



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Representaciones, grupos de Lie y partículas elementales

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Javier Prieto Prieto

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2018-2019

Resumen

Las representaciones son herramientas que permiten entender la estructura algebraica de un grupo dejándolo actuar sobre un espacio vectorial. Esta idea *a priori* abstracta goza de gran aplicación práctica en varias ramas de la física. En este trabajo veremos los aspectos más elementales de la teoría y algunas de estas aplicaciones. En particular, estudiaremos cómo las simetrías de un sistema físico se pueden codificar en un grupo para a continuación extraer leyes dinámicas que predican su evolución. Nuestros primeros ejemplos serán grupos finitos en mecánica clásica para pasar después a la teoría de grupos de Lie, cuya importancia ha sido capital en el desarrollo del modelo estándar de la física de partículas.

Abstract

Representation theory is a tool for understanding a group's algebraic structure by letting it act on a vector space. This idea may sound abstract on its face but it has a great deal of practical applications in several branches of physics. This work will review the most elementary results of the theory as well as some of its applications. We will focus particularly on how the symmetries of a physical system can be encoded in a group and how representation theory can then be used to derive dynamical laws predicting its evolution in time. Our first examples will include finite groups in classical mechanics. After that we will review the central role the representation theory of Lie groups has played in the development of the Standard Model of particle physics.

Índice general

1	Motivación y definiciones básicas	1
1.1	Introducción	1
1.2	Definiciones y resultados elementales	2
1.3	Más ejemplos	6
1.3.1	Permutaciones	6
1.3.2	Formas cuadráticas	7
2	Representaciones de grupos finitos	9
2.1	Carácter de una representación y ortogonalidad	9
2.2	La representación regular	12
2.3	Ejemplos	14
2.3.1	A_4 y las simetrías del tetrahedro	14
2.3.2	Modos normales de un sistema mecánico	16
2.4	Tablas de Young y la <i>hook length formula</i>	19
3	Grupos de Lie y teorías gauge	21
3.1	Grupos de Lie	21
3.2	Álgebras de Lie	23
3.2.1	La aplicación exponencial	25
3.2.2	Constantes de estructura	26
4	Representaciones de grupos y álgebras de Lie	29
4.1	Los casos $SU(2)$ y $SO(3)$	29
4.1.1	Representaciones y álgebras de Lie	29
4.1.2	Toros maximales y subálgebras de Cartan	30
4.1.3	Pesos y raíces	31
4.2	$SU(3)$ y orden superior	34
5	El principio gauge	37
5.1	Lagrangianos y simetrías	37
5.2	El principio gauge en acción	39
5.2.1	Teoría $U(1)$ o electrodinámica cuántica	39
5.2.2	Teoría $O(n)$	41
5.3	El modelo estándar	42

Motivación y definiciones básicas

1.1. Introducción

La estructura algebraica de grupo se suele motivar apelando a la idea de que ciertos objetos matemáticos tienen simetrías, es decir, son invariantes bajo la acción de ciertas transformaciones. Estas transformaciones, se nos dice, forman un grupo, pues pueden componerse e invertirse. Por ejemplo, un conjunto sigue siendo el mismo aunque cambiemos de orden sus elementos. Una vez que tenemos la definición axiomática de grupo podemos hacer álgebra sin preocuparnos de dónde viene. Sin embargo, la teoría de representación nos dice que puede ser útil desandar el camino: coger un grupo abstracto y “realizarlo” como transformaciones sobre un espacio. Representar un grupo abstracto es, en cierto sentido, linealizarlo [18] para entenderlo mejor. Objetos que se pueden definir de pleno derecho con una simple lista (quizá infinita) de relaciones algebraicas, cobran mucho más sentido si los dejamos actuar sobre un espacio accesorio.

Esta relación estrecha entre grupos y transformaciones data como mínimo de finales del siglo XIX. En esa época, la teoría de grupos ya había hecho su aparición en el álgebra de la mano de Galois. Al mismo tiempo, Riemann (entre otros) había revolucionado la geometría con el descubrimiento de espacios no euclídeos. Es en este contexto cuando Klein propone usar la teoría de grupos para poner orden en la geometría. Según su propuesta, conocida como Programa Erlangen, la geometría es el estudio de aquello que permanece invariante bajo un grupo de simetrías. Distintos grupos darán lugar a geometrías diferentes, siguiendo un patrón básico: Grupos más grandes actuarán de forma más “variada”, preservando menos invariantes y, por tanto, dando lugar a geometrías menos “rígidas”.

La forma más general de introducir representaciones emplea el lenguaje de teoría de categorías¹ [9]. No obstante, es posible también dar una definición en el lenguaje más habitual de la teoría de conjuntos ZFC.

Definición 1.1.1. Sean G un grupo, V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $GL(V)$ el conjunto de aplicaciones K -lineales invertibles de V en V . Decimos que

¹Esto no es casualidad. Los mismos fundadores de la teoría de categorías la consideraban como una extensión natural del Programa Erlangen [3].

$\pi: G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G sobre V si π es un homomorfismo de grupos, donde la operación de grupo en $GL(V)$ viene dada por la composición.

Abusando un poco la notación, a veces escribiremos $\pi(g)(v)$ como $g \cdot v$ cuando se entienda de qué π estamos hablando. Veamos un primer ejemplo: Sea $G = S_3$, el grupo de permutaciones del conjunto con 3 elementos, y sea $V = \mathbb{R}$. Entonces, $GL(V) \cong \mathbb{R}$ y los homomorfismos

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \pi_1: S_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \pi_2: S_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\longmapsto 1 \\ \sigma &\longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

son ejemplos de representaciones. El primero es trivial y el segundo da el signo de la permutación. Evidentemente, al no ser ninguno de los dos monomorfismos, se ha perdido estructura al representar S_3 de estas maneras. En cierto sentido, \mathbb{R} es “demasiado pequeño” para capturar toda la estructura del grupo. Sin embargo, si tomamos $V = \mathbb{R}^2$ podemos definir $\pi_3: S_3 \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ mediante

$$(1.2) \quad \pi_3(2,3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que sí es inyectivo. Si restringimos π_3 a su imagen, vemos que resulta el isomorfismo entre S_3 y el grupo diédrico D_3 , es decir, las isometrías del plano que fijan un triángulo equilátero centrado en el origen.

Otra manera de dar una representación de S_3 que generaliza a grupos simétricos de cualquier orden es actuar con elementos sobre una base de \mathbb{R}^3 y, a continuación, escribir la expresión matricial de las permutaciones en esa base. Así pues tendríamos

$$(1.3) \quad \rho(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Definiciones y resultados elementales

Definición 1.2.1. La dimensión de una representación π de G sobre V es la dimensión del espacio vectorial V , i.e. $\dim_K V$.

De nuevo, nos interesamos sobre todo por los casos $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Cabe recordar en este punto que $\dim_{\mathbb{R}} V \neq \dim_{\mathbb{C}} V$, por lo que “dimensión de una representación” es algo ambiguo a menos que se especifique el cuerpo base. Omitiremos de cuál se trata solamente cuando no quepa lugar a confusión. Asimismo, recordamos que en este trabajo lidiaremos solo con representaciones de dimensión finita.

Veamos ahora cómo podemos capturar la idea de que dos representaciones sean equivalentes. Para ello introducimos primero la siguiente

Definición 1.2.2. Dadas dos representaciones π y ρ de G sobre V y W , una **aplicación equivariante** de V a W es una aplicación lineal $\phi: V \rightarrow W$ tal que $\pi(g) \circ \phi = \phi \circ \rho(g)$ para todo $g \in G$.

Dicho de otra forma, queremos que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \pi(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array}$$

Si exigimos que la aplicación ϕ sea un isomorfismo, podemos decir que las representaciones que conecta son básicamente la misma salvo conjugación. De ahí la siguiente

Definición 1.2.3. Dos representaciones π y ρ de G sobre V y W , respectivamente, si existe una aplicación equivariante de V a W que además es invertible.

Una consecuencia inmediata de esto es que representaciones de dimensión diferente no pueden ser nunca equivalentes, pues los espacios sobre los que actúan no son isomorfos.

Si nos dan dos espacios vectoriales cualesquiera, siempre los podemos combinar de (al menos) dos maneras canónicas: mediante el producto tensorial y mediante la suma directa. Estas dos construcciones tienen una traducción inmediata al caso de representaciones.

Definición 1.2.4. Dadas representaciones π_1, π_2 de G sobre espacios V_1, V_2 , su producto tensorial es la representación $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ de G sobre el espacio vectorial $V = V_1 \otimes V_2$ con la acción del grupo definida como $\pi(g)(v_1 \otimes v_2) = (\pi_1(g)(v_1)) \otimes (\pi_2(g)(v_2))$ para todos $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ y $g \in G$.

Un ejemplo importante de esta construcción viene de la mecánica cuántica, donde el estado de un sistema físico se representa mediante un vector en un espacio de Hilbert, $\psi \in \mathcal{H}$, que, en nuestro caso, supondremos de dimensión finita. Fijada una base, las coordenadas del estado nos permiten calcular las probabilidades de obtener distintos resultados en caso de que decidiéramos medir el sistema. Si tenemos dos sistemas independientes² en estados ψ_1 y ψ_2 , es natural postular que el estado conjunto viene dado por $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$, puesto que, si los sistemas son verdaderamente independientes, cualquier par ordenado de estados individuales debe poder ser un estado conjunto. Si cada sistema por separado tiene ciertas simetrías, la manera de estudiar las simetrías del sistema conjunto requerirá estudiar el producto tensorial de representaciones, lo que sirve para motivar la anterior definición. Por otra parte, si los dos sistemas son indistinguibles, el sistema conjunto tendrá una nueva simetría: la de permutar el primero con el segundo. La representación de esta nueva simetría es lo que permite distinguir bosones (representación trivial) de fermiones (representación dada por el signo de la permutación).

Definición 1.2.5. Dadas representaciones π_1, π_2 de G sobre espacios V_1, V_2 , su suma directa es la representación $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ de G sobre el espacio vectorial $V =$

²En concreto, dos sistemas que no interactúan entre sí y que no están entrelazados.

$V_1 \oplus V_2$ con la acción del grupo definida componente a componente, i.e. $\pi(g)((v_1, v_2)) = (\pi_1(g)(v_1), \pi_2(g)(v_2))$ para todos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ y $g \in G$.

A modo de ejemplo, notamos que cualquiera de las representaciones de S_3 vistas en el apartado anterior se puede extender a un espacio de dimensión mayor de manera trivial: basta sumarle la identidad tantas veces como queramos hasta llegar a la dimensión deseada.

$$(1.4) \quad \hat{\rho} = \rho \oplus \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1}$$

Esta construcción realmente no es exclusiva de S_3 . Dada una representación finita, siempre podemos encontrar infinitas más, actuando trivialmente sobre dimensiones adicionales. Lidiar con esta trivialidad motiva la siguiente

Definición 1.2.6. *Dada una representación π de G sobre V , se dice que un subespacio $W \subseteq V$ es invariante bajo π si $g \cdot v \in W$ para todos $v \in W$ y $g \in G$.*

Por ejemplo, en la representación π_1 del apartado anterior, todos los elementos del grupo actúan trivialmente, por lo que todo el espacio $V = \mathbb{R}$ es invariante, mientras que el resto de representaciones solo dejan fijo el cero, de modo que ninguna tiene subespacios propios invariantes. Estas representaciones tienen un nombre especial.

Definición 1.2.7. *Una representación se dice irreducible si no tiene subespacios invariantes propios, i.e. distintos de V y $\{0\}$.*

Para terminar con las definiciones, notamos que a veces es interesante considerar representaciones que envían G a subgrupos de $GL(V)$ con propiedades concretas. Uno de estos casos es el grupo de matrices unitarias $U(V) = \{U \in GL(V): U^\dagger U = \mathbf{1}\}$,³ que son las transformaciones que preservan el producto escalar en V . Esto motiva la siguiente

Definición 1.2.8. *Una representación π de G en V se dice unitaria si respeta el producto escalar en V , i.e. $\langle v, w \rangle = \langle g \cdot v, g \cdot w \rangle$ para todos $v, w \in V$ y para todo $g \in G$.*

Ahora que tenemos definidas las nociones básicas, vamos con algunos resultados elementales sobre reducibilidad. En primer lugar, nos interesa saber cuándo una representación se puede descomponer como suma directa de irreducibles. La respuesta la da el siguiente

Teorema 1.2.1. *Toda representación compleja de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles.*

Antes de pasar a la prueba, cabe hacer dos comentarios. El primero es que no es estrictamente necesario que la representación sea compleja⁴, pero eso permite dar una

³Aquí y en el resto del texto el superíndice daga indica el transpuesto conjugado, tanto para matrices como para vectores.

⁴Basta que el orden del grupo no sea divisible por la característica del cuerpo, ver [15].

prueba más sencilla usando el producto interior de \mathbb{C} . En segundo lugar, veamos un contraejemplo para ilustrar por qué el grupo ha de ser finito. Sea

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \pi: \mathbb{Z} &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ n &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos que $\pi(n)$ tiene como único autovalor el 1, con multiplicidad algebraica 2, pero su subespacio asociado, $X = \text{span}\{(1,0)\}$, tiene dimensión 1. Es decir, $\pi(n)$ no es diagonalizable, por lo que, a pesar de que no es irreducible, pues X es un subespacio invariante, no se puede expresar como suma de subrepresentaciones irreducibles.

Demostración. La prueba contiene dos ingredientes. El primero se conoce como el truco unitario de Weyl, y consiste en observar que toda representación finita de un grupo finito se puede masajear adecuadamente para obtener una representación unitaria. Para ello, basta redefinir el producto interior en V como

$$(1.6) \quad (v, w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v, g \cdot w \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior original. Vemos que el nuevo hereda la positividad y simetría del anterior por construcción y que la sesquilinealidad también está garantizada por ser la acción de G lineal. Gracias a este truco, basta probar el teorema para el caso unitario.

