



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Fracciones continuas y algunas series infinitas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Diego Serrano Ortega

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2021-2022

Resumen

Este trabajo describe la teoría básica de las fracciones continuas y la aplica a diversos ejemplos de series numéricas. Concretamente, todos los capítulos excepto el sexto incorporan la evaluación o el estudio analítico de algunas series. A pesar de que la relación con el análisis no es demasiado conocida, tiene raíces clásicas y en nuestro trabajo se materializa en un ejemplo, que denominamos la serie cotangente. La distribución de los contenidos es como sigue. Tras un primer capítulo en el que se introduce la notación y las definiciones básicas, se dedica un segundo capítulo al criterio clásico para la periodicidad y un tercero a las propiedades de aproximación. Con ello se cubre la teoría fundamental de las fracciones continuas. Los capítulos cuarto y quinto se destinan, respectivamente, a la evaluación de la serie cotangente en puntos especiales y a la caracterización completa de su convergencia, que es la parte más complicada del trabajo. Finalmente, se termina con un capítulo más breve que incluye una prueba extremadamente corta de la fracción continua del número e .

Abstract

The present thesis describes the basic theory of continued fractions, and applies it to a wide variety of numerical series. In particular, every chapter, except for the sixth, includes the evaluation or the analytical study of some series. Despite not being widely known, the relationship with analysis has classic roots and in our thesis this manifests in an example, which we call the cotangent series. The content distribution is as follows. After a first chapter in which the notation and basic definitions are introduced, the second chapter focuses on the classic criteria for periodicity, while the third one covers the approximation properties. This concludes the fundamental theory of continued fractions. In the fourth and fifth chapter, this work respectively deals with the evaluation of the cotangent series in special points and the complete characterization of its convergence, being this the most complex part of the thesis. Ultimately, a briefer chapter including an extremely short proof of the continued fraction of the number e , completes the work.

Índice general

1	Propiedades y definiciones básicas	1
2	Periodicidad e irracionales cuadráticos	7
3	Propiedades de aproximación óptima	15
4	La evaluación de la serie cotangente	21
5	La convergencia de la serie cotangente	27
6	La fracción continua del número e	35
	Apéndices	37
A	Algunos códigos	39
B	Gráfico de los paralelogramos Γ_N	41

CAPÍTULO 1

Propiedades y definiciones básicas

Una *fracción continua* es una expresión de la forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad \text{con } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ y } a_j \in \mathbb{Z}^+ \text{ para } j > 0.$$

Si esta expresión termina en cierto a_n , hablamos de fracciones continuas *finitas*, y en caso contrario, de fracciones continuas *infinitas*. Es poco común ver una expresión como la que acabamos de mostrar, puesto que se emplean notaciones más oportunas. La clásica y la moderna son, respectivamente,

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \dots \quad \text{y} \quad [a_0, a_1, a_2, \dots].$$

Será esta última, la moderna, la que se empleará a lo largo de este trabajo. Siguiendo esta notación, para el caso finito, y aunque los a_j sean enteros, podemos tratar el corchete como una función real de su último argumento. Veamos alguna de sus propiedades, que nos serán útiles más adelante.

Lema 1. Sea $f(x) = [a_0, a_1, \dots, a_n, x]$. Se cumple que

$$(1.1a) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n], \\ (1.1b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]. \end{cases}$$

La demostración es trivial, así que no nos detendremos mucho aquí. Basta con observar que, expresando la fracción de la forma *canónica*, esto es

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}},$$

se observa fácilmente que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, y se tiene así (1.1a). Por otro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}} = 0$, obteniéndose (1.1b).

El numerador y el denominador de $[a_0, \dots, a_n]$, como fracción irreducible (tomando denominador positivo), se denotan habitualmente como p_n y q_n . Es decir,

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0], \quad \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1], \quad \frac{p_2}{q_2} = [a_0, a_1, a_2], \quad \frac{p_3}{q_3} = [a_0, a_1, a_2, a_3], \quad \dots$$

Estas fracciones p_n/q_n son las denominadas *convergentes* de la fracción continua. Es fácil observar que $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

Algo muy útil e interesante es la relación que hay entre las fracciones continuas y las matrices enteras 2×2 de determinante ± 1 (las únicas con matriz inversa entera). Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{para } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } \det(\gamma) = \pm 1.$$

La aplicación es una Transformación de Möbius, y es compatible con el producto matricial, puesto que $(\gamma_1 \gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2(x))$. Esto se deriva del propio desarrollo de ambos lados de la igualdad, de modo que no nos desviaremos en ello. Lo importante es observar que la relación con las fracciones continuas viene de que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x) = a + \frac{1}{x} \quad \text{implica} \quad [a_0, a_1, \dots, a_n, x] = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x).$$

Teorema 1. *Se cumple que*

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sean $q, r, s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, debe cumplirse

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, x] = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} (x).$$

Aplicando (1.1a), tenemos

$$\frac{q}{s} = \lim_{x \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} (x) = [a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Y, aplicando (1.1b)

$$\frac{r}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix} (x) = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Solo queda, por tanto, que las correspondientes fracciones sean irreducibles. Esto se sigue de (1.2), puesto que un factor común dividiría al determinante del primer miembro, cuyo valor absoluto es 1. Así concluye la prueba. \square

El Teorema 1 nos permite dar demostración a diversos resultados (véanse [5, Th. 1.1] y [5, Th. 1.2]):

Teorema 2. *Se cumplen las propiedades*

$$\begin{cases} 1. & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2, \\ 2. & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2, \\ 3. & q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Nota: A veces definimos $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, para que las dos primeras propiedades del teorema se cumplan para $n \geq 1$. Así, la convergente -1 sería formalmente ∞ .

Demostración. Empecemos por 1 y 2. Utilizando el Teorema 1 con $n = m - 1$, se tiene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{m-1} & p_{m-2} \\ q_{m-1} & q_{m-2} \end{pmatrix}. \text{ Luego} \\ & \begin{pmatrix} p_m & p_{m-1} \\ q_m & q_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} p_{m-1} & p_{m-2} \\ q_{m-1} & q_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m p_{m-1} + p_{m-2} & p_{m-1} \\ a_m q_{m-1} + q_{m-2} & q_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Y obtenemos lo buscado. Para la demostración de 3, basta con observar

$$(-1)^{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}.$$

Por tanto, $(-1)^n = q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$, y esto concluye el resultado. \square

Pasamos ahora a probar otro resultado muy relevante de la teoría de las fracciones continuas.

Teorema 3. *Toda fracción continua infinita converge. Es decir, para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{Z}^+$, si $n > 0$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = \alpha$.*

Demostración. Sea la sucesión de intervalos cerrados encajados $[p_{2n}/q_{2n}, p_{2n+1}/q_{2n+1}]$. Son encajados porque de la tercera igualdad del Teorema 2 se deduce que la sucesión de convergentes de índice par es creciente; y la de índice impar, decreciente. Se puede observar que

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

De $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ deducimos que $q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2}$ y por tanto $q_n \geq q_{n-1}$ para $n > 0$. Aplicando de nuevo esto último, obtenemos $q_n \geq 2q_{n-2}$ si $n > 0$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(q_{2n+1}q_{2n}) = 0$, luego la longitud de los intervalos encajados tiende a cero. Por tanto, aplicamos el Principio de los Intervalos Encajados para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es decir, toda fracción continua infinita converge. \square

Procedemos ahora a explicar un algoritmo para escribir cualquier número, racional o irracional, como fracción continua (véase [3, Cap. 10.6]).

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, empezamos en $\alpha_0 = \alpha$ y $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$, siendo $\lfloor x \rfloor$ la parte entera de x . Es decir, $\alpha = a_0 + \{\alpha\}$, $0 \leq \{\alpha\} < 1$. Consideramos la recurrencia

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}}, \quad a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor,$$

de forma que, en cada paso, obtenemos $[a_0, \dots, a_{n-1}, \alpha_n]$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, para algún n , $\alpha_n = a_n$, es decir, $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, porque el denominador va decreciendo, llegando así a una fracción continua finita. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, es evidente que $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$ y el proceso se prolonga indefinidamente (fracción continua infinita). Por tanto, a partir de este algoritmo, podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 4. *Todo $\alpha \in \mathbb{R}$ admite un desarrollo en fracción continua, que será finita si y solo si $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Una buena forma de trabajar con un algoritmo es programarlo en un software de matemáticas, como SageMath. Aunque SageMath tiene funciones nativas sobre fracciones continuas, el código que se exhibe en este trabajo es original y puede ser extendido a otros lenguajes, que no posean tales funciones. Dicho código nos permitirá escribir la fracción continua de un número racional, así como aproximar un número irracional (con control de error) mediante (parte de) su desarrollo en fracción continua. Puede encontrarse en el apéndice.

Conocido este algoritmo, es muy fácil hallar la fracción continua de un número racional. Por ejemplo, la de $7/10$ es $[0, 1, 2, 3]$, y sus convergentes, $p_0/q_0 = 0$; $p_1/q_1 = 1$; $p_2/q_2 = 2/3$; $p_3/q_3 = 7/10$. Aplicando el algoritmo a $-2/5$, vemos que su fracción continua es $-2/5 = [-1, 1, 1, 2]$, y sus convergentes, $p_0/q_0 = -1$; $p_1/q_1 = 0$; $p_2/q_2 = -1/2$; $p_3/q_3 = -2/5$.

Una aplicación muy interesante de las fracciones continuas es su capacidad para aproximar números irracionales. Por ejemplo, para π , las primeras convergentes son:

$$\frac{p_0}{q_0} = 3; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106};$$

aproximando respectivamente con errores $e_0 \approx 0,14159265$; $e_1 \approx 0,00126448$; $e_2 \approx 8,32196E-5$.

Para el número e , se tiene

$$\frac{p_0}{q_0} = 2; \quad \frac{p_1}{q_1} = 3; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{8}{3};$$

aproximando respectivamente con errores $e_0 \approx 0,71828182$; $e_1 \approx 0,28171817$; $e_2 \approx 0,05161516$. Además, se necesitan tan solo 8 iteraciones del algoritmo para llegar a un error menor que 10^{-5} .

Busquemos, ahora, dar la fracción continua de otro número irracional: La razón áurea $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

El resultado se deriva de la relación $r = 1 + \frac{1}{r}$. Comprobemos que esta identidad es cierta:

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1+r}{r} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = r.$$

Aplicando este resultado, se tiene que

$$r = 1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Luego la fracción continua que buscamos es $r = [1, 1, 1, 1, \dots]$.

Teorema 5. Sea $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Su (n -ésima) convergente es $\frac{p_n}{q_n} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$, donde $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, con $F_0 = 0, F_1 = 1$, los números de Fibonacci.

Demostración. Como $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$, observamos que $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0; p_0 = a_0 = 1, q_0 = 1; p_1 = a_0 a_1 + 1 = 2, q_1 = a_1 = 1$. Aplicándolo al Teorema 2, se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} 1. & p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, & \text{para } n \geq 2, \\ 2. & q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

De aquí concluimos que $p_n = q_{n+1}$, pues las recurrencias son las mismas, pero con las condiciones iniciales desplazadas. Análogamente, podemos concluir que $q_n = F_{n+1}$. Por tanto, efectivamente se cumple que $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n}$. \square

Vamos a utilizar lo que hemos visto hasta ahora para evaluar una serie.

Teorema 6. Los números de Fibonacci, F_k , verifican

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}.$$

Para probar el resultado, demostraremos un resultado auxiliar.

Lema 2. Se verifica

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}.$$

Demostración. Basta con observar que

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} \stackrel{\text{Teorema 2}}{=} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}.$$

Por tanto,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}},$$

y esto concluye el resultado. \square

Pasamos, pues, a la demostración del Teorema 6.

Demostración. Sea $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A partir del Lema 2, y aproximando r por sus (n -ésimas) convergentes, se tiene que

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{F_k F_{k+1}}.$$

De modo que

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{F_k F_{k+1}},$$

y obtenemos

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}},$$

como buscábamos. □

CAPÍTULO 2

Periodicidad e irracionales cuadráticos

Aunque el algoritmo, en general, no parece mostrar ningún patrón, hay algunos números, como $\sqrt{2}$ o incluso e para los cuales, experimentalmente, podemos encontrar patrones para sus *cocientes parciales* (los a_n).

De hecho, todos los irracionales cuadráticos reales siguen un determinado patrón. Esto es, los números que resuelven ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, los de la forma $A + B\sqrt{D}$ con $A, B \in \mathbb{Q}$, $D \in \mathbb{Z}^+$ donde $B \neq 0$ y D no es un cuadrado perfecto.

Escribiremos las fracciones continuas *periódicas* como $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \overline{a_m, \dots, a_{m+k-1}}]$ donde identificamos el periodo mediante una barra. Es decir, se cumple que $a_n = a_{n+k} \forall n \geq m$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ que habitualmente se escoge mínimo. Vamos a ver que cada fracción de este tipo se corresponde unívocamente con un irracional cuadrático.

Proposición 1. *Sea $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \overline{a_m, \dots, a_{m+k-1}}]$ una fracción continua periódica. Entonces, α es un irracional cuadrático.*

Demostración. Empecemos suponiendo que la fracción es *periódica pura*. Esto es,

$$\alpha = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}}] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha].$$

Tenemos, por tanto, que

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

De modo que α resuelve

$$x = \frac{x p_{n-1} + p_{n-2}}{x q_{n-1} + q_{n-2}} \iff q_{n-1} x^2 + (q_{n-2} - p_{n-1}) x - p_{n-2} = 0.$$

Luego claramente α es un irracional cuadrático. Sabemos que α no es racional porque la fracción continua es infinita.

