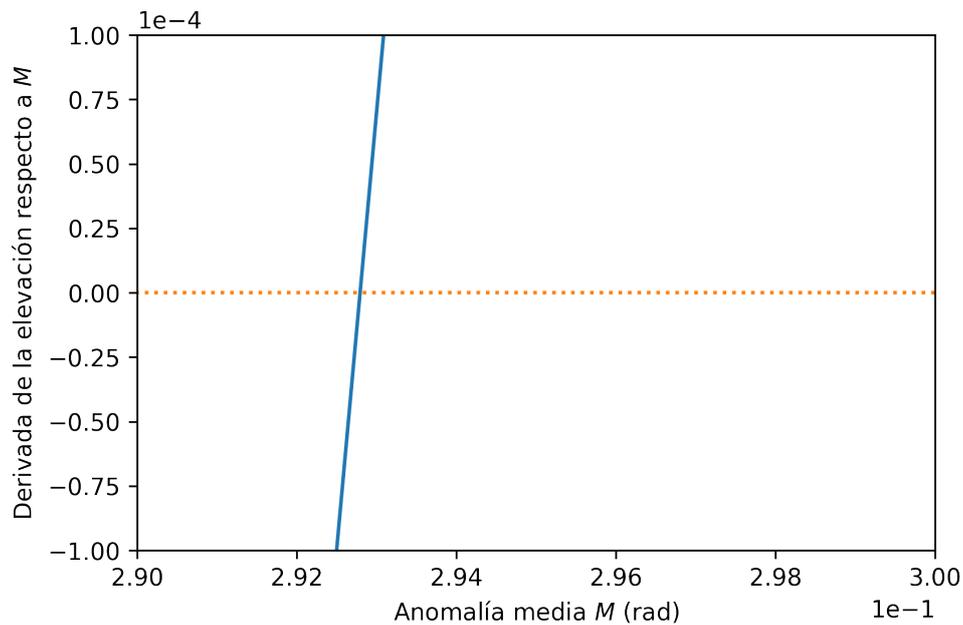
```
[6]: dT = np.diff(Th)/np.diff(M)
dG = k - dT
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG)
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG*0, linestyle=':')
pp.ylabel("Derivada de la elevación respecto a  $M$ ")
pp.xlabel("Anomalía media  $M$  (rad)")
pp.xlim(*M_window)
pp.savefig('G_M.png', dpi=300)
```



Podemos observar cómo en un entorno del perihelio la derivada es negativa. Procedemos a calcular dónde se anula esta derivada.

Para hacerlo observamos los puntos en los que la derivada cambia de signo, al ser una función par debería anularse en $+x$ y $-x$.

```
[7]: dT = np.diff(Th)/np.diff(M)
dG = k - dT
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG)
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG*0, linestyle=':')
pp.ylabel("Derivada de la elevación respecto a $$$")
pp.xlabel("Anomalía media $$$ (rad)")
pp.xlim(0.29,0.30)
pp.ylim(-0.0001,0.0001)
pp.savefig('G_M_Z.png', dpi=300)
```



```
[8]: np.where(dG >= 0)
```

```
[8]: (array([ 9320,  9321,  9322, ..., 190676, 190677, 190678]),)
```

```
[9]: np.linspace(0,2*np.pi, n-1)[9320]
```

```
[9]: 0.2927993633082018
```

```
[10]: -(2*np.pi - np.linspace(0,2*np.pi, n-1)[190678])
```

```
[10]: -0.2927993633082018
```

Efectivamente se anula en $M = \pm 0.2928$ radianes, si lo convertimos a tiempo obtenemos $t = \pm 0.2928 \cdot \frac{T}{2\pi} = \pm 354189s$ por lo tanto el movimiento retrógrado dura 708378 segundos que equivalen aproximadamente a 8.2 días terrestres.