El segundo ingrediente se trata de ver que una representación unitaria que deje invariante un subespacio $W \subset V$ también deja invariante su complemento ortogonal, W^\perp . En efecto, como la representación es unitaria, si $w \in W$ y $w' \in W^\perp$, para todo $g \in G$ se tiene $\langle g \cdot w', g \cdot w \rangle = \langle w', w \rangle = 0$ por ser $g \cdot g^\dagger = \mathbf{1}$, luego $g \cdot w' \in W^\perp$. Esto significa que podemos descomponer el espacio como la suma directa $V = W \oplus W^\perp$ de manera que la representación deja invariante cada término por separado. Si es necesario, se repite el mismo argumento para subespacios cada vez más pequeños, con la garantía de que, por ser V de dimensión finita, se acabará en un número finito de pasos. \square

Pasamos ahora a enunciar y probar un resultado elemental pero importante sobre representaciones irreducibles. La intuición es la siguiente: dos representaciones irreducibles de la misma dimensión siempre son equivalentes y, si estamos trabajando sobre \mathbb{C} , son de hecho la misma representación salvo por una constante multiplicativa. Si, por el contrario, tienen dimensiones diferentes, entonces son tan diferentes que no existe ninguna aplicación equivariante (no trivial) entre ellas.

Lema 1.2.1. (Lema de Schur) Sean π_V y π_W representaciones irreducibles de un grupo G sobre espacios vectoriales V y W , respectivamente, con cuerpo base K ; y sea $\phi: V \longrightarrow W$ una aplicación equivariante de V a W . Entonces se tiene:

- ϕ es cero o un isomorfismo. En particular, si $\dim V \neq \dim W$, ϕ es cero.

- Si G es finito, $\dim V = \dim W$ y F es algebraicamente cerrado (en particular, si $F = \mathbb{C}$), ϕ es proporcional a la identidad.

Demostración. En primer lugar, observamos que tanto $\ker \phi$ como $\text{Im } \phi$ son subespacios invariantes por la acción de G . Pero, dado que las representaciones son irreducibles por hipótesis, los subespacios invariantes han de ser el trivial o el total. Por tanto, las únicas combinaciones posibles son $\ker \phi = 0$ y $\text{Im } \phi = W$ (isomorfismo) o $\ker \phi = V$ y $\text{Im } \phi = 0$ (cero). Esto prueba la primera parte.

Para la segunda, hacemos $V = W$. Por la primera parte sabemos que toda aplicación equivariante $\phi: V \rightarrow V$ es un isomorfismo o cero. Además, por ser F algebraicamente cerrado, ϕ tiene al menos un autovalor $\lambda \in F$. Definimos $\hat{\phi} = \phi - \lambda \mathbf{1}$. Por construcción, $\hat{\phi}$ es también equivariante, pero no puede ser un isomorfismo porque al menos uno de sus autovalores es cero. Entonces, por la primera parte del lema, $\hat{\phi} = 0$, es decir, ϕ es múltiplo de la identidad. \square

1.3. Más ejemplos

1.3.1. Permutaciones

Sea V el espacio vectorial de funciones $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Notamos que V tiene dimensión compleja $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ y fijamos la base $B = \{f_1, f_2\}$ definida por las ecuaciones:

$$(1.7) \quad f_1(1) = f_2(1) = 1, \quad f_1(2) = f_2(3) = -1, \quad f_1(3) = f_2(2) = 0$$

Queremos estudiar la representación π de S_3 sobre V , que actúa como $\pi(\sigma): f \rightarrow f \circ \sigma^{-1}$. En primer lugar, comprobamos que de hecho se trata de una representación. Para ello, basta ver que π es un homomorfismo de grupos. En efecto:

$$(1.8) \quad \pi(\sigma_1 \circ \sigma_2)(f) = f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} = f \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} = \pi(\sigma_1)(f \circ \sigma_2^{-1}) = (\pi(\sigma_1) \cdot \pi(\sigma_2))(f)$$

Calculando cómo actúan los elementos (12), (13) y (123) de S_3 sobre f_1 y f_2

$$(1.9) \quad \pi(12)(f_1) = -f_1, \quad \pi(23)(f_1) = f_2, \quad \pi(123)(f_1) = f_2 - f_1,$$

$$(1.10) \quad \pi(12)(f_2) = f_2 - f_1, \quad \pi(23)(f_2) = f_1, \quad \pi(123)(f_2) = -f_1,$$

obtenemos sus expresiones matriciales en la base B

$$(1.11) \quad \pi(12) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi(23) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(123) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $\dim V = 2$, si π tiene algún subespacio invariante no trivial éste debe ser de dimensión 1. Es decir, debe existir un $v \in V$ tal que $\pi(g)(v) = \lambda_g v$ para todo $g \in G$. Esto equivale a pedir que todas las matrices de la representación diagonalizan simultáneamente. Basta ver que, por ejemplo, $\pi(12)$ y $\pi(23)$ no lo hacen. Por tanto, π es irreducible.

La matriz de cambio de base que relaciona π con la representación π_3 definida en [1] es

$$(1.12) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

con $C \cdot \pi_3(g) = \pi(g) \cdot C$ para todo $g \in G$.

1.3.2. Formas cuadráticas

Por último, veamos un ejemplo de un grupo infinito. Consideramos el espacio vectorial V sobre \mathbb{R} de formas cuadráticas binarias $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Cada forma cuadrática $Q \in V$ tiene asociada una matriz simétrica mediante la fórmula

$$(1.13) \quad Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot S_Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sea $G = GL_2(\mathbb{R})$, el grupo de matrices con entradas reales 2×2 . Vamos a demostrar que $S_Q \mapsto DS_QD^T$ con $D \in G$ induce una representación π de G de dimensión 3. Fijamos primero una base de G en la que los elementos de D son $(d_{ij})_{i,j=1}^2$ y la base $B = \{x^2, 2xy, y^2\}$ en V . En ese caso, si

$$(1.14) \quad Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

se tiene

$$(1.15) \quad S_Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Para calcular $\pi(D)$ usamos que $Q' = \pi(D)Q$ si y solo si $S_{Q'} = DS_QD^T$. Por tanto, basta leer cómo se transforman los elementos de D en esta ecuación, resultando:

$$(1.16) \quad \pi(D) = \begin{pmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{11}d_{21} & d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21} & d_{12}d_{22} \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $(d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})^3 = (\det D)^3 \neq 0$ por ser D invertible, luego $\pi(D)$ también es invertible y en consecuencia está en $GL_3(\mathbb{R})$. Empleando esta fórmula podemos calcular que $\pi(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_3$ y que $\pi(DD') = \pi(D)\pi(D')$, lo que prueba que π es un homomorfismo de G a $GL_3(\mathbb{R})$ y, por tanto, una representación.

Por último, para que π fuera reducible es condición necesaria que pueda descomponerse como suma directa de dos subrepresentaciones $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ que actúen sobre subespacios de dimensión 1 y 2, respectivamente. Como la dimensión de la representación es 3, todo $\pi(D)$ tiene al menos un autovalor real y, asociado, un autoespacio de dimensión 1. Entonces, que la representación sea reducible equivale a decir que

este subespacio sea el mismo para todos los $\pi(D)$. Diagonalizando $\pi(D)$, vemos que el autovalor real es $\lambda_1 = \det D$ y su autovector asociado es

$$(1.17) \quad v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{d_{12}}{d_{21}} \\ \frac{d_{22}-d_{11}}{2d_{21}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

si $d_{21} \neq 0$ y

$$(1.18) \quad \hat{v}_1 = \begin{pmatrix} -2d_{11}d_{12} \\ d_{11}^2 - d_{11}d_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $d_{21} = 0$. Por tanto, como v_1 depende de los d_{ij} , concluimos que la representación es irreducible.

CAPÍTULO 2

Representaciones de grupos finitos

2.1. Carácter de una representación y ortogonalidad

En este capítulo, a menos que se especifique lo contrario, los grupos serán siempre finitos y las representaciones serán sobre los complejos. En primer lugar, vamos a introducir algo de notación. Dado un grupo G , llamamos $L^2(G)$ al conjunto de funciones de G en los complejos. La elección del nombre, evidentemente, no es casual. $L^2(G)$ tiene estructura de espacio vectorial complejo, con $\dim L^2(G) = |G|$ y, además, viene naturalmente equipado con el producto interior

$$(2.1) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \sum_{g \in G} \phi(g) \psi(g)^*.$$

Esta construcción nos permitirá dar una noción de ortogonalidad. Como G es finito, no hay que preocuparse por cuestiones de convergencia o integrabilidad en 2.1. La historia cambia para grupos infinitos, como veremos más adelante.

Un resultado útil cuando se trabaja con grupos finitos es el siguiente

Lema 2.1.1. *Toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria.*

Demostración. Sea π representación de G en \mathbb{C}^d . Consideramos el operador $S = \sum_{g \in G} \pi(g)^\dagger \pi(g)$. Notamos que S es hermítico y semidefinido positivo por construcción. Además, sus autovalores son estrictamente positivos, ya que de lo contrario existiría $v \in \mathbb{C}^d$ tal que $\langle v, Sv \rangle = \sum_{g \in G} \|\pi(g)v\|^2 = 0$, pero esto es imposible ya que al menos $\pi(e) \neq 0$. De este modo podemos construir $S^{1/2}$ y garantizar que es invertible. Ahora basta notar que $\pi^\dagger S \pi = S$ porque un promedio sobre todo el grupo es invariante cuando se actúa (por la derecha o por la izquierda) con elementos del propio grupo¹. Esto nos permite probar que $\pi' = S^{1/2} \pi S^{-1/2}$ es unitaria, pues

$$(2.2) \quad \pi'^\dagger \pi' = S^{-1/2} \pi^\dagger S \pi S^{-1/2} = S^{-1/2} S S^{-1/2} = \mathbf{1}_d. \quad \square$$

¹Una manera algo pedante de expresar esto es decir que la acción de un grupo sobre sí mismo es regular tanto por la izquierda como por la derecha, i.e. que los conjuntos $\{g: g \in G\}$, $\{hg: g \in G\}$ y $\{gh^{-1}: g \in G\}$ son el mismo para cualquier $h \in G$.

Un problema fundamental en muchas áreas de las matemáticas y la física es saber qué magnitudes dependen de las coordenadas elegidas y cuáles no. Esto motiva definiciones de invariantes en álgebra lineal que no se ven afectados por cambios de base, tales como el determinante o la traza. En este espíritu se introduce en teoría de representación la noción de carácter.

Definición 2.1.1. *Dada una representación π de un grupo G de dimensión d , definimos su carácter χ_π como*

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \chi_\pi: G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \text{Tr } \pi(g) \end{aligned}$$

A modo de ejemplo, consideremos las representaciones irreducibles de S_3 .

- Para representaciones de dimensión 1, la traza es la función identidad. Por tanto, la representación trivial tiene carácter constante, $\chi_{\pi_1}(\sigma) = \pi_1(\sigma) = 1$; y la representación que da el signo de la permutación tiene como carácter también el signo $\chi_{\pi_2}(\sigma) = \pi_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma$.
- La representación irreducible de S_3 de dimensión 2 es un poco más interesante. Recordamos que esta representación, π_3 , es un isomorfismo entre S_3 y D_3 , el grupo de simetría de un triángulo equilátero. Si denotamos por R la rotación de 120 grados en sentido positivo y por S la simetría alrededor del eje Y , obtenemos los caracteres recogidos en la siguiente tabla:

σ	$\pi_3(\sigma)$	$\chi_{\pi_3}(\sigma)$
e	$\mathbf{1}$	2
$(1, 2)$	S	0
$(1, 3)$	RS	0
$(2, 3)$	R^2S	0
$(1, 2, 3)$	R	-1
$(1, 3, 2)$	R^2	-1

Tabla 2.1: Caracteres de π_3

- Por último, en la representación π_4 de dimensión 3 que consiste en permutar los elementos de una base de \mathbb{R}^3 , las permutaciones que fijan uno de los vectores (las transposiciones) tendrán carácter 1; las que no fijan ninguno (los ciclos de orden 3) tendrán carácter cero; y, obviamente, la identidad tendrá carácter $\dim \pi_4 = 3$.

Un resultado elemental que se sigue de la definición de carácter es el siguiente

Teorema 2.1.1. *Los caracteres satisfacen*

- $\chi_{\pi \oplus \rho} = \chi_\pi + \chi_\rho$
- $\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho$

Demostración. Para el primero, basta observar que una suma directa es una matriz diagonal por bloques (en alguna base), luego su traza es la suma de las trazas de cada bloque. Para el segundo:

$$(2.4) \quad \text{Tr} [\pi \otimes \rho] = \text{Tr} \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,l=1}^n \pi_j^i \rho_l^k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \pi_i^i \rho_k^k = \left(\sum_{i=1}^m \pi_i^i \right) \left(\sum_{k=1}^n \rho_k^k \right) = \text{Tr} \pi \text{Tr} \rho. \quad \square$$

Dada una representación π y fijada una base en $GL(\mathbb{C}^d)$, los coeficientes de la matriz $\pi(g)_j^i$ se pueden ver como elementos de $L^2(G)$. El resultado más importante de este capítulo nos dice que tanto los distintos coeficientes de una misma representación como los de representaciones diferentes son ortogonales entre sí.