¿Qué ocurre si la fracción continua β es periódica pero no periódica pura? Entonces, podemos escribir $\beta = [a_0, \dots, a_{n_0}, \alpha]$. De modo que

$$\beta = \frac{\alpha p_{n_0} + p_{n_0-1}}{\alpha q_{n_0} + q_{n_0-1}} = \frac{(A + B\sqrt{D}) p_{n_0} + p_{n_0-1}}{(A + B\sqrt{D}) q_{n_0} + q_{n_0-1}}$$

para ciertos $A, B \in \mathbb{Q}$, $D \in \mathbb{Z}^+$ donde $B \neq 0$ y D no es un cuadrado perfecto. Claramente $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ porque $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ es un cuerpo. De nuevo, β debe ser irracional porque la fracción continua no es finita. Concluimos que β es irracional cuadrático. \square

El recíproco es algo más difícil de probar, y se le denomina *Teorema de Lagrange*. Antes de pasar a su prueba, veremos algunos ejemplos de que, efectivamente, los irracionales cuadráticos pueden escribirse como fracciones continuas periódicas. Para ello, usaremos el algoritmo que previamente explicamos, racionalizando los coeficientes.

Por ejemplo, para $\alpha = \sqrt{2}$ el algoritmo es

$$\alpha_0 = \sqrt{2} \Rightarrow a_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow a_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \dots$$

y como $\alpha_1 = \alpha_2$, se tiene $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$. Por otra parte, vimos que la fracción continua de la razón áurea $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ es $[1, 1, 1, \dots]$. El caso $\alpha = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ se seguiría así:

$$\alpha_0 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow a_0 = 3, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{21}}{2} - 3} = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{21}}{6} - 1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} = \alpha. \quad \text{Concluimos que } \alpha = [3, 1, 3, 1, \dots].$$

De forma más general, tratemos los números de las formas $\sqrt{n^2+1}$ y $n + \sqrt{n^2+n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proposición 2. *Sea $\alpha = \sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$; entonces, $\alpha = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$. En cambio, si $\alpha = n + \sqrt{n^2+n}$, se tiene que $\alpha = [2n, 2, 2n, 2, \dots]$.*

Demostración. Sea $\alpha = \sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $\forall n \geq 1$ se tiene que $n^2 \leq \alpha^2 = n^2 + 1 < (n+1)^2$, se cumple que $n \leq \alpha < n+1$. De modo que $a_0 = [\alpha_0] = n$. Aplicando el algoritmo,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = \alpha + n \Rightarrow a_2 = \lfloor n + \sqrt{n^2+1} \rfloor = 2n,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = \sqrt{n^2+1} + n = \alpha_1.$$

Como $\alpha_2 = \alpha_1$, se concluye que $\alpha = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$.

Ahora, sea $\alpha = n + \sqrt{n^2+n}$. ¿Cuál es la parte entera de $\beta = \sqrt{n^2+n}$? Se cumple que $n^2 \leq \beta^2 = n^2 + n \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$. Luego $n \leq \lfloor \beta \rfloor < n+1$, y concluimos que $\lfloor \beta \rfloor = n$. Por tanto, $a_0 = [\alpha] = \lfloor n + \sqrt{n^2+n} \rfloor = 2n$, pues $n \in \mathbb{Z}^+$. Aplicando el algoritmo,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+n} - n} = 1 + \sqrt{1+1/n} \Rightarrow a_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+1/n} - 1} = n + \sqrt{n^2+n} = \alpha.$$

Donde hemos aplicado $2 \leq 1 + \sqrt{1+1/n} \leq 1 + \sqrt{3/2} < 3$ para afirmar $a_1 = 2$. Por tanto, concluimos que $\alpha = [2n, 2, 2n, 2, \dots]$. \square

Como vemos, en todos los casos anteriores hemos obtenido fracciones continuas periódicas. Parece, pues, que tiene sentido intentar probar el recíproco de la Proposición 1. Seguiremos la demostración recogida en [1].

Teorema de Lagrange. *Todo número irracional cuadrático tiene una fracción continua que es periódica.*

Demostración. Supongamos que α es solución de la ecuación

$$(2.1) \quad Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{Z}.$$

Sea $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ y $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$, $n = 1, 2, \dots$. Podemos escribir α como

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.1) obtenemos que α_n satisface otra ecuación de coeficientes enteros: $A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0$, cuyos coeficientes son, de hecho,

$$\begin{aligned} A_n &= Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 \\ B_n &= 2Ap_{n-1}p_{n-2} + B(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2Cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n &= Ap_{n-2}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + Cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Es claro que $C_n = A_{n-1}$. La relación $\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}$ que aplicamos en la demostración del Teorema 3 implica que $p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\epsilon}{q_{n-1}}$, donde $|\epsilon| < 1$. Sustituyendo esta relación en la expresión de A_n obtenemos que:

$$\begin{aligned} A_n &= A \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\epsilon}{q_{n-1}} \right)^2 + B \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\epsilon}{q_{n-1}} \right) q_{n-1} + C q_{n-1}^2 \\ &= (A\alpha^2 + B\alpha + C) q_{n-1}^2 + 2A\epsilon\alpha + A \frac{\epsilon^2}{q_{n-1}^2} + B\epsilon = 2A\epsilon\alpha + A \frac{\epsilon^2}{q_{n-1}^2} + B\epsilon. \end{aligned}$$

En particular, $|A_n| \leq 2|A\alpha| + |A| + |B|$.

Observamos, pues, que todos los coeficientes enteros A_n y, por tanto, los C_n , están acotados. Lo mismo ocurre con los B_n , puesto que $B_n = -A_n\alpha_n - C_n/\alpha_n$. Por tanto, A_n , B_n y C_n solo pueden tomar un número finito de valores. En consecuencia, solo hay un número finito de posibles polinomios $A_nx^2 + B_nx + C_n$ y por tanto un número finito de posibles soluciones (de posibles valores para los α_n). De modo que, necesariamente, deben existir dos iguales ($\alpha_n = \alpha_{n+k}$).

La unicidad del desarrollo en fracción continua implica la periodicidad. \square

Las fracciones continuas de irracionales cuadráticos (los denotaremos aquí como \sqrt{D}) son de enorme utilidad a la hora de resolver la *ecuación de Pell*:

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad \text{donde } D \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}.$$

Nos centraremos en las soluciones positivas $x, y \in \mathbb{Z}^+$, puesto que para el resto basta solo cambiar los signos. Las soluciones positivas (x, y) provienen siempre del numerador y el denominador de convergentes de \sqrt{D} , respectivamente. Experimentalmente, podemos observar que convergentes de \sqrt{D} dan soluciones positivas $x = p_n$, $y = q_n$ de $x^2 - Dy^2 = 1$.

Por ejemplo, sea $\alpha = \sqrt{2} = [1, \overline{2}]$. En este caso, el numerador p_n y el denominador q_n de las convergentes son solución $x = p_n, y = q_n$ de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$ cuando $n = 2ki - 1 = 2i - 1, i \in \mathbb{Z}^+$, donde $k = 1$ es la longitud del periodo, es decir, k es tal que $a_n = a_{n+k} \forall n$.

Por otro lado, consideremos $\alpha = \sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$. En este caso, sus coeficientes p_n y q_n son solución $x = p_n, y = q_n$ de la ecuación $x^2 - 7y^2 = 1$ si $n = ki - 1 = 4i - 1, i \in \mathbb{Z}^+$, donde $k = 4$ es la longitud del periodo.

Vemos computacionalmente que cuando la longitud k del periodo es par, las convergentes solución son las n -ésimas, siendo $n = ki - 1, i \in \mathbb{Z}^+$. Por el contrario, si k es impar, se tiene $n = 2ki - 1$. Podemos comprobarlo, por ejemplo, al hallar la primera solución entera positiva de $x^2 - 331y^2 = 1$. Con el siguiente código obtenemos que dicha solución $(x, y) = (p_n, q_n)$ es $(p_{33} = 2785589801443970, q_{33} = 153109862634573)$.

```

1  a=continued_fraction(sqrt(331)); D=331; i=0; p=0; q=0
2  while p^2-D*q^2!=1:
3      i=i+1; b=a.convergent(i); q=b.denominator(); p=b.numerator()
4  print(p, q, i, p^2-D*q^2==1)

```

Computacionalmente podemos ver que la longitud del periodo es $k = 34$, que es par, así que efectivamente el n buscado era $n = k - 1 = 33$.

La razón de que las soluciones vengan siempre de convergentes, viene del siguiente resultado que probaremos más adelante (ver el Teorema 16):

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional y p/q es una fracción irreducible tal que $2q^2|\alpha - p/q| < 1$, entonces p/q es necesariamente una convergente de α .

Por tanto, para obtener el resultado buscado solo hace falta demostrar lo siguiente:

Teorema 7. *Sea (x, y) una solución positiva de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$. Entonces, se verifica que $2y^2|\sqrt{D} - x/y| < 1$.*

Demostración. Estudiemos, primero, los casos $D = 2, 3$. Sea (x, y) una solución positiva. Empecemos observando que como $(x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}) = 1$, se tiene que $\sqrt{D} - x/y < 0$, para cualquier D . De modo que queremos demostrar $2y^2\sqrt{D}(\sqrt{D} - x/y) > -\sqrt{D}$:

$$2Dy^2 - 2xy\sqrt{D} = 2(x^2 - 1) - 2xy\sqrt{D} = 2(x^2 - 1) - 2x\sqrt{x^2 - 1} > -\sqrt{D}.$$

Para demostrar la última desigualdad, basta comprobar que $x^2 - 1 - x\sqrt{x^2 - 1} > -1/2 \iff x^2 - 1/2 > x\sqrt{x^2 - 1}$, lo cual es claro elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad.

Pasemos ahora a los casos $D > 4$. Es decir, $\sqrt{D} > 2$. Se cumple que

$$1 = y^2|x/y - \sqrt{D}| |x/y + \sqrt{D}| > 2y^2|x/y - \sqrt{D}|,$$

porque $x, y > 0$ y $\sqrt{D} > 2$. Concluimos que $2y^2|\sqrt{D} - x/y| < 1$. \square

Ahora, estamos en condiciones de caracterizar todas las soluciones en términos de una sola convergente (véase [2, Th. 4.4]).

Teorema 8. Sea p/q la primera convergente de \sqrt{D} tal que $p^2 - Dq^2 = 1$. Entonces, todas las soluciones positivas (x, y) de la ecuación de Pell tienen la forma

$$x + y\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^n, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Nótese que esto es equivalente a decir

$$(2.2) \quad x = \frac{(p + q\sqrt{D})^n + (p - q\sqrt{D})^n}{2}, \quad y = \frac{(p + q\sqrt{D})^n - (p - q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.$$

Demostración. Sea (x_1, y_1) una solución de $x^2 - Dy^2 = 1$, con $x_1 + y_1\sqrt{D}$ lo más pequeño posible. Supongamos que existe una solución (\tilde{x}, \tilde{y}) tal que $\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D} \neq (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, vamos a demostrar que existe otra solución $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ tal que $1 < \tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$.

Sabemos que $x_1 + y_1\sqrt{D} < \tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D}$ por hipótesis, y como se cumple que $\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D} \neq (\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D})^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2.3) \quad (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_1} < \tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_1+1}.$$

Ahora, definimos $\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D}$ como

$$(2.4) \quad \tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D} = (\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})^{-n_1}.$$

Observemos primero que $\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D}$ es solución. Basta con utilizar la norma N sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (obviamente se debe cumplir $x^2 - Dy^2 = N(x + y\sqrt{D}) = 1$). Como $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) \forall \alpha, \beta$, y se tiene $N(\tilde{x} + \tilde{y}\sqrt{D}) = 1$ y $N(x_1 + y_1\sqrt{D})^{-n_1} = 1$, concluimos que $\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D}$ es solución.

Finalmente, usando (2.3) y (2.4), vemos que efectivamente $1 < \tilde{x}_1 + \tilde{y}_1\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$. Esto contradice la minimalidad de (x_1, y_1) . \square

El caso $x^2 - Dy^2 = -1$ es muy parecido a la ecuación de Pell, solo que no siempre tiene solución. Suponiendo que la solución existe, las fórmulas anteriores se mantienen, y se demuestran de la misma forma, restringiendo n a los impares. Por ejemplo, las soluciones positivas de $x^2 - 2y^2 = -1$ son de la forma $x + y\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$, con n impar.

Una vez más, usaremos lo explicado para evaluar una serie infinita. Consideremos la serie

$$S = \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} d(k)(\sqrt{2} - 1)^k,$$

siendo $d(k)$ el número de divisores (positivos) de k . Usando fracciones continuas, podemos aproximar S muy fácilmente, mientras que de otra forma necesitaríamos la factorización de los sucesivos k . La fórmula que nos permite realizar esto es la siguiente.

