Universidad Autónoma de Madrid

La función zeta de Riemann y su relación con los números primos

Diego González Sánchez

Trabajo de Fin de Grado dirigido por
Fernando Chamizo Lorente

12 de mayo de 2015

Prefacio y agradecimientos

Y el ángel de los números,
pensativo, volando,
del 1 al 2, del 2
al 3, del 3 al 4.
Sobre los ángeles, Rafael Alberti

En primer lugar, muchas a gracias a mi director Fernando por dirigirme, explicarme y ayudarme con este trabajo, que espero que le resulte a todos tan agradable de leer como para mi ha sido hacerlo. También gracias al CSIC ya que este Trabajo de Fin de Grado se realiza como beca de colaboración JAE-intro.

Como reza el título, este trabajo trata acerca de números primos. Hubiera estado bien hacer un primer capítulo de introducción histórica desde la demostración de Euclides de la existencia de infinitos primos hasta la identidad de Euler que es básicamente el punto de partida de este trabajo, pero por razones de espacio se ha omitido. Por lo demás, este trabajo trata de abarcar la teoría clásica de teoría analítica de números hasta la demostración del teorema de los números primos.

Por último, muchas gracias a todos los que me han acompañado (y aguantado) este año mientras hacía mi trabajo; mi familia, amigos, compañeros de clase y profesores.

Madrid, 12 de mayo de 2015

Diego González Sánchez

Índice general

Abstract

This bachelor thesis covers part of the classical theory about the distribution of prime numbers using analytic ideas, specifically through the study of the Riemann Zeta Function.

The paper is divided into three chapters. The first one begins by introducing some basic tools that will be used throughout the rest of the document like arithmetic functions, Abel's and Euler's summation formulas and of course, the Riemann Zeta Function. Those elements are used to prove some early results about prime numbers namely Mertens' theorems and some equivalences of the prime number theorem. To conclude this chapter we present a fully detailed proof of the prime number theorem.

The goal of the second chapter is to prove Dirichlet's theorem about the existence of infinitely many primes in *non trivial* arithmetic progressions. To do so, we first present some elements that we need to use in the proof like characters or the Discrete Fourier Transform. After that, we define the basic tool that is used to study of the distribution of prime numbers in arithmetic progressions, the Dirichlet's L functions. This section ends putting all those components together to prove Dirichlet's theorem.

Finally, the last chapter examines more thoroughly the Riemann Zeta Function. Our objective is to show how this function is related to the distribution of prime numbers in a more precise way. Here we present some proofs and arguments given by Riemann in his famous 1859 memoir along with some ideas taken from the work of Hadamard and De la Valleé Poussin used in the original proofs of the prime number theorem. To sum up some of these concepts, we prove the Functional Equation, we talk about integral functions of finite order and we prove an asymptotic formula for the number of non trivial zeros of the Zeta Function. To finish, we give a sketch of the original proof of the prime number theorem and we show how the Riemann hypothesis is related to the error term in the prime number theorem.

Notación

Antes de entrar en materia, quiero decir alguna de la notación que se usa durante todo el trabajo. Para empezar, en este trabajo los números naturales son el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$ sin incluir el 0. Los nombres de las variables son los comunes, se procurará usar x ó t para referirse a un número real y z ó s para un complejo pero algo que sí que hay que tener en cuenta es que p *siempre* representa un número primo. La notación para la equivalencia asintótica es la usual, diremos que $f \sim g$ cuando $\lim f/g = 1$, típicamente ese límite será cuando $x \to \infty$. La notación para errores (O grande y o pequña) se explica con detalle más adelante ya que esta no es tan estandar. Otra notación que usaremos será la de integral de caminos en $\mathbb{C}$. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ con $\gamma \in C^1$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Otra notación muy usual en la literatura de teoría de números es usar $e(t)$ para representar $e^{2\pi it}$. Nosotros la usaremos sobre todo en la segunda parte del trabajo.

Otro elemento que aparece de manera recurrente en el trabajo son los sumatorios. Cuando se escribe $\sum_{n\leq x} a_n$ lo que queremos decir es

$$\sum_{n\leq x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} a_n.$$

Por ejemplo, para ponerlo todo junto, cuando se escribe $\sum_{p^n\leq x} \log p$ lo que estamos haciendo es sumar $\log p$ por cada potencia de un primo p que sea menor o igual a x. Usamos también la notación usual para la trasformada de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e(-\xi x)dx.$$

Capítulo 1

Parte 1

El objetivo último de esta sección es probar el teorema de los números primos. Para ello se introducen una serie de herramientas necesarias para poder hacer teoría de números como las funciones aritméticas y las fórmulas de sumación de Abel y Euler-Maclaurin. Al avanzar en esta sección, se prueban resultados auxiliares y complementarios al teorema de los números primos como algunas equivalencias del teorema de los números primos y los teoremas de Mertens.

Esta primera parte se realizó durante los meses de Noviembre y Diciembre. el tutor realizó un documento con los contenidos que tenía que ir incluyendo y me recomendó bibliografía donde podía encontrar parte de la información. Cabe destacar en esta sección los libros [IK04], [CC92], [HW08] y [Cha07].

1.1. Funciones aritméticas

Se conoce como función aritmética a una función que recibe valores en los números naturales y nos devuelve valores complejos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. De entre todas estas, para nosotros van a tener un especial interés las llamadas *funciones multiplicativas*.

Definición 1.1.1. *Función multiplicativa.*
Una función aritmética f se dice multiplicativa cuando:
i) $f(1) = 1$.
ii) $f(mn) = f(n)f(m)$ *siempre y cuando m y n sean coprimos.*

Como ejemplos de funciones aritméticas y multiplicativas tenemos primero los más triviales: $f(n) = 1$ (la constante) y $f(n) = n$ (la identidad). Hay otras funciones multiplicativas, por ejemplo la φ de Euler que nos da el número de unidades del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Estas son, el número de coprimos con n entre 1 y n. Se ve que es multiplicativa por el teorema chino del resto (por ejemplo), ya que $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ con $(n, m) = 1$ y el número de unidades debe ser el mismo. El valor $\varphi(p^n)$ (p primo) es:

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}. \tag{1.1}$$

Por ser una función multiplicativa basta definirla en las potencias de números primos. Más adelante veremos otras versiones de expresar φ. Otra función multiplicativa es el número de divisores de un número dado, $d(n) = \#\{d : d|n\}$. Podemos escribirla de otro modo:

$$d(n) = \sum_{d|n} 1. \tag{1.2}$$

Y con una expresión muy similar podemos expresar la suma de los divisores de un número $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d. \tag{1.3}$$

Estas dos últimas funciones son multiplicativas pero esperaremos hasta más adelante para probarlo. La última función multiplicativa que queremos mostrar es la función μ de Möbius . Se define como:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es } 1 \\ (-1)^t & \text{si } n = p_1...p_t \text{ primos distintos} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Para ver que es multiplicativa basta multiplicar dos coprimos expresados en su factorización (y es una cuenta fácil). Se puede probar que la función divisor d y la suma de divisores σ son multiplicativas por métodos elementales pero nosotros vamos a probarlo introduciendo el concepto de convolución de funciones aritméticas.

Definición 1.1.2. *Convolución.*
La convolución de dos funciones aritméticas f y g en una función aritmética que se expresa como $f * g$ y se define como:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d). \tag{1.5}$$

Es sencillo ver que la convolución es conmutativa (ya que d divide a n si y sólo si n/d divide a n y podemos hacer el cambio de variable en el sumatorio). Si f y g son multiplicativas tenemos una propiedad más fuerte, su convolución también lo será. Ver esto es una cuenta sencilla, si $(n, m) = 1$:

$$(f * g)(nm) = \sum_{d|nm} f(d)g(nm/d).$$

Pero ahora basta notar que si $d|mn$, $d_1 = \text{mcd}(n, d)$ y $d_2 = \text{mcd}(m, d)$ entonces $d = d_1 d_2$ con $(d_1, d_2) = 1$. Usando esto:

$$(f * g)(nm) = \sum_{d_1 d_2|nm} f(d_1 d_2) g\left(\frac{n}{d_1}\frac{m}{d_2}\right) \underbrace{=}_{f \text{ y } g \text{ mult}} \sum_{d_1 d_2|nm} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right) g\left(\frac{m}{d_2}\right)$$

$$= \sum_{d_1|n} f(d_1)g(n/d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2)g(m/d_2) = (f * g)(n)(f * g)(m).$$

Esta observación permite deducir fácilmente que las funciones divisor d y suma de divisores σ son multiplicativas, ya que basta notar que $d = 1 * 1$ y $\sigma = n * 1$ (con n me refiero a la función identidad).

Podemos crear ejemplos más complicados como la suma de los inversos de los divisores de un número. Llamemos $s(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$. Notamos que claramente $s = \frac{1}{n} * 1$ con lo que es multiplicativa (el inverso es multiplicativo). Por tanto para hallar el valor de $s(n)$ basta hallar esta cantidad para potencias de primos y entonces si $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, $s(n) = s(p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}) = s(p_1^{\alpha_1})...s(p_k^{\alpha_k})$.

$$s(p^k) = \sum_{d|p^k} \frac{1}{d} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{p^i} = \frac{\frac{1}{p^{k+1}} - 1}{\frac{1}{p} - 1} = \frac{p^{k+1} - 1}{p^{k+1} - p^k}.$$

Otra aplicación interesante es la función φ de Euler . Si nos fijamos en la expresión clásica de esta función vemos que refleja la igualdad $\varphi = \mu * n$. Esto es así porque cuadra con el valor de φ original, ya que para cada potencia de primo:

$$(\mu * n)(p^m) = \sum_{d|p^m} \mu(d)p^m/d = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \mu(p^i)p^{m-i}}_{\substack{\text{los divisores de } p^m \text{ son} \\ \text{de la forma } p^i,\ i=0...m}} = p^m - p^{m-1} = \varphi(p^m).$$

La penúltima igualdad se desprende de que $\mu(p^i)$ es 1 cuando $i = 0$, -1 cuando $i = 1$ y 0 en el resto de casos, por eso sólo hay dos sumandos. Por tanto tenemos dos funciones multiplicativas tal que coinciden en sus valores para toda potencia de primos, lo que implica que son iguales para todo valor . Otra relacción interesante es que $\varphi * 1 = n$. En [CC92] hay una prueba correcta pero sin la idea general (que veremos más adelante) de lo que hay detrás. La prueba de [Cha07] es clara y está relaccionada con el significado profundo de la función φ. No requiere mas cuentas que las necesarias para expresar con matemáticas algo conocido como que dado un $n \in \mathbb{N}$ cualquier número tiene un mcd con n. Ahora lo que hacemos es agrupar por común divisor:

$$n = \sum_{d|n} \#\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n \text{ y } (n,k) = d\}.$$

Claramente cada número entre 1 y n caerá dentro de uno solo de esos miembros del sumatorio (y sólo uno) por tanto que esta suma es n es aparentemente no decir nada. Sin embargo para cada d tenemos que ese conjunto lo podemos expresar como $\{k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n/d \text{ y } (n/d, k) = 1\}$ y el cardinal es nuestra conocida función: $\varphi(n/d) = \#\{k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n/d \text{ y } (n/d, k) = 1\}$.
Con este ejemplo se aprecia que hemos podido invertir la convolución con 1 en el caso de φ, $\varphi = \mu * n$ y $n = \varphi * 1$. Vamos a ver que esto es un hecho general. Para ello introducimos el concepto de *serie de Dirichlet*.

Definición 1.1.3. *Serie de Dirichlet.*
Dada una función aritmética f, se define formalmente su serie de Dirichlet como:

$$D_f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}. \tag{1.6}$$

Aquí nos despreocupamos por la convergencia, habrá series que no converjan para ningún valor de s ($\in \mathbb{C}$). El caso de $f(n) = 1$ nos da la zeta de Riemann (a la que está dedicada este trabajo en parte):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1.7}$$

Sabemos que esta expresión para $s \in \mathbb{C}$ define una función holomorfa en $\{Re(s) > 1\}$ ya que tenemos convergencia uniforme sobre compactos ahí (usando el criterio M de Weierstrass). También sabemos que es posible representar esta función como un producto infinito que tambien converge uniformemente sobre compactos en $\{Re(s) > 1\}$ (por el criterio M de Weierstrass para productos infinitos).

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + ...\right) \underbrace{=}_{\text{p. geom}} \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}. \tag{1.8}$$

Donde el productorio está hecho sobre todos los primos. Intuitivamente esto ocurre ya que si desarrollamos ese productorio, para obtener el término $1/n^s$ donde $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, necesitamos coger de cada término los $1/p_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, ...k)$ correspondientes (por el teorema fundamental de la aritmética).

Este hecho se puede extender (formalmente) a todas las funciones multiplicativas. Si llamamos:

$$D_{f,p}(s) = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \frac{f(p^3)}{p^{3s}} + ... \tag{1.9}$$

Tenemos que una función es multiplicativa si y sólo si se tiene la igualdad formal conocida como *producto de Euler*.

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} D_{f,p}(s). \tag{1.10}$$

De nuevo, la razón de esto es sencillamente que para obtener el término $f(n)/n^s$ necesitamos coger de cada término del productorio exactamente los primos que componen n elevados a la potencia correspondiente (por el teorema fundamental de la aritmética). Todo formalmente, tenemos que si $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ el coeficiente de $1/n^s$ será $f(n)$. Por otra parte, la única manera de obtener este coeficiente es en cada miembro del productorio el primo correspondiente a la potencia que toque (y el resto coger el 1). Como resultado tenemos $f(p_1^{\alpha_1})...f(p_k^{\alpha_k})$. Esto prueba que hay igualdad formal si y sólo si la función f es multiplicativa.

El producto de dos series de Dirichlet se define de manera natural, multiplicando todos los términos. Dadas f y g funciones aritméticas queremos saber cuál es el coeficiente de $1/n^s$ de la serie de Dirichlet $D_f(s)D_g(s)$ para un n dado. Si cogemos $f(a)/a^s$ y $g(b)/n^s$ tenemos que si este término contribuye al coeficiente de $1/n^s$ es porque $ab = n$. De modo que dado cualquier d divisor de n al multiplicarlo por el término en n/d de la otra serie (y sólo ese) obtendremos n^s en el denominador. Por tanto el coeficiente de $1/n^s$ se obtiene de sumar todas esas contribuciones de los divisores.

$$\sum_{d|n} f(d)g(n/d) \stackrel{def}{=} (f * g)(n).$$

Así que de manera natural nos ha aparecido la convolución como función que genera la serie de Dirichlet del producto,

$$D_f(s)D_g(s) = D_{(f*g)}(s). \tag{1.11}$$

Tiene especial importancia esta relacción en el caso de la función de Möbius , ya que su serie de Dirichlet es:

$$D_\mu(s) = \prod_p 1 - \frac{1}{p^s}. \tag{1.12}$$

Esto es porque el resto de términos es 0. Si nos fijamos, vemos que esta serie es exactamente $1/\zeta(s)$ y por tanto tenemos que:

$$\zeta(s)D_\mu(s) = 1. \tag{1.13}$$

Lo que nos permite 'dividir' esas series. Si volvemos a la relación que estas series tenían con las funciones aritméticas, tenemos que como:

$$D_1(s)D_f(s) = \zeta(s)D_f(s) = D_{1*f}(s),$$

podemos dividir entre ζ para invertir la convolución con 1:

$$D_f(s) = D_{1*f}D_\mu(s). \tag{1.14}$$

Con nuestra función φ ya conociamos esta propiedad, ahora la extendemos a toda función aritmética. Otro dato importante que hemos deducido con las series de Dirichlet es que la convolución es asociativa.
El hecho que $\zeta(s)D_\mu(s) = 1$ nos dice que la convolución de 1 con μ nos da la función multiplicativa 'trivial' $i(n)$ que es 1 si $n = 1$ y 0 en cualquier otro caso. Esto nos permite obtener otra variante de la inversión de Möbius para funciones $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$.