Teorema 2.1.2. Sean $\pi^{(\alpha)}$ y $\pi^{(\beta)}$ representaciones irreducibles de un grupo finito G . Entonces, en cualquier base, los elementos de sus matrices satisfacen

$$(2.5) \quad \langle \pi^{(\alpha)}_j^i, \pi^{(\beta)}_l^k \rangle = \frac{|G|}{\dim \pi^{(\alpha)}} \delta_\beta^\alpha \delta_l^i \delta_j^k$$

con $\delta_\beta^\alpha = 1$ si y solo si $\pi^{(\alpha)} \cong \pi^{(\beta)}$ y cero en otro caso.

Demostración. En primer lugar, supongamos que las representaciones tienen la misma dimensión, d . Como ambas son irreducibles, por el lema de Schur han de ser equivalentes. Más aún, el isomorfismo que permite pasar de una a otra debe ser proporcional a la identidad, luego $\pi^{(\beta)} = c\pi^{(\alpha)}$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Además, como G es finito, por el lema 2.1.1, podemos restringir nuestra atención al caso unitario en el que $\pi^{(\alpha)-1} = \pi^{(\alpha)\dagger}$. Por otro lado, para cualquier matriz C de dimensiones $d \times d$ se cumple que

$$(2.6) \quad D = \sum_{g \in G} \pi(g) C \rho(g)^{-1}$$

satisface $\pi^\dagger(g) D \pi(g) = D, \forall g \in G$. Para verlo basta invocar de nuevo la idea de que los promedios sobre todo el grupo no cambian bajo la acción del propio grupo. Esto significa que D debe ser proporcional a la matriz de cambio de base entre ambas representaciones y, por tanto, proporcional a la identidad, digamos $D = \lambda \mathbf{1}_d$. Tomando trazas a ambos lados, se tiene que $\lambda d = |G| \text{Tr} C$. Ahora escogemos C igual a cero en todas sus entradas salvo la (k, j) para seleccionar el elemento de matriz que queremos

$$(2.7) \quad \lambda = \frac{|G|}{d} \delta_j^k$$

y, finalmente, seleccionamos el elemento (i, l) de D , resultando

$$(2.8) \quad D_l^i = \sum_{g \in G} \pi_j^i \rho_l^{\dagger k} = \frac{|G|}{d} \delta_l^i \delta_j^k$$

pues D es diagonal. Esto completa la prueba en el caso en que las representaciones son equivalentes. El caso contrario funciona igual, solo que ahora todos los coeficientes de D son cero y, por tanto, todos los elementos de matriz son ortogonales. \square

Un corolario inmediato de 2.1.2 es que los caracteres también son ortogonales. Basta sumar sobre los índices adecuados:

$$(2.9) \quad \sum_{\substack{i=j \\ k=l}} \sum_{g \in G} \pi^{(\alpha)}_j(g) \pi^{(\beta)\dagger}_l(g) = \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g) \chi_\beta^*(g) = \langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle = |G| \delta_\beta^\alpha$$

Otra consecuencia inmediata de las relaciones de ortogonalidad es el siguiente

Teorema 2.1.3. *Los caracteres son constantes en cada clase de conjugación.*

Demostración. Por la propiedad cíclica de la traza

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \chi_\pi(hgh^{-1}) &= \text{Tr}(\pi(h)\pi(g)\pi(h^{-1})) = \\ &= \text{Tr}(\pi^{-1}(h)\pi(h)\pi(g)) = \text{Tr} \pi(g) = \chi_\pi(g) \end{aligned}$$

para cualesquiera g y h en G . □

2.2. La representación regular

Por el teorema de Cayley sabemos que todo grupo finito G tiene una representación finita que se obtiene al identificar G con un subgrupo de S_n para algún n , representar S_n sobre \mathbb{C}^n permutando elementos de una base cualquiera y restringir la representación a $\text{Im } G$. El problema es que esto no nos da una cota superior para la dimensión de la representación, porque a priori no sabemos para qué n podemos embeber G en S_n . Sin embargo, una estrategia similar permite encontrar una representación de dimensión $|G|$: basta enviar cada elemento de G a un vector de una base cualquiera de $\mathbb{C}^{|G|}$ y actuar libremente con G sobre ella. Ese es el contenido de la siguiente

Definición 2.2.1. *Dado un grupo finito G de orden N , la representación regular por la izquierda de G es la que surge de identificar cada elemento $g \in G$ con un vector de una base cualquiera de $L^2(G) \cong \mathbb{C}^N$, digamos e_g , y dejar actuar G sobre sí mismo por la izquierda², es decir*

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \lambda: G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^N) \\ g &\longmapsto \lambda(g) \end{aligned}$$

con $\lambda(g)(e_h) = e_{gh}$. Análogamente, la representación regular por la derecha se define como

$$(2.12) \quad \rho: G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^N)$$

$$(2.13) \quad g \longmapsto \rho(g)$$

con $\rho(g)(e_h) = e_{hg^{-1}}$.

²Si G es infinito, la representación regular se puede seguir definiendo sobre $L^2(G)$, si bien éste es ahora un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

En lo que sigue, nos referiremos exclusivamente de la representación regular por la izquierda. Los resultados por la derecha son idénticos. La importancia de la representación regular radica en que se puede descomponer como suma directa de *todas* las representaciones irreducibles de G . Ese es el contenido del siguiente

Lema 2.2.1. *Si λ es una representación regular de G , se cumple*

$$(2.14) \quad \lambda \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{d_\pi}$$

donde \hat{G} es el conjunto de todas las representaciones irreducibles de G y d_π es la dimensión de π . Además, se tiene que

$$(2.15) \quad \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2 = |G|.$$

Demostración. Primero recordamos que toda representación es suma directa de irreducibles. Usando las relaciones de ortogonalidad, para cada π irreducible tenemos $\langle \chi_\pi, \chi_\lambda \rangle = m_\pi |G|$ donde m_π es la multiplicidad de π en la representación regular λ . Por otro lado, sabemos que $\chi_\lambda(g) = 0$ en todas las clases de G salvo en la identidad, donde $\chi_\lambda(e) = |G|$. Por tanto, $\langle \chi_\pi, \chi_\lambda \rangle = \chi_\pi(e) \chi_\lambda(e) = d_\pi |G|$ y, en consecuencia, $m_\pi = d_\pi$. La fórmula para las dimensiones se sigue trivialmente de este resultado considerando el tamaño y la multiplicidad de cada caja en λ . \square

Esto significa que el conjunto $\{\pi^{(\alpha)}_j^{i,j=1,\dots,d_\alpha}\}_{\alpha \in \hat{G}}$ de elementos de matrices de representaciones irreducibles no equivalentes es una base de $L^2(G)$, pues contiene $\dim L^2(G) = |G|$ vectores ortogonales y, por tanto, linealmente independientes. Multiplicando cada uno por $\sqrt{\frac{d_\alpha}{|G|}}$ se obtiene una base ortonormal. Este resultado se puede usar de nuevo junto con las relaciones de ortogonalidad para probar el siguiente

Teorema 2.2.1. *El número de clases de conjugación coincide con el número de representaciones irreducibles.*

Demostración. El resultado se sigue de que los caracteres de representaciones irreducibles forman una base en $L^2(G)$ para las funciones constantes en cada clase. Para verlo, sea $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ constante en cada clase. Por un lado, usando la base de $L^2(G)$ calculada previamente, la podemos desarrollar F como

$$(2.16) \quad F(g) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha \pi^{(\alpha)}_j^i(g)$$

Por otro lado, como F es constante en cada clase, se tiene que

$$(2.17) \quad F(g) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} F(hgh^{-1})$$

Expandiendo $F(hgh^{-1})$ en la base anterior y usando las relaciones de ortogonalidad para hacer la suma en h se obtiene

$$\begin{aligned}
F(g) &= \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{i,j,k,l=1}^{d_\alpha} c_{ij}^\alpha \pi^{(\alpha)i}_k(h) \pi^{(\alpha)k}_l(g) \pi^{(\alpha)l}_j(h^{-1}) \\
&= \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{i,j,k,l=1}^{d_\alpha} \frac{c_{ij}^\alpha}{d_\alpha} \pi^{(\alpha)k}_l \delta_j^i \delta_l^k \\
&\quad \text{(ortogonalidad)} \\
(2.18) \quad &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{i,k=1}^{d_\alpha} \frac{c_{ii}^\alpha}{d_\alpha} \pi^{\alpha k}(g) \\
&\quad \text{(contrayendo las } \delta) \\
&= \sum_{\alpha \in \hat{G}} \sum_{i=1}^{d_\alpha} \frac{c_{ii}^\alpha}{d_\alpha} \chi_\alpha(g) \\
&\quad \text{(definición de carácter)}
\end{aligned}$$

Por tanto, como la dimensión del espacio de funciones constantes en cada clase es igual al número de clases, de esto se sigue que hay tantas representaciones irreducibles como clases. \square

2.3. Ejemplos

2.3.1. A_4 y las simetrías del tetraedro

En esta sección vamos a estudiar el grupo T de rotaciones que dejan invariante un tetraedro regular. En primer lugar, observamos que T debe ser isomorfo a algún subgrupo de S_4 , digamos $T \stackrel{\phi}{\cong} G \subset S_4$, puesto que si etiquetamos los vértices del 1 al 4, actuar sobre él con T equivale a permutar las etiquetas. Además, como estamos considerando solo movimientos directos, dados tres vértices cualesquiera, la matriz $(v_i|v_j|v_k)$ que los tiene por columnas debe cumplir $\det(R \cdot (v_i|v_j|v_k)) = \det(v_{\sigma(i)}|v_{\sigma(j)}|v_{\sigma(k)})$ para todo $R \in T$, con $\sigma = \phi(R) \in S_4$. Dicho de otra forma, T contiene solo permutaciones con signo par, por lo que $T \subset A_4$. Ahora basta un poco de intuición geométrica para darse cuenta de que T tiene 12 elementos (ver tabla 2.2) y, por tanto, $T \cong A_4$.

Un cálculo tedioso pero sencillo revela que los 3-ciclos están formados por dos clases de conjugación con cuatro elementos cada una. Cada uno de esos cuatro elementos fija un vértice distinto. La pertenencia a una u otra clase tiene que ver con el sentido de la rotación. Una de ellas contiene las rotaciones horarias; la otra, las antihorarias. Por ejemplo, en la primera tendríamos el elemento (123), que fija el 4, y en la otra estaría el (132), que también fija el 4 pero permuta los otros vértices al revés. Por último, todas las composiciones de 2-ciclos disjuntos están en la misma clase, lo que, contando también la identidad, resulta en un total de cuatro clases de conjugación.

T	A_4
$\mathbf{1}$	$e = (1)(2)(3)(4)$
Ocho rotaciones de ángulo $\pm 2\pi/3$ que fijan uno de los vértices	3-ciclos de la forma (ijk) con $i \neq j \neq k$
Tres rotaciones de ángulo π alrededor de un eje que une los puntos medios de dos aristas no adyacentes	Composiciones de 2-ciclos de la forma $(ij)(kl)$ con $i \neq j \neq k \neq l$

Tabla 2.2: Isomorfismo entre T y A_4

Usando el teorema 2.2.1 concluimos que T debe tener cuatro representaciones irreducibles. Sabemos que la representación regular tiene dimensión 12 y contiene todas las irreducibles y que entre ellas debe estar la trivial, luego tenemos $1^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 12$. Esta ecuación se puede resolver por simple inspección (o fuerza bruta), resultando $d_1 = d_2 = 1$ y $d_3 = 3$. Por el lema de Schur, la representación de dimensión 3, π_3 , debe ser equivalente a la representación sobre \mathbb{R}^3 de T , luego $\pi_3 = \phi^{-1}$. Las otras dos representaciones de dimensión 1 surgen de considerar homomorfismos que “ignoran” los ciclos de la forma $(ij)(kl)$, enviándolos a la identidad, pero “respetan” los 3-ciclos, enviándolos a una raíz primitiva tercera de la unidad, $\omega = e^{2i\pi/3}$ ó $\omega^2 = e^{4i\pi/3}$. Enviar las rotaciones horarias a ω y las antihorarias a ω^2 da una representación mientras que la asignación inversa da la otra.

Pasamos ahora a calcular la tabla de caracteres. En dimensión 1, la traza es la función identidad, por lo que no hay nada que discutir. Para π_4 sabemos que toda rotación de ángulo θ en \mathbb{R}^3 tiene como traza $1 + 2 \cos \theta$. Por tanto, los 3-ciclos tienen carácter $1 + 2 \cos(\pm 2\pi/3) = 0$; las composiciones de 2-ciclos disjuntos tienen carácter $1 + 2 \cos \pi = -1$; y, como siempre, la identidad tiene carácter igual a la dimensión. Resumiendo:

	π_0	π_ω	π_{ω^*}	π_3
$[e]$	1	1	1	3
$[(12)(34)]$	1	1	1	-1
$[(123)]$	1	ω	ω^2	0
$[(132)]$	1	ω^2	ω	0

Tabla 2.3: Caracteres de A_4

Fijando una base \mathcal{B} en \mathbb{R}^3 se pueden calcular explícitamente las matrices π_3 . Por ejemplo, en la base en que el tetraedro inscrito en la esfera unidad tiene por vértices

$$(2.19) \quad v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que $\pi_3((123))$ es diagonal por cajas

$$(2.20) \quad \pi_3((123)) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que los otros 3-ciclos tienen expresiones más complicadas. Por otro lado, los tres elementos de orden 2 conmutan entre sí, luego debe existir una base \mathcal{B}' donde son simultáneamente diagonales. Además, sabemos que son rotaciones de ángulo π , luego su expresión diagonal debe contener un 1 y dos -1 . Un cálculo sencillo permite encontrar la matriz de cambio de base

$$(2.21) \quad C_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y la expresión de los $\phi((ij)(kl))$ en \mathcal{B}

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \pi_3((12)(34)) &= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/3 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{6}/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ \pi_3((13)(24)) &= \begin{pmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/3 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ \pi_3((14)(23)) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3.2. Modos normales de un sistema mecánico

La teoría de representación de grupos se usa frecuentemente en física para codificar las simetrías de un sistema, facilitando algunos cálculos. En esta sección vamos a aplicar esa filosofía al estudio del movimiento de tres masas iguales m unidas por muelles idénticos con constante elástica k que se desplazan sobre un plano sin rozamiento (ver 2.1).