Teorema 9. Se cumple que

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n}, \quad \text{con } \frac{p_n}{q_n} \text{ las convergentes de } \sqrt{2}.$$

Con esta expresión, podemos usar **SageMath** para aproximar S con 8 cifras decimales, con muy poco esfuerzo computacional. El código empleado puede ser:

```

1  i=0; p=100; a=continued_fraction(sqrt(2)); suma=0
2  while 1/p>10^-10:
3      b=a.convergent(i); p=b.numerator(); suma+=1/p; i+=2
4  suma=1/2*suma; suma.n()

```

El resultado obtenido es $S \approx 0,586149019514507$. Efectivamente, estamos aproximando con más de 8 cifras decimales: Como $p_n > 2p_{n-1}$, y $p_n \leq 10^{-10} \forall n \geq n_0$ (los p_n que no hemos sumado), el error en la aproximación es

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=n_0 \\ 2|n}}^{\infty} \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=0 \\ 2|j}}^{\infty} \frac{1}{2^j} 10^{-10} < 10^{-10}.$$

Procedemos, pues, a probar el Teorema 9. Utilizaremos dos resultados:

Lema 3. *Se verifica que, para $n \geq 0$,*

$$2p_n = (1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}.$$

En particular, si n es par,

$$2p_n = (1 + \sqrt{2})^{n+1} - (\sqrt{2} - 1)^{n+1}.$$

Demostración. Comenzamos por comprobar que

$$\frac{1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{2} = 1 = p_0, \quad \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}{2} = 3 = p_1.$$

Suponiendo el resultado cierto hasta $n - 1$, podemos ver que

$$\begin{aligned} p_n &= 2p_{n-1} + p_{n-2} = (1 + \sqrt{2})^{n-1} + (1 - \sqrt{2})^{n-1} + 2^{-1} \left((1 + \sqrt{2})^{n-2} + (1 - \sqrt{2})^{n-2} \right) \\ &= (1 + \sqrt{2})^{n-2} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} + (1 - \sqrt{2})^{n-2} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^{n-2}(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^{n-2}(1 - \sqrt{2})^2}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n}{2}. \end{aligned}$$

De modo que, por inducción, queda demostrado el resultado. \square

Lema 4. *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$\sum_{2|n} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n - (\sqrt{2} - 1)^n} = \sum_{2|n} \frac{(\sqrt{2} - 1)^n}{1 - (\sqrt{2} - 1)^{2n}} = \sum_{2|n} \sum_{2|m} (\sqrt{2} - 1)^{nm}.$$

Demostración. La primera igualdad se demuestra de manera sencilla, basta multiplicar por $(\sqrt{2} - 1)^n$ en numerador y denominador.

Para la segunda igualdad basta observar que, dado $r \in (0, 1)$, se cumple que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ 2 \nmid j}}^{\infty} r^j = \frac{r}{1-r^2}.$$

De modo que, tomando $r = (\sqrt{2} - 1)^n$, se tiene que

$$\sum_{2 \nmid n} \frac{(\sqrt{2} - 1)^n}{1 - (\sqrt{2} - 1)^{2n}} = \sum_{2 \nmid n} \sum_{2 \nmid m} \left((\sqrt{2} - 1)^n \right)^m = \sum_{2 \nmid n} \sum_{2 \nmid m} (\sqrt{2} - 1)^{nm}$$

y esto concluye el resultado. □

Probados estos resultados, podemos pasar a demostrar el Teorema 9.

Teorema 10. *Se cumple que*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} d(k)(\sqrt{2} - 1)^k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Demostración. Aplicando los lemas 3 y 4, se observa que

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^n - (\sqrt{2} - 1)^n} = \sum_{2 \nmid n} \sum_{2 \nmid m} (\sqrt{2} - 1)^{nm} = \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} d(k)(\sqrt{2} - 1)^k.$$

Para la última igualdad solo hay que darse cuenta de que nm son las distintas formas de descomponer cualquier número entero k (es decir, $k = mn$) de la serie, con multiplicidad $d(k)$, que corresponde a los distintos valores que se pueden asignar a n (o a m). □

Finalmente, utilizaremos el Teorema 9 para, aunque resulte asombroso, poder evaluar la siguiente serie:

Teorema 11. *Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 49, 1681, 57121, \dots\}$ la sucesión de cuadrados que son de la forma $2m^2 - 1$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Se cumple que*

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n} \quad \text{con } \frac{p_n}{q_n} \text{ las convergentes de } \sqrt{2}.$$

Demostración. Los cuadrados $2m^2 - 1$ son los números x^2 tal que $x^2 = 2y^2 - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}^+$, es decir, tal que $x^2 - 2y^2 = -1$. De modo que las soluciones “ x ” son los p_n , es decir, el numerador de las convergentes de $\sqrt{2}$.

Por tanto, basta con tomar $c_n = p_{2n}^2$ (elegimos las convergentes de índice par), y equivalentemente $p_{2n} = \sqrt{c_n}$, y tenemos la igualdad

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

como buscábamos. □

Propiedades de aproximación óptima

En lo siguiente, buscaremos demostrar que no solo las fracciones continuas aproximan bien a los irracionales, sino que en cierto sentido son las “mejores”. Suponemos, pues que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Con este propósito, comenzamos introduciendo una igualdad básica:

Teorema 12. *Si $n > 0$, se cumple que*

$$(3.1) \quad \alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Demostración. Basta observar que

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}},$$

de modo que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Y esto concluye la prueba. □

Corolario 1. *Para $n \geq 0$, se verifican los siguientes resultados:*

- a) $|\alpha - p_n/q_n| < a_{n+1}^{-1}q_n^{-2}$.
- b) $(q_n + q_{n+1})^{-1} < |q_n\alpha - p_n| < q_n^{-1}$.
- c) $2q_nq_{n+1}|\alpha - p_n/q_n| \in (1, 2)$.

Demostración. a) El resultado se deduce de la siguiente manera:

$$|\alpha - p_n/q_n| = \frac{1}{q_n^2\alpha_{n+1} + q_{n-1}q_n} \leq \frac{1}{q_n^2\alpha_{n+1}} < a_{n+1}^{-1}q_n^{-2}.$$

Porque $a_{n+1} < \alpha_{n+1}$ al ser α irracional.

b) Basta ver que, por un lado,

$$|q_n\alpha - p_n| = \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} > \frac{1}{(a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n+1} + q_n}.$$

Por otro lado, demostramos la segunda igualdad, con el siguiente razonamiento

$$|q_n\alpha - p_n| = 1/(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}) < q_n^{-1}, \text{ pues } \alpha_{n+1} > 1.$$

Finalmente, para demostrar c), empezamos observando que

$$2q_nq_{n+1}|\alpha - p_n/q_n| = 2q_{n+1}/(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}).$$

Utilizamos ahora este resultado para concluir

$$1 < \frac{2q_{n+1}}{q_{n+1} + q_n} = \frac{2q_{n+1}}{(a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1}} < \frac{2q_{n+1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} < \frac{2q_{n+1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = 2.$$

Y llegamos así al resultado deseado. \square

A partir de b), basta desarrollar la recurrencia $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} > a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) > a_n a_{n-1}(a_{n-2}q_{n-3} + q_{n-4}) > \dots > \prod_{k=1}^{n+1} a_k$ para concluir que $|q_n\alpha - p_n| < \prod_{k=1}^{n+1} a_k^{-1}$. Esto muestra que la bondad en la aproximación depende del producto de los a_n .

Lema 1. Para $n > 1$, se cumple que $q_n > 2^{(n-1)/2}$.

Demostración. Empezamos observando que $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \geq q_{n+1} + q_n > 2q_n$. De modo que, para n par, $q_n > 2q_{n-2} > \dots > 2^{n/2}q_0 = 2^{n/2}$. El mismo razonamiento para n impar nos dice que $q_n > 2^{(n-1)/2}q_1 \geq 2^{(n-1)/2}$. Concluimos que $q_n > 2^{(n-1)/2}$, para $n > 1$. \square

Hasta ahora, hemos visto que las convergentes dan buenas aproximaciones. Nuestra intención ahora es ver que, en cierto modo, lo hacen de forma óptima. Esto es, queremos demostrar:

Teorema 13. Se verifica que $|q_n\alpha - p_n| < |q\alpha - p|$ para cualquier $p \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq q < q_n$, $n > 0$.

Lo probaremos más adelante. Por ahora, veamos que el resultado también se cumple si $q = q_n$, $p \neq p_n$.

Lema 2. Se tiene que $|q_n\alpha - p_n| < |q_n\alpha - p|$ para cualquier $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq p_n$.

Demostración. Sabemos por el Teorema 12 que $\alpha - p_n/q_n = (-1)^n/(q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}))$. Por otro lado, notemos que

$$\alpha - \frac{p}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_nq_n + q_n p_{n-1} - p\alpha_{n+1}q_n - pq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Reescribimos el numerador como $m = \alpha_{n+1}q_n(p_n - p) + p(\alpha_{n+1}q_n - q_{n-1})$, y lo comparamos con $(-1)^n$. Sabemos que $p \neq p_n$. Por otro lado, $m \neq 0$, pues de otra manera, $\alpha = p/q_n$, y sabemos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dicho esto, concluimos que $m \notin (-1, 1)$, pues todos los factores del numerador son enteros. Solo nos queda comprobar que $m \neq (-1)^{n+1}$. Si no fuera así, se cumpliría que

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = -\alpha + \frac{p}{q} \Rightarrow \alpha = \frac{p + p_n}{2q_n}, \text{ pero } \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

Llegamos a contradicción, quedando probado así el resultado. \square

Esto nos permite reescribir el resultado de aproximación óptima de la siguiente manera:

Teorema 14. *Se cumple que $|\alpha - p_n/q_n| \leq |\alpha - p/q|$ para cualquier $p \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq q \leq q_n$, $n > 0$, con igualdad si y solo si $p_n/q_n = p/q$.*

Demostración. El caso $q = q_n$, $p \neq p_n$ lo hemos demostrado en el Lema 2. Por el Teorema 13, tenemos que $|q_n\alpha - p_n| < |q\alpha - p|$. Como $1/q_n < 1/q$, dividiendo entre q_n a la izquierda y entre q a la derecha, concluimos que $|\alpha - p_n/q_n| < |\alpha - p/q|$. \square

Para comprobar la potencia del resultado, vamos a observarlo de forma empírica. Se trata de calcular p_8/q_8 para $\alpha = \pi/4$ y compararlo con

$$\min_{1 \leq q < q_8} \min_{p \in \mathbb{Z}} |\alpha - p/q|.$$

Empleando el código que hicimos previamente, vemos que $p_8/q_8 = 25732/32763$. El error en la aproximación es $e_1 \approx 8,36022251426982e - 10$.

Ahora, para hallar el valor del mínimo para $1 \leq q < q_8$, empleamos el siguiente código:

```

1  alpha=pi/4; err=alpha
2  for q in [1..32762]:
3      a=ceil(q*(alpha-err)); b=floor(q*(err+alpha))
4      for p in [a..b]:
5          error=abs(alpha-p/q)
6          if error<err:
7              err=error; print(p,q,error.n())

```

Obteniendo el valor $p/q = 25377/32311$. El error aquí es $e_2 = -1,78066139611133e - 9$. Efectivamente, vemos que $e_1 < e_2$. Otra cosa que podemos observar es que las fracciones p/q que dan los mínimos sucesivos (llamadas *semiconvergentes*) tienen la forma $(p_{n-1} + kp_n)/(q_{n-1} + kq_n)$.

Procedemos ahora a probar el resultado de aproximación óptima propiamente dicho. Supondremos en adelante que $q > 1$, pues el caso $q = 1$ es sencillo.

Lema 3. *Se cumple que $|q_n\alpha - p_n|$ decrece estrictamente cuando n aumenta.*

Demostración. El resultado es equivalente a comprobar que $\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}$ crece.

$$\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n > \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} \Leftrightarrow \alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n(1 - \alpha_{n+1}) - q_{n-1} > 0,$$

y, efectivamente, se verifica que

$$\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n(1 - \alpha_{n+1}) - q_{n-1} > a_{n+2}q_{n+1} - a_{n+1}q_n - q_{n-1} \geq q_{n+1}(a_{n+2} - 1) \geq 0.$$

Luego queda demostrado el resultado. \square

Esto permite suponer $q_{n-1} < q < q_n$, pues, en tal caso, si para todo $n > 0$, $|q_n\alpha - p_n| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$, el resultado será evidentemente cierto para todos los $q < q_{n-1}$, al ser $|q_n\alpha - p_n|$ estrictamente decreciente.

Proposición 3. *Las siguientes dos identidades se cumplen:*

$$q = |(pq_{n-1} - qp_{n-1})q_n - (pq_n - qp_n)q_{n-1}|,$$

$$|q\alpha - p| = |(pq_{n-1} - qp_{n-1})(p_n - q_n\alpha) - (pq_n - qp_n)(p_{n-1} - q_{n-1}\alpha)|.$$

Demostración. Comprobamos que

$$|(pq_{n-1} - qp_{n-1})q_n - (pq_n - qp_n)q_{n-1}| = |q(-q_n p_{n-1} + q_{n-1} p_n)| = |q(-1)^{n+1}| = q$$

Aplicando esto, y de manera equivalente, obtenemos

$$\begin{aligned} & |(pq_{n-1} - qp_{n-1})(p_n - q_n \alpha) - (pq_n - qp_n)(p_{n-1} - q_{n-1} \alpha)| \\ &= |(-1)^n q \alpha p (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)| = |(-1)^n q \alpha + (-1)^{n+1} p| = |q \alpha - p|. \end{aligned}$$

Y esto concluye la prueba. \square

La primera identidad prueba que $pq_{n-1} - qp_{n-1}$ y $pq_n - qp_n$ tienen el mismo signo. Si no fuera así, se tendría que $q = |(pq_{n-1} - qp_{n-1})q_n - (pq_n - qp_n)q_{n-1}| \geq q_n > q$ (contradicción).