Si $g(x) = \sum_{n \le x} f(x/n)$ entonces $f(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)g(x/n)$. Probar esto es una sencilla cuenta que implica un cambio de variable:

$$\sum_{n \le x} \mu(n)g(x/n) = \sum_{n \le x} \mu(n) \sum_{m \le x/n} f(x/nm) = \sum_{n \le x} \sum_{m \le x/n} \mu(n)f(x/nm).$$

Y ahora hacemos el cambio de variable $k = nm$. Es claro que ahora estamos sumando en $k \le x$ y n va a recorrer los divisores de k,

$$= \sum_{k \le x} \sum_{n|k} \mu(n)f(x/k) = \sum_{k \le x} f(x/k) \sum_{n|k} \mu(n) = \sum_{k \le x} f(x/k)(\mu * 1)(k) = f(x).$$

La última igualdad se deduce de que $(\mu * 1)(k) = i(k)$ que sólo es 1 cuando $k = 1$.

Para finalizar esta parte, vamos a incluir algunos ejemplos de igualdades en series de Dirichlet. El hecho de que el producto de series de Dirichlet de la serie de Dirichlet con la convolución nos ayuda a probar algunas identidades interesantes. La primera es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}. \tag{1.15}$$

Como ya hemos dicho la convergencia no es uno de nuestros objetivos (de momento), sin embargo sabemos que $\zeta(s)$ converge (y de hecho define una función holomorfa) en $Re(s) > 1$. Por tanto el mienbro de la derecha está bien definido para $Re(s) > 2$. Por otra parte, la serie de la izquierda define una función holomorfa en $Re(s) > 2$ ya que la función φ puede acotarse sencillamente por $\varphi(n) \leq n$. Además, en donde está definida ζ no tiene ceros (no hay mas que ver su expresión como producto infinito) y por tanto es legítimo dividir. Una vez hecha esta nota de convergencia, está claro que lo que nosotros queremos probar es $\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \zeta(s-1)$. Pero como

$$\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = D_n(s), \tag{1.16}$$

lo que tenemos que probar es que $1 * \varphi = n$ pero esto ya lo sabíamos, así que esa identidad es trivial.

Nuestro segundo ejemplo es un poco más complejo y requiere introducir una nueva función multiplicativa, la función de cuadrados perfectos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}. \tag{1.17}$$

Esencialmente, vamos a escribir $\zeta(2s)$ como la serie de Dirichlet de una función aritmética (que además será multiplicativa):

$$\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}. \tag{1.18}$$

Donde $g(n)$ es la función que me dice si un entero es cuadrado perfecto, $g(n) = 1$ si $n = m^2$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ y 0 en otro caso. Que $\zeta(2s) = D_g(s)$ está claro. De modo que tenemos que probar que $D_g(s)D_{\mu^2}(s) = D_1(s)$, o lo que es lo mismo, $g * \mu^2 = 1$. Ahora, para ver una igualdad entre funciones aritméticas si probamos que son multiplicativas bastará comprobarlo sobre potencias de primos. g es multiplicativa ya que dados n, m con $(n, m) = 1$ tenemos que nm es cuadrado perfecto si y solo si cada primo de su factorización está elevado a una potencia par. Si $p^{2\alpha}$ es uno de estos factores, como n, m coprimos todos los factores p dividiran a n o m pero no a ambos a la vez, así que $p^{2\alpha}$ será un factor bien de n bien de m. Reciprocamente, si n y m som cuadrados perfectos está claro que su producto también.

Como g y μ^2 son multiplicativas su convolución también y para probar la igualdad estre funciones multiplicativas basta verlo sobre potencias de primos p^m.

$$(g * \mu^2)(p^m) = \sum_{d|p^m} g(d)\mu^2(n/d) = \sum_{i=0}^{m} g(p^i)\mu^2(p^{m-i}) = \underbrace{g(p^{m-1}) + g(p^m)}_{\text{la } \mu \text{ es } \neq 0 \text{ solo en los 2 últimos casos}} = 1.$$

La última igualdad se desprende de que bien m, bien $m-1$ es par.

La identidad final que vamos a probar es un poco más compleja:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}. \tag{1.19}$$

De nuevo pasamos el denominador multiplicando y tenemos que probar una igualdad entre funciones multiplicativas, $d^2 * g = 1 * 1 * 1 * 1$. Esta estrategia es sin embargo complicada. Usando el resultado anterior (1.17) podemos probar una expresión equivalente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \zeta^3(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}.$$

Por tanto ahora vamos a probar la igualdad $d^2 = 1 * 1 * 1 * \mu^2$. Como en cada lado tenemos funciones multiplicativas, basta comprobar la igualdad en las potencias de primos. Empezamos notando que $d(p^m) = m+1$ ya que los divisores de p^m son $1, p, p^2, ...p^m$. Por tanto $d^2(p^m) = (m+1)^2$. Por otra parte $1 * 1 = d$ y

$$(\mu^2 * 1)(p^m) = \sum_{i=0}^{m} \mu^2(p^i) = \begin{cases} 1+1=2 & m \geq 1 \\ 1 & m = 0. \end{cases}$$

Y por tanto resta hacer la convolución $(1 * \mu^2) * d$:

$$\begin{aligned} ((1 * \mu^2) * d)(p^m) &= \sum_{i=0}^{m} (1 * \mu^2)(p^i) d(p^{m-i}) \\ = d(p^m) + 2\sum_{i=1}^{m} d(p^{m-i}) &= m + 1 + 2\sum_{i=1}^{m}(m - i + 1) \\ = (m+1) + 2\sum_{j=1}^{m} j &= m + 1 + \cancel{2}\frac{m(m+1)}{\cancel{2}} \\ &= m^2 + 1 + 2m = (m+1)^2. \end{aligned}$$

Esto concluye nuestra prueba ya que hemos probado que dos funciones multiplicativas son iguales para potencias de primos, así que coinciden en todo $\mathbb{N}$ y sus series de Dirichlet son iguales.

1.2. Promedios y sumas de funciones aritméticas

Vamos a comenzar esta sección introduciendo algo de notación.

Definición 1.2.1. *Notación O de Landau.*
Dada una función normal de variable real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) diremos que $f = O(g)$ cuando $\limsup_{x \to \infty} \frac{|f|}{|g|} < \infty$.

La definición para funciones aritméticas es equivalente. Con esta notación se puden hacer cuentas incluso para valores pequeños de x. Con esto quiero decir que supongamos que $\limsup_{x\to\infty} \frac{|f|}{|g|} \leq K+1$. Esto dice que para $x > x_0$, $|f(x)| \leq K|g(x)|$. Pongamos también que $\frac{f}{g}$ está bien definida y es continua en $[0, x_0]$ (típicamente es donde trabajaremos, quizá otra constante en vez de 0). Por compacidad, $\frac{|f|}{|g|} \leq K'$ en ese intervalo, así que $|f(x)| \leq \max\{K, K'\}|g(x)|$ si $x \in [0, \infty]$.
El caso de funciones aritméticas es aún más claro, ya que si h aritmética y si $|h(n)| \leq K|g(n)|$ para $n > n_0$ entonces $|h(n)| \leq \max\{K, \frac{|h(1)|}{|g(1)|} \dots \frac{|h(n_0)|}{|g(n_0)|}\}|g(n)|$ (siempre que estén bien definidos esos cocientes, si numerador y denominador son 0 entonces no hay que hacer nada).

Una notación equivalente es la de $\ll$ y $\gg$. Cuando digamos que $f \ll g$ lo que queremos decir es que $f = O(g)$. Esta notación es más económica ya que son menos símbolos y más sencilla de leer ya que no lleva paréntesis. Se usa más adelante sobre todo, el problema es que no permite escribir un término principal más un término de error de manera sencilla pero es más cómoda cuando todo es una cota.

Otra notación que acompaña a esta es la de *o pequeña*. Del mismo modo que antes diremos que $f = o(g)$ cuando $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$. Ahora vamos a probar dos fórmulas de sumación que permiten traducir sumas en integrales (con algún término de borde o error).

Lema 1.2.2. *Fórmula de sumación de Abel.*
Para toda función aritmética (sucesión) a_n, $n \geq 1$ sea $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$ y f una función con derivada continua en $[1, \infty)$ se cumple que

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \tag{1.20}$$

La prueba está en [CC92] y básicamente es aplicar el teorema fundamental del cálculo. Como $a_n = A(n) - A(n-1)$ y $f(n) - f(n-1) = \int_{n-1}^n f'(t)dt$ y tomando $A(x) = 0$ si $x < 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq \lfloor x\rfloor} a_n f(n) &= \sum_{1\leq n\leq \lfloor x\rfloor} (A(n) - A(n-1))f(n) \\
&= \sum_{1\leq n\leq \lfloor x\rfloor} A(n)f(n) - \sum_{0\leq n\leq \lfloor x\rfloor -1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{1\leq n\leq \lfloor x\rfloor -1} A(n)(f(n) - f(n+1)) + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) \\
&= -\sum_{1\leq n\leq \lfloor x\rfloor -1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) \\
&= -\int_1^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) - \int_{\lfloor x\rfloor}^x A(t)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Aquí aparte de reorganizar bien los sumatorios, el truco está en que al final de la cuarta línea, metemos $A(n)$ dentro de la integral y cambiamos su valor a $A(t)$ que podemos hacerlo ya que si $t \in [n, n+1]$ $A(n) = A(t)$ en casi todo punto, por tanto a efectos de la integral no hay diferencia (mismo truco para ajustar el término de borde).

Antes de poner ejemplos, vamos a introducir la otra fórmula necesaria para traducir sumas a integrales. Esta es conocida como fórmula de sumación de Euler-Maclaurin:

Lema 1.2.3. *Fórmula de sumación de Euler-Maclaurin.*
Sea f una función perteneciente a $C^k([1, n])$ (derivable k veces con continuidad). Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f(j) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \\ \sum_{j=2}^{k} (-1)^j \frac{P_j(0)}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(1)) + \frac{(-1)^{1+k}}{k!} \int_1^n P_k(x) f^{(k)}(x)dx. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Donde $P_j(x)$ son las funciones periódicas de Bernoulli que aparecerán durante la prueba. Las propiedades que nos interesan de ellas es que son periódicas de periodo 1, que en $[0, 1)$ son polinomios de grado j y que su integral entre 0 y 1 es 0 (en particular, $P_j = O(1)$). Como observación, he puesto el intervalo $[1, n]$ pero se puede poner perféctamente cualquier otro, simplemente cambiando $f(x)$ por $f(x - t)$.

La prueba que yo presento viene de [Ap99] donde está explicado con todo lujo de detalles. Empezamos haciendo la diferencia de lo que queremos estimar:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))dx. \tag{1.22}$$

Podemos integrar por partes $\int_k^{k+1}(f(k) - f(x))dx$ para obtener $\int_k^{k+1}(f(k) - f(x))dx = \int_k^{k+1}(x - k - 1)f'(x)dx$. Hemos integrado de tal modo que se anulen los términos de borde. De nuevo, aplicamos el mismo truco que con la fórmula de Abel, $\lfloor x \rfloor = k$ en casi todo punto si $x \in [k, k+1]$ por tanto podemos reemplazar k por $\lfloor x \rfloor$ sin mayor problema, $\int_k^{k+1}(f(k) - f(x))dx = \int_k^{k+1}(x - \lfloor x \rfloor - 1)f'(x)dx$. Esta igualdad nos permite ver que la expresión (1.22) como:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)dx = \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor - 1)f'(x)dx = \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor)f'(x)dx - \int_1^n f'(x)dx$$

$$= \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor)f'(x)dx + f(1) - f(n).$$

Y si reagrupamos los términos y tenemos una versión inicial:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n (x - \lfloor x \rfloor)f'(x)dx + f(1). \tag{1.23}$$

Hasta aquí bien, pero a esto se le da una vuelta muy inteligente, resulta que es mucho más práctico tener multiplicando a f' la primera función periódica de Bernoulli, $P_1(x) =$

$x - \lfloor x \rfloor - 1/2$. Por tanto sumamos y restamos $1/2$ y tenemos la primera aproximación de Euler-Maclaurin:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n P_1(x)f'(x)dx + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)). \tag{1.24}$$

Claramente hasta aquí sólo hemos usado la primera derivada continua. Para las siguientes aproximaciones es cuando necesitaremos las derivadas de orden superior. El plan es integrar por partes, pero de tal manera que el término de borde tenga una buena expresión. Para esto vamos a contruir todas las funciones periódicas de Bernoulli con las propiedades que habíamos dicho antes. P_1 ya integra 0 entre 0 y 1 y es periódica de periodo 1. Definimos recursivamente ($n > 1$):

$$P_n(x) = n \int_0^x P_{n-1}(t)dt + B_n. \tag{1.25}$$

Donde B_n es la constante tal que $\int_0^1 P_n(t)dt = 0$. Veamos que si P_{n-1} tiene las propiedades anteriormente mencionadas, P_n las hereda. Claramente integra a 0 entre 0 y 1 porque lo forzamos. Por el teorema fundamental del cálculo, $P_n'(x) = nP_{n-1}(x)$. Como además P_{n-1} integra a 0 entre todos los enteros consecutivos (lo hace en $[0, 1)$ y es periódica de periodo 1) eso implica que podemos escribir:

$$P_n(x) = n \int_{\lfloor x \rfloor}^x P_{n-1}(t)dt + B_n = n \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} P_{n-1}(t)dt + B_n.$$

Lo que prueba que P_n es una función periódica de periodo 1. El hecho de que en $[0, 1)$ sea un polinimio de grado n está claro tomando el caso base ($P_1(x) = x - 1/2$ en $[0, 1)$) e integrando $n - 1$ veces.

A los números B_n, $n \geq 2$ se les conoce como números de Bernoulli y representan el valor de P_n en cualquier entero (por periodicidad). Podemos hallar una fórmula para calcularlos en función de las funciones P_{n-1}. Como $0 = \int_0^1 P_n(t)dt = B_n + n \int_0^1 \int_0^{x-\lfloor x \rfloor} P_{n-1}(t)dtdx$:

$$B_n = -n \int_0^1 \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} P_{n-1}(t)dtdx = -n \int_0^1 \int_0^x P_{n-1}(t)dtdx.$$

Y si invertimos el orden de sumación:

$$B_n = -n \int_0^1 \int_t^1 P_{n-1}(t)dxdt = -n \int_0^1 (1 - t)P_{n-1}(t)dt = n \int_0^1 tP_{n-1}(t)dt.$$

Para lo último notamos que P_{n-1} integra a 0 entre 0 y 1.

Ahora vamos a dar el segundo paso de inducción (ya que el resto se hace igual). Partimos de la fórmula (1.24) e integramos por partes $\int_1^n P_1(x)f'(x)dx$. Como sabemos que $P_2'(x) = 2P_1(x)$ usamos esta para la integración:

$$\begin{aligned}\int_1^n P_1(x)f'(x)dx &= \frac{1}{2}P_2(x)f'(x)\Big|_1^n - \frac{1}{2}\int_1^n P_2(x)f''(x)dx \\ &= \frac{P_2(0)}{2}(f'(n) - f'(1)) - \frac{1}{2}\int_1^n P_2(x)f''(x)dx.\end{aligned}$$

Metiendo esto en (1.24) tenemos la aproximación de segundo orden:

(1.26)
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx - \frac{1}{2}\int_1^n P_2(x)f''(x)dx + \frac{P_2(0)}{2}(f'(n) - f'(1)) + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)).$$

Sucesivas integraciones por partes dan la fórmula general. Los cambios de signo como se aprecia, vienen de que al integrar por partes la integral cambia el signo. Se puede probar que los números de Bernoulli impares son nulos, con lo que esta fórmula se simplifica bastante ya que no aparecen esos cambios de signo (para j impar $P_j(0) = 0$).