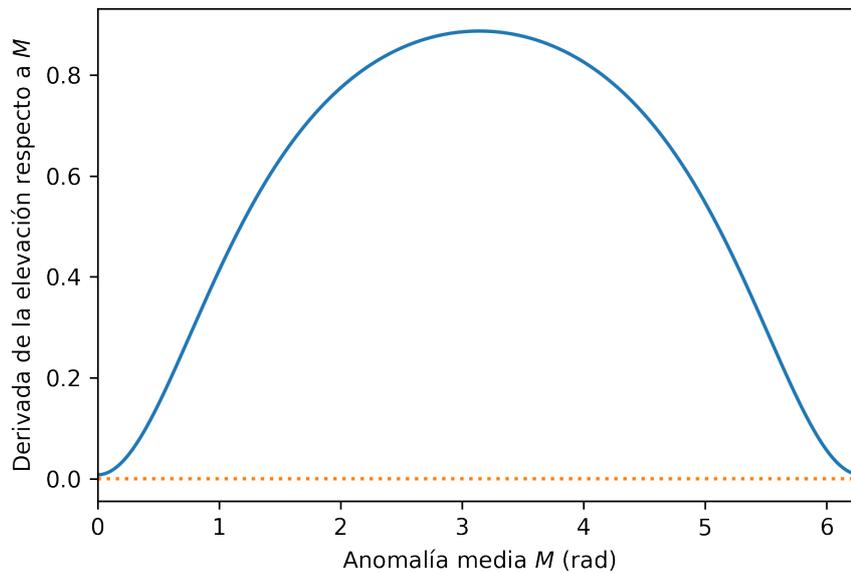
```
[11]: 2*0.2928*T/(2*np.pi*3600*24)
```

```
[11]: 8.198819936304577
```

A continuación resaltaremos algunas observaciones importantes.

Si repetimos los cálculos suponiendo que Mercurio tiene una relación k entre T y τ ligeramente mayor, de 1.56 en vez de 1.5, podemos comprobar cómo el movimiento retrógrado desaparece por completo.

```
[12]: dT = np.diff(Th)/np.diff(M)
dG = 1.56 - dT
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG)
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG*0, linestyle=':')
pp.ylabel("Derivada de la elevación respecto a $$$")
pp.xlabel("Anomalía media $$$ (rad)")
pp.xlim(*M_window)
pp.savefig('G_M_T.png', dpi=300)
```



Del mismo modo si repetimos los cálculos pero con una excentricidad levemente menor, de 0.19 en vez de 0.206, de nuevo perdemos el movimiento retrógrado.

```
[13]: e=0.19
n=200000 # Número de puntos a calcular numéricamente

def z(x, y):
    return y - e*np.sin(y) - x

M_window = 0, 2*math.pi
E_window = 0, 2*math.pi

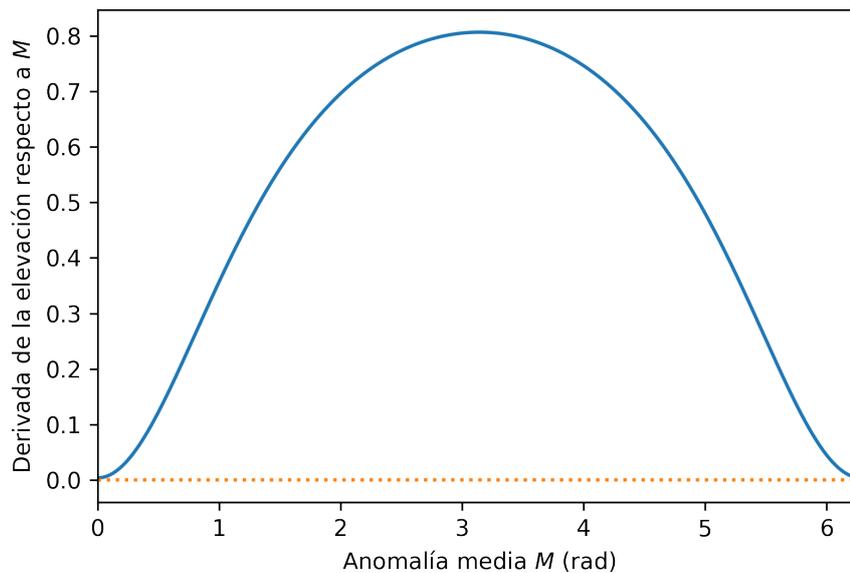
M = []
E = []
for x in numpy.linspace(*M_window, num=n):
    try:
        y = scipy.optimize.brentq(partial(z, x), *E_window)
```

```

except ValueError:
    print(f"Solución no encontrada para el valor {x}")
    pass
else:
    M.append(x)
    E.append(y)

Th = 2*np.arctan(np.sqrt((1+e)/(1-e))*np.tan(np.divide(E,2)))
Th[int(n/2):]=Th[int(n/2):]+2*np.pi
dT = np.diff(Th)/np.diff(M)
dG = k - dT
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG)
pp.plot(np.linspace(0,2*np.pi, n-1), dG*0, linestyle=':')
pp.ylabel("Derivada de la elevación respecto a $$$")
pp.xlabel("Anomalía media $$$ (rad)")
pp.xlim(*M_window)
pp.savefig('G_M_E.png', dpi=300)

```



Concluimos pues que este fenómeno del doble amanecer requiere de excentricidades elevadas y periodos de rotación lentos, de modo que la velocidad angular de traslación cerca del perihelio supere a la de rotación.