Podemos aplicar esta observación a la Proposición 3. Como por el Teorema 12 sabemos que $(p_{n-1} - q_{n-1} \alpha)$ y $(p_n - q_n \alpha)$ tienen distinto signo, de

$$|q \alpha - p| = |(pq_{n-1} - qp_{n-1})(p_n - q_n \alpha) - (pq_n - qp_n)(p_{n-1} - q_{n-1} \alpha)|,$$

aplicando la observación se observa que los dos sumandos tienen el mismo signo, lo que permite escribir $|q \alpha - p| = a|p_n - q_n \alpha| + b|p_{n-1} - q_{n-1} \alpha|$, con $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto, concluimos que

$$|q \alpha - p| > \max\{|p_{n-1} - q_{n-1} \alpha|, |p_n - q_n \alpha|\} \text{ para } q_{n-1} < q < q_n, p \in \mathbb{Z}, n > 0.$$

Esto nos permite dar una forma fuerte del resultado de mejor aproximación, que será útil más adelante. Enunciamos, pues, la siguiente desigualdad:

Teorema 15. *Se verifica que $|q \alpha - p| > |p_{n-1} - q_{n-1} \alpha|$ para $q_{n-1} < q < q_n$, $p \in \mathbb{Z}$, $n > 0$.*

Del resultado anterior se deduce lo siguiente (véase [4, Lemma 21.11]):

Teorema 16. *Si p/q es una fracción irreducible tal que $2q^2|\alpha - p/q| < 1$, necesariamente p/q es una convergente de α .*

Demostración. Si q no fuese el denominador de una convergente de α , existiría un $n > 0$ con $q_{n-1} < q < q_n$, de modo que

$$1 \leq |p_{n-1}q - q_{n-1}p| \leq q|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| + q_{n-1}|q\alpha - p| < (q + q_{n-1})|q\alpha - p| < 1.$$

La primera desigualdad se debe a que $p_{n-1}q - q_{n-1}p \neq 0$, como dijimos antes. Para la segunda, comprobamos que $|p_{n-1}q - q_{n-1}p| = |qq_{n-1}\alpha - qp_{n-1} - q_{n-1}q\alpha + q_{n-1}p|$, y llegamos al resultado directamente de la desigualdad triangular. Para la tercera desigualdad, aplicamos el Teorema 15. Finalmente, sabemos que es menor que 1 porque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, y todos los factores son enteros.

Como q es el denominador de una convergente, se tiene que $q = q_n$ para algún $n > 0$. Asumiendo cierta la hipótesis del teorema, se tiene que $|q_n \alpha - p| < 1/(2q_n)$. Por otro lado, por el Corolario 1, apartado c), sabemos que $|q_n \alpha - p_n| < 1/2$. De modo que de la desigualdad triangular obtenemos que $|p - p_n| \leq |q_n \alpha - p| + |q_n \alpha - p_n| < 1/(2q_n) + 1/2 \leq 1$. Concluimos, por tanto, que $p = p_n$. \square

Podemos utilizar lo demostrado hasta este punto para evaluar una serie.

Teorema 17. *Se verifica que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \max_{1 \leq k \leq r^{2n}} \left\{ \frac{1}{\text{Frac}(kr)} \right\} = 2 + \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

donde r es la razón áurea y Frac indica la parte fraccionaria.

Demostración. Comenzamos calculando el valor del máximo de la expresión, que equivale a hallar $\min_{1 \leq q \leq r^{2n}} \{\text{Frac}(kr)\}$. Con este propósito, buscamos en primera instancia demostrar que $\max_{1 \leq k \leq F_{2n+1}} \{1/\text{Frac}(kr)\} = \max_{1 \leq k \leq r^{2n}} \{1/\text{Frac}(kr)\}$. Notemos antes el siguiente resultado:

Lema 4. *Para $n \geq 1$, se cumple $F_{2n+1} < r^{2n} < F_{2n+2}$.*

Demostración. Aplicamos la fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{r^n - (-r)^{-n}}{\sqrt{5}}, \text{ luego } F_{2n+1} = \frac{r^{2n+1} + r^{-2n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Así que queremos probar

$$(r^{2n+1} + r^{-2n-1})/\sqrt{5} < r^{2n} < (r^{2n+2} + r^{-2n-2})/\sqrt{5} \Leftrightarrow r + r^{-4n-1} < \sqrt{5} < r^2 - r^{-4n-2}.$$

Es claro que el término de la izquierda decrece cuando n aumenta, mientras que el de la derecha crece. De modo que basta observar que para $n = 1$,

$$r + r^{-5} = 1,7082\dots; r^2 = 2,618\dots; r^2 - r^{-4n-2} = 2,6737\dots$$

Luego vemos que $r + r^{-5} < r^2 < r^2 - r^{-4n-2}$, lo que nos permite concluir el resultado. \square

Visto esto, ahora observamos que minimizar $\text{Frac}(kr)$ equivale a minimizar $rk - l$, para $1 \leq k \leq r^{2n}$ y cualquier $l \in \mathbb{N}$. Sabemos, por los resultados obtenidos anteriormente, las convergentes de un número α minimizan $|q\alpha - p|$, para $1 \leq q \leq q_m$, $p \in \mathbb{Z}$. Por tanto, para minimizar $rk - l$, debemos tomar $k = q_m$, $l = p_m$, con p_m y q_m unas convergentes determinadas de r . ¿Cuáles? Necesitamos $p_m/q_m < r$; en cierto modo, que la fracción continua aproxime por abajo; de lo contrario, la fracción continua maximiza la parte fraccionaria.

Por el Teorema 12, sabemos que $r > p_m/q_m$ si m es par. De modo que, teniendo en cuenta el desarrollo que hicimos de la razón áurea, los valores buscados son $k = q_{2m} = F_{2m+1}$, $l = p_{2m} = F_{2m+2}$. Por tanto, aplicando de nuevo el Teorema 12, con $\alpha_{2m} = r \forall m$, tenemos:

$$\max_{1 \leq k \leq F_{2m+1}} \left\{ \frac{1}{\text{Frac}(kr)} \right\} = \frac{1}{rF_{2m+1} - F_{2m+2}} = rF_{2m+1} + F_{2m}.$$

En base al lema, lo que ahora queremos ver es si hay algún K tal que $F_{2n+1} < K < F_{2n+2}$ que verifique $\max_{1 \leq k \leq F_{2n+1}} \{1/\text{Frac}(kr)\} < \max_{1 \leq k \leq K} \{1/\text{Frac}(kr)\}$. Entonces, existirían p y q con $p \in \mathbb{Z}$ y $F_{2n+1} = q_{2n} < q < q_{2n+1} = F_{2n+2}$ tales que $|qr - p| < |q_{2n+1}r - p_{2n+1}|$, lo cual también vimos anteriormente que no podía suceder.

De modo que se cumple $\max_{1 \leq k \leq r^{2n}} \{1/\text{Frac}(kr)\} = \max_{1 \leq k \leq F_{2n+1}} \{1/\text{Frac}(kr)\} = rF_{2n+1} + F_{2n}$. En consecuencia, podemos reescribir la serie inicial como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} (rF_{2n+1} + F_{2n}).$$

Si denotamos por $S = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} F_{2n}$, resulta que $S - S/4 = 1/4 \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} F_{2n+1} = M$. Aplicando el mismo procedimiento, observamos que $\frac{3}{4}M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}S$. De modo que

$$\begin{cases} \frac{3}{4}S = M \\ \frac{3}{4}M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}S \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a $S = 4/5$, $M = 3/5$. Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} (rF_{2n+1} + F_{2n}) = S + 4rM = 2 + \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Queda, pues, probado el teorema. □

CAPÍTULO 4

La evaluación de la serie cotangente

A continuación, estudiaremos la siguiente familia de series, que llamaremos genéricamente *serie cotangente*.

$$F_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{D})}{n^s},$$

con $s \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathbb{Z}^+$ que no sea cuadrado perfecto. Por otro lado, en adelante hablaremos de “constantes” C . En realidad, serán constantes una vez fijado D , esto es, $C = C(D)$.

Parte del desarrollo que haremos en este capítulo está basado en [6]. Antes de empezar, exhibiremos una desigualdad trigonométrica.

Lema 5. *Se cumple que $|\cot(\pi x)| \leq \frac{1}{2}\langle x \rangle^{-1}$ para todo $x \notin \mathbb{Z}$ donde $\langle x \rangle$ representa la distancia al entero más próximo a x .*

Demostración. Como para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\cot(\pi(x+n)) = \cot(\pi x)$, y $\langle x+n \rangle = \langle x \rangle$, y además $\langle x \rangle$ y $|\cot(x)|$ son pares, basta demostrar el resultado para $x \in (0, 1/2]$. Que en $x = 1/2$ se cumple es trivial porque $\cot(\pi/2) = 0$. Para los demás valores, utilizamos el desarrollo de Taylor

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad \text{para } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Esto nos permite deducir

$$\cot(\pi x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} = \frac{1}{\pi x + \frac{\pi x^3}{3} + \frac{2\pi x^5}{15} + \dots} \quad \text{para } x \in (-1/2, 1/2).$$

Luego $|\cot(\pi x)| \leq \frac{1}{\pi x}$ si $x > 0$. Ahora, observemos que $\langle x \rangle = x$ para $x \in (0, 1/2)$. Como claramente $\frac{1}{\pi x} \leq \frac{1}{2x}$ si $x > 0$, vemos que $|\cot(\pi x)| \leq \frac{1}{2}\langle x \rangle^{-1}$, como queríamos demostrar. \square

Una vez demostrado este resultado auxiliar, vamos a estudiar la convergencia de $F_{s,D}$.

Teorema 18. *$F_{s,D}$ no converge para ningún $s \leq 1$.*

Demostración. Basta demostrar que $|\cot(\pi n\sqrt{D})/n^s| \not\rightarrow 0$. Es claro que para estos valores de s , se verifica que $|\cot(\pi n\sqrt{D})/n^s| \geq |\cot(\pi n\sqrt{D})/n|$ ($n \geq 1$), luego basta considerar $s = 1$. Sabemos que la función $\cot(\pi x)$ se va a infinito cuando $x \in \mathbb{Z}$. En nuestro caso, como $n\sqrt{D}$

no es entero para ningún n , la función alcanzará sus valores más altos cuando $\text{Frac}(n\sqrt{D})$ sea lo más pequeño posible. Esto se debe a la monotonía de la cotangente en cada intervalo limitado por dos asíntotas verticales, que en nuestro caso coinciden con los valores enteros de x . Razonando como hicimos anteriormente, consideramos para ello las convergentes de \sqrt{D} . De modo que consideramos $n = q_j$ con q_j el denominador de alguna convergente de \sqrt{D} .

$$|\cot(\pi n\sqrt{D})| = |\cot(p_j\pi + (\pi\sqrt{D}q_j - \pi p_j))| = |\cot(\pi\sqrt{D}q_j - \pi p_j)|.$$

Como sabemos que $|q_j\sqrt{D} - p_j| < 1/q_j$, y teniendo en cuenta que en cada intervalo $(k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, la función $\cot(\pi x)$ es decreciente, deducimos que si $q_j > 2$:

$$|\cot(\pi\sqrt{D}q_j - \pi p_j)| \geq \cot(|\pi\sqrt{D}q_j - \pi p_j|) > \cot(\pi/q_j).$$

Como $\cot(\pi/q_j) \neq 0$ para $q_j > 2$, solo queda estudiar

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\cot(\pi/q_j)}{q_j} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tan(\pi x)} = \frac{1}{\pi}.$$

Donde para la primera igualdad hemos hecho el cambio $x = q_j^{-1}$ y, para la segunda, hemos aplicado L'Hôpital. Esto concluye el resultado. \square

Vemos que la condición $s > 1$ es necesaria para que la serie converja, pero, además, es suficiente. Por el momento, nos conformaremos con un resultado parcial y más adelante daremos una prueba completa.

Proposición 4. *Dado D como antes, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $|\cot(\pi n\sqrt{D})| < Cn$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Apelando al lema 5, observamos que $\cot(\pi n\sqrt{D}) < \frac{1}{2}(n\sqrt{D})^{-1}$. Luego el problema equivale a hallar el mínimo de $|n\sqrt{D} - p|$, para $p \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $q_{j-1} < n < q_j$, entonces $n|n\sqrt{D} - p| > q_{j-1}|q\sqrt{D} - p| > q_{j-1}|q_{j-1}\sqrt{D} - p_{j-1}|$ para cualquier $p \in \mathbb{Z}$, donde para la última igualdad hemos recurrido al resultado de mejor aproximación.

Por tanto, $|n\sqrt{D} - p|^{-1} < q_{j-1}^{-1}n|q_{j-1}\sqrt{D} - p_{j-1}|^{-1}$. Por el Teorema 12, se tiene $q_j^{-1}|q_j\sqrt{D} - p_j|^{-1} = \alpha_{j+1} + q_{j-1}/q_j < C$, para algún $C > 0$, pues los α_j están acotados y $q_{j-1} < q_j$. Queda demostrado, por tanto, que $\cot(\pi n\sqrt{D}) < Cn$. \square

Esta proposición nos permite concluir el resultado que buscábamos.

Corolario 2.

$$F_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{D})}{n^s} \quad \text{converge para cualquier } s > 2.$$

Demostración. Por la Proposición 4, existe $C > 0$ constante tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\cot(\pi n\sqrt{D})|/n^s < \sum_{n=1}^{\infty} Cn/n^s = \sum_{n=1}^{\infty} C/n^{s-1}$, que converge para $s > 2$. Si $F_{s,D}$ converge absolutamente, en particular es convergente. \square

Ahora pondremos el foco en $s \geq 3$ entero impar. La convergencia viene garantizada por el corolario anterior, de modo que pasamos a evaluar la serie.