Esta fórmula nos permite sacar resultados complejos, uno de los más importantes es que el truco de la integración por partes se puede usar para definir la función ζ de Riemann de manera holomorfa en todo el plano complejo (salvo en 1). Pero vamos a ver estas dos fórmulas en acción. Nuestro primer ejemplo es probar que $\log(n!) = n\log(n) - n + O(\log(n))$. Usamos la fórmula de Euler-Maclaurin de orden 1, (1.24):

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n}\log(k) = \int_1^n \log(x)dx + \frac{\log(n)}{2} + \int_1^n \frac{P_1(x)}{x}dx.$$

Integrando por partes $\int_1^n \log(x)dx$ tenemos que es igual a $n\log(n) - n + 1$. Por otra parte, como $P_1(x) = O(1)$ tenemos que $\int_1^n \frac{P_1(x)}{x} = \int_1^n \frac{O(1)}{x} = O(\log(x))$, y poniendolo todo junto: $\log(n!) = n\log(n) - n + O(\log(n))$. Si tomamos exponenciales para intentar averiguar el comportamiento asintótico del factorial, nos encontramos con un problema ya que

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}} = O(n^\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} ?\text{ depende de } \alpha.$$

Pero sí que podemos averiguar cosas como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n} - \log(n)}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n + O(\log(n))}{n}} = e^{-1}.$$

Un resultado más general es la *fórmula de Stirling* que afirma que $n! = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n(1 + O(1/n))$. Podemos encontrar pruebas en [CC92] (página 39) y en [Sp98] (página 795).

Otro ejemplo, vamos a calcular el límite:

(1.27)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=N}^{N^2}\frac{1}{n\log(n)}.$$

Se calcula de manera directa usando Euler-Maclaurin de orden 1, (1.24):

$$\sum_{n=N}^{N^2}\frac{1}{n\log(n)} = \int_N^{N^2}\frac{1}{x\log(x)}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N\log(N)} + \frac{1}{N^2 2\log(N)}\right)$$

$$+\int_N^{N^2} \underbrace{P_1(x)\frac{\log(x)+1}{(x\log(x))^2}}_{=O(1/x^2)} dx.$$

Como $\int_1^\infty 1/x^2dx < \infty$ ese último término se va a 0 cuando N se vaya a infinito. Cláramente los términos de borde también se anulan y por tanto basta ver quién es el límite del primer término.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=N}^{N^2} \frac{1}{n\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \int_N^{N^2} \frac{1}{x\log(x)}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\log(n)}^{2\log(N)} \frac{dt}{t} = \lim_{n\to\infty} \log(2\log(N)) - \log(\log(N))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log(2) + \log(\log(N)) - \log(\log(N)) = \log(2).$$

Este límite también se prestaba a calcularse con la sumación por partes de Abel. Sale el mismo resultado pero hay que hacer más cuentas y usar resultados como $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O(1/x)$ donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

En nuestro siguiente ejemplo, vamos a suponer cierto el teorema de los números primos en su forma $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ donde $\pi(x)$ dice el número de primos menores o iguales a x. Definimos $\chi(n)$ como la función característica de los primos (da 1 si n primo y 0 en otro caso). Vamos a calcular cuánto es asintóticamente la suma de los primos menores a una cantidad elevados a una potencia $\alpha > -1$. Esto es:

$$\sum_{p\leq x} p^\alpha = \sum_{n\leq x} n^\alpha \chi(n).$$

Sumamos por partes con la fórmula de Abel, $a_n = \chi(n)$ y $f(n) = n^\alpha$. Tenemos que $A(x) = \pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + o(\frac{x}{\log(x)})$. Por Abel:

$$\sum_{n\leq x} n^\alpha \chi(n) = \pi(x)x^\alpha - \int_2^x \pi(t)\alpha t^{\alpha-1}dt.$$

Empezamos la integral en 2 ya que 1 no es primo.

$$= \left(\frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right)\right) x^\alpha - \alpha\int_2^x \left(\frac{t}{\log(t)} + o\left(\frac{t}{\log(t)}\right)\right) t^{\alpha-1}dt.$$

Queremos ver a qué es igual esto asintóticamente. El primer término es asitóticamente $\frac{x^{\alpha+1}}{\log(x)}$, así que vamos a ver si ese es el límite asintótico (será ese salvo una constante). Tenemos que calcular:

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \alpha\frac{\int_2^x \left(\frac{t}{\log(t)} + o\left(\frac{t}{\log(t)}\right)\right) t^{\alpha-1}dt}{\frac{x^{\alpha+1}}{\log(x)}}.$$

Si miramos a la segunda fracción, está claro que el denominador se va a infinito ($\alpha > -1$). Queremos aplicar L'Hopital, para ello hay que ver que el numerador también se va a infinito:

$$\int_2^x \left(\frac{t}{\log(t)}\right) t^{\alpha-1} dt = \int_2^x \frac{t^{\alpha+1}}{t\log(t)} dt = \int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{e^{u(\alpha+1)}}{u} du.$$

Y así está claro ver que esta integral se va a infinito cuando x va a infinito. Por tanto aplicamos L'Hopital para hallar ese límite:

$$1 - \alpha \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{\log(x)} + o\left(\frac{x^\alpha}{\log(x)}\right)}{\frac{(\alpha+1)x^\alpha \log(x) - x^\alpha}{(\log(x))^2}} = 1 - \alpha\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Aquí he abreviado las cuentas, ya que técnicamente el tratamiento de la parte del error debiera hacerse con un ϵ y tomando límite superior pero el resultado es el correcto. Rehaciendo nuestro cálculo inicial, esto nos dice que

$$\sum_{p\le x} p^\alpha \sim \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\log(x)}. \tag{1.28}$$

Está claro que si $\alpha < -1$ la suma de las potencias de primos converge (por comparación con la integral por ejemplo). ¿Qué ocurre en $\alpha = -1$?. Dejaremos la pregunta hasta llegar a los teoremas de Mertens.

En nuestro siguiente ejemplo, queremos ver cómo se comporta la suma de divisores hasta un número dado. Sea $d(n) = (1 * 1)(n)$ el número de divisores de n. Como tenemos d expresado como un sumatorio sobre los divisores de una cierta función f (en este caso f es idénticamente 1) vamos a usar la identidad:

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\le x}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor f(n). \tag{1.29}$$

La prueba de esto es que fijado un número n entre 1 y x nos preguntamos cuántas veces estamos sumando $f(n)$ (que será exáctamente $\lfloor x/n \rfloor$). Podemos generalizar este resultado un poco más (ya que nos será útil más adelante). Dada una función $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ se verifican las igualdades:

$$\sum_{n\le x}\sum_{m\le x/n} g(n,m) = \sum_{m\le x}\sum_{n\le x/m} g(n,m) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n} g(d, n/d). \tag{1.30}$$

En algunos libros como [IK04] se refieren a esta expresión como sumar por hipérbolas. La primera igualdad es sencillamente un cambio de variables, lo único que hay que tener en cuenta es la región en la que estamos integrando. Lo que hacemos es sumar $g(n,m)$ por cada punto de coordenadas enteras $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $nm \le x$. El primer miembro corresponde a fijar un eje y sumar en el otro, el segundo a fijar el otro eje y sumar en el primero. El último miembro es el curioso, corresponde a, fijada la hipérbola $dc = n$, sumo $g(d,c) = g(d, n/d)$ por cada punto de coordenadas enteras que cae en la hipérbola (que es precisamente una pareja $(d, n/d)$ por cada divisor de n). Está claro que la fórmula (1.29) es un caso particular de (1.30), tomando $g(n,m) = f(n)$.

Volviendo a nuestro ejemplo, como $f(n) \equiv 1$:

$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{n\le x}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{n\le x}\left(\frac{x}{n} + O(1)\right) = x\sum_{n\le x}\frac{1}{n} + O(x)$$

$$= x(\log(x) + O(1)) + O(x) = x\log(x) + O(x).$$

Esta estimación se puede mejorar a :

$$\sum_{n\le x} d(n) = x\log(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}). \tag{1.31}$$

Donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. Para probar esta estimación necesitamos la clásica $\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O(1/x)$ que se prueba usando (1.20) (sumación por partes de Abel) o por (1.21) (Euler-Maclaurin).

Para esta prueba seguimos los pasos de [HW08]. En primer lugar, usando la fórmula (1.30) tenemos que $\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{n\le x}\sum_{m\le x/n} 1$. Lo que nos dice la segunda fórmula es que tenemos que sumar 1 por cada punto (a,b) de coordenadas en los naturales $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ que caen por debajo (o encima) de la hipérbola $ab = x$. Para hacer esta cuenta, por simetría de la hipérbola, vamos a contar los puntos hasta tales que $a \le \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ y multiplicamos por 2 (que sería como contar los que tienen $b \le \lfloor\sqrt{x}\rfloor$). El problema es que habremos sumado dos veces los puntos (a,b) tales que $a,b \le \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ por tanto tenemos que quitar estas repeticiones. De modo que nos queda

$$\sum_{n\le x} d(n) = 2\sum_{n\le\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\sum_{m\le x/n} 1 - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 = 2\sum_{n\le\lfloor\sqrt{x}\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$$
$$= 2\sum_{n\le\lfloor\sqrt{x}\rfloor}(\frac{x}{n} + O(1)) - (\sqrt{x} + O(1))^2.$$

Y ahora aplicando la aproximación del número armónico nos queda

$$\sum_{n\le x} d(n) = 2x(\log\sqrt{x} + \gamma + O(1/\sqrt{x})) + O(\sqrt{x}) - x + O(\sqrt{x})$$
$$= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Proposición 1.2.4. *Expresiones integrales de la función zeta.*
Podemos extender la función zeta a una funcón meromorfa en $Re(s) > 0$ con un único polo en $s = 1$ con residuo igual a 1 y expresión:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}dt. \tag{1.32}$$

Esta es una de las aplicaciones más importantes de estos dos métodos de sumación. Si recordamos, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ está definida en el semiplano $\{Re(s) > 1\}$. Le aplicamos la sumación por partes de Abel (1.20) con $a_n = 1$ y $f(n) = n^{-s}$ a la suma parcial $\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}$:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt = \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} - \int_1^x -s\lfloor t\rfloor\frac{1}{t^{s+1}}dt.$$

Como vamos a hacer tender x a infinito, nos interesa tener dentro de la integral algo con mejor convergencia.

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}} + \frac{1}{t^s}dt.$$

Como $\int_1^x t^{-s}dt = x^{1-s}/(1-s) - 1/(1-s)$, sustituyendo tenemos:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} + \frac{sx^{1-s}}{1-s} - \frac{s}{1-s} + s\int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}dt.$$

Sabemos que cuando $x \to \infty$ la parte de la izquierda converge a una función holomorfa cuando $Re(s) > 1$. Poniéndonos en ese caso y haciendo tender x a infinito Tenemos que los dos primeros términos se anulan y como $\lfloor t\rfloor - t = O(1)$ lo que hay dentro de la integral es $O(1/t^{Re(s)+1})$ y por tanto la integral es convergente. Obtenemos la igualdad

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}dt,$$

que es válida cuando $Re(s) > 1$. Sin embargo, la integral de la derecha converge cuando $Re(s) > 0$ y de hecho define una función holomorfa en esa región. Para comprobar esto aplicamos el teorema de Morera. Sea $g(s) = \int_1^{\infty} \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}dt$ y γ una curva C^1 a trozos $\gamma : [0,1] \to \{Re(s) > 0\}$ cerrada. Para ver que g es holomorfa basta ver que $\int_\gamma g(s)ds = 0$ para cualquier curva γ. Esto último quiere decir que:

$$\int_0^1 g(\gamma(u))\gamma'(u)du = \int_0^1 \int_1^{\infty} \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{\gamma(u)+1}}\gamma'(u)dtdu = 0.$$

Como $\gamma([0,1]) \subset \{Re(s) > 0\}$ es compacto, existe un mínimo para su parte real, $Re(\gamma(u)) > \sigma > 0$ para todo $u \in [0,1]$. Por tanto $\left|\frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{\gamma(u)+1}}\gamma'(u)\right| \leq |\gamma'(u)/t^{\sigma+1}|$ que es integrable. Por Fubini tenemos que

$$\int_\gamma g(s)ds = \int_1^{\infty}\int_0^1 \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{\gamma(u)+1}}\gamma'(u)dudt = \int_1^{\infty} \underbrace{\int_\gamma \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}ds}_{=0 \text{ ya que lo dentro es holomorfo}} dt = 0,$$

lo que prueba que $\int_1^{\infty} \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}dt$ define una función holomorfa (en $Re(s) > 0$). Esto prueba (1.32), si ahora multiplicamos esa expresión por $s-1$ y tomamos el límite cuando $s \to 1$ se obtine que el residuo es igual a 1.

Llegados a este punto, $\lfloor t\rfloor - t$ se parece mucho a la primera función periódica de Bernoulli, por lo que forzamos que sea esta cambiando el signo y sumando y restando $1/2$. Se hacen unas sencillas cuentas y llegamos a la siguiente expresión de ζ:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^{\infty} \frac{P_1(t)}{t^{s+1}}dt. \tag{1.33}$$

El mismo argumento de antes nos garantiza que lo de la derecha es meromorfo (en 1 hay un polo) en $Re(s) > 0$. Realmente lo que se usaba es que $\lfloor t\rfloor - t = O(1)$ y como $P_1(t) = O(1)$ podemos hacer las mismas cuentas.