Como tenemos tres masas en dos dimensiones, el espacio de configuración es $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^6$. Llamaremos a las coordenadas $\mathbf{r} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ y a la velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Las ecuaciones de movimiento más generales para un sistema de este tipo en el que las masas y constantes elásticas no son necesariamente idénticas se pueden obtener a partir del lagrangiano

$$(2.23) \quad \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}^T M \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}^T K \mathbf{r}$$

con $M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ la matriz que contiene las masas en su diagonal y K una matriz simétrica que nos da la energía potencial elástica del sistema. Las ecuaciones de movimiento vendrán dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(2.24) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i}, \quad i = 1, \dots, 6$$

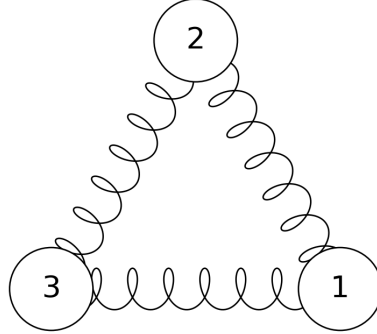


Figura 2.1: Sistema de tres masas y muelles idénticos en equilibrio

En general, resolver este sistema requiere diagonalizar la matriz $M^{-1}K$. Como K es simétrica, los autovalores son reales y los autovectores son ortogonales. La nomenclatura física suele llamar a las raíces cuadradas de los autovalores *frecuencias fundamentales* (porque tienen unidades de frecuencia, rad/s) y a los autovectores *modos normales*.

En lugar de seguir este camino, nosotros vamos a explotar las simetrías del sistema para ahorrarnos cálculos. Empezamos observando que como las tres masas son iguales, las podemos intercambiar entre sí. Dicho de otra forma, el problema es simétrico bajo permutaciones arbitrarias. Esto induce una representación de S_3 de dimensión 3. Además, como los muelles son también idénticos, la configuración de equilibrio debe ser un triángulo equilátero, que no se ve alterado bajo la acción del grupo dihédrico D_3 . Llegados a este punto, conviene ver a \mathbb{R}^6 como el producto $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$ y cambiar las etiquetas de nuestras coordenadas como

$$(2.25) \quad (r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32})$$

para hacer manifiesto que S_3 actúa sobre el primer índice (que etiqueta masas) y D_3 sobre el segundo (que etiqueta los vértices del triángulo). Esto nos permite escribir la representación que contiene la simetría global del problema como

$$(2.26) \quad \begin{aligned} D: S_3 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2) \\ \sigma &\longmapsto (\pi_4 \otimes \pi_3)(\sigma). \end{aligned}$$

Por el teorema 2.1.1 tenemos que $\chi_D = \chi_{\pi_4} \chi_{\pi_3}$. Esto nos permite aprovechar los caracteres calculados en la sección 2.1 para obtener

$$(2.27) \quad \chi_D([e]) = 2 \cdot 3 = 6; \quad \chi_D([12]) = -1 \cdot 0 = 0; \quad \chi_D([123]) = 0 \cdot 1 = 0$$

Estos no son más que los caracteres de la representación regular, por lo que ambas deben ser equivalentes y $D = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3 \oplus \pi_3$ por el lema 2.2.1. Por otro lado, usando

las relaciones de ortogonalidad, se puede demostrar³ que si una representación ρ se descompone como suma directa de $\pi^{(\alpha)}$ irreducibles, el operador

$$(2.28) \quad P_\alpha = \frac{d_\alpha}{\dim \rho} \sum_{g \in G} \chi_\alpha^*(g) \rho(g)$$

con $d_\alpha = \dim \pi^{(\alpha)}$ es la proyección sobre el subespacio asociado a $\pi^{(\alpha)}$. Para verlo, basta poner $i = j$ en la relación de ortogonalidad 2.1.2 y sumar para $i = j = 1, \dots, d_\alpha$. A la izquierda estaremos calculando la traza de π^α y a la derecha estaremos imponiendo que $i = j$, luego las deltas son solo distintas de cero si $i = j = m = l$. Resumiendo, en la base en que ρ es diagonal por cajas, P_α será

$$(2.29) \quad \frac{d_\alpha}{\dim \rho} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{d_\alpha} \sum_{g \in G} \pi^{(\alpha)\dagger}_{ij} \rho(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{d_\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En particular, si ρ es la representación regular, esto nos permite calcular proyecciones sobre cada una de las representaciones irreducibles de G . Aplicando este resultado a S_3 , se tiene, en la base $\mathcal{B} = \{e, (23), (12), (132), (123), (13)\}$:

$$(2.30) \quad P_1 = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} D(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) D(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ambos operadores tienen rango 1, por lo que se tratan de proyectores sobre subespacios de dimensión 1. Diagonalizando podemos calcular los vectores que definen estos subespacios:

$$(2.31) \quad v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^\top$$

$$v_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \right)^\top$$

³Ver en [5, pp.23-4].

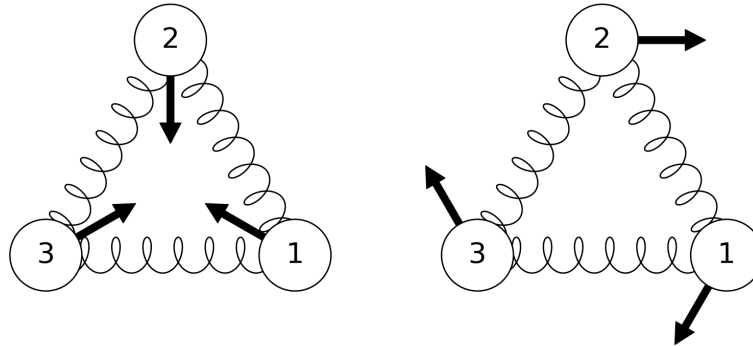
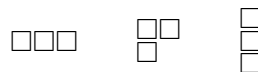


Figura 2.2: Modos normales asociados a la representación trivial (izquierda) y del signo (derecha).

Recordando lo que significa cada coordenada en este espacio, podemos leer la información física y dibujar los modos normales (ver 2.2). Observamos que la representación trivial está asociada con un modo simétrico en el que las partículas oscilan en fase alejándose y acercándose al centro del triángulo, mientras que la del signo está asociada a una rotación rígida sin oscilación.

2.4. Tablas de Young y la *hook length formula*

Introducimos ahora un lenguaje gráfico que permite calcular ciertas propiedades de las representaciones de S_n usando argumentos combinatorios. Dado un número natural n , decimos que $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in \mathbb{N}^m$ es una partición de n si $\sum_i \lambda_i = n$. Denotamos por $p(n)$ al número de particiones de n diferentes. Cada partición se puede representar gráficamente de la siguiente forma: primero, ordenamos sus elementos en orden decreciente; a continuación, dibujamos m filas de símbolos, con λ_i símbolos en cada fila para $i = 1, \dots, m$. Por ejemplo, dadas las particiones $3 = 3$, $3 = 2 + 1$ y $3 = 1 + 1 + 1$, sus respectivas representaciones son



Estos dibujos se conocen como diagramas de Young. Más formalmente, podemos dar la siguiente

Definición 2.4.1. *Dada una partición λ de n de tamaño m , el diagrama de Young de λ es:*

$$(2.32) \quad Y_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \leq m, j \leq \lambda_i\}.$$

Cada diagrama de n celdas está asociado a una clase de conjugación de S_n . Para ver esto, basta notar que las columnas del diagrama reflejan la estructura de ciclos de cada clase⁴. Por el teorema 2.2.1, esto implica que existe también una biyección entre diagramas de Young de n y representaciones irreducibles de S_n . Además, de cada diagrama se puede leer la dimensión de la representación irreducible asociada usando el siguiente

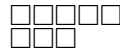
Teorema 2.4.1. (Hook length formula) *La dimensión de la representación irreducible de S_n asociada al diagrama de Young Y_λ viene dada por*

$$(2.33) \quad d = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in Y_\lambda} |h(i,j)|}$$

donde $h(i,j)$ es el “gancho” de la celda (i,j) , i.e. el conjunto de celdas $(k,l) \in Y_\lambda$ con $k = i$ y $l \geq j$ ó $l = j$ y $k \geq i$.

Demostración. Ver en [6]. □

Este resultado da una forma eficiente de calcular dimensiones de representaciones de grupos simétricos grandes. Por ejemplo, dado el siguiente diagrama de Young



correspondiente a la los elementos de S_8 de la forma $(ij)(kl)(mn)$, es inmediato calcular la *hook length* de cada celda

$$\begin{array}{cccc} 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & & & \end{array}$$

y, con esto, la dimensión de la representación irreducible de S_8 asociada

$$(2.34) \quad d = \frac{8!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 28$$

⁴Cada clase de conjugación de S_n se corresponde con una estructura de ciclos, ver en [5] pp. 35-37.

CAPÍTULO 3

Grupos de Lie y teorías gauge

3.1. Grupos de Lie

Todos los grupos que hemos considerado en las secciones anteriores eran finitos a excepción de \mathbb{Z} . Pasamos ahora a considerar grupos infinitos con cardinal no numerable que, además de la estructura algebraica, poseen una topología y una estructura diferencial que los hace localmente difeomorfos a \mathbb{R}^n .

Definición 3.1.1. *Un grupo de Lie G es un grupo que además es una variedad diferenciable de dimensión finita equipada con una estructura diferencial compatible con la operación del grupo, de tal forma que las funciones*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \phi: G &\longrightarrow G \\ \phi: G \times G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

sean regulares.

Los grupos de Lie más importantes que vamos a ver son grupos de matrices. Más en concreto, se trata de los subgrupos de $GL(N)$ con entradas reales o complejas que vienen recogidos en la tabla 3.1. Algo que tienen en común todos ellos es que son compactos. Además, todos son conexos salvo $O(N)$, que tiene dos componentes conexas: una que contiene la identidad y es isomorfa a $SO(N)$ y otra que contiene las matrices de determinante -1 . Una prueba de estos resultados puede encontrarse en [12, págs. c. 8-9].

Nombre	Subgrupo de	Definición	Comentario/lectura
$O(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^T M = \mathbf{1}$	Grupo ortogonal
$SO(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^T M = \mathbf{1}$ y $\det M = 1$	Grupo especial ortogonal
$U(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^\dagger M = \mathbf{1}$	Grupo unitario
$SU(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^\dagger M = \mathbf{1}$ y $\det M = 1$	Grupo especial unitario

Tabla 3.1: Grupos de Lie notables

Veamos un ejemplo sencillo para fijar ideas: $SU(2)$. Primero vamos a dar una parametrización. Para una matriz en $GL_2(\mathbb{C})$ cualquiera, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con determinante 1, de la condición $MM^\dagger = \mathbf{1}$ se deduce:

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

luego $a = d^*$ y $c = -b^*$, de modo que podemos escribir cualquier matriz en $SU(2)$ como

$$(3.3) \quad M = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos u & e^{i\phi} \sin u \\ -e^{-i\phi} \sin u & e^{-i\theta} \cos u \end{pmatrix}$$

con $u, \theta, \phi \in \mathbb{R}$. Es decir, $SU(2)$ se puede parametrizar por un par de números complejos, $z = e^{i\theta} \cos u$ y $w = e^{i\phi} \sin u$ tales que $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Un resultado conocido es que $SU(2)$ es isomorfo a los cuaterniones unitarios. Recordamos que los cuaterniones \mathbb{H} son el álgebra no conmutativa de números de la forma $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ con los $q_i \in \mathbb{R}$ tales que las unidades imaginarias satisfacen $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ y el producto de dos unidades cualesquiera es la tercera multiplicada por el signo de la permutación cuando leemos la igualdad de izquierda a derecha, i.e. por ejemplo $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ pero $\mathbf{k}\mathbf{j} = -\mathbf{i}$. Los cuaterniones unitarios son aquellos para los que $\|q\| = qq^* = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$, donde la conjugación se define como $q^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}$. Topológicamente este conjunto no es más que S^3 , la esfera de dimensión 3.

Por otra parte, una forma alternativa de definir los cuaterniones es como el álgebra compleja generada por $\{1, \mathbf{j}\}$, pues $q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = (q_0 + q_1 \iota) + (q_2 + q_3 \iota) \mathbf{j}$.¹ Esto sugiere que los cuaterniones unitarios se pueden ver como pares de números complejos cuyos módulos al cuadrado suman 1. Dada la parametrización previa de $SU(2)$, el isomorfismo f entre ambos salta a la vista:

$\mathbb{H}_{\ q\ =1}$	$SU(2)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
\mathbf{i}	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z$
\mathbf{j}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$
\mathbf{k}	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x$

Tabla 3.2: Isomorfismo entre cuaterniones unitarios y $SU(2)$

donde las σ_i son las conocidas matrices de Pauli. De esta manera queda establecido que $SU(2) \cong S^3$ como grupos de Lie.

¹El abuso de notación necesario para que esto funciones es identificar la unidad imaginaria compleja $\iota \in \mathbb{C}$ con la cuaterniónica $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$.