De ahora en adelante, consideramos la función

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n z)}{n^{2m+1}} \quad \text{con } \Im(z) > 0 \quad \text{y } m \in \mathbb{Z}^+.$$

Teorema 19. *Sea F como antes, se verifica que*

$$F(z) = z^{2m} F(-1/z) + G(z) \quad \text{para } \Im(z) > 0 \quad (\text{ecuación funcional})$$

donde

$$G(z) = (-1)^m (2\pi)^{2m+1} z^{-1} \sum_{n=0}^{m+1} f_n f_{m+1-n} z^{2n}$$

con $f_n = B_{2n}/(2n)!$ y B_k los números de Bernoulli.

Antes de proceder a la demostración, notemos que $(-1)^n f_n$ son los coeficientes de Taylor de la función $t/2 \cot(t/2)$. Es decir, en un entorno del origen,

$$(4.1) \quad \frac{t}{2} \cot\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n t^{2n}.$$

Tomaremos este desarrollo como definición de los números de Bernoulli, a pesar de que haya otras definiciones más básicas.

Demostración. Para z en la mitad superior del plano complejo, consideramos la función meromorfa

$$f(w) = -\pi z^{-m} w^{-1-2m} \cot(\pi w) \cot(\pi z w).$$

Los polos de la función son $w = n$ y $w = n/z$, para $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \neq 0$, los polos son simples, pues

$$\lim_{w \rightarrow n} (w - n) \cot(\pi w) = \lim_{v \rightarrow 0} v \frac{\cos(\pi v + \pi n)}{\sin(\pi v + \pi n)} = \lim_{v \rightarrow 0} \cos(\pi v) \frac{v}{\sin(\pi v)} = \frac{1}{\pi}.$$

No hemos tenido en cuenta toda la función, solo la parte que nos da el polo, pues es lo que nos es relevante a estos aspectos. El cambio de variable empleado ha sido $v = w - n$. Aplicando el mismo razonamiento a $w = n/z$ sobre $\cot(\pi z w)$, tomando esta vez $v = w - n/z$, vemos que dichos polos también son simples. Calculemos ahora los correspondientes residuos.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, n) &= \lim_{w \rightarrow n} (w - n) \frac{-\pi}{z^m w^{1+2m}} \cot(\pi w) \cot(\pi z w) = \lim_{v \rightarrow 0} -\frac{\cot(zv + \pi zn)}{z^m n^{1+2m}} = -\frac{\cot(\pi zn)}{z^m n^{1+2m}} \\ \text{Res}(f, n/z) &= \lim_{w \rightarrow n/z} (w - n/z) \frac{-\pi z^{1+2m}}{z^m n^{1+2m}} \cot(\pi w) \cot(\pi z w) \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-z^m}{n^{1+2m}} \pi v z \cot(\pi z v + \pi n) \cot\left(\frac{\pi n}{z}\right) = \frac{z^m \cot(-\pi n/z)}{n^{1+2m}}. \end{aligned}$$

Con los mismos cambios de variable que hicimos para el estudio del orden de los polos. Como ambas fórmulas son invariantes por $n \rightarrow -n$, vemos que

$$\sum_{n \neq 0} \operatorname{Res}(f, n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}(f, n) = -2z^{-m}F(z); \quad \sum_{n \neq 0} \operatorname{Res}(f, n/z) = 2z^m F(-1/z).$$

De modo que la suma de los residuos es $2z^m F(-1/z) - 2z^{-m}F(z) + \operatorname{Res}(f, 0)$.

Consideremos, ahora, los paralelogramos centrados Γ_N de la forma $t \pm i(N + 1/2)\Im(1/z)$ y $(t \pm i(N + 1/2)\Im(z))/z$ y con orientación positiva, para $N \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$. Nótese que estos paralelogramos evitan los polos en su frontera, y sus lados son paralelos a 1 y $1/z$. Por el Teorema de los Residuos,

$$2z^m F(-1/z) - 2z^{-m}F(z) + \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} f(w)dw = 0.$$

La integral tiende a 0 cuando $N \rightarrow \infty$ porque el integrando es $O(n^{-1-2m})$, pues las cotangentes están acotadas a lo largo de los paralelogramos, y $m \geq 1$. Luego solo queda probar que $\operatorname{Res}(f, 0) = 2z^{-m}G(z)$. Usando (4.1) tenemos que en un entorno del origen,

$$f(w) = \frac{-\pi}{z^m w^{2m+1}} \cdot \frac{1}{\pi w} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k(2\pi w)^{2k} \cdot \frac{1}{\pi z w} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l f_l(2\pi z w)^{2l}.$$

El coeficiente de w^{-1} del desarrollo en serie de Laurent que acabamos de mostrar, que coincide con $k + l = m + 1$, nos da el resultado buscado:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = (-1)^m (2\pi)^{2m+1} z^{-1} \sum_{n=0}^{m+1} f_n f_{m+1-n} z^{2n} = G(z).$$

Luego, efectivamente, $F(z) = z^{2m} F(-1/z) + G(z)$, como queríamos demostrar. \square

La ecuación funcional nos permite demostrar un resultado que, eventualmente, nos será de tremenda utilidad para la evaluación de múltiples series. Antes de pasar con él, introducimos los siguientes productos parciales de los coeficientes α_j relativos a la fracción continua de un número x , que utilizaremos en la demostración.

$$A_0 = 1 \quad \text{y} \quad A_j = \prod_{k=1}^j \alpha_k.$$

Por brevedad, no incidiremos en los temas de convergencia, que se pueden encontrar en [8, Th. 1.1], [7, Cor. 3.3] [7, Prop. 4.3]. La convergencia no supone ningún problema en nuestro caso de irracionales cuadráticos ni para la aplicación de la ecuación funcional.

Teorema 20. *Si los coeficientes parciales de la fracción continua de x satisfacen $a_j = a_{j+n}$ para un determinado $n \in \mathbb{Z}^+$ y todo $j \geq 0$, entonces*

$$F(x) = \frac{1}{1 - B_n} \sum_{j=0}^{n-1} B_j G(\alpha_{j+1}^{-1}) \quad \text{con} \quad B_j = \frac{(-1)^j}{A_j^{2m}}.$$

Demostración. Observamos primero que $\alpha_{j-1} - a_{j-1} = \alpha_j^{-1}$. Como $a_j \in \mathbb{Z}$, se tiene que $F(\alpha_{j-1}) = F(\alpha_j^{-1} + a_{j-1}) = F(\alpha_j^{-1})$. Usando inducción, nuestra primera intención será probar

$$(4.2) \quad F(x) = (-1)^n A_n^{-2m} F(\alpha_n) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A_j^{-2m} G(\alpha_{j+1}^{-1}).$$

En primer lugar, tomando en la ecuación funcional $z = \alpha_1^{-1}$, y recordando que $A_0 = 1$, se tiene que

$$F(x) = F(\alpha_0) = F(\alpha_1^{-1}) - \alpha_1^{-2m} F(\alpha_1) + A_0^{-2m} G(\alpha_1^{-1}).$$

Ahora, supongamos que (4.2) es cierto para $j \leq k-1$. Entonces, se cumple

$$F(x) = (-1)^{k-1} A_{k-1}^{-2m} F(\alpha_{k-1}) + \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j A_j^{-2m} G(\alpha_{j+1}^{-1}).$$

Sustituyendo $F(\alpha_k) = F(\alpha_{k-1})$ y aplicando la ecuación funcional con $z = \alpha_k^{-1}$, llegamos a

$$\begin{aligned} F(x) &= -(-1)^{k-1} A_{k-1}^{-2m} \alpha_k^{-2m} + (-1)^{k-1} A_{k-1}^{-2m} G(\alpha_k^{-1}) + \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j A_j^{-2m} G(\alpha_{j+1}^{-1}) \\ &= (-1)^k A_k^{-2m} F(\alpha_k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j A_j^{-2m} G(\alpha_{j+1}^{-1}). \end{aligned}$$

Luego (4.2) queda probado por inducción. Ahora, como $a_j = a_{j+n}$, siendo n la longitud del periodo, se tiene que $F(\alpha_n) = F(\alpha_0) = F(x)$. Solo queda despejar $F(x)$ de

$$F(x) = (-1)^n A_n^{-2m} F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A_j^{-2m} G(\alpha_{j+1}^{-1}) = B_n F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} B_j G(\alpha_{j+1}^{-1}),$$

obteniendo así $F(x) = (1 - B_n)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_j G(\alpha_{j+1}^{-1})$, como queríamos demostrar. \square

Este teorema nos permite evaluar una infinidad de series. Como corolario, vamos a calcular algunas de ellas.

Corolario 3.

$$(4.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \sqrt{2})}{n^5} = \frac{\pi^5 \sqrt{2}}{1890} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \sqrt{3})}{n^3} = -\frac{\pi^3 \sqrt{3}}{60}.$$

Demostración. Sea $F(\sqrt{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \cot(\pi n \sqrt{2})/n^5$. Como la fracción continua de $\sqrt{2}$ tiene periodo 1, basta aplicar el Teorema 20 con $m = 2$, $n = 1$. Notemos que dicha fracción continua no es periódica pura, pero basta observar que la de $1 + \sqrt{2}$ sí, y que $F(\sqrt{2} + 1) = F(\sqrt{2})$.

Trabajamos, pues, con $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. El Teorema 20 nos dice que

$$F(x) = \frac{1}{1 - B_1} B_0 G(\alpha_1^{-1}).$$

Donde $B_1 = -1/A_1^4 = -(\sqrt{2} - 1)^4$. Por otro lado, se tiene que $\alpha_1 = 1/(\sqrt{2} - 1)$, luego

$$G(\alpha_1^{-1}) = \frac{-(2\pi)^5}{\sqrt{2} - 1} \sum_{n=0}^3 f_n f_{m+1-n} (\sqrt{2} - 1)^{2n}.$$

Donde $f_0 = 1$, $f_1 = 1/12$, $f_2 = -1/720$, $f_3 = 1/30240$. Con un poco de ayuda computacional de SageMath, calculamos el resultado, que efectivamente es $\pi^5 \sqrt{2}/1890$.

Para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \cot(\pi n \sqrt{3})/n^3$, procedemos del mismo modo. En este caso, $n = 2$ y $m = 1$, de modo que el Teorema 20 nos dice que

$$F(x) = \frac{1}{1 - B_2} (B_0 G(\alpha_1^{-1}) + B_1 G(\alpha_2^{-1})).$$

Ahora, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/A_1^{2m} = -(\sqrt{3} - 1)^2$. Por otro lado, se tiene que

$$G(\alpha_1^{-1}) = \frac{-(2\pi)^3}{\sqrt{3} - 1} \sum_{n=0}^2 f_n f_{m+1-n} (\sqrt{3} - 1)^{2n}; \quad G(\alpha_2^{-1}) = \frac{-2(2\pi)^3}{\sqrt{3} - 1} \sum_{n=0}^2 f_n f_{m+1-n} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^{2n},$$

con los f_n como antes. De nuevo, podemos utilizar SageMath para comprobar que, efectivamente, el resultado es $-\pi^3 \sqrt{3}/60$. \square

El Teorema 20 nos permite también evaluar familias de series, como la que mostramos a continuación.

Corolario 4. Para todo $\ell \in \mathbb{Z}^+$, se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \sqrt{\ell^2 + 1})}{n^3} = \frac{\pi^3(4\ell^2 - 3)}{180\sqrt{\ell^2 + 1}}.$$

Demostración. Sabemos, por la Proposición 2, que $\alpha' = \sqrt{\ell^2 + 1} = [\ell, 2\ell, 2\ell, 2\ell, \dots]$. Del mismo modo que antes, consideramos $\alpha = \alpha' + [\alpha'] = \alpha' + \ell = [2\ell, 2\ell, \dots]$, que sí es una fracción continua periódica pura, y además $F(\alpha) = F(\alpha' + [\alpha'])$. Aplicando el Teorema 20, con $n = 1$ y $m = 1$, observamos que

$$F(\alpha) = \frac{1}{1 - B_1} B_0 G(\alpha_1^{-1}),$$

donde $\alpha_1 = 1/(\sqrt{\ell^2 + 1} - \ell)$, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/A_1^2 = -2\ell^2 - 2\ell\sqrt{\ell^2 + 1} - 1$, y

$$G(\alpha_1^{-1}) = \frac{-(2\pi)^3}{\sqrt{\ell^2 + 1} - \ell} \left(\frac{-1}{720} + \frac{1}{144} (\sqrt{\ell^2 + 1} - \ell)^2 - \frac{1}{720} (\sqrt{\ell^2 + 1} - \ell)^4 \right).$$

De modo que obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \cot(\pi n \sqrt{\ell^2 + 1})/n^3 = (4\pi^3 \ell^2 - 3\pi^3)/(180\sqrt{\ell^2 + 1})$, llegando así al resultado deseado. \square

Para concluir este apartado, podemos alardear de la potencia del resultado, calculando la correspondiente serie para el periodo más largo ($n = 16$) de todos los $k < 100$ ($k = 94$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \sqrt{94})}{n^7} = -\frac{2396429986305621361\pi^7 \sqrt{94}}{100230311093209098265800}.$$

Para lo cual, claramente, hemos requerido ayuda computacional, que se puede consultar en el apéndice.