CAPÍTULO 5

El problema de N cuerpos

En este capítulo analizaremos la generalización del problema de los dos cuerpos para un número arbitrario de masas, este es el conocido como problema de los N cuerpos. Este problema consiste en hallar las trayectorias seguidas por N masas puntuales que interactúan únicamente mediante la fuerza de la gravedad.

El interés práctico de este problema es enorme, dado que resolverlo permitiría calcular con precisión las órbitas de todos los cuerpos celestes de un sistema sin tener que recurrir a las aproximaciones elípticas que resuelven el problema de los dos cuerpos pero que no tienen en cuenta las fuerzas ejercidas por el resto de masas del sistema.

Aunque pueda parecer que su resolución no debería ser mucho más difícil que la del problema de los dos cuerpos, resulta que es un problema excesivamente complicado. Pese a que muchos casos particulares tienen solución analítica conocida, estos son generalmente muy artificiales y no aparecen en el mundo real.

La complejidad radica en que el lagrangiano de la versión tridimensional de este problema, que es la que trataremos, consta de $6N$ variables, las posiciones y velocidades de cada cuerpo, pero las leyes de conservación junto con los cambios de variables y de sistema de referencia que usamos para resolver el problema de los dos cuerpos no son suficientes para obtener una solución analítica, esto se debe a que, como se explica en [6], está demostrado que en este problema no pueden calcularse más de diez integrales primeras. Sin embargo, esto no implica que la solución no se pueda expresar de otra forma, de hecho, existe una solución general a este problema en forma de serie convergente, el problema con esta serie radica en que converge de forma excesivamente lenta como para tener alguna utilidad práctica, es por esto por lo que, aún a día de hoy, es más conveniente usar métodos numéricos para aproximar la solución a este problema. Para más información sobre la solución general puede consultarse [6].

Otro de los factores que dificultan el estudio a largo plazo de las soluciones de este problema es el hecho de que a menudo estas soluciones presentan un comportamiento caótico, con esto nos referimos a que pequeños cambios en las condiciones iniciales suelen acarrear enormes diferencias en la evolución del sistema a largo plazo.

Que el problema sea extremadamente complicado no significa que no podamos comprobar ciertas propiedades teóricas que deben cumplir las soluciones. En este capítulo analizaremos algunos de estos resultados cualitativos más importantes.

5.1. Ausencia de soluciones de equilibrio

En el estudio de sistemas dinámicos, se denominan *soluciones de equilibrio* a aquellas configuraciones de datos iniciales que provocan la cancelación de todas las fuerzas del sistema para todo tiempo, esto provoca que no se produzcan aceleraciones y por lo tanto todos los cuerpos deben mantener un movimiento rectilíneo uniforme definido por las condiciones iniciales del sistema. Cabe resaltar que en este caso, un cuerpo con velocidad inicial nula mantendrá una posición estática a lo largo del tiempo.

Razonando un poco, parece lógico afirmar que este tipo de soluciones no pueden darse para el problema de N cuerpos, la intuición nos dice que, al ser la gravedad una fuerza atractiva, los cuerpos más alejados al centro de masa del sistema no podrán cancelar las fuerzas que se ejercen sobre ellos. Tratemos de formalizar esta idea.

Recordando el lagrangiano del problema de los dos cuerpos y generalizándolo a un número N de cuerpos, podemos deducir fácilmente que el lagrangiano del problema de N cuerpos debe ser:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \|\dot{\mathbf{r}}_k\|^2 + G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

Cabe resaltar que, en el sumatorio del potencial V , es importante usar la condición $i < j$ en vez de la menos restrictiva $i \neq j$ dado que, como vimos en el problema de dos cuerpos, cada término $\frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$ da lugar tanto a la fuerza que m_i ejerce sobre m_j como a la fuerza que m_j ejerce sobre m_i . La condición $i \neq j$ provocaría que, tras aplicar Euler-Lagrange, obtuviéramos dos veces la fuerza de la gravedad.

Pasamos ahora a recordar que se denomina función *homogénea* de grado p a toda aquella función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(t\mathbf{r}) = t^p f(\mathbf{r})$ para $\mathbf{r} \in \mathcal{U}$ y $t \in \mathbb{R}^+$.