Llegados hasta aquí podemos seguir integrando por partes (que es esencialmente sacar más términos de la fórmula de Euler-Maclaurin $\int_1^N P_1(t)t^{-s-1}dt$:

$$\int_1^N P_1(t)t^{-s-1}dt = (1/2)P_2(t)t^{-s-1}\Big|_1^N + \frac{s+1}{2}\int_1^N P_2(t)t^{-s-2}dt$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} -\frac{1}{2}B_2 + \frac{s+1}{2}\int_1^{\infty} P_2(t)t^{-s-2}dt.$$

Donde $B_2 = P_2(1)$ el el segundo número de Bernoulli. Recordemos que para $n \geq 2$, $B_n = P_n(0) = P_n(1)$ (por periodicidad). Y sustituyendo esto en nuestra expresión inicial:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\left(-\frac{1}{2}B_2 + \frac{s+1}{2}\int_1^\infty P_2(t)t^{-s-2}dt\right).$$

De nuevo se prueba que la integral de la derecha es holomorfa pero ahora lo es en la región $Re(s) > -1$. Lo que se usa es esencialmente que $P_2(t) = O(1)$ y que $\int_1^\infty \frac{1}{t^\delta}dt < \infty$ si $\delta > 1$. Está claro que este proceso se puede iterar indefinidamente y al final obtendremos una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$ (con un solo polo en $s = 1$). A partir de ahora llameremos ζ a esta extensión meromorfa a todo el plano complejo. La fórmula general para $s \in \{Re(s) > 1-k\}$ será:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{k}\binom{s+j-2}{j-1}\frac{B_j}{j} - \binom{s+k-1}{k}\int_1^\infty \frac{P_k(t)}{t^{s+k}}dt. \tag{1.34}$$

Estas últimas expresiones permiten deducir el valor concreto de ζ en los enteros negativos de manera inmediata (ya que al evaluar se anula la parte de la integral), por ejemplo $\zeta(0) = -1/2$. Por otra parte, como ζ tiene un polo en $s = 1$ con residuo igual a 1, $f(s) = 1/\zeta(s)$ tendrá un cero en $s = 1$. En ese punto podemos calcular $f'(1)$:

$$f'(1) = \lim_{s\to 1}\frac{\frac{1}{\zeta(s)} - 0}{s-1} = \lim_{s\to 1}\frac{1}{(s-1)\zeta(s)} = 1.$$

Teorema 1.2.5. *Teoremas de Mertens.*
Se verifican las fórmulas

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1) \tag{1.35}$$

y

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}. \tag{1.36}$$

Estos teoremas suponen un resultado previo al teorema de los números primos, el primero de ellos afirma:

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1).$$

Vamos usar una fórmula 1.29 que ya habíamos probado

$$\sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\leq x}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor f(n),$$

y vamos a definir la función $\Lambda(n)$ conocida como símbolo de von Mangoldt como:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Usando la definición de ζ como producto infinito (1.8) (producto de Euler, que converge en $Re(s) > 1$ por el criterior M de Weierstrass) y la suma de la serie geométrica vamos a probar que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{1.37}$$

En $Re(s) > 1$ podemos expresar ζ como $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ que converge uniformemente sobre compactos usando el criterio M de Weierstrass. Este mismo criterio nos dice también cuál es el valor de la derivada logarítmica:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \text{ primos}} -\frac{\log(p)}{p^s - 1} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Por el criterio M de Weierstrass, sabemos que la serie de la derecha converge uniformemente sobre compactos en $Re(s) > 1$. Como hay convergencia absoluta (para cada s) podemos reagrupar los términos. Fijado un primo p del sumatorio de la derecha cogemos todos los términos que tengan denominador p^m para algún $m \geq 1$ y los sumamos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\log(p)}{p^{ms}} = -\log(p) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} = \log(p) \frac{-\frac{1}{p^s}}{\frac{1}{p^s} - 1} = \frac{\log(p)}{1 - p^s}.$$

Y por último sumando sobre cada primo tenemos el resultado buscado (recordemos que la Λ es 0 en números compuestos). Como la derivada de ζ es también una serie de Dirichlet, $\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log(n)}{n^s}$ tenemos una igualdad importante entre funciones aritméticas, $\log = 1 * \Lambda$. Esto nos expresa el logaritmo como una suma sobre los divisores, lo que nos permite usar nuestra fórmula 1.29 para hallar:

$$\sum_{n \leq x} \log(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n).$$

Queremos 'quitar' la parte entera pero para eso hay que pagar el precio de $O(1)$ por lo que nos interesa saber quién es $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. El primer miembro de la igualdad es $\log(\lfloor x \rfloor !) = x \log(x) + O(x)$ (tenemos cosas más precisas pero no es necesario). Es más práctico aproximar $\sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n)$. Usamos que $0 \leq \lfloor x/n \rfloor - 2\lfloor x/2n \rfloor \leq 1$ y que si $x/2 < n \leq x$ entonces $\lfloor x/n \rfloor = 1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) \underbrace{\lfloor x/n \rfloor}_{=1} + \sum_{n \leq x/2} \underbrace{(\lfloor x/n \rfloor - 2\lfloor x/2n \rfloor)}_{\geq 0} \Lambda(n) \\
&= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \lfloor x/n \rfloor - 2 \sum_{n \leq x/2} \Lambda(n) \lfloor x/2n \rfloor \\
&= x \log(x) + O(x) - 2\frac{x}{2} \log(x) + O(x) = O(x).
\end{aligned}$$

El hecho de que dos cantidades positivas estén controladas por $O(x)$ implica que cada una de ellas lo está. Como existe una constante M tal que $\sum_{x/2 < n \leq x} \Lambda(n) \leq Mx$. Aplicando esta fórmula a la suma entre $x/4$ y $x/2$, $x/8$ y $x/16$ etcétera (hasta que ya no tenga más términos) implica que:

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\sum_{x/2<n\leq x}\Lambda(n)+\sum_{x/4<n\leq x/2}\Lambda(n)+...+\sum_{x/2^k<n\leq x/2^{k-1}}\Lambda(n)$$
$$\leq Mx+\frac{Mx}{2}+\frac{Mx}{4}+...+\frac{Mx}{2^{k-1}}\leq 2Mx,$$

(la suma tiene un número finito de términos hasta que $x/2^{k-1}<1$). Por tanto $\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=O(x)$ tenemos

$$x\log(x)+O(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}+O(1)\right)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\frac{x}{n}+O(x),$$

y dividiendo entre x tenemos (casi) el resultado buscado:

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)/n=\log(x)+O(1).$$

Basta ver que $\sum_{n\leq x}\Lambda(n)/n-\sum_{n\leq x}\frac{\log(p)}{p}=O(1)$. Es trivial que al hacer esa diferencia los términos que tienen en el denominador un primo elevado a 1 se anulan y queda:

$$\sum_{p\leq x}\sum_{m=2,p^m\leq x}\frac{\log(p)}{p^m}=\sum_{p\leq x}\log(p)\sum_{m=2,p^m\leq x}\frac{1}{p^m}\leq\sum_{p\leq x}\log(p)\frac{0-\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{p}-1}$$
$$=\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p(p-1)}\leq\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{2p^2}=O(1).$$

La última igualdad se desprende de que podemos comparar esa suma con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{2n^2}<\infty$. Con esto ya podemos concluir el primer teorema de Mertens:

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log(p)}{p}=\log(x)+O(1).$$

A partir de esta fórmula se puede deducir el comportamiento asintótico de $\sum_{n\leq x}\frac{1}{p}$. Basta sumar por partes (1.20), si llamamos $C(x)=\sum_{n\leq x}\frac{\log(p)}{p}=\log(x)+e(x)$:

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{p}=\frac{C(x)}{\log(x)}+\int_2^x\frac{C(t)}{t\log^2(t)}dt=1+\frac{e(x)}{\log(x)}+\int_2^x\frac{1}{t\log(t)}dt+\int_2^x\frac{e(t)}{t\log^2(t)}dt$$

$$=1+\frac{e(x)}{\log(x)}+\log\log x-\log\log 2+\int_2^{\infty}\frac{e(t)}{t\log^2(t)}dt-\int_x^{\infty}\frac{e(t)}{t\log^2(t)}dt.$$

Como $e(x)=O(1)$ se ve fácilmente (integrando) que

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+M+O\left(\frac{1}{\log(x)}\right), \tag{1.38}$$

donde $M=1-\log\log 2+\int_2^{\infty}\frac{e(t)}{t\log^2(t)}dt$. Ahora vamos a demostrar el segundo teorema de Mertens siguiendo la prueba de [HW08]. Este dice que:

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}.$$

Para probarlo vamos a ver que es suficiente ver que la constante M es igual a

$$M=\gamma+\sum_{p}\left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right),$$

ya que con esto tendríamos

$$\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=M-\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\gamma+o(1).$$

Usando la fórmula que acabamos de probar (1.38) sabemos que $M-\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=-\log\log x+O(1/\log x)$ y por tanto:

$$\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\log\log x-\gamma+o(1).$$

Y por último tomamos exponenciales,

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}e^{o(1)}}{e^{\log(\log(x))}}=\frac{e^{-\gamma}e^{o(1)}}{\log(x)}$$

lo que concluiría la prueba del segundo teorema de Mertens. Ahora para ver quién es efectivamente esa constante M empezamos definiendo:

$$F(\delta)=\sum_{p}\left(\log\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)+\frac{1}{p^{1+\delta}}\right). \tag{1.39}$$

Tenemos que recordar el desarrollo en serie de potencias del logaritmo. Para ello, sea $f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j}$ definida para $|z|<1$. Como $f'(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j=\frac{1}{1-z}$ se ve claramente que $e^{f(z)}=\frac{1}{1-z}$ y tomando la rama principal del logaritmo (recordemos $|z|<1$) , $-f(z)=\mathrm{Log}(1-z)$. Para valores reales positivos los valores del logaritmo complejo son iguales a los del real. Podemos por tanto definir la función F como en (1.39) y será una función de variable compleja holomorfa en $Re(\delta)>-1/2$. Para ver esto aplicamos el criterio de Weierstrass. Antes ya hemos visto el desarrollo en serie de potencias del logaritmo así que:

$$\left|\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{p^{1+\delta}}\right)+\frac{1}{p^{1+\delta}}\right|=\left|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{-1}{jp^{(1+\delta)j}}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2p^{2+2Re(\delta)}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^{(1+Re(\delta))j}}\leq p^{-2-2Re(\delta)}.$$

Con esa expresión está claro que ahora ya dado un compacto (en $Re(\delta)>-1/2$) podemos encontrar una cota uniforme y aplicar el criterio M de Weierstrass. Como esta función es holomorfa se cumple que $F(\delta)\to F(0)$ cuando $\delta\to 0$. En particular también me dice que esa serie converge en $\delta=0$. Ocurre que sin embargo, en la definición de F

no podemos separar en dos sumatorios ya que por separado ambos sólo convergen cuando $Re(\delta) > 0$. Pero es precisamente lo que nos interesa, así que sea

$$g(\delta) = \sum_p p^{-1-\delta},$$

que define una función holomorfa en $Re(\delta) > 0$ (aplicando el criterio M de Weierstrass). El otro trozo del sumatorio (de la función F) está bien definido también cuando $Re(\delta) > 0$ (por un argumento similar) y si nos fijamos en su expresión para valores de δ reales vemos que es $-\log \zeta(1+\delta)$ (por la expresión como producto de Euler), con lo que para valores de δ reales positivos tenemos $F(\delta) = g(\delta) - \log(\zeta(1+\delta))$.

Ahora usamos la fórmula (1.38) anteriormente probada, $S(x) = \sum_{n\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + E(x)$ con $E(x) = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$ para sumar por partes (1.20) la función g:

$$\sum_{p\leq x} p^{-1-\delta} = x^{-\delta} S(x) + \delta \int_2^x t^{-1-\delta} S(t)dt.$$

Haciendo tender $x \to \infty$ y trabajando ahora para $\delta > 0$ (real):

$$g(\delta) = \delta \int_2^\infty t^{-1-\delta} S(t)dt = \delta \int_2^\infty t^{-1-\delta}(\log(\log(t)) + M)dt + \delta \int_2^\infty t^{-1-\delta} E(t)dt.$$

Bien, ahora hay que resolver esas integrales. Para la primera usamos el cambio de variable $t = e^{u/\delta}$ y recordamos que la función Γ de Euler tiene una expresión integral y que la constante γ de Euler es igual a $\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_o^\infty e^{-x}\log(x)dx$:

$$\delta \int_1^\infty t^{-1-\delta} \log(\log(t))dt = \int_0^\infty e^{-u} \log\left(\frac{u}{\delta}\right) du = -\gamma - \log(\delta),$$

y

$$\delta \int_1^\infty t^{-1-\delta} dt = 1.$$

Por tanto nos queda

$$g(\delta) + \log(\delta) + \gamma - M = \delta \int_2^\infty t^{-1-\delta} E(t)dt - \delta \int_1^2 t^{-1-\delta}(\log(\log(t)) + M)dt$$

(tenemos que restar este trozo porque si nos fijamos, las integrales de antes empiezan en 1, no en 2). Ahora ya sólo falta calcular lo último:

$$\delta \int_2^\infty t^{-1-\delta} E(t)dt \leq \delta \int_2^\infty \frac{A}{t^{\delta+1}\log(t)} dt, \ A = cte.$$

Dividimos la integral en dos trozos:

$$\left| \delta \int_2^T \frac{A}{t^{\delta+1}\log(t)} dt \right| + \left| \delta \int_T^\infty \frac{A}{t^{\delta+1}\log(t)} dt \right| \leq \frac{A}{\log(2)}(2^{-\delta} - T^{-\delta}) + \frac{AT^{-\delta}}{\log(T)}.$$

Tomando $T = e^{1/\sqrt{\delta}}$ y haciendo tender $\delta \to 0$ se ve que esa cantidad se va a 0. La otra es más sencilla:

$$\left|\delta \int_1^2 t^{-1-\delta}(\log(\log(t)) + M)dt\right| \leq \delta \int_1^2 t^{-1}|\log(\log(t)) + M|dt = \delta O(1).$$

Ya casi hemos acabado, haciendo tender $\delta \to 0$ está claro que $g(\delta) + \log(\delta) \to M - \gamma$. Usando la expresión integral de ζ (1.33),

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{P_1(t)}{t^{s+1}}dt,$$

tenemos que $\zeta(1+\delta)\delta \to 1$ cuando $\delta \to 0$, y tomando logaritmos, $\log \zeta(1+\delta) + \log(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. Como $F(\delta) = g(\delta) - \log \zeta(1+\delta)$,

$$F(0) = \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right) = \lim_{\delta\to 1} g(\delta) - \log\zeta(1+\delta)$$

$$= \lim_{\delta\to 1} \underbrace{g(\delta) + \log(\delta)}_{\to M-\gamma} - \underbrace{(\log(\delta) + \log\zeta(1+\delta))}_{\to 0} = M - \gamma.$$

Y esto concluye la prueba del segundo teorema de Mertens.

1.3. Equivalencias del teorema de los números primos

Ahora vamos a enunciar el teorema de los números primos en su forma clásica y vamos a mostrar varias fórmulas equivalentes. La forma más habitual del teorema de los números primos es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1 \tag{1.40}$$

donde $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales a x.

Equivalencia 1.3.1. $\pi(x) \sim Li(x)$.

Lo primero que vamos a mostrar es que el teorema de los números primos es equivalente a $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ donde $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$. La función Li se conoce como logaritmo integral. Para probar esto está claro que es suficiente ver que $\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ lo que se prueba por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}}{\frac{x}{\log(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log(x)}}{\frac{\log(x)-1}{\log^2(x)}} = 1.$$

Aunque asintóticamente sean iguales, es posible ver (en [Cha11] hay ejemplos con algunos errores) que el logaritmo integral es mejor aproximación que $x/\log(x)$. De hecho es posible ver que la discrepancia para valores grandes de x será elevada. Para probar esto, calculamos:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\log(x)} - 1\right)\log(x).$$

La manera de proceder es integrar por partes el logaritmo integral:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} = \frac{t}{\log(t)}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)} = \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}.$$

Así que nos queda que

$$\frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\log(x)} = 1 - \frac{2\log(x)}{\log(2)x} + \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{x/\log(x)}.$$

Ahora ya podemos calcular nuestro límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\log(x)} - 1\right)\log(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{2\log^2(x)}{\log(2)x} + \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{x/\log^2(x)}.$$

Está claro (por la regla de L'Hopital) que el primer término se va a 0 cuando x se va a infinito. Para el segundo, usando el mismo método tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{x/\log^2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log^2(x)}}{\frac{\log^2(x)-2\log(x)}{\log^4(x)}} = 1.$$

Esto nos dice que para valores de x *grandes*, $\mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log(x)} \approx \frac{x}{\log^2(x)}$. Esta última cantidad crece casi tan rápido como x, por eso la discrepancia que encontramos es grande.

Equivalencia 1.3.2. *$p_n \sim n\log(n)$.*

Donde p_n representa el primo n-ésimo. Para probar esta equivalencia empecemos partiendo del teorema de los números primos. Es trivial que $\pi(p_n) = n$ para cualquier n. Como $\pi(p_n) = n \sim p_n/\log(p_n)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log(p_n)}{p_n} = 1.$$

Tomando logaritmos tenemos que $\log(n) - \log(p_n) + \log\log(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dividiendo esta expresión entre $\log(p_n)$ está claro que deducimos que $\log(n) \sim \log(p_n)$ (ya que $\log\log p_n = o(\log p_n)$). Y con esto, partiendo de $\frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ y tomando $x = p_n$:

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(p_n)}{p_n/\log(p_n)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n/\log(n)}}_{\pi(p_n)=n \text{ y } \log(n)\sim\log(p_n)}.$$

Lo que prueba que $p_n \sim n\log(n)$.