CAPÍTULO 5

La convergencia de la serie cotangente

En lo sucesivo, vamos estudiar la convergencia de $F_{s,D}$ en el intervalo $1 < s \leq 2$. Presentamos para ello una nueva serie, asociada a la “distancia con signo” al entero más próximo:

$$\langle x \rangle_* = x - [x + 1/2].$$

Se verifica $\langle x \rangle = |\langle x \rangle_*|$. La serie es un modelo para $F_{s,D}$ evitando los problemas que se derivan de la cotangente:

$$G_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*}.$$

Para ver su utilidad, enunciamos el siguiente lema:

Lema 6. *Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, se verifica que $|\pi \cot(\pi x) - \langle x \rangle_*^{-1}| \leq \pi^2/2$.*

Demostración. Como $F(x) = |\pi \cot(\pi x) - \langle x \rangle_*^{-1}|$ es 1-periódica y además es par, basta estudiar el intervalo $I = (0, 1/2)$. Si observamos la función $f(x) = \tan(\pi x) - \pi x$, vemos que $f(0)=0$, y además $f'(x) = \pi \sec^2(\pi x) - \pi > 0$ en I , luego es creciente. De modo que $f(x) > 0$, luego $\pi \cot(\pi x) - x^{-1} < 0$. Como $\langle x \rangle_* = x$ para $x \in I$, se tiene que $F(x) = 1/x - \pi \cot(\pi x)$.

Por tanto, $F(x) < C$ equivale a $g(x) = \sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x) - Cx \sin(\pi x) < 0$ en $(0, 1/2)$. Derivando, $g'(x) = (\pi^2 x - C) \sin(\pi x) - \pi Cx \cos(\pi x)$, que es menor que 0 en I tomando $C = \pi^2/2$. Esto, junto con $g(0) = 0$, prueba que $g(x) < 0$ en I , lo que concluye el resultado. \square

Corolario 5. *$F_{s,D}$ converge si y solo si $G_{s,D}$ converge.*

Demostración. Consideremos $S_{F,N}$ y $S_{G,N}$ las sumas parciales de $F_{s,D}$ y $G_{s,D}$, respectivamente. Se cumple que

$$S_{F,N} = S_{G,N} + \sum_{n=1}^N a_n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{\cot(\pi n\sqrt{D}) - \langle n\sqrt{D} \rangle_*^{-1}}{n^s}.$$

Por el Lema 6, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, de hecho absolutamente ($s > 1$). Por tanto, el límite de $S_{F,N}$ cuando $N \rightarrow \infty$ existe si y solo si existe el de $S_{G,N}$, y esto concluye la prueba. \square

En adelante, suponemos sin decirlo que $s > 1$. ¿Cómo probamos la convergencia de $G_{s,D}$? Como las convergentes aproximan muy bien a \sqrt{D} , es lógico que el mayor aporte a la serie venga de los múltiplos pequeños de los denominadores de dichas convergentes. Dicho de otra forma, de los elementos del siguiente conjunto:

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{Z} : 1 < q_j \leq n < q_{j+1} \text{ con } q_j \mid n \text{ para cierto } j\}.$$

En esta línea, empezaremos comprobando que la contribución de estos elementos a $G_{s,D}$ nos da una serie convergente:

$$(5.1) \quad G_{s,D}^0 = \sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*} \quad \text{converge.}$$

Y finalmente, que el resto de términos no dan complicaciones. Es decir,

$$(5.2) \quad E_j = \sum_{\substack{n > q_j \\ n \notin \mathcal{A}}} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle} \quad \text{converge, en particular, } \lim_{j \rightarrow \infty} E_j = 0.$$

Lema 7. *Si E_j y $G_{s,D}^0$ convergen, entonces $G_{s,D}$ converge.*

Demostración. Dividimos $G_{s,D}$ en $\sum_{n \in \mathcal{A}} 1/(n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*)$ y $\sum_{n \notin \mathcal{A}} 1/(n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*)$, de modo que basta que converjan ambas para que $G_{s,D}$ converja. Como la primera coincide con (5.1), basta comprobar que la convergencia de (5.2) implica la de la segunda suma. Por otro lado, si converge absolutamente, entonces converge, luego basta tomar la distancia sin signo ($\langle x \rangle$).

De modo que queremos ver que la convergencia de E_j implica la de $\sum_{n \notin \mathcal{A}} 1/(n^s \langle n\sqrt{D} \rangle)$. Como ambas sumas solo difieren en los términos $n \leq q_j$, $n \notin \mathcal{A}$, es suficiente con ver que la suma de dichos términos (los asociados a esos valores de n), no diverge. Como es una suma finita de términos finitos (porque $n\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$), efectivamente la suma de esos términos también es finita, luego si E_j converge, también lo hace $\sum_{n \notin \mathcal{A}} 1/(n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*)$. Y concluimos así que la convergencia de E_j y $G_{s,D}^0$ implica la de $G_{s,D}$. \square

Lo que haremos a continuación tiene como motivo demostrar (5.1). Para ello, introducimos

$$A_j(N) = \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \mid n}}^{N-1} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*} \quad \text{donde } 1 < q_j < N \leq q_{j+1}.$$

Lema 8. *Para $1 < q_j \leq n < q_{j+1}$ y $q_j \mid n$, se verifica que $q_j \langle n\sqrt{D} \rangle_* = n \langle q_j \sqrt{D} \rangle_*$.*

Demostración. Por el Teorema 12, sabemos que $\langle q_j \sqrt{D} \rangle_* = q_j \sqrt{D} - p_j = (-1)^j / (\alpha_{j+1} q_j + q_{j-1})$. De manera similar, se tiene que

$$\langle n\sqrt{D} \rangle_* = \left\langle \frac{np_j}{q_j} + \frac{n(-1)^j}{q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1})} \right\rangle_* = \left\langle \frac{n(-1)^j}{q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1})} \right\rangle_*.$$

Basta observar que, como $n < q_{j+1}$,

$$\left| \frac{n(-1)^j}{q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1})} \right| \leq \left| \frac{n}{q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1})} \right| = \left| \frac{n}{q_j q_{j+1}} \right| < \left| \frac{1}{q_j} \right|.$$

De modo que $|(-1)^j n / (q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1}))| < 1/2$, lo que nos permite eliminar la distancia con signo de la expresión, y concluimos $\langle n\sqrt{D} \rangle_* = (-1)^j n / (q_j(\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1}))$, de lo cual se deduce fácilmente que $n\langle q_j\sqrt{D} \rangle_* = q_j\langle n\sqrt{D} \rangle_*$. \square

Corolario 6. Para $1 < q_j \leq n < q_{j+1}$ y $q_j \mid n$, se cumple que

$$A_j(N) = q_j^{-s} \langle q_j\sqrt{D} \rangle_*^{-1} \sum_{m < N/q_j} m^{-s-1}.$$

Esto implica que $G_{s,D}^0$ converge para $s > 1$, es decir, (5.1).

Demostración. Por el Lema 8, se tiene

$$A_j(N) = \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \mid n}}^{N-1} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*} = \langle q_j\sqrt{D} \rangle_*^{-1} \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \mid n}}^{N-1} \frac{q_j}{n^{s+1}}.$$

Podemos reescribir la suma de la derecha como $q_j \sum_{m=1}^{N/q_j} (mq_j)^{-s-1}$, simplemente tomando los múltiplos de q_j hasta $N - 1$. Esto, claramente, es igual a $q_j^{-s} \sum_{m=1}^{N/q_j} m^{-s-1}$, y esto concluye el resultado para $A_j(N)$. Veamos que esto implica la convergencia de $G_{s,D}^0$. Sea $1 < q_{j_0} < N \leq q_{j_0+1}$, $j_0 \in \mathbb{Z}^+$, escribamos las sumas parciales de $G_{s,D}^0$ como $S_N = \sum_{n \in \mathcal{A}, n < N} (n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*)^{-1} = \sum_{j=0}^{j_0-1} A_j(q_{j+1}) + A_{j_0}(N)$. Luego queremos ver que S_N converge cuando $N \rightarrow \infty$, es decir

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |A_j(N)| &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(q_j^{-s} \langle q_j\sqrt{D} \rangle_*^{-1} \sum_{m < N/q_j} m^{-s-1} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{j+1}q_j + q_{j-1}}{q_j^s} \sum_{m < N/q_j} m^{-s-1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{j+1} + q_{j-1}/q_j}{q_j^{s-1}} \sum_{m < N/q_j} m^{-s-1} \right) < \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{K}{q_j^{s-1}} \sum_{m < N/q_j} m^{-s-1} \right) < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K}{2^{(j-1)(s-1)/2}}, \end{aligned}$$

donde $1 < q_j < N \leq q_{j+1}$, $K > 0$, y hemos visto que converge absolutamente. Como para $s > 1$, el último término converge, concluimos que $G_{s,D}^0$ es convergente. \square

Pasamos ahora a demostrar (5.2). Para ello, definimos

$$B_j = \sum_{n=q_j}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle} \quad \text{y} \quad C_j = \sum_{\substack{n=\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor + 1 \\ q_j \nmid n}}^{q_{j+1}-1} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle}.$$

Nuestro objetivo es demostrar lo siguiente:

Teorema 21. Para cada $s > 1$, existe un $K = K(s)$ tal que

$$(5.3) \quad B_j \leq K q_j^{1-s} \log(q_j + 1) \quad \text{y} \quad C_j \leq K q_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1} + 1).$$

Primero, vamos a asegurarnos de que el Teorema 21 nos garantiza lo que buscamos.

Corolario 7. La serie E_j converge.

Demostración. Es claro que basta demostrar que (5.3) garantiza la convergencia de $\sum_{j=0}^{\infty} B_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} C_j$, y por tanto la de la suma de ambas.

Con esa intención, basta ver que $\sum_{j=0}^{\infty} \log(q_j + 1)/q_j^{s-1}$ converge. Como sabemos que $(\log x)/x^t \rightarrow 0$ para todo $t > 0$, y aplicando la definición de límite con $\epsilon = 1$, $\exists J$ tal que $\log(q_j + 1)/q_j^{(s-1)/2} < 1$ para $j \geq J$. De modo que $\sum_{j=0}^{\infty} \log(q_j + 1)/q_j^{s-1} < K + \sum_{j=J}^{\infty} 1/q_j^{(s-1)/2} < K + \sum_{j=J}^{\infty} 2^{-(s-1)(j-1)/4}$, que efectivamente es convergente. \square

Procedemos ahora a demostrar una serie de resultados que necesitaremos en la demostración del Teorema 21.

Lema 9. *Se cumplen las siguientes desigualdades*

$$(5.4) \quad |\langle x \rangle - \langle y \rangle| \leq |x - y| \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} < 2 \log(N + 1) \quad \text{para } N \geq 1.$$

Demostración. Empecemos con la primera desigualdad. Como $|\langle x \rangle - \langle y \rangle|$ está acotado por $1/2$, podemos definir $x = y + \alpha$, con $\alpha \in [0, 1/2]$, $y \in [0, 1]$. Para aligerar notación, denotamos $\lfloor x + 1/2 \rfloor = [x]$. Luego queremos ver $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| = |y + \alpha - [y + \alpha] - |y - [y]|| \leq |y + \alpha - y| = \alpha$.

- Caso 1 ($y, x \in [0, 1/2]$): $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| = |y - [y] + \alpha - y + [y]| = \alpha$.
- Caso 2 ($y \in [0, 1/2], x \in [1/2, 1]$): $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| = |-2y - 2[y] + 1 - \alpha| = |-2y + 1 - \alpha| \leq \alpha$, pues en este caso, $-2y + 1 \geq 0$, y $\alpha \geq 1/2 - y$.
- Caso 3 ($y, x \in [1/2, 1]$): $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| = |[y] - (y + \alpha) - ([y] - y)| = |-\alpha| = \alpha$.
- Caso 4 ($y \in [0, 1/2], x \in [1/2, 1]$): $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| = |-2y - 2[y] + \alpha| = |2(y - 1) + \alpha|$. Como $y - 1 \leq 0$, si $2(y - 1) + \alpha \geq 0$ es claro que $|\langle x \rangle - \langle y \rangle| \leq \alpha$. Para $2(y - 1) + \alpha < 0$, si $|2(y - 1) + \alpha| > \alpha$, es decir, $2(y - 1) + \alpha < -\alpha$, se tendría $\alpha < 1 - y$ (contradicción).

Centrémonos ahora en la segunda desigualdad. Demostramos para ello un resultado auxiliar: $(2n)^{-1} < \int_n^{n+1} x^{-1} dx$ para $n \geq 1$. Como $1/x > 1/(n+1)$ para $x \in (1/n, 1/(n+1))$, se cumple que $\int_n^{n+1} x^{-1} > \int_n^{n+1} 1/(n+1) = 1/(n+1) \geq (2n)^{-1}$ para $n \geq 1$. Aplicando esto, vemos que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 2 \sum_{n=1}^N (\log(n+1) - \log n) = 2 \log(N+1),$$

lo que concluye la demostración. \square

Sigamos demostrando resultados auxiliares con vistas a probar el Teorema 21.

Lema 10. *Se cumple $|\langle n\sqrt{D} \rangle_* - \langle m\sqrt{D} \rangle_*| > (2q_{j+1})^{-1}$ para n y m enteros tales que $0 \leq m < n < q_{j+1}$.*

Demostración. Como $\langle x \rangle_*$ es la distancia con signo a un entero, podemos escribirla como $x - k$, $k \in \mathbb{Z}$, luego claramente $|\langle n\sqrt{D} \rangle_* - \langle m\sqrt{D} \rangle_*| = |(n - m)\sqrt{D} - (k_1 - k_2)|$. Aplicando la primera desigualdad de (5.4), tenemos que $|(n - m)\sqrt{D} - (k_1 - k_2)| \geq |\langle (n - m)\sqrt{D} \rangle - \langle k_1 - k_2 \rangle| =$

$\langle (n-m)\sqrt{D} \rangle$. Ahora, por el resultado de mejor aproximación, como $0 < n-m < q_{j+1}$, se verifica que $\langle (n-m)\sqrt{D} \rangle \geq \langle q_j\sqrt{D} \rangle$. Finalmente, por el Corolario 1, apartado c), se cumple que $|q_j\sqrt{D} - p_j| > 1/(2q_{j+1})$, luego $\langle q_j\sqrt{D} \rangle > (2q_{j+1})^{-1}$, lo que finaliza la demostración. \square

Corolario 8. $\mathcal{T} = \{2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle : 1 \leq n < q_{j+1}\}$ es un subconjunto de $[1, \infty)$ tal que cada intervalo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, contiene como máximo dos de sus elementos.