A la vista de este resultado cabe preguntarse si la esfera S^2 es también un grupo de Lie. Un primer intento *naive* de darle estructura de grupo es usar el producto vectorial en \mathbb{R}^3 y después normalizar. Llamemos a esta operación $*$. Rápidamente nos damos cuenta de que esto falla porque no es posible encontrar una identidad. En efecto, si buscamos $e \in S^2$ tal que $u * e = u$ para todo $u \in S^2$ debe ocurrir que exista $\lambda \neq 0$ tal que $u \times e = \lambda u$. Si planteamos el sistema lineal que implica esa ecuación

$$\begin{cases} u_2 e_3 - u_3 e_2 = \lambda u_1 \\ u_3 e_1 - u_1 e_3 = \lambda u_2 \\ u_1 e_2 - u_2 e_1 = \lambda u_3 \end{cases}$$

vemos que no tiene solución para e porque el rango de la matriz de coeficientes es 2 pero la matriz ampliada tiene rango 3. [da una intuición geométrica de qué quiere decir esto]

En realidad no hay forma alguna de hacer de S^2 un grupo de Lie. Esto es consecuencia del siguiente resultado importante: en cualquier grupo de Lie G , dado un vector tangente en la identidad $v \in T_e G$, es posible definir un campo vectorial en todo G que no se anula en ningún punto y tal que vale v en $T_e G$. Esta construcción es posible porque ℓ_g , la aplicación que consiste en multiplicar por la izquierda todo el grupo por un elemento g , es un difeomorfismo, luego su diferencial es invertible en todo punto y por tanto $d\ell_g v$ siempre será distinta de cero. Esto significa que las esferas de dimensión par no pueden tener estructura de grupo de Lie, dado que satisfacen el teorema de la bola con pelo, que nos dice que todo campo vectorial definido sobre ellas debe anularse en al menos un punto.

Por otro lado, en dimensión 1 sí tenemos que $S^1 \cong U(1)$ mandando $\theta \mapsto e^{i\theta}$. De hecho, esto agota las opciones de esferas con estructura de grupo de Lie. La demostración de este resultado requiere el uso de cohomología. Básicamente se tiene que en el espacio tangente de todo grupo de Lie G compacto y conexo es posible definir un producto escalar llamado forma de Killing y, a partir de este, una 3-forma mediante $\omega(x, y, z) = \langle x, [y, z] \rangle$ conocida como forma de Cartan. Si $n = 1$, S^n es abeliano, luego $\omega = 0$ y el siguiente argumento no es válido. Para $n > 1$, sin embargo, se tiene que ω es cerrada, i.e. $d\omega = 0$, pero no exacta, i.e. no existe 2-forma η tal que $d\eta = \omega$. Esto implica que el grupo de cohomología de de Rham $H^3(G)$, que se define precisamente como el cociente entre formas cerradas y exactas, no es trivial, lo cual está en contradicción con que S^n sea una esfera salvo si $n = 3$, porque $H^k(S^n) = 0$ salvo para $k = 0, n$.²

3.2. Álgebras de Lie

Pasamos ahora a considerar las llamadas álgebras de Lie. Damos primero su definición abstracta.

Definición 3.2.1. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial real o complejo equipado con una forma bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ antisimétrica que satisface la identidad de*

²Ver [10] para más detalles.

Nombre	Subgrupo de	Definición	Dimensión
$\mathfrak{o}(N)$	$\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$	$M = -M^\top$	$N(N-1)/2$
$\mathfrak{so}(N)$	$\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$	$M = -M^\top, \text{Tr } M = 0$	$N(N-1)/2$
$\mathfrak{u}(N)$	$\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$	$M^\dagger = -M$	N^2
$\mathfrak{su}(N)$	$\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$	$M^\dagger = -M, \text{Tr } M = 0$	$N^2 - 1$

Tabla 3.3: Álgebras de Lie de grupos de Lie notables

Jacobi

$$(3.4) \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Los elementos de una base cualquiera de un álgebra de Lie se denominan generadores.

A primera vista, esto no tiene nada que ver con grupos de matrices. En particular, en el álgebra de Lie existe una estructura de espacio vectorial que no está presente en los grupos, que son variedades. La conexión entre ambos conceptos viene de entender las álgebras como una linealización del grupo, identificándolas con el espacio tangente en la identidad y tomando como corchete el conmutador.

Definición 3.2.2. Dado un grupo de Lie de matrices $G \in GL_N$, definimos su álgebra de Lie \mathfrak{g} como el espacio tangente en la identidad T_1G equipado con el corchete definido por el conmutador $[X, Y] = XY - YX$.

El álgebra de un grupo de matrices se suele denotar con las mismas letras que el grupo pero en minúscula y tipografía fraktur. Pasamos ahora a calcular las álgebras de Lie de los grupos vistos en la sección anterior. Para ello, procederemos del siguiente modo: consideramos una curva genérica $M: (-1, 1) \rightarrow G$ que pase por la identidad, $M(t=0) = \mathbf{1}$. A continuación, derivamos las ecuaciones que definen G como subgrupo de GL_N y, evaluando en $t = 0$, obtenemos las condiciones que deben satisfacer las matrices del espacio tangente. Los resultados se recogen en la tabla 3.3. Para ver por qué $\det M = 1$ en el grupo implica $\text{Tr } M' = 0$ en el álgebra hay que usar la fórmula de Jacobi [16] que nos dice que

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} \det M(t) = \text{Tr} \left(\widetilde{M}(t) \frac{d}{dt} M(t) \right)$$

donde \widetilde{M} es la matriz de adjuntos de M . Observamos que $\widetilde{M}(0) = \widetilde{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$, luego si $\det M(t) = 0$ efectivamente se cumple $\text{Tr}(M') = 0$.

Por otro lado, el cálculo de las dimensiones sale de “contar grados de libertad”. Así pues, toda matriz $N \times N$ con entradas reales requiere especificar N^2 parámetros. Si es antisimétrica, como es el caso de $\mathfrak{o}(N)$ y $\mathfrak{so}(N)$, los $(N^2 - N)/2$ elementos por debajo de la diagonal vienen fijados por los que están por encima y los N de la diagonal deben ser cero³, luego $\dim \mathfrak{o}(N) = \dim \mathfrak{so}(N) = N^2 - N - (N^2 - N)/2 = N(N-1)/2$. El razonamiento en el caso complejo es análogo, solo que ahora cada

³Esto también implica que la condición $\text{Tr } M = 0$ es redundante en este caso.

entrada requiere dos valores reales, luego en principio tenemos $2N^2$, de los que la condición de antihermiticidad fija $N^2 - N$ por debajo de la diagonal y N en la diagonal, que ahora debe estar hecha de números imaginarios puros. Por tanto, $\dim \mathfrak{u}(N) = 2N^2 - (N^2 - N) - N = N^2$ y $\dim(\mathfrak{su})(N) = N^2 - 1$ porque la condición de la traza ahora sí resta un grado de libertad.

Además del corchete de Lie, bajo ciertas hipótesis⁴ podemos equipar un álgebra de Lie con otra forma bilineal, en este caso simétrica, que funciona como un producto escalar. Esta se conoce como la forma de Killing y ya hizo su aparición más arriba cuando discutimos de pasada por qué casi ninguna esfera es un grupo de Lie. Por ejemplo, en el caso de $\mathfrak{su}(2)$, la forma de Killing se escribe $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr}(XY)$. Veamos que, en efecto, es un producto escalar. En primer lugar, es bilineal y simétrica por las propiedades (lineal y cíclica, respectivamente) de la traza. Además, vemos que las matrices de $\mathfrak{su}(2)$ se pueden escribir como

$$(3.6) \quad X = \begin{pmatrix} ci & a + bi \\ -a + bi & -ci \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y con esto podemos calcular que $\langle X, X \rangle = a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$, con igualdad si y solo si $X = 0$. Este cálculo muestra además que la base escogida es ortogonal. Los elementos de esta base son de hecho $\{\iota\sigma_x, \iota\sigma_y, \iota\sigma_z\}$, donde los σ_j son las matrices de Pauli que ya aparecieron anteriormente cuando estudiamos $SU(2)$.

3.2.1. La aplicación exponencial

Dado un elemento X de un álgebra de Lie, existe una manera canónica de enviarlo al grupo mediante la curva que pasa por la identidad con velocidad X . Como hemos visto antes, cualquier vector en la identidad se puede extender a un campo vectorial en todo G gracias a la propiedad de grupo. Eso garantiza que la siguiente definición funciona.

Definición 3.2.3. *Dados un grupo de Lie G y su álgebra de Lie \mathfrak{g} , la aplicación exponencial se define como*

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

donde $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow G$ es la única curva tal que $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = X$ y $\gamma(t)\gamma(s) = \gamma(s+t) \forall s, t \in \mathbb{R}$. En particular, si G es un grupo de matrices, se cumple que

$$(3.8) \quad \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Las condiciones impuestas a γ en la definición anterior la convierten en un homomorfismo de \mathbb{R} a un subgrupo de G que se suele conocer como grupo uniparamétrico.

⁴El grupo ha de ser compacto y simple.

Hace falta comprobar algunos flecos sueltos: que γ es efectivamente única, que ambas definiciones coinciden para grupos de matrices y de que la serie infinita converge. Remitimos a [7, págs. c. 2] para las demostraciones.

Si X e Y son dos matrices $N \times N$ que conmutan, se puede expandir cada término de la serie anterior como un binomio de Newton para probar que $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$. Esto no es cierto en general, cuando las matrices no conmutan, porque, por ejemplo $X^2 + XY + YX + Y^2 \neq X^2 + 2XY + Y^2$ y resultados semejantes para términos de orden superior. Es posible obtener una expresión cerrada para el producto de exponenciales en el caso general en forma de serie infinita, aunque es bastante engorrosa. Se conoce por el nombre de fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff⁵. Si llamamos $\exp(Z) = \exp(X) \exp(Y)$, los primeros términos son

$$(3.9) \quad Z(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \mathcal{O}(X^3)$$

suponiendo $Y = \mathcal{O}(X)$ [xk???]. En efecto, si comparamos el desarrollo de Taylor de $\exp(hX) \exp(hY)$ para $h \in \mathbb{R}$ alrededor de $h = 0$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \exp(hX) \exp(hY) &= \left(\mathbf{1} + hX + \frac{h^2}{2}X^2 + \mathcal{O}(h^3) \right) \left(\mathbf{1} + hY + \frac{h^2}{2}Y^2 + \mathcal{O}(h^3) \right) \\ &= \mathbf{1} + h(X + Y) + \frac{h^2}{2}(X^2 + Y^2) + h^2XY + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

con el de $\exp(hZ)$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \exp(hZ) &= \mathbf{1} + h(X + Y) + \frac{h^2}{2}([X, Y] + (X + Y)^2) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \mathbf{1} + h(X + Y) + \frac{h^2}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

comprobamos que coinciden hasta segundo orden.

3.2.2. Constantes de estructura

Dada una base de un álgebra de Lie, las coordenadas de los corchetes de elementos de la base reciben un nombre especial.

Definición 3.2.4. *Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} con generadores $\{e_i\}_{i=1}^N$, las constantes de estructura f_{ij}^k se definen como las coordenadas de los corchetes de pares de generadores en la base de los generadores, es decir*

$$(3.12) \quad [e_i, e_j] = \sum_{k=1}^N f_{ij}^k e_k.$$

Por ejemplo, en $\mathfrak{su}(2)$ tenemos

$$(3.13) \quad [\imath\sigma_x, \imath\sigma_y] = 2\imath\sigma_z, \quad [\imath\sigma_z, \imath\sigma_x] = 2\imath\sigma_y, \quad [\imath\sigma_y, \imath\sigma_z] = 2\imath\sigma_x;$$

⁵La fórmula y su demostración se pueden consultar en [11, sec. 5.3].

luego, en términos del símbolo de Levi-Civita, $f_{ij}^k = 2\epsilon^{ijk}$ en la base ordenada $\mathcal{B} = \{\iota\sigma_x, \iota\sigma_y, \iota\sigma_z\}$.

Otro ejemplo sencillo es $\mathfrak{so}(N)$. Siguiendo a [12], denotamos por \mathbf{e}_{ij} a las matrices $N \times N$ con 1 en su entrada (i, j) y cero en el resto. Sus antisimetrizaciones $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_{ij} - \mathbf{e}_{ji}$ dan una base de $\mathfrak{so}(N)$ si tomamos $1 \leq i < j \leq N$. Con esta notación, los conmutadores son

$$(3.14) \quad [\mathbf{E}_{ij}, \mathbf{E}_{kl}] = \mathbf{E}_{il}\delta_{jk} + \mathbf{E}_{jk}\delta_{il} + \mathbf{E}_{ki}\delta_{jl} + \mathbf{E}_{lj}\delta_{ik}$$

Por la definición de δ_{ij} , el lado derecho es distinto de cero si y solo si el primer elemento del conmutador comparte un índice con el segundo. Por otra parte, dado que $E_{ii} = 0$, para que el lado derecho no se anule, los dos índices restantes han de ser distintos. Si esto se satisface, la constante de estructura vale ± 1 . Por ejemplo, si $i \neq j = k \neq l \neq i$, se tiene $[E_{ij}, E_{jl}] = E_{il}$.

CAPÍTULO 4

Representaciones de grupos y álgebras de Lie

4.1. Los casos $SU(2)$ y $SO(3)$

4.1.1. Representaciones y álgebras de Lie

Empezamos dando dos definiciones que serán necesarias después.

Definición 4.1.1. Si G es un grupo de Lie de matrices, llamamos *representación adjunta*, Ad , de G a la aplicación

$$(4.1) \quad \begin{aligned} Ad: G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad_g \end{aligned}$$

que actúa por conjugación, enviando cada $X \in \mathfrak{g}$ a $Ad_g(X) = gXg^{-1}$, con \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G .