Para el recíproco, dado $x \geq 2$ está claro que $p_{\pi(x)} \leq x < p_{\pi(x)+1}$. Como ahora hemos supesto que $p_n \sim n\log(n)$ tomando $n = \pi(x)$ deducimos que $p_{\pi(x)} \sim \pi(x)\log(\pi(x))$ (basta notar que $\pi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$). Ahora podemos deducir que como

$$1 \leq \frac{x}{p_{\pi(x)}} < \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}},$$

al tomar el límite cuando $x \to \infty$ nos queda

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{p_{\pi(x)}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\pi(x)+1)}{\pi(x)} \frac{\log(\pi(x)+1)}{\log(\pi(x))} = 1.$$

Así que $p_{\pi(x)} \sim x$. Ahora partiendo de $\lim_{n\to\infty} p_n/(n\log n) = 1$ si tomamos logaritmos se deduce (igual que antes prácticamente, dividiendo entre $\log(n)$ y notando que $\log\log n = o(\log(n))$) que $\log(p_n) \sim \log(n)$. Y de modo equivalente (tomando logaritmos):

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log(p_{\pi(x)})} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\log p_{\pi(x)+1}}{\log p_{\pi(x)}} \leq \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\pi(x)+1)}{\log \pi(x)}}_{\log(p_n)\sim\log(n)} = 1.$$

Y esto prueba que $\log x \sim \log \pi(x)$. Ahora solo resta calcular el siguiente límite con $n = \pi(x)$:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{p_n}{n\log(n)}}_{\text{tomamos } n=\pi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_{\pi(x)}}{\pi(x)\log(\pi(x))} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi(x)\log(x)}}_{\log(\pi(x))\sim\log(x) \text{ y } p_{\pi(x)}\sim x}.$$

Equivalencia 1.3.3. *$\theta(x) \sim x$ o $\psi(x) \sim x$.*

Donde estas funciones se definen como:

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log(p) \text{ y } \psi(x) = \sum_{p^m\leq x} \log(p).$$

Está claro que $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ donde la función Λ es el símbolo de von Mangoldt. Esta demostración viene de [CC92] y prueba que $\frac{\pi(x)}{x/\log(x)}$, $\theta(x)/x$ y $\psi(x)/x$ tienen los mismos límites de indeterminación (límites superior e inferior).

Para empezar, podemos ver que la función ψ tiene como expresión

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p),$$

ya que por cada primo tenemos que sumar $\log(p)$ tantas veces como $p^m \leq x$. Con esta expresión tenemos las desigualdades:

$$\sum_{p\leq x} \log(p) \leq \sum_{p\leq x} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \leq \sum_{p\leq x} \log(x).$$

O lo que es lo mismo, dividiendo todo entre x:

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\log(x)}{x}.$$

Tomando límites superiores e inferiores tenemos las desigualdades en una dirección. Para la contraria, sea $\delta \in (0,1)$,

$$\theta(x) \geq \sum_{x^\delta < p \leq x} \log(p) \geq \log(x^\delta)(\pi(x) - \pi(x^\delta)) \geq \log(x^\delta)(\pi(x) - x^\delta).$$

Dividiendo entre x y tomando límites superiores (respec. límites inferiores):

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq \limsup_{x\to\infty} \log(x^\delta)\frac{\pi(x) - x^\delta}{x} = \delta \limsup_{x\to\infty} \frac{\log(x)\pi(x)}{x}.$$

Y haciendo tender $\delta \to 1$ tenemos las desigualdades contrarias.

Otra forma de probar que el teorema de los números primos es equivalente a $\psi \sim x$ es usar una relacción más explícita entre Li, $\pi(x)$ y ψ que aparece en [Cha11] (fórmula 1.9). Para empezar, veamos que $\pi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) + O(\sqrt{x})$. Esto es así ya que si miramos la diferencia $\sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) - \pi(x)$ vemos que esencialmente es sumar $1/m$ por cada primo p tal que $p^m \leq x$ con $m \geq 2$. Esto dice exáctamente que $\sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) - \pi(x) \leq \pi(x^{1/2}) + \pi(x^{1/3}) + ... + \pi(x^{1/k})$ (acotamos los $1/m$ por 1) donde $k = \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(2)} \right\rfloor$ (ya que para k mayor a ese, $\pi(x^{1/k}) = 0$). Ahora vamos a usar la equivalencia que acabamos de probar. Ya sabíamos (visto en la prueba de los Teoremas de Mertens) que $\psi(x) = O(x)$. Por la equivalencia que acabamos de ver, tenemos que $\pi(x) = O(x/\log(x))$. Juntando estos dos ingredientes:

$$|\sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) - \pi(x)| \leq \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(2)} \right\rfloor \pi(x^{1/2}) \leq \frac{\log(x)}{\log(2)} A \frac{x^{1/2}}{\log(x^{1/2})} = \frac{2A}{\log(2)} x^{1/2}.$$

Por tanto esto prueba que $\sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) - \pi(x) = O(\sqrt{x})$. Ahora, para probar la identidad de [Cha11] lo único que falta es sumar por partes (1.20).

$$\begin{aligned}\pi(x) + O(\sqrt{x}) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)/\log(n) &= \frac{\psi(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t)dt}{t\log^2(t)} \\ &= \frac{\psi(x) - x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t\log^2(t)} dt + \frac{x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}.\end{aligned}$$

Ordenado de ese modo, se ve que los últimos dos términos suman $\mathrm{Li}(x) + \frac{2}{\log(2)}$ (basta mirar más arriba cuando integramos por partes el logaritmo integral). Y con esto se concluye que:

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \frac{\psi(x) - x}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t\log^2(t)} dt + O(x^{1/2}). \tag{1.41}$$

Equivalencia 1.3.4. $x^{-1} \sum_{n\leq x} \mu(n) \to 0$.

Esta es la equivalencia más complicada, seguimos el esquema de [Cha07]. Primero empecemos suponiendo el teorema de los números primos, que ya hemos visto que es equivalente a $\psi(x) \sim x$. Lo primero que hay que probar es la identidad:

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)\log(n) = -\sum_{n\leq x} \mu(n)\psi(x/n).$$

Empezamos con el miembro de la derecha, como $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ se tiene que:

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)\psi(x/n) = \sum_{n\leq x} \sum_{j\leq x/n} \mu(n)\Lambda(j).$$

Ahora vamos a usar el mismo truco que usamos para probar la estimación buena de $\sum_{n\leq x} d(n)$ donde $d(n)$ es el número de divisores de n. Ya sabemos cómo cambiar el orden de sumación a hipérbolas, así que aplicando (1.30):

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)\psi(x/n) = \sum_{j\leq x} \sum_{d|j} \mu(j/d)\Lambda(d) = \sum_{j\leq x} (\mu * \Lambda)(j).$$

Por tanto sólo queda probar que $\mu * \Lambda = -\mu \log$. Recordando la identidad que teníamos para la derivada logarítmica de la función ζ, $1 * \Lambda = \log$. Invirtiendo la convolución con 1 y convolucionando con μ nos queda $\mu * \Lambda = \mu * \mu * \log$. Esa última expresión corresponde a la serie de Dirichlet de $(1/\zeta)(1/\zeta)(-\zeta')$ pero esto es exactamente $(1/\zeta)'$ y tenemos una expresión para esta derivada:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\mu(n)\log(n)}{n^s}.$$

Con lo que $\mu * \mu * \log = -\mu \log$. Ahora, como $1 * \mu = i$ donde $i(n) = 1$ si $n = 1$ y es 0 en el resto de casos se ve claramente que $1 = \sum_{n \le x} \mu(n) \lfloor x/n \rfloor$ (usando la fórmula (1.29), que de nuevo es pasar de sumar por hipérbolas a sumar en vertical).

Como hemos supuesto el teorema de los números primos, $\psi(x) - \lfloor x \rfloor = o(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \mu(n) \log(n) &= -\sum_{n \le x} \mu(n)(\psi(x/n) - \lfloor x/n \rfloor + \lfloor x/n \rfloor) \\ &= \sum_{n \le x} o(x/n) - 1. \end{aligned}$$

Ahora ya sólo es un ejercicio ver que $\sum_{n \le x} \mu(n) \log(n) = o(x \log(x))$. Como $\psi(x/n) - \lfloor x/n \rfloor = o(x/n)$, dado $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que si $x/n \ge T$ entonces $|\psi(x/n) - \lfloor x/n \rfloor| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} \frac{|\sum_{n \le x} \mu(n)\log(n)|}{x\log(x)} &\le \frac{|\sum_{n \le x/T} o(x/n)|}{x \log(x)} \\ &+ \frac{|\sum_{x/T < n \le x} \mu(n)(\psi(x/n) - \lfloor x/n \rfloor)|}{x\log(x)} + \frac{1}{x\log(x)} \\ &\le \frac{\epsilon x \sum_{n \le x/T} 1/n}{x \log(x)} + \sup_{j \le T} |\psi(j) - j| \frac{x(1-1/T)}{x\log(x)} + \frac{1}{x\log(x)}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n \le x/T} 1/n = \log(x) + O(1)$ tomando límites superiores cuando $x \to \infty$ nos queda $\limsup_{x \to \infty} |\sum_{n \le x} \mu(n)\log(n)|/(x\log(x)) \le \epsilon$ y haciendo tender $\epsilon \downarrow 0$ tenemos que efectivamente $\sum_{n \le x} \mu(n)\log(n) = o(x\log(x))$. Ya lo último que queda es sumar por partes (1.20) $\sum_{n \le x} \mu(n)$ para tener el resultado buscado:

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \mu(n) &= \frac{o(x\log(x))}{\log(x)} + \int_2^x \frac{o(t\log(t))}{t\log^2(t)} dt + O(1) \\ &= o(x) + o(\mathrm{Li}(x)) + O(1) = o(x) + o(x/\log(x)) + O(1). \end{aligned}$$

Siendo más formales, habría que dividir la integral en dos trozos como hemos hecho antes con el sumatorio, tomar límites superiores y hacer tender un ϵ a 0. Al final sale que al dividir por x y tomar límite cuando x va a infinito, $x^{-1} \sum_{n \le x} \mu(n) \to 0$. El término $O(1)$ que aparece arriba sale de que como $\log(1) = 0$, para no tener problemas dejamos fuera $\mu(1)$ y trabajamos desde $n = 2$. Como al final dividimos entre x el término de borde no nos molesta ya que se va a 0.

Para el recíproco empezamos despejando la función ψ. Para ello, tenemos $\Lambda = \mu * \log$ y sumando hasta x:

$$\psi(x) = \sum_{m \le x} \Lambda(m) = \sum_{m \le x} \sum_{d|m} \mu(d) \log(m/d).$$

De nuevo, aplicando el truco de sumar por hipérbolas (1.30) a sumar en vertical nos queda $\psi(x) = \sum_{m\leq x}\sum_{d\leq x/m}\mu(d)\log(m)$. Esto mismo aplica a las identidades $1 = \mu * d$ (donde $d(m)$ es el número de divisores de m) y a $i = \mu * 1$ (i es la función $i(1) = 1$ y $i(m) = 0$ en el resto de casos). Nos queda que

$$\lfloor x\rfloor = \sum_{m\leq x} 1 = \sum_{m\leq x}\sum_{d\leq x/m}\mu(d)d(m)$$

y

$$C = \sum_{m\leq x} Ci(m) = \sum_{m\leq x}\sum_{d\leq x/m}\mu(d)C$$

para cualquier constante C. Por tanto esto nos da una identidad combinada de:

$$\psi(x) - \lfloor x\rfloor + C = \sum_{m\leq x}\sum_{d\leq x/m}\mu(d)(\log(m) - d(m) + C).$$

O lo que es lo mismo:

$$\psi(x) - \lfloor x\rfloor + C = \sum_{m\leq x}(\log(m) - d(m) + C)\sum_{d\leq x/m}\mu(d).$$

Ahora, dado $M\in\mathbb{N}$, dividimos ese primer sumatorio en dos trozos, el primero es

$$\sum_{m\leq M}(\log(m) - d(m) + C)\sum_{d\leq x/m}\mu(d) \tag{1.42}$$

aplicamos la hipótesis de $\sum_{d\leq t}\mu(d) = o(t)$. En este caso tomamos $t = x/m$ y sabemos que para $t\geq T$ entonces $\sum_{d\leq t}\mu(d) < \epsilon$. Como M está fijo, para $x\geq TM$ esto se cumple siempre y la cantidad (1.42) está acotada por (pongamos $C > 0$)

$$\epsilon x\sum_{m\leq M}(\log(m) + d(m) + C)/m$$
$$\leq \epsilon x((\log M)^2/2 + O(1) + (\log M)^2/2 + O(\log M) + C\log M + O(1)).$$

Donde para probar las identidades $\sum_{m\leq M}\log m/m = (\log M)^2/2 + O(1)$ y $\sum_{m\leq M} d(m)/m = (\log M)^2/2 + O(\log M)$ se ha usado sumación por partes (1.20). Fijandonos en los términos grandes lo que hemos probado es que de hecho (1.42) es en realidad $o(x(\log M)^2)$.

Ahora vamos con el segundo trozo (intercambiando el orden de sumación)

$$\sum_{d\leq x/M}\mu(d)\sum_{M<m\leq x/d}(\log(m) - d(m) + C). \tag{1.43}$$

Vamos a intentar estimar bien el término de la derecha, $\sum_{M<m\leq x/d}(\log(m) - d(m) + C)$. En la sección 2.2 ya habíamos probado algunas fórmulas interesantes como $\sum_{m\leq x}\log m = x\log x - x + O(\log x)$ o (1.31) que decía $\sum_{n\leq x} d(n) = x\log(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$. Para la constante, la suma es la obvia $\sum_{n\leq x} C = Cx + O(1)$. Poniéndolo todo junto nos queda:

$$\sum_{M<m\leq x/d}(\log(m) - d(m) + C) = (C - 2\gamma)(x/d - M) + O(\sqrt{x/d} + \sqrt{M}).$$

Y aquí es donde vemos que escogiendo $C = 2\gamma$ ese término queda estimado por $O(\sqrt{x/d} + \sqrt{M})$. Ahora sólo nos queda sumar por partes para concluir:

$$\sum_{d \leq x/M} \mu(d) \sum_{M < m \leq x/d} (\log(m) - d(m) + C) = \sum_{d \leq x/M} O(\sqrt{x/d} + \sqrt{M}).$$

Y sumando por partes obtenemos que esa cantidad es $O(x/\sqrt{M})$. Poniéndolo todo junto llegamos a

$$\psi(x) - \lfloor x \rfloor + C = o(x(\log M)^2) + O(x/\sqrt{M}),$$

y está claro que si dividimos entre x y tomamos el límite suprior cuando $x \to \infty$ llegamos a

$$\limsup_{x \to \infty} |\psi(x)/x - 1| = O(1/\sqrt{M}).$$

Como el M es arbitrario haciendo tender $M \to \infty$ llegamos a que efectivamente ese límite existe y es igual a 0.

Proposición 1.3.5. *Límites de indeterminación de $\psi(x)/x$.*
Si $\lim \psi(x)/x$ *existe entonces necesariamente debe ser igual a 1.*

Para probarlo, empecemos recordando la expresión de la derivada logarítmica de ζ , (1.37) :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Como $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ se tiene que sumando por partes (1.20),

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Para $Re(s) > 1$ hacemos tender $x \to \infty$. El mienbro de la izquierda tiene límite y como $\psi(x) = O(x)$ el término de borde se va a 0 y queda:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Sumamos y restamos t en el numerador de la integral y nos queda la expresión:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} dt + s \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(t) - t}{t^{s+1}} dt + \frac{s}{s-1}.$$

Con lo queda probado que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}} dt$.