Demostración. Sea $1 \leq n < q_{j+1}$, tomando $m = 0$ en la desigualdad del Lema 10, tenemos que $\langle n\sqrt{D} \rangle = |\langle n\sqrt{D} \rangle_*| > (2q_{j+1})^{-1}$, luego $2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle > 1$. Esto demuestra que $\mathcal{T} \in [1, \infty)$. Para demostrar la segunda afirmación del lema, asumamos que, para un mismo intervalo $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ hay dos elementos (sean x e y) de \mathcal{T} , y busquemos un tercero, llamémoslo z . Como hay 3 elementos en el intervalo, necesariamente dos de ellos (sean x y z) serán tales que $\langle x \rangle_*$ y $\langle z \rangle_*$ tengan el mismo signo. Entonces, denotando $x = 2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle$, $z = 2q_{j+1}\langle m\sqrt{D} \rangle$:

$$|x - y| \geq |\langle x \rangle - \langle z \rangle| = |\langle x \rangle_* - \langle z \rangle_*| = 2q_{j+1}|\langle n\sqrt{D} \rangle - \langle m\sqrt{D} \rangle| > 1,$$

donde para la última desigualdad hemos usado el Lema 10. Así que z debería estar a distancia mayor que 1 de alguno de los puntos del intervalo, que es de longitud 1 (contradicción). \square

Introduciremos un último lema, y estaremos ya en condiciones de pasar a la demostración de la segunda desigualdad del Teorema 21. Necesitamos, antes, hacer una pequeña observación:

Observación 1. Para n en el rango de sumación de C_j , se cumple que $2q_{j+1}n^{-s} < 2^{s+1}q_{j+1}^{1-s}$.

Para demostrarlo, basta ver que en dicho rango, $n > [q_{j+1}/2] + 1 > q_{j+1}/2$, de modo que $2q_{j+1}n^{-s} < 2^{s+1}q_{j+1}^{s-1}$. Introduzcamos, pues, el último lema:

Lema 11. Se verifica que

$$C_j < 2^{s+1}q_{j+1}^{1-s} \sum_{q_{j+1}/2 < n < q_{j+1}} \frac{1}{2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle} \leq 2^{s+2}q_{j+1}^{1-s} \sum_{k=1}^{q_{j+1}-1} \frac{1}{k}.$$

Demostración. La primera desigualdad es clara a partir de la observación, modificando los límites de sumación por los equivalentes $q_{j+1}/2 < n < q_{j+1}$, y permitiendo $n \mid q_j$ (como todos los términos son positivos, obtenemos una cota superior).

Para la segunda, consideramos el conjunto $\mathcal{T}_{-1} = \{1/(2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle) : 1 \leq n < q_{j+1}\}$. Por el Corolario 8, $\mathcal{T}_{-1} \in (0, 1]$, y en cada intervalo $(1/(k+1), 1/k]$, $k \in \mathbb{Z}^+$, hay como mucho dos elementos. Luego para cada intervalo de esa forma, la suma de los elementos de \mathcal{T}_{-1} contenidos en él es a lo más $2/k$. Por otro lado, para $1 \leq n < q_{j+1}$ se tiene que $2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle < 2q_{j+1}/2 = q_{j+1}$, luego $\mathcal{T}_{-1} \subseteq [1/(q_{j+1}-1), 1]$. De modo que podemos acotar la suma $\sum_{q_{j+1}/2 < n < q_{j+1}} 1/(2q_{j+1}\langle n\sqrt{D} \rangle)$ por $\sum_{k=1}^{q_{j+1}-1} 2/k$, y de aquí se deduce el resultado. \square

Como prometimos, demostramos ahora la primera desigualdad del Teorema 21: para cada $s > 1$, existe un $K = K(s)$ tal que $C_j \leq Kq_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1})$.

Demostración. Por el lema anterior, y aplicando después la segunda desigualdad de (5.4),

$$C_j < 2^{s+2} q_{j+1}^{1-s} \sum_{k=1}^{q_{j+1}-1} \frac{1}{k} < 2^{s+3} q_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1}) = K q_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1}),$$

donde $K = K(s)$ una constante, distinta para cada s . \square

Queda, por tanto, demostrar la primera desigualdad del teorema. Usaremos un resultado auxiliar:

Lema 12. *Para n en el rango de sumación de B_j se tiene*

$$|\langle n\sqrt{D} \rangle - \langle np_j/q_j \rangle| < \frac{1}{2} \langle np_j/q_j \rangle.$$

Demostración. Por (5.4), sabemos que $|\langle n\sqrt{D} \rangle - \langle np_j/q_j \rangle| \leq |n(\sqrt{D} - p_j/q_j)| = n|\sqrt{D} - p_j/q_j|$. Como, en el rango de sumación de B_j , $n < q_{j+1}/2$, y aplicando posteriormente el Corolario 1, apartado c), concluimos que $n|\sqrt{D} - p_j/q_j| < (q_{j+1}/2)|\sqrt{D} - p_j/q_j| < 1/(2q_j)$.

Por tanto, solo queda demostrar que $1/q_j \leq \langle np_j/q_j \rangle$. Esto es cierto, claramente, si y solo si np_j/q_j no es entero. Como $\text{mcd}(q_j, p_j) = 1$ (las convergentes son irreducibles), y además, para estos valores de n , $q_j \nmid n$, entonces $q_j \nmid np_j$, luego $np_j/q_j \notin \mathbb{Z}$, y esto concluye el resultado. \square

Estamos a un lema de probar la segunda desigualdad del Teorema 21:

Lema 13. *Se cumple la siguiente cadena de desigualdades:*

$$B_j < 2 \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \nmid n}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{n^s \langle np_j/q_j \rangle} < 4q_j \log(q_j) \sum_{\substack{m=q_j \\ q_j \mid m}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{m^s}.$$

Demostración. Para la primera desigualdad, debemos demostrar que $\langle n\sqrt{D} \rangle > 1/2 \langle np_j/q_j \rangle$. Si $\langle n\sqrt{D} \rangle > \langle np_j/q_j \rangle$, no hay nada que demostrar. Si no, por el Lema 12, $-\langle n\sqrt{D} \rangle + \langle np_j/q_j \rangle < 1/2 \langle np_j/q_j \rangle$, luego $\langle n\sqrt{D} \rangle > 1/2 \langle np_j/q_j \rangle$.

Detengámonos a demostrar la segunda desigualdad. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo, se tiene que $\langle (kq_j + i)p_j/q_j \rangle = \langle ip_j/q_j \rangle$, para $i \in [1, \dots, q_j - 1]$. Como $\text{mcd}(p_j, q_j) = 1$, para cada $i \in [1, \dots, q_j - 1]$ se tiene $k_i = ip_j \pmod{q_j}$, con $k_i \in \{1, \dots, q_j - 1\}$ todos ellos distintos entre sí. De modo que k_i/q_j alcanza un elemento de $\{1/q_j, \dots, (q_j - 1)/q_j\}$ exactamente una vez.

Como $\langle ip_j/q_j \rangle = \langle k_i/q_j \rangle$ y, además, $\langle 1/k \rangle = \langle 1 - 1/k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}^+$, esto implica que $\langle np_j/q_j \rangle$ alcanza cada elemento de $\{1/q_j, \dots, 1 - 1/q_j\}$ a lo más dos veces.

Apliquemos lo anterior a nuestra suma. Consideramos los n tal que $q_j \nmid n$, $q_j \leq n \leq \lfloor q_{j+1}/2 \rfloor$. De modo que podemos descomponer la suma en bloques de la forma $n = kq_j + 1, \dots, kq_j + q_j - 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Luego, para cada bloque, $n > kq_j$. Por el razonamiento anterior, como para cada k (cada bloque), $n > kq_j$, y $\langle np_j/q_j \rangle$ alcanza cada elemento de $\{1/q_j, \dots, 1 - 1/q_j\}$ como mucho dos veces, podemos calcular la suma para cada bloque:

$$2 \sum_{n=kq_j+1}^{kq_j+q_j-1} \frac{1}{n^s \langle np_j/q_j \rangle} \leq 2 \sum_{n=kq_j+1}^{kq_j+q_j-1} \frac{1}{(kq_j)^s \langle np_j/q_j \rangle} = \frac{2}{(kq_j)^s} \sum_{i=1}^{q_j-1} \frac{q_j}{i}.$$

De modo que, al sumar todos los bloques, tomando $m = kq_j$,

$$2 \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \nmid n}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{n^s \langle np_j/q_j \rangle} < \sum_{i=1}^{q_j-1} \frac{q_j}{i} \cdot \sum_{\substack{m=q_j \\ q_j \mid m}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{m^s}.$$

Para concluir el resultado, basta ver que $q_j \sum_{i=1}^{q_j-1} 1/i < 2q_j \log(q_j)$ por (5.4). \square

Al fin, demostramos la segunda desigualdad del Teorema 21: para cada $s > 1$, existe un $K = K(s)$ tal que $C_j \leq Kq_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1} + 1)$.

Demostración. Como $m \geq q_j$,

$$4q_j \log(q_j) \sum_{\substack{m=q_j \\ q_j \mid m}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{m^s} \leq 4q_j \log(q_j) \sum_{\substack{m=q_j \\ q_j \mid m}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{q_j^s} = Kq_j^{1-s} \log(q_j),$$

y así termina la demostración del Teorema 21. \square

Esto nos permite concluir que $G_{s,D}$ converge y, equivalentemente, también $F_{s,D}$. De modo que, con los resultados obtenidos en este capítulo, hemos probado que

Teorema 22. *La serie $F_{s,D}$ diverge para $s \leq 1$ y converge para $s > 1$.*

CAPÍTULO 6

La fracción continua del número e

A día de hoy, no se conoce ningún patrón para la fracción continua del número π . No es así para el número e , cuya estructura es:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] = [2, \overline{1, 2n, 1}]_{n=1}^{\infty},$$

con la notación que cabe esperar. Es fácil observar que una expresión equivalente y más elegante (y que simplifica la demostración) se obtiene de $e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots] = [\overline{1, 2n, 1}]_{n=0}^{\infty}$, al reemplazar el 2 inicial por 1, 0, 1. Esto es claro, puesto que dando la vuelta a la fracción, se tiene

$$1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \dots}} = 2 + \dots$$

En este capítulo, pretendemos dar la demostración más breve conocida de este resultado (véanse [9, Prop. 1] y [9, Th. 1]).

Teorema 23. *La expresión de la fracción continua del número e es*

$$e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots] = [\overline{1, 2n, 1}], \quad n \geq 0.$$

Sea $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ la fracción continua del enunciado. En otras palabras, $a_{3i+1} = 2i$ y $a_{3i} = a_{3i+2} = 1$. Por el Teorema 2, vemos que $p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 8, p_5 = 11, \dots$ y $q_0 = 1, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 1, q_4 = 3, q_5 = 4, \dots$. Notemos que $q_1 = 0$, luego p_1/q_1 no está definido, pero esto no supone ningún problema; lo hacemos para que las recurrencias no tengan ninguna excepción inicial. De modo que p_i y q_i satisfacen las relaciones de recurrencia

$$(6.1) \quad p_{3n} = p_{3n-1} + p_{3n-2}, \quad q_{3n} = q_{3n-1} + q_{3n-2},$$

$$(6.2) \quad p_{3n+1} = 2np_{3n} + p_{3n-1}, \quad q_{3n+1} = 2nq_{3n} + q_{3n-1},$$

$$(6.3) \quad p_{3n+2} = p_{3n+1} + p_{3n}, \quad q_{3n+2} = q_{3n+1} + q_{3n}.$$

Para verificar que la fracción continua que mostramos converge a e , debemos probar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = e.$$

Definamos las integrales

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx, \quad B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx, \quad C_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx.$$

Proposición 5. Para $n \geq 0$, $A_n = q_{3n}e - p_{3n}$, $B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e$, y $C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}e$.

Demostración. Basándonos en las relaciones de recurrencia descritas previamente, basta con comprobar que las condiciones iniciales coinciden, y probar las tres relaciones de recurrencia

$$(6.4) \quad A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}, \quad B_n = -2nA_n + C_{n-1}, \quad C_n = B_n - A_n.$$

En cuanto a las condiciones iniciales, por un lado sustituimos los valores de p_i , q_i que mostramos anteriormente. De este modo, $A_0 = q_0e - p_0 = e - 1$, $B_0 = p_1 - q_1e = 1$, $C_0 = p_2 - q_2e = 2 - e$.

Por otro lado, $A_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$, $B_0 = \int_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^{x=1} = 1$, $C_0 = \int_0^1 (x-1)e^x dx = (x-2)e^x \Big|_0^{x=1} = 2 - e$. Luego las condiciones iniciales coinciden.