Es fácil ver que Ad es un homomorfismo de grupos de Lie. Como consecuencia de esto [7, sec. 3.5], podemos calcular la aplicación tangente a Ad en la identidad como

$$(4.2) \quad \begin{aligned} ad_X(Y) &= \frac{d}{dt} Ad_{\exp(tX)}(Y)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\exp(tX) Y \exp(-tX))|_{t=0} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

Se tiene además que ad es un homomorfismo entre las álgebras de Lie \mathfrak{g} y $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, es decir, respeta los corchetes de forma que $ad([X, Y]) = [ad_X, ad_Y]$. La representación adjunta sirve para definir en el caso general la forma de Killing

Definición 4.1.2. Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} real definimos su forma de Killing como

$$(4.3) \quad \begin{aligned} K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \text{Tr}(ad_X ad_Y). \end{aligned}$$

El caso complejo es idéntico cambiando \mathbb{R} por \mathbb{C} . Si \mathfrak{g} es real y G es simple y compacto, se tiene que K es definida negativa [??], por lo que la aplicación $\langle X, Y \rangle = -K(X, Y)$ define un producto interior en \mathfrak{g} . De hecho, se puede probar [7] que, salvo una constante multiplicativa, este es el único producto interior invariante bajo la acción de Ad . Dicho de otra manera, la forma de Killing nos da una manera natural de medir ángulos en \mathfrak{g} si queremos que actuar por conjugación con elementos de G sobre \mathfrak{g} resulte en una isometría.

4.1.2. Toros maximales y subálgebras de Cartan

Para estudiar las representaciones de un grupo de Lie compacto se empieza por estudiar las de su “mayor” subgrupo abeliano, $T \subset G$, en el sentido de que no existe $T' \subset G$ abeliano tal que $T \subsetneq T' \subset G$. A este grupo se le denomina *toro maximal*, por razones que serán evidentes en breve¹. Por ser T abeliano, cualquier representación π de G restringida a T debe consistir de matrices que conmutan entre sí. En particular, podremos diagonalizar simultáneamente todos los $\pi(h)$ para $h \in T$. Además, si nos restringimos a representaciones unitarias, algo que siempre podemos hacer si G es compacto², se tiene que todos los elementos de la diagonal están en $U(1)$, luego

$$(4.4) \quad \pi(g) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1(g)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2(g)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_d(g)} \end{pmatrix},$$

y $\text{Im } \pi|_T$ es isomorfa a un toro de dimensión igual a $\pi|_T$, lo que justifica su nombre. Se cumple además que T contiene elementos de todas las clases de conjugación en G [7, ?]. Este hecho permitirá extender las representaciones de T al resto del grupo de forma esencialmente única, módulo equivalencias unitarias.

Para entender las representaciones de G y T vamos primero a ver qué ocurre con las representaciones de sus álgebras de Lie asociadas, \mathfrak{g} y \mathfrak{t} . Después extenderemos esa información local a todo el grupo³. El álgebra \mathfrak{t} hereda de T las propiedades de ser conmutativa y maximal. Esto convierte a \mathfrak{t} en una subálgebra de Cartan⁴. En todo rigor, necesitaremos considerar las extensiones complejas

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \\ \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t} \end{aligned}$$

Esta construcción aparentemente artificial se revelará necesaria en el apartado siguiente para poder diagonalizar ciertos operadores que actúan sobre \mathfrak{g} y tienen autovalores

¹Evidentemente, T no es único, pero se puede probar [] que dos elecciones cualesquiera son conjugadas entre sí. Esto nos permite hablar de un solo toro maximal, entendido que lo hacemos módulo conjugación.

²Ver [].

³Podemos hacer esto siempre que pasar al álgebra no se pierda información, algo que solo ocurre cuando G es simplemente conexo []

⁴Esta no es la definición general, pero es una caracterización adecuada para álgebras semisimples, que son las únicas que consideramos [7, pág. 7.2].

complejos. A la dimensión real de \mathfrak{t} o, alternativamente, a la dimensión compleja de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, se la conoce como rango.

Vamos a ilustrar todo esto con varios ejemplos. En $SU(2)$ podemos tomar

$$(4.6) \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

luego \mathfrak{t} tiene dimensión 1 y está generada por $i\sigma_z$, por lo que el rango de $SU(2)$ es 1. La situación para $SU(3)$ es similar pero con dos parámetros libres

mientras que para $SO(3)$ podemos escoger

$$(4.7) \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

4.1.3. Pesos y raíces

Por lo visto en el apartado anterior, cualquier representación $\pi|_T$ de dimensión d se puede escribir como la suma directa

$$(4.8) \quad \pi = \bigoplus_{k=1}^d \chi_k$$

donde las χ_k son unitarias de dimensión uno y, por tanto, irreducibles e iguales a sus caracteres. Además, por ser π un homomorfismo de grupos de Lie, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & U(\mathbb{C}^d) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\pi} & \mathfrak{u}(d) \end{array}$$

conmuta, por lo que para cualquier $H \in \mathfrak{t}$ se cumple

$$(4.9) \quad \chi_k(\exp(H)) = \exp(d\chi_k(H))$$

con los $d\chi_k$ lineales en \mathfrak{t} . Dicho de otra forma, cada representación unidimensional χ_k queda unívocamente determinada por un funcional lineal $\ell_k \in \mathfrak{t}^*$, con $d\chi_k = 2\pi\ell_k$, donde el factor 2π se introduce meramente por conveniencia posterior. En ese mismo espíritu definimos también

$$(4.10) \quad \begin{aligned} e: \mathfrak{t} &\longrightarrow G \\ H &\longmapsto \exp(2\pi\iota H), \end{aligned}$$

una versión normalizada de la función exponencial. Se tiene entonces que todos los χ_k deben ser triviales en el retículo

$$(4.11) \quad L = \ker e = \{H \in \mathfrak{t}: \exp(2\pi H) = \mathbf{1}\}.$$

Esto equivale a pedir que los ℓ_k se encuentren en el retículo recíproco

$$(4.12) \quad L^* = \{\ell \in \mathfrak{t}: \ell(x) \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in L\}.$$

A cada uno de los elementos de L^* lo llamaremos *peso analíticamente entero*. Lo interesante de esta construcción es que existe una biyección entre pesos y representaciones irreducible de T . Está claro que por cada peso podemos construir una representación irreducible $\pi|_T$ que actúa sobre $h \in T$ como $\exp(2\pi i \ell(H))$ cuando $\exp(H) = h$. Menos obvio es que cualquier representación irreducible $\pi|_T$ se obtiene a partir de un peso. Remitimos a [7] para la prueba. Además, si \mathfrak{t} es semisimple, todas sus representaciones finitas son completamente reducibles [7, sec. 10.3], por lo que están unívocamente determinadas por la función

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \mu: L^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \ell &\longmapsto m_\ell \end{aligned}$$

que da la multiplicidad de cada peso en la representación⁵. De este modo las representaciones de T quedan completamente caracterizadas.

La pregunta natural llegados a este punto es qué pasa al extender las representaciones a todo el grupo. En particular, nos gustaría saber qué forma tienen las representaciones irreducibles de G . Para dar una respuesta debemos introducir la siguiente

Definición 4.1.3. *Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} y una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$, se denomina raíz a cualquier elemento no nulo $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ para el cual existe $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que $\text{ad}_H Z = \alpha(H)Z$ para todo $H \in \mathfrak{t}$.*

Dicho de otro modo, las raíces son los pesos de la representación adjunta de la subálgebra de Cartan. El conjunto de todas las raíces de un álgebra, R , se suele llamar sistema de raíces. Un resultado trivial pero importante es que como $\text{ad}_{-H} = -\text{ad}_H$, se tiene que si $\alpha \in R$, entonces $-\alpha$ también es raíz. Las raíces además inducen una descomposición

$$(4.14) \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

donde $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}: [H, Z] = \alpha(H)Z \quad \forall H \in \mathfrak{t}\}$ es el autoespacio asociado a la raíz α . Se puede ver que los subespacios asociados a cada raíz son de dimensión uno [14, prop. 35.2], por lo que podemos escoger un elemento Z_{α} por cada raíz para generar el subespacio asociado. Estos Z_{α} tienen una propiedad que los convierten en una herramienta fundamental para clasificar representaciones irreducibles. Dada una representación finita $\pi: G \longrightarrow V$, si $\mu_{\pi}(\ell) \neq 0$, entonces existe un subespacio no trivial

$$(4.15) \quad V_{\ell} = \{v \in V: d\pi(H)v = \ell(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{t}\}$$

asociado al peso $\ell \in \mathfrak{t}^*$. Al diagonalizar $\pi|_T$ se induce una descomposición

$$(4.16) \quad V = \sum_{\ell} V_{\ell}.$$

⁵Sujeta por supuesto a que $\sum_{\ell \in L^*} \mu(\ell) < \infty$.

Entonces, si $v \in V_\ell$ y $H \in \mathfrak{t}$, se cumple que

$$(4.17) \quad \begin{aligned} d\pi(H)d\pi(Z_\alpha)v &= d\pi(Z_\alpha)d\pi(H)v + d\pi([H, Z_\alpha])v \\ &= \ell(H)d\pi(Z_\alpha)v + d\pi(\text{ad}_H(Z_\alpha))v \\ &= (\ell(H) + \alpha(H))d\pi(Z_\alpha)v \end{aligned}$$

es decir, dado $v \in V_\ell$, actuar sobre él con $d\pi(Z_\alpha)$ lo convierte en un vector de peso $\ell + \alpha$ que pertenece a $V_{\ell+\alpha}$, con la convención de que $V_{\ell+\alpha} = \{0\}$ si $\ell + \alpha$ no es peso de π . Por otra parte, sabemos que $\ker d\pi(Z_\alpha)$ no puede ser trivial porque V tiene dimensión finita, por lo que si seguimos aplicando $d\pi(Z_\alpha)$ acabaremos en el $\{0\}$ eventualmente. Las raíces nos permiten por tanto “subir” y “bajar” entre los subespacios asociados a cada peso de la representación. Esta intuición es lo que motiva que los elementos Z_α se conozcan como *ladder operators* en nomenclatura física.

Pasamos ahora a ilustrar estas ideas en $SU(2)$. Para $H \in \mathfrak{t} \cong \imath\mathbb{R}$ generado por $\imath\sigma_z$ se tiene que $e(H) = \mathbf{1}$ si y solo si $H = n\sigma_z$ con $n \in \mathbb{Z}$, luego $L = \mathbb{Z}$ y $L^* = \imath\mathbb{Z}$. Por otra parte, la representación adjunta de $\imath\sigma_z$ en la base usual $\mathcal{B} = \{\imath\sigma_x, \imath\sigma_y, \imath\sigma_z\}$ es

$$(4.18) \quad \text{ad}_{\imath\sigma_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

luego las raíces son $\alpha_\pm = \pm 2\imath$. Supongamos que π es una representación irreducible de $SU(2)$ tal que $\mu_\pi(n) = 1$ pero no existe $m \in L^*$ tal que $\mu_\pi(m) \neq 0$. Diremos entonces que n es el peso más alto de π . El siguiente teorema nos dice que el peso más alto caracteriza unívocamente las representaciones irreducibles de $SU(2)$.

Teorema 4.1.1. *Sea $\pi: SU(2) \rightarrow V$ una representación irreducible con peso más alto n . Entonces se tiene que*

1. *La representación contiene todos los pesos de la forma $\{n, n-2, \dots, -n+2, -n\}$, cada uno con multiplicidad uno.*
2. *Cualquier otra representación irreducible con los mismos pesos es equivalente.*

Demostración. En toda la prueba obviamos los prefactores \imath y trabajamos en \mathbb{Z} . En primer lugar, observamos si n es peso también lo es $-n$ porque si $h \in T$, al actuar por conjugación con σ_y equivale a permutar los elementos de la diagonal, que son iguales de signo opuesto y como $\pi(h) = \pi(\sigma_y h \sigma_y^{-1})$ el peso asociado a $-n$ también debe estar. Por lo tanto, $n < 0$ estaría en contradicción con que es el peso más alto, así que debe ser $n \geq 0$. Ahora supongamos que $r = n - 2$ no está en π . Usando la fórmula ?? con $\alpha_- = -2$ vemos que el subespacio $V_{r+\alpha_-} = V_{n-4} = \{0\}$ y por tanto $V' = \cup_{m < r} V_m$ sería invariante por $d\pi(Z_\pm)$ y por $d\pi(H)$ para $H \in \mathfrak{t}$, contradiciendo que sea irreducible. Repitiendo el argumento para todos los $-n < r = n - 2k < n$ con k entero queda probada la primera parte. Para la segunda remitimos a [sepanski]. \square

Para $SO(3)$ tenemos un resultado similar. Tomando

$$(4.19) \quad J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

como generadores de $\mathfrak{so}(3)$ se puede generar una subálgebra de Cartan con J_z , por lo que volvemos a tener $L = \mathbb{Z}$ y $L^* = \imath\mathbb{Z}$ como en $SU(2)$. Sin embargo, al diagonalizar ad_{J_z} encontramos que los pesos son $\alpha_{\pm} = \pm\imath$. Al probar el análogo del teorema 4.1.1 nos encontraremos con que las representaciones irreducibles de $SO(3)$ tienen pesos de la forma $\{n, n-1, \dots, -n+1, -n\}$. Como cada peso está asociado a un subespacio de dimensión 1, una consecuencia inmediata es que $SO(3)$ solo tiene representaciones irreducibles en dimensión impar.