Ahora, recordamos que habíamos visto que la función ζ se extiende a una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$ con un único polo de orden 1 en $s = 1$. Esto quiere decir que $\zeta(s) = f(s)/(s-1)$ donde f es ahora una función entera que no se anula en $s = 1$. Hacemos la derivada logarítmica de esta expresión:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{f'}{f} - \frac{1}{s-1}.$$

Y metemos esto en la expresión de arriba

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{s}{s-1}=-\frac{f'}{f}-1=s\int_1^\infty\frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}}dt.$$

Y con esta fórmula, como $f(1)\neq 0$ tenemos que existe en el miembro de la izquierda el límite cuando $s\to 1^+$ (como número real, recordemos que la expresión derecha es sólo válida en principio cuando $Re(s)>1$). La existencia de ese límite es la que va a probar que $\limsup \psi(x)/x\geq 1$ y $\liminf \psi(x)/x\leq 1$. Nosotros vamos a probar la primera de las dos desigualdades (la otra se prueba igual). Por reducción al absurdo supongamos que $\limsup \psi(x)/x<1$.

Si $\limsup \psi(x)/x=L<1$, tenemos que para todo $\epsilon>0$, existe T tal que si $x\geq T$ entonces $\psi(x)/x<L+\epsilon$. Tomamos $\epsilon=(1-L)/2$ y el T asociado. Si $x\geq T$ entonces $\psi(x)/x\leq(1+L)/2=\delta<1$. O lo que es lo mismo, $\psi(x)-x\leq(\delta-1)x$. Ahora dividimos la integral en dos trozos:

$$\int_1^\infty\frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}}dt=\int_1^T\frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}}dt+\int_T^\infty\frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}}dt.$$

El primer término tendrá límite cuando $s\to 1^+$ por convergencia dominada y será un número. Sin embargo vamos a encontrar una contradicción con el segundo término, ya que

$$\int_T^\infty\frac{\psi(t)-t}{t^{s+1}}dt\leq(\delta-1)\int_T^\infty\frac{dx}{x^s}=(\delta-1)\left(-\frac{T^{1-s}}{1-s}\right).$$

Recordemos que estamos trabajando para $s>1$ y que luego intentaremos tomar el límite cuando $s\to 1^+$. Las cantidades de arriba tienen muchos cambios de signo, si las ordenamos bien está claro dónde está la contradicción:

$$\int_T^\infty\frac{-\psi(t)+t}{t^{s+1}}dt\geq(1-\delta)\left(\frac{T^{1-s}}{s-1}\right).$$

Ahora tomamos el límite cuando $s\to 1^+$ (que debería existir por la cuenta que hemos hecho antes) pero sin embargo, como $1-\delta>0$,

$$(1-\delta)\left(\frac{T^{1-s}}{s-1}\right)\xrightarrow[s\to 1^+]{}\infty.$$

Así que esto concluye que

$$\limsup_{x\to\infty}\psi(x)/x\geq 1.$$

1.4. Teorema de los números primos.

Ahora vamos a probar el teorema de los números primos en la forma que nos da la equivalencia 2.3.4, vamos a probar que efectivamente $x^{-1}\sum_{n\leq x}\mu(n)\to 0$. La prueba aquí presentada viene del libro [IK04] de la que cambiamos algunas cosas y explicamos con detalle todos los pasos de la misma.

En primer lugar, definimos la función $G(s)=(-1)^k(1/\zeta(s))^{(k)}$ que tiene una expresión en forma de serie (derivando dentro de la serie, que es posible por el criterio M de Weierstrass):

$$G(s) = \sum_m \frac{\mu(m)}{m^s} (\log m)^k. \tag{1.44}$$

Y también definimos la suma:

$$F(x) = \sum_{m \leq x} \mu(m)(\log m)^k \log \frac{x}{m}. \tag{1.45}$$

Antes de continuar quiero dar un esquema global de la prueba. Como vemos, esa función F se parece bastante a $\sum_{n \leq x} \mu(n)$. Nosotros lo que vamos a hacer es buscar una estimación (suficientemente buena) de F y luego *despejar* $\sum_{n \leq x} \mu(n)$ de ahí. La función F está relacionada con la G así que lo que buscaremos será una buena cota para G. Gran parte de la prueba es la estimación de G. El punto clave (que aparece en otras pruebas como en [New98] con formas similares) es en cierto sentido usar que $\zeta(s)$ tiene un polo en $s = 1$ para ver que ζ no se anula en la recta $Re(s) = 1$ y de hecho nosotros daremos una cota inferior (no para ζ pero para algo parecido).

La siguiente fórmula será importante para relacionar F y G:

$$(\log y)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} y^s s^{-2} ds, \tag{1.46}$$

donde $(\log y)_+$ representa la parte positiva del logaritmo y la integral está hecha en la recta $\{Re(s) = \sigma\}$ para $\sigma > 0$. Esta fórmula es consecuencia del teorema de los residuos de funciones meromorfas. Para probarla, pongamos $y > 1$ y queremos ver que esa integral da $\log y$. fijado un $R > 0$ consideramos la región $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ donde $\gamma_1 = \{\sigma + ti : t \in [-R, R]\}$, $\gamma_2 = \{-t + iR : t \in [-\sigma, R]\}$, $\gamma_3 = \{-R - ti : t \in [-R, R]\}$ y $\gamma_4 = \{t + iR : t \in [-R, \sigma]\}$ que esencialmente es un rectángulo donde γ_1 es casi lo que queremos integrar (lo será haciendo tender $R \to \infty$) que rodea al 0 y queremos ver que la contribución del resto de paredes se va a 0 para R tendiendo a infinito.

Ahora, por el teorema de residuos (o de hecho la fórmula integral de Cauchy directamente) se tiene que

$$\log y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} y^s s^{-2} ds.$$

Lo que queremos es ver que las contribuciones que no son γ_1 se van a 0, por tanto, empezamos con γ_2:

$$\left| \int_{\gamma_2} y^s s^{-2} ds \right| = \left| \int_{-\sigma}^{R} -y^{-t+iR}(-t + iR)^{-2} dt \right| \leq \int_{-\sigma}^{R} y^{-t} R^{-2} dt$$
$$= R^{-2} \frac{1}{\log y} (y^{-\sigma} - y^{-R}) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

El trozo γ_4 es prácticamente igual, para γ_3 hacemos:

$$\left| \int_{\gamma_3} y^s s^{-2} ds \right| = \left| \int_{-R}^{R} -iy^{-R-it}(-R - it)^{-2} dt \right| \leq \int_{-R}^{R} \frac{y^{-R}}{t^2 + R^2} dt$$

$$= \frac{y^{-R}}{R^2}\int_{-1}^{1}\frac{Rdu}{u^2+1} = \frac{y^{-R}\pi}{2R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Ya lo único que nos falta es ver que $\int_{\gamma_1} y^s s^{-2}ds \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{(\sigma)} y^s s^{-2}ds$. Esto es un ejercicio de convergencia dominada, esencialmente tenemos el límite:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} y^s s^{-2}ds = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} iy^{\sigma+it}(\sigma+it)^{-2}\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)dt.$$

La convergencia está clara y para la dominancia usamos que $|y^{\sigma+it}(\sigma+it)^{-2}\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)| \leq y^\sigma(\sigma^2+t^2)^{-1}$ que es integrable, por tanto hemos acabado. Esto cubre el caso $y>1$, el caso $y=1$ se hace a mano y para $y<1$ se integra en la región simétrica de la que hemos definido antes con respecto al eje $\{Re(s)=\sigma\}$, con lo que tenemos una región donde la función es holomorfa en el interior (y de ahí que la integral dé 0).

Esta forma de expresar la parte positiva del logaritmo nos permite relacionar la función G y F del siguiente modo:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} x^s G(s)s^{-2}ds, \tag{1.47}$$

para $\sigma>1$. Esto último nos garantiza que por convergencia dominada podemos intercambiar el límite con la integral y es lo que justifica del todo esa fórmula.

Como hemos dicho antes, queremos estimar G, para ello consideramos la función $\zeta^*(s)=(s-1)\zeta(s)$. Esta función es entera ya que lo que hacemos es eliminar el único polo que tiene ζ es $s=1$. Por la regla general de Leibniz que $(1/\zeta(s))^{(k)} = (s-1)(1/\zeta^*(s))^{(k)} + k(1/\zeta^*(s))^{(k-1)}$. Para estimar ζ^* necesitamos acotar $(-1)^l\zeta^{(l)}(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log^l(n)}{n^s}$ ($l = 0,1,2...$). Dividimos esta suma en dos trozos, para empezar, estimamos $\sum_{n>X}^\infty \frac{\log^l(n)}{n^s}$.

Usamos Euler-Maclaurin de orden 1, (1.24) aplicado a $f(t)=\log^l(t)/t^s$. Siendo muy precisos, nosotros hemos probado la fórmula de Euler-Maclaurin para enteros y aquí la quiero usar sobre un número real X. Sin embargo, partiendo de la sumación por partes (1.20) es fácil ver cómo se puede llegar a la fórmula más general de Euler-Maclaurin. Para sumar $\sum_{n\leq x} f(t)$ aplicamos sumación por partes para llegar a

$$\sum_{n\leq x} f(t) = \lfloor x\rfloor f(x) - \int_1^x \lfloor t\rfloor f'(t)dt.$$

Y ahora manipulando de manera trivial esas expresiones para ponerlo todo en función de los polinomios peródicos de Bernoulli nos queda

$$\sum_{n\leq x} f(t) = \int_1^x f(t)dt + \frac{1}{2}f(1) - P_1(x)f(x) + \int_1^x P_1(t)f'(t)dt. \tag{1.48}$$

Es trivial ahora notar que si x es entero, $P_1(x)=-1/2$ y por tanto tenemos en particular la fórmula (1.24). Tras ese apunte, podemos poner ya sin mayor problema la fórmula

$$\sum_{X<n\leq M}\frac{\log^l(n)}{n^s} = \int_X^M \frac{\log^l(t)}{t^s}dt + O(1)\left(\frac{\log^l(M)}{M^s}+\frac{\log^l(X)}{X^s}\right) + \int_X^M P_1(t)f'(t)dt.$$

Ahora estamos trabajando para $Re(s) > 1$, por tanto al hacer el límite cuando $M \to \infty$, el miembro de la izquierda tiene límite, también las integrales y el término de borde en M se va a 0. Por ahora dejamos a un lado la primera integral y acotamos los otros dos términos. Tenemos que estimar:

$$O(1)\left(\frac{\log^l(X)}{X^s}\right) + \int_X^\infty P_1(t)\frac{l\log^{l-1}(t) - s\log^l t}{t^{s+1}}dt.$$

El primero no va a dar mayor problema. Para el segundo, recordando que $P_1(t) = O(1)$ si además imponemos $X \geq 2$ (para que el término grande sea el $\log^l t$) entonces el numerador es $O(|s|\log^l t)$ (donde la constante implícita depende de l) y al meter los valores absolutos nos queda:

$$\int_X^\infty \frac{O(|s|\log^l t)}{t^{Re(s)+1}}dt.$$

Ahora ya sólo nos queda integrar $\int_X^\infty \frac{\log^l t}{t^{Re(s)+1}}dt$ por partes l veces. En la primera obtenemos:

$$\int_X^\infty \frac{\log^l(t)}{t^{Re(s)+1}}dt = \frac{\log^l(X)}{Re(s)X^{Re(s)}} + \frac{l}{Re(s)}\int_X^\infty \frac{\log^{l-1}(t)}{t^{Re(s)+1}}dt,$$

y recordando que $Re(s) > 1$, podemos estimar esto por

$$\leq \frac{\log^l(X)}{X} + l\int_X^\infty \frac{\log^{l-1}(t)}{t^{Re(s)+1}}dt.$$

Ahora si nos fijamos, hemos obtenido casi la misma integral (pero hemos bajado en 1 el exponente del logaritmo) así que repitiendo esto $l-1$ veces al final nos queda

$$\int_X^\infty \frac{\log^l(t)}{t^{Re(s)+1}}dt \leq \frac{\log^l(X)}{X} + l\frac{\log^{l-1}(X)}{X} + ... + l!\frac{1}{X}.$$

Y esto se acota de manera trivial por $(l+1)l!\frac{\log^l(X)}{X} = O(\frac{\log^l(X)}{X})$, por tanto el error que nos queda es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\log^l(X)}{X^s}\right) + \int_X^\infty P_1(t)\log^l(t)\frac{\frac{l}{\log t} - s}{t^{s+1}}dt = O\left(\frac{|s|}{X}\log^l(X)\right).$$

Donde la constante implícita depende de l. Esto prueba la estimación:

$$(-1)^l\zeta^{(l)}(s) = \sum_{n\leq X} n^{-s}\log^l n + \int_X^\infty t^{-s}\log^l t dt + O\left(\frac{|s|}{X}\log^l(X)\right).$$

Ahora queremos acabar de estimar $\zeta^{(l)}$. Lo primero que notamos es que $\int_1^\infty t^{-s}\log^l t dt = l!(s-1)^{-l-1}$, pero nosotros tenemos la integral desde X, no desde 1, por tanto sumamos y restamos el término que falta.

$$(-1)^l\zeta^{(l)}(s) = \frac{l!}{(s-1)^{l+1}} + \sum_{n\leq X} n^{-s}\log^l n - \int_1^X t^{-s}\log^l t dt + O\left(\frac{|s|}{X}\log^l(X)\right).$$

Y ahora acotamos esos dos términos que aún nos molestan:

$$\left|\sum_{n\leq X} n^{-s}\log^l n\right| \leq \log^l(X)\sum_{n\leq X} n^{-Re(s)} \leq \log^l(X)\sum_{n\leq X}\frac{1}{n} = O(\log^{l+1}(X)).$$

Para la última igualdad, recordamos que podemos aproximar el número armónico por el logaritmo (sumando por partes por ejemplo). Para la integral la cota es la misma, así que nos queda un error de $O(\log^{l+1}(X)) + O\left(\frac{|s|}{X}\log^l(X)\right)$. Tomando $X = 2|s|$ (recordemos que habíamos impuesto $X \geq 2$ y que estamos en $Re(s) > 1$) tenemos la aproximación que se da en [IK04]:

$$(-1)^l\zeta^{(l)}(s) = \frac{l!}{(s-1)^{l+1}} + O(\log^{l+1}(2|s|)). \tag{1.49}$$

Donde se entiende que la contante implícita depende de l (para $l = 0, 1, 2...$). Una sencilla cuenta nos prueba por inducción que $(\zeta^*(s))^{(l)} = (s-1)\zeta^{(l)}(s) + l\zeta^{(l-1)}(s)$.