Veamos que las relaciones de recurrencia dadas en (6.4) son equivalentes a (6.1), (6.2) y (6.3). Sustituyendo $B_{n-1} = p_{3n-2} - q_{3n-2}e$ y $C_{n-1} = p_{3n-1} - q_{3n-1}e$ en la primera relación de (6.4), el resultado es directo usando (6.1). Del mismo modo, con (6.2) se obtiene la segunda relación y con (6.3) obtenemos la última recurrencia, concluyendo que las dos ternas de recurrencias son equivalentes.

Queda solo ver que, efectivamente, las expresiones integrales de A_n , B_n y C_n satisfacen las tres relaciones de (6.4). La más sencilla es la última:

$$B_n - A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n(x-1)}{n!} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} dx = C_n.$$

Para comprobar la primera, o equivalentemente, $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0$, observamos que, por la regla de la derivada de un producto,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x \right) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!} e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^x.$$

Como $e^x x^n(x-1)^n/n! \Big|_0^{x=1} = 0$, tomando integrales a ambos lados en la ecuación de arriba, obtenemos el resultado.

La segunda requiere más cálculos. Queremos ver $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0$. Con un razonamiento similar,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x \right) = \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x(n+1).$$

Basta ver que

$$\begin{aligned} \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x(n+1) &= \frac{x^n(x-1)^n}{(n-1)!} e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x. \\ \frac{x^{n-1}(x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x &= \frac{(x^n - x^{n-1})(x-1)^n}{(n-1)!} e^x = \frac{x^n(x-1)^n}{(n-1)!} e^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!} e^x. \end{aligned}$$

$$\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x = \frac{(x^{n+1}-x^n)(x-1)^n}{n!}e^x = \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x.$$

Si sumamos todos los términos, obtenemos $e^x x^{n+1}(x-1)^n/n! + 2e^x x^n(x-1)^n/(n-1)! - e^x x^{n-1}(x-1)^n/(n-1)!$, de modo que integrando llegamos a $B_n + 2nA_n - C_{n-1}$. Como además $e^x x^n(x-1)^{n+1}/n!|_0^{x=1} = 0$, concluimos el resultado. \square

Tras esto, es sencillo probar el Teorema 23.

Demostración. Observamos primero que A_n, B_n y $C_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Haremos el desarrollo explícito solo para A_n , pues es idéntico para B_n y C_n .

Consideramos, pues, $f_n(x) = x^n(x-1)^n e^x/n!$, para $x \in [0, 1]$. Se tiene que f_n converge uniformemente a 0 en $[0, 1]$ porque $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in (0, 1)\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e/n! = 0$. Por tanto, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx = 0.$$

Por tanto, por la Proposición 5, tenemos que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{cases} A_n \rightarrow 0 \Rightarrow q_{3n}e - p_{3n} \rightarrow 0 \\ B_n \rightarrow 0 \Rightarrow p_{3n+1} - q_{3n+1}e \rightarrow 0 \\ C_n \rightarrow 0 \Rightarrow p_{3n+2} - q_{3n+2}e \rightarrow 0. \end{cases}$$

Esto nos permite concluir que $\lim_{i \rightarrow \infty} (q_i e - p_i) = 0$. Como $q_i \geq 1$ para $i \geq 2$, podemos dividir entre q_i y obtener

$$e = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots],$$

lo que culmina la demostración. \square

Una desventaja de esta demostración es su poca versatilidad. En [10] se puede ver la fracción continua de e como parte de una familia mayor, que incluye otras cantidades como $\tan 1$ o $e^{1/k}$; no obstante, dicha demostración tiene una longitud mucho mayor.

APÉNDICE A

Algunos códigos

A continuación, presentamos los diferentes códigos (todos ellos hechos en SageMath), a los cuales se ha hecho referencia a lo largo del trabajo.

El primero se trata del algoritmo para hallar la fracción continua de un número. Ya lo explicamos detenidamente en el Capítulo 1, aquí el código utilizado:

```
1 def fraccion_continua(alpha_0, error, max_iter):
2
3     alpha=alpha_0; a=floor(alpha_0)
4
5     Lista_p=[]; Lista_q=[]
6     Lista_p=Lista_p+[a]; Lista_q=Lista_q+[1]
7     Lista_alpha=[alpha_0]; Lista_a=[a]
8
9     alpha=1/(alpha_0-a); a_1=floor(alpha)
10
11    Lista_p=Lista_p+[a*a_1+1]; Lista_q=Lista_q+[a_1]
12    Lista_a=Lista_a+[a_1]; Lista_alpha=Lista_alpha+[alpha]
13
14    a=a_1; i=2
15
16    error_calculado=abs(alpha_0-Lista_p[1]/Lista_q[1]);
17
18    while alpha not in ZZ and error_calculado>=error and i<=max_iter:
19
20        alpha=1/(alpha-a); a=floor(alpha)
21
22        p=a*Lista_p[i-1]+Lista_p[i-2]; q=a*Lista_q[i-1]+Lista_q[i-2]
23
24        Lista_a=Lista_a+[a]; Lista_alpha=Lista_alpha+[alpha]
25        Lista_p=Lista_p+[p]; Lista_q=Lista_q+[q]
26
27        error_calculado=abs(alpha_0-Lista_p[i]/Lista_q[i])
28
29        i=i+1
30
31    print('En %d iteraciones el error obtenido es %s' % ((i-1),
32            ↪ (n(error_calculado))))
33    print('Los a_n son:'); print(Lista_a); print('Los alpha_n son:');
34            ↪ print(Lista_alpha)
35    print('Los p_n son:'); print(Lista_p); print('Los q_n son:'); print(Lista_q)
36
37    if alpha in ZZ:
38        print('De modo que la última convergente obtenida es %s'
39            ↪ '%((Lista_p[i-1]/Lista_q[i-1]), (n(Lista_p[i-1]/Lista_q[i-1])))')
40    else:
41        print('De modo que la última convergente obtenida es %s, que es
42            ↪ aproximadamente %s' %((Lista_p[i-1]/Lista_q[i-1]),
43            ↪ (n(Lista_p[i-1]/Lista_q[i-1])))
```

En el capítulo 4, requerimos ayuda computacional para resolver

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n \sqrt{94})}{n^7} = -\frac{2396429986305621361\pi^7\sqrt{94}}{100230311093209098265800}.$$

Exhibimos a continuación el código que nos permitió realizar los cálculos:

```

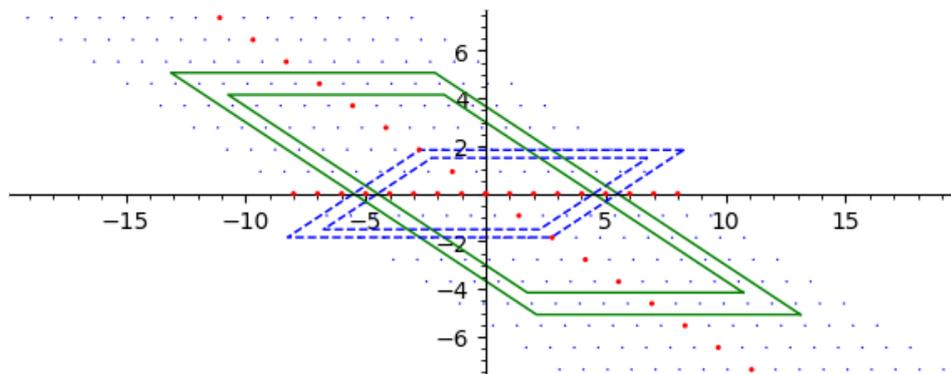
1  n=16; m=3; alpha_0=sqrt(94)+floor(sqrt(94)); alpha=alpha_0
2  a=floor(alpha_0); Alpha=[alpha_0]; alpha=1/(alpha_0-a)
3  a_1=floor(alpha); Alpha=Alpha+[alpha]; a=a_1
4
5  for i in [2..16]:
6      alpha=1/(alpha-a); a=floor(alpha)
7      Alpha.append(alpha)
8      i=i+1
9
10 Lista_A=[1]; A=1
11 for i in [1..n]:
12     A=A*Alpha[i]
13     Lista_A.append(A)
14
15 Lista_B=[1]
16 for i in [1..n]:
17     B=((-1)^i)/(Lista_A[i]^(2*m))
18     Lista_B.append(B)
19
20 def G(z):
21     f=[bernoulli(2*k)/factorial(2*k) for k in srange(m+2)]
22     suma=0
23     for i in [0..m+1]:
24         suma+=f[i]*f[m+1-i]*z^(2*i)
25     G=suma*(-1)^m*(2*pi)^(2*m+1)/z
26     return G
27
28 suma_resultado=0
29 for i in [0..n-1]:
30     suma_resultado+=Lista_B[i]*G((Alpha[i+1])^(-1))
31 resultado=1/(1-Lista_B[n])*suma_resultado
32 (resultado/sqrt(94)).canonicalize_radical()

```

APÉNDICE B

Gráfico de los paralelogramos Γ_N

En el Capítulo 4, utilizamos “paralelogramos centrados Γ_N de la forma $t \pm i(N + 1/2)\Im(1/z)$ y $(t \pm i(N + 1/2)\Re(z))/z$ y con orientación positiva, para $N \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ ”. Procedemos a mostrar el dibujo gráfico de dichos paralelogramos, para $z = 1/2 + 1/3i$, y $N = 4$, $N = 5$, con la intención de dar una imagen gráfica de los paralelogramos, y mostrar que evitan los polos en su frontera, y sus lados son paralelos a 1 y $1/z$.



Exhibimos también el código empleado para obtener la imagen. En primera instancia, definimos la función que pasa números complejos a puntos del plano.

```
1 # Funcion que pasa complejos a puntos
2 def comp_2_vec( v ):
3     return vector( ( v.real_part(), v.imag_part() ) )
```

Y a continuación, mostramos el resto del código:

```

1  z = 1/2+1/3*i
2
3  # Reticulo de puntos generado por 1 y 1/z con coeficientes enteros
4  la = 8; L = []
5  for a in srange(-la, la+1):
6      for b in srange(-la, la+1):
7          L.append( comp_2_vec(a+b/z) )
8  P = points(L, size=1)
9
10 # Puntos donde hay polos
11 L = []
12 for a in srange(-la, la+1):
13     L.append( (a, 0) )
14     L.append( comp_2_vec(a/z) )
15 P += points(L, size=5, color='red', zorder=100)
16
17
18 N = 4
19 # Los puntos de interseccion de las rectas
20 #  $t \sqrt{N+1/2} \sqrt{\text{Im}(1/z)}$  y  $(t \sqrt{N+1/2} \sqrt{\text{Im}(z)})/z$ 
21 # son  $\sqrt{N+1/2} z_1$ ,  $\sqrt{N+1/2} z_2$  que dan los vertices del paralelogramo
22 # donde se aplica el teorema de los residuos.
23 w = i*(N+1/2)*(z.imag_part()-z*(1/z).imag_part())
24 z1 = w.imag_part()/z.imag_part() + i*(N+1/2)*(1/z).imag_part()
25 w = i*(N+1/2)*(z.imag_part()+z*(1/z).imag_part())
26 z2 = w.imag_part()/z.imag_part() - i*(N+1/2)*(1/z).imag_part()
27 p1, p2 = comp_2_vec(z1), comp_2_vec(z2)
28
29 # El paralelogramo donde se aplica el teorema de los residuos (verde)
30 # esta separado de los enteros
31 P += line([p1, p2, -p1, -p2, p1], thickness=1, color='green')
32
33 # Tambien lo esta el resultado de multiplicarlo por z (azul)
34 p1, p2 = comp_2_vec(z*z1), comp_2_vec(z*z2)
35 P += line([p1, p2, -p1, -p2, p1], thickness=1, linestyle='--')
36
37 P.set_aspect_ratio(1)
38
39
40 N = 5
41
42 w = i*(N+1/2)*(z.imag_part()-z*(1/z).imag_part())
43 z1 = w.imag_part()/z.imag_part() + i*(N+1/2)*(1/z).imag_part()
44 w = i*(N+1/2)*(z.imag_part()+z*(1/z).imag_part())
45 z2 = w.imag_part()/z.imag_part() - i*(N+1/2)*(1/z).imag_part()
46 p1, p2 = comp_2_vec(z1), comp_2_vec(z2)
47
48
49 P += line([p1, p2, -p1, -p2, p1], thickness=1, color='green')
50
51
52 p1, p2 = comp_2_vec(z*z1), comp_2_vec(z*z2)
53 P += line([p1, p2, -p1, -p2, p1], thickness=1, linestyle='--')
54
55 P.set_aspect_ratio(1)
56 P.show()

```

Bibliografía

- [1] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.
- [2] A. Ya. Khinchin. *Continued fractions*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997. With a preface by B. V. Gnedenko, Reprint of the 1964 translation.
- [3] G. H. Hardy and E. M. Wright *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by A. Wiles.
- [4] M. Stoll. *Introductory Number Theory*. Course No. 100331 at Jacobs University. <https://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/lecture-notes/IntroductoryNumberTheory.pdf>, 2006.
- [5] L.-K. Hua. *Introduction to Number Theory*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, New York, 1982.
- [6] F. Chamizo. *A functional equation and some series evaluations*. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/kiosk.html>, 2021.
- [7] F. Chamizo and B. Martin. The convergence of certain Diophantine series. *J. Number Theory*, 229:179–198, 2021.
- [8] T. Rivoal. On the convergence of Diophantine Dirichlet series. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 55(2):513–541, 2012.
- [9] H. Cohn. A short proof of the simple continued fraction expansion of e . *Amer. Math. Monthly*, 113(1):57–62, 2006.
- [10] R. F. C. Walters. Alternative derivation of some regular continued fractions. *J. Austral. Math. Soc.*, 8:205–212, 1968.