4.2. $SU(3)$ y orden superior

Consideremos ahora $SU(3)$. Los generadores más frecuentes en la literatura son las llamadas matrices de Gell-Mann $\{\lambda_j\}_{j=1}^8$ debidamente escaladas para que sean antihermíticas y tengan norma uno con el producto interior definido por la forma de Killing. La base para $\mathfrak{su}(3)$ es entonces $\mathcal{B} = \{B_j = \imath\lambda_j/\sqrt{12}, j = 1, \dots, 8\}$. Una elección sencilla para la subálgebra de Cartan está generada por las dos matrices diagonales

$$(4.20) \quad B_3 = \frac{\imath}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_8 = \frac{\imath}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \imath & 0 & 0 \\ 0 & \imath & 0 \\ 0 & 0 & -2\imath \end{pmatrix}$$

En esta base, sus representaciones adjuntas son:

$$(4.21) \quad \text{ad}_{B_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_y \oplus \sigma_y \oplus (-\sigma_y)), \quad \text{ad}_{B_8} = \frac{1}{2} (\mathbf{0}_2 \oplus \sigma_y \oplus \sigma_y)$$

con σ_y la segunda matriz de Pauli. Al diagonalizar simultáneamente encontramos los siguientes autovalores y autovectores:

Subespacio	Autovalores ($\text{ad}_{B_3}, \text{ad}_{B_8}$)
$\langle B_3, B_8 \rangle$	$(0, 0)$
$\langle \imath B_1 - B_2 \rangle$	$(\imath\sqrt{3}/3, 0)$
$\langle \imath B_1 + B_2 \rangle$	$(-\imath\sqrt{3}/3, 0)$
$\langle \imath B_3 - B_4 \rangle$	$(-\imath\sqrt{3}/6, -\imath/2)$
$\langle \imath B_3 + B_4 \rangle$	$(\imath\sqrt{3}/6, -\imath/2)$
$\langle \imath B_6 - B_7 \rangle$	$(\imath\sqrt{3}/6, \imath/2)$
$\langle \imath B_6 + B_7 \rangle$	$(-\imath\sqrt{3}/6, \imath/2)$

Las raíces son todos los vectores formados por pares de autovalores salvo el primero, dado que es nulo. Notamos que los subespacios asociados a cada peso están generados por las matrices $\{E_{ij}\}_{i < j=1,2,3}$ que tienen cero en todas sus entradas salvo la (i, j) -ésima. Si omitimos el factor \imath observamos que las raíces apuntan a los vértices de un hexágono regular de radio $1/\sqrt{3}$ en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, imponiendo $e(aB_3 + bB_8) = \mathbf{1}$, podemos calcular el retículo

$$(4.22) \quad L = \ker e = \left\{ \sqrt{3}(2k - l)B_3 + 3lB_8 : k, l \in \mathbb{Z} \right\} = \langle \sqrt{3}B_3/6, \sqrt{3}B_3 - 3B_8 \rangle \subset \mathfrak{t}$$

y su retículo dual, que estará generado por $(\sqrt{3}B_3)^* = \iota(\sqrt{3}B_3^*/6 + B_8^*/6)$ y $(-\sqrt{3}B_3 + 3B_8)^* = \iota B_8^*/3$, es decir

$$(4.23) \quad L^* = \left\{ \frac{\iota m}{6} (\sqrt{3}B_3^* + B_8^*) + \frac{\iota n}{3} B_8^* : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathfrak{t}^*$$

Llegados a este punto nos preguntamos cómo extender el teorema 4.1.1 para encontrar los pesos asociados a representaciones irreducibles de $SU(3)$. En dos dimensiones no tenemos un orden como en \mathbb{Z} , por lo que no está claro cómo definir el peso más alto. Las siguientes definiciones dan respuesta a este problema.

En primer lugar, notamos que un sistema de raíces R nunca puede ser una base para su álgebra de Lie \mathfrak{g} ya que $\pm\alpha \in R$ para toda $\alpha \in R$. Sin embargo, se puede demostrar que si el álgebra es semisimple, $\text{span } R = \mathfrak{t}^*$ [sepanski] es posible escoger una base (de hecho, muchas) formada solo por elementos de R . Para ello basta tomar un hiperplano que no contenga ninguna raíz⁶ y emplear la partición que induce en el espacio para escribir las raíces como unión disjunta de “positivas” y “negativas”, $R = R^- \cup R^+$, en función de a qué lado del hiperplano caen. Se tiene entonces que si $\alpha \in R^+$, $-\alpha \in R^-$. En general, sin embargo, seguirá habiendo elementos colineales en R^+ . La manera de deshacernos de ellos la indica el siguiente

Teorema 4.2.1. *El subconjunto $\Delta \subset R^+$ de raíces positivas tales que no se pueden escribir como suma de otras dos es una base de \mathfrak{t}^* .*

Demostración. Ver [7, th. 8.16]. □

A las raíces $\alpha \in \Delta$ obtenidas de esta forma se las suele llamar positivas y simples. No solo es este un método útil para encontrarlas, sino que además es el único [7, th. 8.17].

Por otro lado, R tiene asociado un grupo de simetrías discreto de manera natural mediante la siguiente

Definición 4.2.1. *Dado un sistema de raíces R , el grupo de Weyl es el grupo de isometrías generado por las reflexiones respecto a los hiperplanos normales a elementos de R , es decir,*

$$(4.24) \quad W = \langle \{s_\alpha : \alpha \in R\} \rangle$$

con

$$(4.25) \quad \begin{aligned} s_\alpha : \mathfrak{t}^* &\longrightarrow \mathfrak{t}^* \\ H &\longmapsto H - 2 \frac{\langle \alpha, H \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \end{aligned}$$

Cada generador de W deja invariante un hiperplano $\Pi_\alpha \subset \mathfrak{t}^*$ diferente. El conjunto $\mathfrak{t}^* \setminus \cup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ es la unión disjunta subespacios abiertos y convexos denominados cámaras de Weyl. Es posible probar que están en biyección con las bases Δ de R [7].

Con estas nociones preliminares ya podemos dar una definición de peso más alto en el caso de más de una dimensión. Para ello usamos la siguiente

⁶Siempre podemos hacer esto dado que el número de raíces es finito, tomando el complemento ortogonal de cualquier elemento de $\cup_{\alpha \in R} \alpha^\perp$ [7, Pgs.8, 8,14].

Definición 4.2.2. *Dados dos pesos $\ell_1, \ell_2 \in L^*$ y una base de un sistema de raíces $\Delta \subset R$, diremos que $\ell_1 \preceq \ell_2$ si existen $\lambda_\alpha \geq 0$ tales que $\ell_2 - \ell_1 = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha$.*

que define un orden parcial sobre \mathfrak{L}^* . Dada una representación, su peso más alto será cualquier elemento maximal del conjunto de pesos asociados a ella. En principio, al tratarse de un orden parcial, este peso no tendría por qué ser único. Sin embargo, el teorema del peso más alto [7, th. 9.4] garantiza unicidad si la representación es irreducible. Además este peso estará en la cámara de Weyl fundamental asociada a la base Δ que hemos elegido para definir el orden.

Volviendo a $SU(3)$, vemos que una posible elección es tomar

$$\begin{aligned} R^+ &= \{(\sqrt{3}/3, 0), (-\sqrt{3}/6, 1/2), (\sqrt{3}/6, 1/2)\} \\ \Delta &= \{(\sqrt{3}/3, 0), (-\sqrt{3}/6, 1/2)\} \end{aligned}$$

donde hemos prescindido de los factores ι . Ahora, escogido un peso en la cámara de Weyl asociada podemos actuar con los operadores $d\pi(Z_{-\alpha})$ con $\alpha \in \Delta$ hasta que obtengamos un subespacio trivial. Todos los pesos generados de esta forma serán simétricos bajo la acción del grupo de Weyl y estarán asociados a una única representación irreducible. Esta idea sí generaliza a dimensiones más altas y además constituye una herramienta esencial para la clasificación de grupos de Lie simples [7, cap. 8,10].

CAPÍTULO 5

El principio gauge

5.1. Lagrangianos y simetrías

Cualquier teoría en física clásica sale de considerar un principio de mínima acción, que nos dice que la cantidad

$$S = \int_M \mathcal{L}[x, \phi, D\phi],$$

conocida como acción, debe ser estacionaria. En esta definición, M es una variedad, $x \in M$, ϕ es una sección de algún fibrado sobre M que llamaremos campo (o campos) y \mathcal{L} es un funcional llamado lagrangiano que manda puntos de M , campos, ϕ , y sus derivadas primeras¹, $D\phi$, a \mathbb{R} . Casos particulares de esta idea general son

- El movimiento de una partícula de masa m en un potencial V según las leyes de Newton, poniendo $t \in M = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ el tiempo, $\phi = q(t)$ la posición, $D\phi = v(t)$ la velocidad y $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv(t)^2 - V(q(t))$.
- El campo electromagnético generado por una (1-forma de) corriente j según las ecuaciones de Maxwell, poniendo $x \in M \subset \mathcal{M}$ el espacio de Minkowski, $\phi = A$ (la 1-forma que describe) el potencial electromagnético, $D\phi = dA = F$ el tensor de Faraday y $\mathcal{L} = \frac{1}{2}F \wedge \star F + A \wedge \star j$, donde \star es el operador estrella de Hodge.²
- Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, poniendo M una 4-variedad lorentziana, $\phi = g$ su métrica y $\mathcal{L} = R/2\kappa$ su escalar de Ricci multiplicado por constantes físicas, $\kappa = 8\pi G/c^4$.

El principio de mínima acción implica que los campos satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(5.1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D\phi)}$$

¹Somos deliberadamente ambiguos sobre qué significa exactamente la derivada D , ya que en distintos contextos puede ser cosas ligeramente diferentes, como una diferencial exterior o una derivada covariante.

²En la siguiente sección veremos de dónde sale este lagrangiano.

El arte de inventar teorías físicas es por tanto el arte de inventar lagrangianos. Históricamente, sin embargo, ha sido más frecuente partir de una ecuación diferencial y tratar de averiguar después de qué lagrangiano se podía derivar. Es este el caso de la segunda ley de Newton, las ecuaciones de Maxwell o la ecuación de Dirac. Como contraejemplo curioso, David Hilbert encontró la formulación lagrangiana de la relatividad general casi a la vez que Einstein publicó sus ecuaciones de campo.

Imaginemos ahora que queremos recorrer el camino inverso, de lo integral a lo diferencial: ¿Qué reglas generales podemos usar para escribir “buenos” lagrangianos? Además de las obvias, como que la teoría prediga fenómenos experimentales, o que, a falta de evidencia en contra, es preferible un lagrangiano simple a uno complejo, existe un principio extremadamente útil para generar candidatos: un lagrangiano debe ser independiente del sistema de coordenadas que utilicemos. Esta idea tiene al menos dos vertientes: una global y otra local.

La vertiente global, quizá la más intuitiva, nos dice que, como las leyes físicas deben ser independientes de las coordenadas que ponemos en la variedad base M , el lagrangiano debe ser invariante bajo cambios de coordenadas arbitrarios. Por ejemplo, el movimiento de una partícula será el mismo tanto si damos su posición en cartesianas como en esféricas. Una ramificación importante de este principio es el teorema de Noether, que nos dice que, si el lagrangiano es invariante bajo un *grupo continuo* de transformaciones, entonces hay unas cantidades que se conservan en el tiempo. Ejemplos particulares de este teorema son la conservación del momento lineal en sistemas con simetría traslacional; la conservación del momento angular en sistemas con simetría rotacional; y la conservación de la energía en sistemas con simetría temporal.

La vertiente local es lo que se conoce como principio gauge y nos dice que “moralmente”³ podemos elegir coordenadas diferentes para las fibras en cada punto de la variedad. Esto es más difícil de imaginar que la invariancia global, ya que en este caso estamos hablando de coordenadas que no tienen nada que ver con la variedad base. En [13] se da un ejemplo discreto muy esclarecedor que ayuda a ganar intuición sobre qué significan estas coordenadas. Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, existen $2^{|E|}$ grafos dirigidos con su misma topología. Para especificar uno de ellos, podemos proceder del siguiente modo: fijamos uno como referencia, llamémoslo G_0 , y a continuación identificamos los demás con la función $f: E \rightarrow \{-1, +1\}$ que envía cada arista a $+1$ si está orientada como en G_0 y a -1 si tiene la orientación opuesta. Esto es lo que significa dar unas coordenadas locales. Evidentemente, los valores de f en cada grafo dirigido dependen del G_0 escogido. Por tanto, cambiar el G_0 equivale a un cambio de coordenadas. El espíritu del principio gauge es que ninguna teoría física que se precie debería depender de G_0 .

³Evidentemente, la fuerza moral del argumento queda a gusto del lector. Lo más importante del principio gauge es que *funciona*, pues usándolo mecánicamente podemos explicar lo que pasa en experimentos de física de altas energías. Ver sin embargo [13] para una discusión algo más detallada y [4, cap. 9] para entender su origen histórico.

5.2. El principio gauge en acción

Obviamente, los casos relevantes en física no son discretos como el ejemplo anterior, sino que requieren lidiar con fibrados sobre el espacio de Minkowski, \mathcal{M} . Lo que nos interesa es que en estos casos las simetrías locales vienen dadas por grupos de Lie que llamaremos grupos gauge. Veamos dos ejemplos.