Sustituyendo la estimación que acabamos de calcular nos queda que $(\zeta^*(s))^{(l)} \ll (|s|\log^{l+1}(2|s|))$. Es razonable que el término principal desaparezca ya que ζ^* es entera y cerca de 1 tiene un valor concreto mientras que ζ al tener un polo en 1, se comporta como ese polo cerca de 1. Ahora vamos a probar una fórmula similar a la que aparece en [IK04] pero un poco más fuerte. Para no liar la notación, llamamos $s = \tau + it$, vamos a probar que para todo s con parte real mayor a 1 se cumple:

$$1 \leq \zeta(\tau)^3|\zeta(\tau+it)|^4|\zeta(\tau+2it)|. \tag{1.50}$$

Para ello vamos a usar la representación como producto de Euler de ζ válida para $Re(s) > 1$. Si recordamos, podíamos expresar ζ como

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

Vamos a ver que para cada primo p se cumple que

$$1 \leq \left|\frac{1}{1-p^{-\tau}}\right|^3 \left|\frac{1}{1-p^{-\tau-it}}\right|^4 \left|\frac{1}{1-p^{-\tau-2it}}\right|.$$

Probar esto es equivalente a tomar logaritmos y probar que

$$0 \leq 3\log\left|\frac{1}{1-p^{-\tau}}\right| + 4\log\left|\frac{1}{1-p^{-\tau-it}}\right| + \log\left|\frac{1}{1-p^{-\tau-2it}}\right|.$$

Ahora recordando el desarrollo en serie de potencias de la rama principal del logaritmo (Log) teníamos que $\mathrm{Log}(\frac{1}{1-z}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j}$ para $|z| < 1$. Como $p \geq 2$ y $\tau \geq 1$ podemos aplicar la fórmula sin problemas. También sabemos que $Re(\mathrm{Log}(\frac{1}{1-z})) = \log|\frac{1}{1-z}|$. Así que queremos probar que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{Re(3p^{-\tau j} + 4p^{-j(\tau+it)} + p^{-j(\tau+2it)})}{j}.$$

Sólo falta ver que cada uno de esos sumandos es mayor o igual a 0. Llamando $\theta = jt$ tenemos que ver que $p^{-j\tau}(3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \geq 0$. Operando un poco se llega a que esa expresión es igual a $p^{-j\tau}2(1+\cos(\theta))^2$ por tanto la desigualdad queda probada. Ahora vamos a usar esa desigualdad para acotar por debajo ζ^*. Tomando $s = \tau + it$ y metiendo esto en la expresión (1.50) junto con la estimación de ζ (1.49) en $l = 0$:

$$1 \leq |\zeta(s)|^4 \left(\frac{1}{\tau - 1} + O(\log 2\tau)\right)^3 \left|\frac{1}{\tau + 2it - 1} + O(\log 2|\tau + 2it|)\right|.$$

Nos van a interesar valores de s para $Re(s) = \tau$ cercanos a 1. Además podemos suponer t suficientemente grande ya que cerca de $s = 1$ la función $\zeta^*(s) = (s-1)\zeta(s)$ es holomorfa. El término de $\zeta(\tau)$ está acotado por

$$\zeta(\tau) = \left(\frac{1}{\tau - 1} + O(\log 2\tau)\right) \ll \frac{1}{\tau - 1}$$

para $\tau < 5$ (por poner un número, donde la constante implícita depende de ese 5). Por otra parte, para el otro término tenemos que

$$|\zeta(\tau + 2it)| \leq \frac{1}{|\tau + 2it - 1|} + K \log 2|\tau + 2it| \leq \frac{1}{2|t|} + \tilde{K} \log 2|s|.$$

Creo que esas acotaciones están claras (la parte del logaritmo es trabajar un poco). Ahora es cuando imponemos además que $|t| > \delta$ para un cierto $\delta > 0$ (fijo) y podemos concluir que $|\zeta(\tau + 2it)| \ll \log 2|s|$. Por tanto tenemos que $1 \ll |\zeta(s)|^4 \frac{\log 2|s|}{(\tau-1)^3}$, o lo que es lo mismo, dividiendo (recordemos la definición de $\ll$, esto es legal hacerlo):

$$|\zeta(s)| \gg (\tau - 1)^{3/4} (\log 2|s|)^{-1/4}.$$

Aquí podemos notar que se mejora el exponente que da la prueba original de [IK04] (por la mejora en (1.50)). Multiplicando ahora por $s - 1$ tenemos:

$$|\zeta^*(s)| \gg (\tau - 1)^{3/4} (\log 2|s|)^{-1/4} |s - 1| \gg (\tau - 1)^{3/4} |s| (\log 2|s|)^{-1/4}.$$

El hecho de que $|s-1| \gg |s|$ se desprende de que hemos impuesto $|t| > \delta$. Vamos a recapitular un poco, ya que aquí hay que tener cuidado con las constantes implícitas para no hacer nada mal. Hemos probado que existe una constante $C_\delta > 0$ (que depende del δ elegido) tal que para todo $s = \tau + it$ con $1 < \tau < 5$ y $|t| > \delta$ se tiene $(\tau-1)^{3/4}|s|(\log 2|s|)^{-1/4} \leq C_\delta |\zeta^*(s)|$. Yo afirmo que existe una constante válida cuando $1 < \tau < 5$ y que es independiente de δ. Hay varias formas de hacerlo, una es notar que $(\tau - 1)^{3/4}|s|(\log 2|s|)^{-1/4}$ alcanza su máximo en el conjunto $\{s : 1 \leq Re(s) \leq 5, |Im(s)| \leq \delta\}$ (por compacidad) y que $|\zeta^*(s)|$ alcanza ahí un mínimo no nulo (basta tomar δ suficientemente pequeño ya que cerca de 1 $\zeta^*(1) = 1$ y para $Re(s)$ mayor a 1, ζ no se anula).

Con esto se prueba que para $1 < \tau < 5$ se cumple que

$$|\zeta^*(s)| \gg (\tau - 1)^{3/4} |s| (\log 2|s|)^{-1/4}, \tag{1.51}$$

donde la constante implícita es absoluta.

Podemos invertir esa relación para deducir que $|1/\zeta^*(s)| \ll (\tau-1)^{-3/4}|s|^{-1}(\log 2|s|)^{1/4}$. Si recordamos, lo que buscábamos era una forma de acotar G. Por aplicación de la regla de la cadena podemos deducir que para una función f holomorfa si $f(s) \neq 0$ para cierto s entonces

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)}(s) = \frac{1}{f}\sum_{a_1+2a_2+\ldots+ka_k=k} C_{a_1,\ldots,a_k}\left(\frac{f'}{f}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)^{a_k} \tag{1.52}$$

para ciertos números racionales $C_{a_1,\ldots,a_k}$. La prueba de esto se hace por inducción, en [IK04] se dan unos coeficientes explícitos pero no son correctos.

Esta fórmula aplicada a $f = \zeta^*$ nos dice que para sacar cotas superiores de ζ^* lo que necesitamos son cotas inferiores de ζ^* y cotas superiores de las derivadas. La cota inferior de ζ^* la acabamos de calcular y las de las derivadas las hemos calculado antes, salía $(\zeta^*(s))^{(l)} \ll |s|(\log 2|s|)^{l+1}$.

De nuevo ahora lo único que hay que hacer es echar unas cuentas:

$$\left(\frac{(\zeta^*)^{(j)}}{\zeta^*}\right) \ll |s|(\log 2|s|)^{j+1}(\tau-1)^{-3/4}|s|^{-1}(\log 2|s|)^{1/4} = (\tau-1)^{-3/4}(\log 2|s|)^{j+5/4}.$$

Y por tanto en el sumatorio tenemos que cada término está acotado por:

$$\left(\frac{(\zeta^*)^{(1)}}{\zeta^*}\right)\ldots\left(\frac{(\zeta^*)^{(k)}}{\zeta^*}\right) \ll (\tau-1)^{-3/4\sum a_j}(\log 2|s|)^{k+5/4\sum a_j}.$$

De nuevo ahora, insitiendo en que lo que queremos son valores con parte real cercana a 1 si nos restringimos a $\tau < 2$ usando que $\sum a_j \leq k$ estimamos cada factor por $(\tau - 1)^{-(3/4)k}(\log 2|s|)^{(9/4)k}$. Metiendo esto en la fórmula (1.52) nos queda (recordemos que en la suma hay un número finito de términos):

$$\left(\frac{1}{\zeta^*}\right)^{(k)}(s) \ll (\tau-1)^{-(3/4)k}(\log 2|s|)^{(9/4)k}(\tau-1)^{-3/4}|s|^{-1}(\log 2|s|)^{1/4},$$

$$\left(\frac{1}{\zeta^*}\right)^{(k)}(s) \ll (\tau-1)^{-\frac{3}{4}(k+1)}|s|^{-1}(\log 2|s|)^{\frac{9k+1}{4}}.$$

Donde recordamos que la constante implícita depende de k y nos hemos restringido a $1 < \tau < 2$.

Bueno, ahora ya sólo queda volver a las estimaciones de las derivadas de $1/\zeta$ por medio de la fórmula $(-1)^k G(s) = (1/\zeta(s))^{(k)} = (s-1)(1/\zeta^*(s))^{(k)} + k(1/\zeta^*(s))^{(k-1)}$. Con esto obtenemos

$$G(s) \ll (\tau-1)^{-\frac{3}{4}(k+1)}(\log 2|s|)^{\frac{9k+1}{4}}. \tag{1.53}$$

Y si recordamos, la función F y la función G se relacionaban por medio de la integral (1.46) si $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} x^s G(s)s^{-2}ds &\ll \int_{(\sigma)} \frac{x^{Re(s)}|G(s)|}{|s|^2}|ds| \\ &\ll x^\sigma \int_{(\sigma)} \frac{(\tau-1)^{-\frac{3}{4}(k+1)}(\log 2|s|)^{\frac{9k+1}{4}}}{|s|^2}|ds| \\ &\ll x^\sigma(\sigma-1)^{-\frac{3}{4}(k+1)}\int_{(\sigma)} \frac{(\log 2|s|)^{\frac{9k+1}{4}}|ds|}{|s|^2}. \end{aligned}$$

La última integral converge ya que el denominador se comporta como $1/t^2$ para t grande, Por tanto esa integral es O(1) (que depende de k claro) con lo que logramos la estimación:

$$F(x) \ll x^{\sigma}(\sigma-1)^{-\frac{3}{4}(k+1)}. \tag{1.54}$$

Esta estimación que hemos hecho es válida en principio para $1<\sigma<2$ y con una constante implícita que depende de k. Tomando $\sigma = 1+(\log x)^{-1}$ tenemos que

$$F(x) \ll x(\log x)^{-\frac{3}{4}(k+1)}. \tag{1.55}$$

Siendo muy precisos tendríamos que pedir $x > e$, pero el caso de x entre 1 y e es trivial así que la estimación vale para cualquier $x \geq 1$.

Para rematar el teorema de los números primos ya sólo nos queda usar esta estimación para ver cómo se comporta $x^{-1}\sum \mu(n)$. Empezamos definiendo la función H como:

$$H(x) = \sum_{m\leq x} \mu(m)(\log m)^k.$$

Se puede ver que $F(x) = \int_1^x \frac{H(t)}{t}dt$ lo que da una idea de que tenemos que ver cómo es la *derivada* de F (en cierto sentido). Lo que hacemos es

$$F(x+y)-F(x) = H(x)\log\frac{x+y}{x} + \sum_{x<m\leq x+y} \mu(m)(\log m)^k \log\frac{x+y}{m}.$$

La suma de la derecha se acota de la siguiente manera, para empezar, vamos a tomar más adelante $y \leq x$ así que podemos hacer estimaciones del tipo $\log(x+y) \ll \log x$:

$$\sum_{x<m\leq x+y} \mu(m)(\log m)^k \log\frac{x+y}{m} \ll y\log\frac{x+y}{x}\log^k(x+y) \ll y\log^k(x)\log\frac{x+y}{x}.$$

Con esto podemos despejar y al final sale

$$H(x) = O(y\log^k(x)) + \frac{F(x+y)-F(x)}{\log\frac{x+y}{x}}.$$

Por el teorema del valor medio tenemos que $\log(x+y)-\log x = y/c$ con $c \in (x, x+y)$. Por tanto, acotando con nuestra estimación anterior de F, (1.55) nos queda ($c \ll x$ ya que $y \leq x$):

$$\begin{aligned} H(x) &\ll y\log^k(x) + \frac{x}{y}(\underbrace{(x+y)\log(x+y)^{(3/4)(k+1)}}_{\text{recordemos que } x+y\ll x} + x(\log x)^{3/4(k+1)}) \\ &\ll y(\log x)^k + \frac{x^2}{y}(\log x)^{3/4(k+1)}. \end{aligned}$$

Pues bien, ahora queremos que ese término de error sea lo menor posible tomando y como una función de x. El término que más pesa es el x^2, por tanto y debe *parecerse* a x y luego queremos reducir el término en el logaritmo, por tanto tomamos $y = x(\log x)^{-A}$. Ambos sumandos tienen x multiplicando, y los exponentes de $\log x$ en cada uno son $k-A$ y $(3/4)(k+1)+A$. Si queremos minimizar ambos, los igualamos y tenemos que en ese caso A debe ser igual a $A = (k-3)/8$. Con esto tenemos que:

$$H(x) \ll x(\log x)^{k-A}.$$

Donde la constante implícita depende de k. Concluir el teorema de los números primos desde aquí sólo requiere sumar por partes (1.20):

$$\begin{aligned}\sum_{m\le x}\mu(m) &= \frac{H(x)}{\log^k(x)} + k\int_2^x \frac{H(t)dt}{t\log^{k+1}(t)} + O(1)\\ &\ll x\log^{-A}(x) + k\int_2^x (\log t)^{-A-1}dt.\end{aligned}$$

Por la regla de L'Hopital se ve que $\int_2^x (\log t)^{-A-1}dt \ll x\log^{-A}(x)$ por tanto concluimos que:

$$\sum_{m\le x}\mu(m) \ll x\log^{-A}(x),$$

y esto ya prueba que $x^{-1}\sum\mu(m)\to 0$, ya que, al ser k arbitrario, A también lo es (depende de k, pero para $k>3$ A ya es positivo) con lo que esto concluye la prueba del teorema de los números primos.

Capítulo 2

Parte 2

El objetivo de esta sección es probar el teorema de Dirichlet sobre las existencia de infinitos primos en progresiones aritméticas *no triviales* (más adelante precisaremos esto). Para ello, era necesario introducir el concepto de carácter, Transformada de Fourier Discreta y de función L de Dirichlet.

Para realizar esta segunda parte, seguimos el mismo esquema que con la anterior, el tutor me introdujo el tema, me dijo qué conceptos tenía que tener incluir y proporcionó información sobre dónde buscar muchos de ellos. Esta parte del trabajo se hizo durante el mes de Enero y principios de Febrero. La bibliografía que yo he encontrado más útil para esta sección es [Cha13] y [Dav80].

2.1. Caracteres y transformada de Fourier discreta.

En esta sección vamos a introducir las herramientas necesarias para probar el teorema de Dirichlet, que afirma que en toda sucesión aritmética $\{a+nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(a,q)=1$ existen infinitos números primos (de hecho prueba algo más fuerte, que la suma de sus inversos diverge). Para empezar, tenemos que decir lo que es un caracter:

Definición 2.1.1. *Carácter.*
Dado un grupo G finito y abeliano, un carácter χ de G es un homorfismo de grupos entre G y S^1 (cada uno con su operación, en el caso de los complejos, la multiplicación usual).

$$\chi : G \longrightarrow S^1.$$

Para ver algún ejemplo, comencemos con $G=\mathbb{Z}_N$ con la suma como operación. Está claro que la imagen de cualquier elemento de $\mathbb{Z}_N$ está determinada por la imagen del 1. Como un carácter χ es homomorfismo, debe respetar que $\chi(N)=\chi(0)=1$, por tanto $\chi(N)=\chi(1+...+1)=\chi(1)^N=1$. $\chi(1)$ es una raíz N-ésima de la unidad, $\chi(1)=e^{2\pi ia/N}$ para algún a entre 0 y $N-1$ (no hay más porque luego se repiten). En este caso es fácil ver que todos los caracteres de $\mathbb{Z}_N$ son de la forma:

$$\chi_a(n)=e^{2\pi ian/N}, \quad n\in\mathbb{Z}_N$$

para $a=0,...,N-1$.