Podemos comprobar que si f es homogénea de grado p entonces fijado $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ la función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(t) = f(t\mathbf{r}) = t^p f(\mathbf{r})$ debe cumplir por una parte que $g'(t) = p t^{p-1} f(\mathbf{r})$ y por otra parte, aplicando la regla de la cadena, $g'(t) = \frac{d(t\mathbf{x})}{dt}(t) \cdot \nabla f(t\mathbf{r}) = \mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{r})$ igualando ambos valores en $t = 1$ concluimos que $g'(1) = p f(\mathbf{r}) = \mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$. Este es el conocido como teorema de Euler.

Si consideramos ahora el potencial V del problema de N cuerpos como una función escalar $V(\mathbf{r})$ con $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$, podemos comprobar fácilmente que $V(\mathbf{r})$ es una función homogénea de grado -1 ya que, usando que la norma usual de \mathbb{R}^3 es positivamente homogénea, tenemos que:

$$V(t\mathbf{r}) = -G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|t\mathbf{r}_i - t\mathbf{r}_j\|} = -\frac{G}{t} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} = t^{-1} V(\mathbf{r}).$$

Entonces, sabiendo que $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) = \mathbf{F} = -\nabla V$, aplicando el teorema de Euler concluimos que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = -\nabla V \cdot \mathbf{r} = V < 0$ lo que implica que $\mathbf{F} \neq \mathbf{0} \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}$, es decir, no existe ninguna combinación de posiciones de las masas que anule todas las fuerzas del sistema, por lo que no hay soluciones de equilibrio.

5.2. El teorema del colapso total de Sundman

A principios del siglo XX, el físico finlandés K. F. Sundman fue el primero en hallar una solución en forma de serie convergente al problema de los tres cuerpos.

Su solución, pese a su escasa utilidad práctica, fue recibida con enorme sorpresa por la comunidad matemática de la época, que ya había dado el problema prácticamente por irresoluble con los métodos conocidos. Esto era debido a que a finales del siglo XIX, las mentes más brillantes de la época, entre las que destaca H. Poincaré, habían hecho grandes esfuerzos en resolver el problema, motivados en parte por generosos premios como el patrocinado por el rey Óscar II de Suecia y Noruega. Pese a los avances conseguidos y los nuevos campos de la matemática que abrieron estas investigaciones, nadie había logrado conseguir una expresión para la solución al problema de los N cuerpos. La solución de Sundman al caso reducido a tres cuerpos proporcionó un nuevo enfoque que fue crucial para la futura solución al caso general de N cuerpos, que por desgracia acabó opacando su aportación. Para más información sobre el contexto histórico y las aportaciones de Poincaré puede consultarse [6] y [4].

Un aspecto sorprendente de la solución de Sundman es que es extremadamente general, la única suposición que requiere para hallar la solución es la de que las condiciones iniciales del problema no desemboquen en un *colapso total*, con esto nos referimos a que en la solución no debe existir ningún momento t_c en el que la posición de todos los cuerpos coincida en un mismo punto p_c . Este requisito es necesario ya que si todos los cuerpos coinciden en un punto la fuerza gravitatoria carece de sentido.

Sundman consiguió demostrar que si las condiciones iniciales del problema de N cuerpos tenían momento angular no nulo, condición asumible para los casos reales dado que los cuerpos celestes se suelen formar por la acumulación de materia en rotación, entonces era imposible que se produjera un colapso total. Este es el conocido como *teorema del colapso total de Sundman* y con el tiempo acabó teniendo más relevancia que su solución al problema de los tres cuerpos, en parte por su generalidad ya que vale para cualquier N . Procedemos ahora a formular y demostrar este resultado:

Teorema 5.1. *Una solución al problema de N cuerpos definida sobre un intervalo $t \in (t_a, t_c)$ con momento angular total $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \neq 0$ no puede cumplir $\lim_{t \rightarrow t_c} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}_0 \forall i = 1, \dots, N$ y para algún $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Aplicando Euler-Lagrange al lagrangiano del problema de N cuerpos podemos deducir que la solución al mismo vendrá dada por N funciones vectoriales \mathbf{r}_i que cumplen $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}$. Tomando como sistema de referencia aquel que tiene como origen de coordenadas al punto de colapso \mathbf{p}_0 , es decir, considerando el cambio de coordenadas $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_0$ que deja invariante al lagrangiano, podemos deducir fácilmente que un colapso total implica necesariamente que $\lim_{t \rightarrow t_c} |\mathbf{r}_i| = 0 \forall i = 1, \dots, N$ y por lo tanto el *momento de inercia* definido como $I(t) = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{r}_i|^2$ debe cumplir $\lim_{t \rightarrow t_c} I(t) = 0$. Demostraremos que esta condición es incompatible con la suposición $\mathbf{L} \neq 0$.