5.2.1. Teoría $U(1)$ o electrodinámica cuántica

Partimos de una teoría que contiene solo el campo asociado al electrón, Ψ . Este campo es una sección de algo llamado fibrado espinorial. Sin entrar en detalles, lo relevante para nosotros es que se trata de un objeto con cuatro coordenadas que transforman bajo cierta representación del grupo de Poincaré cuando cambiamos de coordenadas globalmente en \mathcal{M} y que satisface la ecuación de Dirac⁴

$$(5.2) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0,$$

donde las γ^μ son las llamadas matrices gamma, definidas mediante la relación de anticonmutación

$$(5.3) \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_4,$$

siendo

$$(5.4) \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la métrica de Minkowski. La constante m representa la masa del electrón. Dos bases empleadas comúnmente para las matrices γ en función de las matrices de Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ son

$$(5.5) \quad \gamma^0 = \sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2, \quad \gamma^k = i\sigma_2 \otimes \sigma_k,$$

conocida como representación de Dirac; y

$$(5.6) \quad \gamma^0 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2, \quad \gamma^k = i\sigma_2 \otimes \sigma_k,$$

conocida como representación de Weyl. La elección de una base cambia la interpretación física de las coordenadas de Ψ . En la base de Dirac, blabla. En la base de Weyl, las dos primeras coordenadas están en el subespacio asociado al autovalor positivo del operador helicidad, etc.

Esta ecuación se puede obtener usando el principio de mínima acción a partir del lagrangiano

$$(5.7) \quad \mathcal{L}_{free} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

⁴Ver [4] para una motivación de la ecuación que sigue el razonamiento empleado originalmente por Dirac.

con $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Para verlo basta considerar la variación de \mathcal{L}_{free} con respecto a $\bar{\Psi}$

$$(5.8) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{free}}{\partial \bar{\Psi}} = \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{free}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0$$

Variar respecto a Ψ daría lugar a la ecuación de Dirac adjunta.

Observamos ahora que \mathcal{L}_{free} es invariante bajo la transformación $\Psi \mapsto e^{i\theta} \Psi$, con $\theta \in \mathbb{R}$ una constante. Dicho de otra forma, podemos multiplicar el campo Ψ por un elemento cualquiera de $U(1)$ sin que la teoría cambie. Ahora bien, según el principio gauge, deberíamos poder elegir un elemento distinto en cada punto, siempre que nos movamos entre puntos de forma diferenciable. Es decir, deberíamos poder convertir θ en una función diferenciable $\theta(x)$ no necesariamente constante. Sin embargo, vemos que este requisito es incompatible con nuestro lagrangiano, dado que ahora la derivada ya no conmuta con θ , sino que se tiene

$$(5.9) \quad \partial_\mu (e^{i\theta} \Phi) = e^{i\theta} ((\partial_\mu \theta) \Phi + \partial_\mu \Phi).$$

Para “arreglar” esta situación necesitamos modificar la manera en que derivamos, de tal modo que se cancele el término extra en $\partial_\mu \theta$. Para ello, introducimos un nuevo operador D , que llamaremos derivada covariante y que, en coordenadas, se escribe $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$, donde A_μ es una 1-forma con coeficientes en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$ denominada campo gauge y q es un número real, llamado constante de acoplo, que se introduce por conveniencia y consistencia dimensional. La propiedad que le pedimos a A_μ es que, al aplicar $e^{i\theta}$, se transforme en A'_μ de tal manera que $D'_\mu (e^{i\theta} \Psi) = e^{i\theta} D_\mu \Psi$, por lo que

$$(5.10) \quad \begin{aligned} (\partial_\mu - iqA'_\mu) (e^{i\theta} \Psi) &= e^{i\theta} (\partial_\mu - iqA_\mu) \Psi \\ e^{i\theta} (\partial_\mu - iqA'_\mu + \partial_\mu \theta) \Psi &= e^{i\theta} (\partial_\mu - iqA_\mu) \Psi \\ A'_\mu &= A_\mu + q^{-1} \partial_\mu \theta \end{aligned}$$

Esto nos da la ley de transformación de campos gauge. Si reemplazamos ∂_μ por D_μ en \mathcal{L}_{free} y expandimos resulta un nuevo lagrangiano igual a \mathcal{L}_{free} más un término de interacción

$$(5.11) \quad \mathcal{L}_{int} = q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu = J^\mu A_\mu,$$

donde hemos definido $J^\mu = q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$, el vector corriente eléctrica. Es decir, aplicando el principio gauge hemos obtenido de manera *gratuita* una interacción entre el campo original que describe al electrón, Ψ , y el nuevo campo gauge, A_μ . La intensidad de esta interacción está parametrizada por q , recuperándose la teoría libre en el caso $q = 0$. En este ejemplo concreto, la constante de acoplo, q , no es más que la carga eléctrica del electrón.

Falta todavía una pieza para tener el lagrangiano completo de la electrodinámica cuántica: un término que describa la dinámica del campo gauge. Siguiendo de nuevo el criterio de invariancia global bajo el grupo de Poincaré, un primer ansatz puede ser $A_\mu A^\mu$. Sin embargo, esta idea falla porque el término no es invariante gauge, es decir, $A_\mu A^\mu \neq A'_\mu A'^\mu$. Consideramos entonces su derivada exterior, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

conocido como tensor de Faraday. La contracción $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ sí es localmente invariante bajo transformaciones gauge, por lo que puede incluirse en el lagrangiano, resultando finalmente⁵

$$(5.12) \quad \mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

donde el factor $1/4$ resulta necesario para recuperar las ecuaciones de Maxwell.

5.2.2. Teoría $O(n)$

Veamos ahora un ejemplo sacado de [17] en el que el grupo gauge es no abeliano. Supongamos que nuestra teoría contiene n campos escalares $\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ con $i = 1, \dots, n$. Si dichos campos no interactúan entre sí, su dinámica (en unidades $\hbar = c = 1$ y sumando sobre índices según el convenio de sumación de Einstein) viene dada por el lagrangiano *libre*⁶

$$(5.13) \quad \mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^\top \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi^\top \Phi$$

donde $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^\top$ y m es un número real que representa la masa de las partículas asociadas a los campos. Técnicamente, podemos decir que Φ es una sección de un fibrado vectorial sobre \mathcal{M} con fibra \mathbb{R}^n . La ecuación de movimiento correspondiente a este lagrangiano para cada uno de los campos es la conocida como ecuación de Klein-Gordon:

$$(5.14) \quad (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi_i = 0$$

Observamos que \mathcal{L}_{free} es invariante no solo bajo las isometrías de la variedad base (dadas por el grupo de Poincaré), sino también sobre las de la fibra. En efecto, escogiendo $G \in O(n)$ y haciendo $\Phi \mapsto G\Phi$ se tiene $\partial_\mu G\Phi = G\partial_\mu \Phi$ y, como $G^\top G = \mathbf{1}_n$, el lagrangiano no cambia. Esta simetría es de carácter global, puesto que hemos escogido una misma G para toda la variedad.

Ahora, según el principio gauge, deberíamos poder escoger una matriz diferente $G(x)$ en cada punto $x \in \mathcal{M}$, siempre que al movernos de un punto a otro lo hagamos de manera diferenciable. Más técnicamente, esto equivale a pedir que G es una sección de un fibrado principal sobre \mathcal{M} con grupo $O(n)$. Al igual que en el caso anterior, necesitamos introducir una derivada covariante que en este caso escribiremos como $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, donde A_μ es una 1-forma con coeficientes en el álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ y g es la constante de acoplamiento real. La transformación gauge resulta en este caso

$$(5.15) \quad \begin{aligned} (\partial_\mu - igA'_\mu)G\Phi &= G(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi \\ (\partial_\mu G - igA'_\mu G + G\partial_\mu)\Phi &= (G\partial_\mu - igGA_\mu)\Phi \\ A'_\mu &= GA_\mu G^{-1} - ig^{-1}(\partial_\mu G)G^{-1} \end{aligned}$$

⁵QED son las siglas de *Quantum Electrodynamics*.

⁶Los criterios para escoger este lagrangiano son invariancia bajo el grupo de Poincaré y exigir que las ecuaciones de movimiento no tengan derivadas de orden mayor que 2.

Observamos que, a diferencia de lo que ocurre en el caso abeliano, ahora es necesario conjugar el campo A_μ por el elemento del grupo. Si reemplazamos ∂_μ por D_μ en \mathcal{L} obtenemos como término de interacción

$$(5.16) \quad \mathcal{L}_{int} = i\frac{g}{2} (\Phi^\dagger A_\mu^\dagger \partial^\mu \Phi + (\partial_\mu \Phi)^\dagger A^\mu \Phi) - \frac{g^2}{2} \Phi^\dagger A_\mu^\dagger A^\mu \Phi$$

Finalmente, el tensor de Faraday se generaliza al caso no abeliano usando la forma general del tensor de curvatura, $F = dA + A \wedge A$, que en coordenadas se escribe $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k$. Nótese que las constantes de curvatura son cero si el grupo es abeliano, recuperando la definición dada para $U(1)$ en tal caso. A partir de $F_{\mu\nu}$ podemos construir la llamada acción de Yang-Mills para el campo gauge

$$(5.17) \quad \mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F_{i\mu\nu}$$

de forma que el lagrangiano completo se escribe

$$(5.18) \quad \mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{gf}$$

5.3. El modelo estándar

El principio gauge es una de las ideas fundamentales detrás del lagrangiano del modelo estándar de la física de partículas, que da cuenta de todos los fenómenos vistos hasta la fecha en experimentos en aceleradores. Existen algunas diferencias entre nuestros *toy models* con grupos $U(1)$ y $O(n)$ y el lagrangiano del modelo estándar.

En primer lugar, el grupo gauge del modelo estándar es $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. La pieza $U(1) \times SU(2)$ se conoce como sector electrodébil. Contiene cuatro campos gauge (uno por $U(1)$ y tres por $SU(2)$) que, en cierta base, se pueden identificar con el fotón γ , mediador de las interacciones electromagnéticas; y los bosones W^+ , W^- y Z , mediadores de la interacción nuclear débil, que es la responsable de, entre otras cosas, ciertos tipos de desintegración nuclear. La pieza $SU(3)$ da lugar a ocho campos que se conocen colectivamente como gluones y dan cuenta de las interacciones nucleares fuertes que, entre otras cosas, mantienen unidos los núcleos atómicos.

Por otra parte, según lo visto anteriormente, los campos gauge no tienen masa. Sin embargo, es un hecho experimental que los bosones W^\pm y Z tienen masa distinta de cero. Para dar cuenta de este fenómeno se introduce un campo escalar llamado campo de Higgs cuyo acoplo con el sector electrodébil da lugar a un término que se comporta como una masa en las ecuaciones de movimiento. La masa del electrón y de sus “compañeros” pesados, el muón y el tauón, también aparece por interacción con el Higgs.

Finalmente, cerramos esta sección haciendo hincapié en que toda la discusión de teorías gauge ha sido puramente clásica, mientras que el modelo estándar es una teoría cuántica. *Grosso modo*, la manera de pasar de una teoría clásica a una cuántica es reemplazar los campos (secciones) por operadores hermíticos sobre un espacio de Hilbert cuyo espectro contiene los valores que pueden tomar sus observables asociados.

A este proceso se le denomina cuantización y ni siquiera está claro que esté bien definido matemáticamente [2]. Este es uno de los problemas matemáticos abiertos que más atención ha atraído en las últimas décadas, razón por la que el Instituto Clay lo colocó entre los famosos siete problemas del milenio, de los que hasta la fecha solo se ha resuelto la conjetura de Poincaré [8]. *Sensu stricto*, la existencia de una teoría cuántica bien definida (de acuerdo a ciertos axiomas) es solo la primera parte del problema. De existir tal teoría, el siguiente paso sería probar rigurosamente la existencia de un *mass gap*, esto es, que la partícula más ligera de la teoría tiene masa estrictamente mayor que cero.

Bibliografía

- [1] Fernando Chamizo. “Un poco de representaciones, grupos de Lie compactos y autovalores de laplacianos”. En: (2017). URL: http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/lie_eig.pdf.
- [2] Sourav Chatterjee. “Yang-Mills for probabilists”. En: *arXiv:1803.01950v1 [math.PR]* ().
- [3] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. “General theory of natural equivalences”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 58 (1945), págs. 231-294. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/3833/f692e93a795b51bd3d7acfd9477f9ee6d536.pdf>.
- [4] Gerald B. Folland. *Quantum Field Theory: A tourist guide for mathematicians*. Vol. 149. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [5] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. 2nd. CRC Press, 2018.
- [6] Curtis Greene, Albert Nijenhuis y Herbert S Wilf. “A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape”. En: *Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra*. Elsevier, 1982, págs. 17-22.
- [7] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. Vol. 222. Springer, 2015.
- [8] Arthur Jaffe y Edward Witten. “Quantum yang-mills theory”. En: *The millennium prize problems 1* (2006), pág. 129.
- [9] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. New York: Springer-Verlag, 1971, págs. ix+262.
- [10] Planet Math. *Spheres that are Lie Groups*. 2018. URL: <https://planetmath.org/SpheresThatAreLieGroups>.
- [11] Gerard Meurant. *Introduction to Lie groups and Lie algebras*. Vol. 51. Academic Press, 1973.
- [12] John Stillwell. *Naive lie theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [13] Terence Tao. *What is a gauge?* <https://terrytao.wordpress.com/2008/09/27/what-is-a-gauge/>. [Online; accessed 14-June-2019]. 2008.
- [14] Michael Taylor. *Lectures on Lie Groups*. 2017. URL: <http://mtaylor.web.unc.edu/files/2018/04/m273.pdf>.
- [15] Constantin Teleman. *Representation Theory*. 2005. URL: <https://math.berkeley.edu/~teleman/math/RepThry.pdf>.

-
- [16] Wikipedia. *Jacobi's formula* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi%27s_formula. [Online; accessed 28-March-2019]. 2019.
- [17] Wikipedia. *Scalar $O(n)$ gauge theory* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_theory#An_example:_Scalar_O\(n\)_gauge_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_theory#An_example:_Scalar_O(n)_gauge_theory). [Online; accessed 14-June-2019]. 2019.
- [18] Geordie Williamson. "Representation theory and geometry". En: International Mathematical Congress, 2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=-3q6C558yog>.