Si observamos \ddot{I} y aplicamos $\|\mathbf{r}_i\|^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$ podemos comprobar que se cumple:

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = 4T + 2V.$$

Para esta última igualdad hemos usado que como \mathbf{r}_i es solución debe cumplir:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (a_{ij} + a_{ji}) = V,$$

siendo $a_{ij} = \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}$, por lo que efectivamente se cumple:

$$a_{ij} + a_{ji} = \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} ((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_i + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_j) = -\frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^2.$$

Por lo tanto hemos demostrado que $\ddot{I} = 4T + 2V = 2E + 2T$, es decir, $2T = \ddot{I} - 2E$.

Por otro lado la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos asegura que:

$$(5.1) \quad \|\mathbf{L}\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{r}_i\| \|\dot{\mathbf{r}}_i\| \right)^2 \leq 2IT = I(\ddot{I} - 2E).$$

Si suponemos que se produce un colapso total es obvio comprobar que $V \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow t_c$ y por consiguiente $\ddot{I} = 2E + 2T = 2E + 2(E - V) = 4E - 2V \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow t_c$, por lo que I debe ser convexa en un entorno $(t_c - \epsilon, t_c)$ además como $I > 0$ y $I(t_c^-) = 0$ tenemos que \dot{I} debe ser negativa en dicho entorno de t_c por lo que multiplicando por $\dot{I}/I < 0$ en la desigualdad (5.1) obtenemos:

$$\|\mathbf{L}\|^2 \frac{\dot{I}}{I} \geq \dot{I}(\ddot{I} - 2E) = \dot{I}\ddot{I} - \dot{I}2E.$$

Si ahora integramos esta desigualdad en el intervalo $(t_c - \epsilon, t_c)$ podemos deducir que:

$$(5.2) \quad \|\mathbf{L}\|^2 \log I + K \geq \frac{1}{2} \dot{I}^2 - 2EI \quad \text{siendo } K \text{ una constante.}$$

Si recordamos ahora los resultados de conservación de energía total E y de conservación de momento angular \mathbf{L} de los apartados 1.4.1 y 1.4.3 respectivamente, podemos estar seguros de que tanto E como \mathbf{L} son constantes, esto nos permite argumentar que, si se produce un colapso total como estábamos suponiendo, lo que provoca que $I(t_c^-) = 0$ como hemos visto antes, entonces \mathbf{L} debe ser necesariamente 0, dado que de no ser así, la desigualdad (5.2) nos estaría asegurando que cuando $t \rightarrow t_c$ se cumple:

$$\|\mathbf{L}\|^2 \log 0^+ + K = -\infty \geq \frac{1}{2} \dot{I}^2 - 2E0^+ = \frac{1}{2} \dot{I}^2 \geq 0.$$

Esto es una flagrante contradicción, por lo tanto concluimos que todos los sistemas con $\mathbf{L} > 0$ no pueden presentar un colapso total. \square

Por desgracia para nosotros, los habitantes del mundo real, este resultado no implica que no pueda producirse un choque simultáneo de todos los cuerpos del sistema solar, puesto que hemos supuesto las masas como puntuales cuando en realidad los cuerpos celestes ocupan un volumen determinado.

Bibliografía

- [1] CHAMIZO, F. *Gravitación y mecánica*. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/model1415/resum01.pdf>, 2015.
- [2] CHAMIZO, F. *Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso)*. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf>, 2009.
- [3] CHAMIZO, F. *Post-Newtonian approximations [Homework for a Master course]*. https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/ppn_chamizo.pdf, 2016.
- [4] CHAMIZO, F. *¿Y si explota todo?* <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819algII/titan/sundman.pdf>, 2019.
- [5] COLWELL, P. *Bessel functions and Kepler's equation*. *Amer. Math. Monthly*, 99(1):45–48, 1992.
- [6] DIACU, F. *The solution of the n-body problem*. *Math. Intelligencer*, 18(3):66–70, 1996.
- [7] FERRER, C. *Introducción a la Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana* <http://ocw.uv.es/ciencias/2/1-2/112733mats50.pdf>, 2008.
- [8] GEIGES, H. *The geometry of celestial mechanics*. volume 83 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [9] GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980.
- [10] HORN, W. *The three anomalies*. <http://www.csun.edu/~hcmth017/master/node14.html>, 2006. [Online; accessed 30-April-2022].
- [11] POLLARD, H. *Celestial mechanics*. volume 18 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.