En general, los caracteres de un grupo G forman un grupo a su vez con la multiplicación definida por $(\chi_1\chi_2)(x)=\chi_1(x)\chi_2(x)$ para $x\in G$. Al grupo de caracteres se le denomina el grupo dual y se representa por $\widehat{G}$. En este grupo tiene especial importancia para nosotros el carácter trivial que denotaremos por χ_0 y lo llamaremos el carácter principal:

$$\chi_0(x) = 1 \quad \forall x \in G.$$

Volviendo a nuestro ejemplo anterior, $G = \mathbb{Z}_N$, está claro que en este caso el grupo dual vuelve a ser $\mathbb{Z}_N$ ya que al multiplicar dos caracteres $\chi_a, \chi_b \in \widehat{\mathbb{Z}}_N$ tenemos que $\chi_a\chi_b = \chi_{a+b}$ donde la suma es módulo N.

El caso particular de $\mathbb{Z}_N$ es muy importante ya que por el teorema de clasificación de grupos abelianos se tiene que si G es abeliano finito entonces $G \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$. Está claro que ahora para ver cómo son los caracteres de G basta ver adonde pueden ir los generadores y por una cuenta análoga a la de antes se prueba que cualquier carácter $\chi \in \widehat{G}$ debe ser de la forma:

$$\chi(x_1, ..., x_k) = \prod_{j=1}^{k} e^{2\pi i a_j x_j / n_j} \quad (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}. \tag{2.1}$$

Donde para todo $j = 1, ..., k$ se cumple que $0 \leq a_j < n_j$. Es fácil ver que todos los elementos de esta forma son caracteres lo que prueba (de manera sencilla, usando esa representación) que $G \simeq \widehat{G}$. Como observación, estos grupos son reflexivos en el sentido de que hay un isomorfismo canónico entre G y $\widehat{\widehat{G}}$ definido por $x \to \widehat{\widehat{x}}$ donde $\widehat{\widehat{x}}(\chi) = \chi(x)$ para todo $\chi \in \widehat{G}$. Otra observación importante es ver cómo es el inverso de un carácter. Al estar trabajando en S^1 tenemos que para cualquier caracter $\chi \in \widehat{G}$ se verifica que $\chi(x)\overline{\chi(x)} = 1 = \chi_0(x)$ para $x \in G$, por tanto al conjugar un carácter obtenemos su inverso. Este hecho será importante ya que dice que al conjugar un carácter obtenemos otro carácter y que además es distinto si toma valores complejos no reales.

Ahora vamos a ver que estos caracteres cumplen ciertas relaciones de ortogonalidad:

Lema 2.1.2. *Relaciones de ortogonalidad.*
Sea G un grupo abeliano y finito, $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ y $e \in G$ el elemento neutro de G. Entonces:

$$\sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G| & si\ \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & si\ \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}, \quad \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & si\ g = e \\ 0 & si\ g \neq e. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para demostrar esto procedemos del siguiente modo; como $\overline{\chi_2} = \chi_2^{-1}$ la primera relación es equivalente a decir que $\sum_{g \in G} \chi(g)$ es $|G|$ cuando $\chi = \chi_0$ y 0 en otro caso (tomando $\chi = \chi_1\chi_2^{-1}$). Para empezar, si $\chi = \chi_0$ es trivial el resultado, ya que es sencillamente sumar 1 por cada elemento de G. Por otra parte, la suma $\sum_{g \in G} \chi(g)$ es igual a $\sum_{g \in G} \chi(hg)$ para cualquier $h \in G$ (esto se puede ver como que G actua sobre sí mismo por multiplicación). Como χ ahora no es el carácter principal, tomamos un $h \in G$ tal que $\chi(h) \neq 1$ y tenemos

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(gh) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Y al restar, $(1 - \chi(h)) \sum_{g \in G} \chi(g) = 0$. Como $\chi(h) \neq 1$ eso implica que efectivamente $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$. La demostración de la segunda parte de (2.2) es totalmente equivalente. Por (2.1) sabemos que $G \simeq \widehat{G}$, por tanto si $g = e$ está claro que $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(e) = |\widehat{G}| = |G|$. Por otra parte, si $g \neq e$ usando el isomorfismo de G con $\mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$ y la representación de (2.1) está claro que podemos encontrar un carácter χ^* tal que $\chi^*(g) \neq 1$ y haciendo el mismo truco que antes:

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} (\chi^* \chi)(g) = \chi^*(g) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g).$$

Con lo que se concluye de manera trivial (restando y dividiendo).

Ahora lo que queremos es ver que se puede definir para funciones $f : G \to \mathbb{C}$ una transformada de Fourier y que se verifican las propiedades más importantes (a nosotros lo que nos va a importar es la fórmula de inversión). Se define la transformada de Fourier de una función $f : G \to \mathbb{C}$ para cada χ como:

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi}(g). \tag{2.3}$$

Y se verifica la fórmula de inversión:

Teorema 2.1.3. *Fórmula de inversión.*
Dada $f : G \to \mathbb{C}$ se tiene que

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi(g). \tag{2.4}$$

La demostración de este teorema es sencillamente invertir el orden de sumación y aplicar las relaciones de (2.2). Si por un momento comparamos toda esta construcción con la transformada de Fourier normal en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{T}$ podemos ver muchas similitudes. Si nos fijamos, es como si hubiéramos cogido $G = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como grupos con las traslaciones y pensaramos en los homomorfismos de aquí en $\mathbb{C}$. Está claro que las exponenciales complejas cumplen esa propiedad (y si añadimos la condición de medibles entonces son las únicas, ver [Fo99]). Las relacciones de ortogonalidad son totalmente análogas y también la transformada y la fórmula de inversión. Seguramente en este caso la demostración de la fórmula de inversión es más sencillo ya que al ser todas las sumas finitas podemos intercambiar sin problemas el orden de sumación.

Ahora vamos a usar estas herramientas para probar un caso particular del teorema de Dirichlet que aparece en [Cha13]. Este dice que existen infinitos primos que terminan en 1 y en general hay infinitos primos que acaban en una cifra impar distinta de 5. Para probar esto, hay que ver cómo vamos a usar los caracteres para *seleccionar* los primos congruentes con 1 (o con cualquier cifra impar distinta de 5) módulo 10.

Para empezar, el grupo donde nos va a interesar trabajar es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ (las unidades de $\mathbb{Z}_{10}$). Este grupo es abeliano, tiene $\varphi(10) = 4$ elementos y es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ como grupo con la suma. El isomorfismo viene dado por $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}) \to \mathbb{Z}_4$ donde $\phi(1) = 0$, $\phi(3) = 1$, $\phi(7) = 3$ y $\phi(9) = 2$. Es muy importante no olvidarse de que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ es un grupo con la multiplicación y que $\mathbb{Z}_4$ es un grupo con la suma. En el grupo $\mathbb{Z}_4$ recordemos que habíamos visto en (2.1) que pinta tienen los caracteres: $\tilde{\chi}_0, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}_3 : \mathbb{Z}_4 \to S^1$ donde

$$\tilde{\chi}_a(m) = e^{2\pi i a n/4} = e\left(\frac{am}{4}\right) \quad a = 0, 1, 2, 3.$$

Vamos a empezar a usar ya la notación de $e(t)$ para representar $e^{2\pi i t}$ ya que por lo que he visto es la más común en los libros de teoría de números. Usando nuestro isomorfismo podemos ver actuar los caracteres sobre elementos de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ directamente poniendo $\chi_a : \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}) \to S^1$ con $\chi_a = \tilde{\chi}_a \circ \phi$. Así definido tenemos que χ_a es una función totalmente multiplicativa, ya que dados dos elementos $n_1, n_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ se verifica que

$$\begin{aligned} \chi_a(n_1 n_2) = e\left(\tfrac{a\phi(n_1 n_2)}{4}\right) = e\left(\tfrac{a(\phi(n_1)+\phi(n_2))}{4}\right) = \\ e\left(\tfrac{a\phi(n_1)}{4}\right) e\left(\tfrac{a\phi(n_2)}{4}\right) = \chi_a(n_1)\chi_a(n_2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

En esta sencilla cuenta ha sido crucial saber que la operación de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ es multiplicar y que la de $\mathbb{Z}_4$ es sumar, por eso hemos separado ϕ en dos sumandos y luego ya sabemos todos cómo funciona la exponencial.

Está claro que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ coprimo con 10 puedo ver su imagen por χ_a (viendo la imagen de la clase módulo 10). Ahora lo que nos interesa es poder ampliar la definición a todo entero $\mathbb{Z}$. Para ello definimos lo que se conoce como caracter de Dirichlet.

Definición 2.1.4. *Cararteres de Dirichlet.*

Dado un m entero y χ un carácter definido en $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ extendemos su definición a $\mathbb{Z}$ mediante:

$$\chi'(n) = \begin{cases} \chi(n) & \text{si } (n,m) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Y a esta extensión χ' se le denomina carácter de Dirichlet módulo m.

Por simplicidad, y como va a ser lo que nos interese a partir de ahora llamaremos carácter a esa extensión y la representaremos por χ. Está claro que en particular podemos ver estos objetos como funciones aritméticas y lo que nos interesa de ellas es que son completamente multiplicativas. Una función aritmética f se dice totalmente multiplicativa cuando para cualquier par $n, k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(nk) = f(n)f(k)$. Comprobar que nuestros caracteres son completamente multiplicativos es una sencilla cuenta. Habida cuenta de que estamos trabajando con un caracter extendido de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$, sean $n, k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $(nk, m) > 1$ si y sólo si $(n, m) > 1$ ó $(k, m) > 1$. Es trivial que en este caso $\chi(nk) = \chi(n)\chi(k)$ ya que hay un 0 a ambos lados de la igualdad. Por otra parte, si $(nk, m) = 1$ entonces tenemos que usar la definición de carácter original y por una cuenta análoga a (2.5) se concluye.

Volviendo a nuestro ejemplo, queríamos probar que existen infinitos primos tal que su última cifra decimal fuera 1. Recordemos que ya habíamos visto quienes eran los caracteres, ahora consideramos directamente su extensión como caracteres de Dirichlet. Y ahora es cuando aparece su importancia, de la igualdad:

$$\chi_0(n) + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi_3(n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{10} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Para probar esta igualdad no hay más que acudir a la definición. Si n no es coprimo con 10 todos los caracteres módulo 10 dan 0. Si n es coprimo no hay más que ver que lo que estamos haciendo es aplicar la fórmula de inversión a la función $f : \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}) \to \mathbb{C}$ tal que $f(1) = 1$ y $f(n) = 0$ para $n \neq 1$. Al hacer su transformada, como $\chi_a(1) = 1$, $\widehat{f}(\chi_a) = 1$, la fórmula de inversión asegura que $4f = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$. Es trivial ver que si queremos seleccionar otro resto coprimo con 10 distinto no hay más que calcular la transformada de la función f correspondiente. Lo único que nos interesa es que $\widehat{f}(\chi)$ no se anula para ninguna f (que sea la función característica de un determinado resto módulo 10). Esto es así porque $f(\chi) = \overline{\chi}(k) \neq 0$ donde $k \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ es el resto coprimo con 10 que queremos seleccionar. Otra forma de ver esto es aplicar directamente las relaciones de ortogonalidad, (2.2).

El otro ingrediente que usa la prueba son las funciones L de Dirichlet:

Definición 2.1.5. *Función L de Dirichlet.*

Dado un $m \geq 2$ entero y χ un carácter módulo m se dice que

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p\ primo} (1-\chi(n)p^{-s})^{-1} \quad Re(s) > 1 \tag{2.8}$$

es una función L de Dirichlet.

Lo primero que habría que probar es que efectivamente esto define una función en el semiplano complejo $\{Re(s) > 1\}$. Usando el criterio M de Weierstrass para series y para productos infinitos es fácil ver que ambas definiciones dan funciones holomorfas en $\{Re(s) > 1\}$. Lo segundo es que la serie y el producto infinito representan la misma función. Para esto lo que se usa es que los caracteres son completamente multiplicativos. Probarlo rigurosamente es un ejercicio sin mucho misterio en el que al final lo que se usa es que (lo siguiente es sin preocuparse de la convergencia):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^2} + \frac{\chi(p)^2}{p^{2s}} + ...\right) = \prod_{p \text{ primo}} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Donde se ha usado el teorema fundamental de la aritmética, que χ es completamente multiplicativa y por último la suma de la serie geométrica.

Al igual que la función ζ, estas funciones L cumplen que se las puede extender al semiplano $\{Re(s) > 0\}$ de manera meromorfa. Para empezar, el caracter principal χ_0 se relacciona con la función ζ del siguiente modo:

$$\zeta(s) = \prod_{p}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{\chi_0(p)=1}(1-p^{-s})^{-1} \prod_{\chi_0(p)=0}(1-p^{-s})^{-1} = L(s,\chi_0) \prod_{p|m}(1-p^{-s})^{-1}. \tag{2.9}$$

Donde hemos usado que $\chi_0(p)$ es 1 cuando p y m son coprimos, cosa que pasa *casi siempre* salvo para los primos que dividan a m. Esta cuenta es válida en principio en $\{Re(s) > 1\}$ pero por el principio de ceros aislados se extiende a todo $\mathbb{C}$ lo que nos da $L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|m}(1-p^{-s})$ como una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$. El polo simple que tiene ζ en $s = 1$ es el que me va a dar que existen infinitos primos en la progresión arimética.

Un caso igual de interesante forman los caracteres no principales. Sea χ un carácter módulo m distinto del carácter principal, queremos extender su función L asociada. Para $Re(s) > 1$ consideramos las sumas parciales y sumamos por partes (1.20):

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}}dt. \tag{2.10}$$

Donde $A(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n)$. Si ahora volvemos a mirar las relaciones (2.2) podemos deducir que $A(x) = O(1)$. Basta para ello tomar $\chi_2 = \chi_0$ y $\chi_1 = \chi$ en (2.2) para comprobar que

$\sum_{g\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)}\chi(g)=0$ (ya que χ no es el carácter principal). Esto nos dice en particular que al sumar sobre todos los restos coprimos con m obtenemos 0, en $A(x)$ no tenemos sólo restos coprimos con m sino todos, pero recordemos que para los no coprimos $\chi(n)=0$. Si hacemos ahora la suma sobre m enteros consecutivos de $\chi(n)$ siempre tendremos 0, ya que ahí estarán representados todos los elementos de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$. Por tanto tenemos la igualdad

$$A(x)=\sum_{n\leq x}\chi(n)=\sum_{m\lfloor x/m\rfloor<n\leq x}\chi(n)=O(1).$$

Para finalizar, trabajando en $Re(s)>1$ tomamos límites cuando $x\to\infty$ en (2.10) y llegamos a la expresión

$$L(s,\chi)=s\int_1^\infty\frac{A(t)}{t^{s+1}}dt.$$

Como $A(t)=O(1)$, la integral converge en $Re(s)>0$ y de hecho define ahí una función holomorfa por el teorema de Morera (para ver esto sólo hay que justificar que podemos aplicar Fubini para intercambiar dos integrales lo cual es sencillo).

Con estos ingredientes ya podemos demostrar que hay infinitos primos que en su expresión decimal acaban en 1.

Proposición 2.1.6. *Existen infinitos números primos que en su expresión decimal acaban en 1, y en general existen infinitos primos cuya última cifra es un impar distinto de 5.*

Para demostrar este resultado, vamos a seguir el esquema de [Cha13] que es esencialmente el mismo que el de [Dav80]. Para la demostración general (que está en la siguiente sección), usaremos una forma distinta de organizar las ideas como viene en [Cha07]. Para esta demostración vamos a usar los ejemplos que hemos puesto antes sobre los caracteres módulo 10.

Como ya hemos visto quiénes eran estos, empezamos considerando la expresión de la correspondiente función L como producto infinito

$$L(s,\chi)=\prod_{p\text{ primo}}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1},$$

que hemos visto que era válida cuando $Re(s)>1$. Una vez más, usamos el desarrollo en serie de potencias de la rama principal del logaritmo complejo, $\mathrm{Log}((1-z)^{-1})=\sum_{n=1}^\infty\frac{z^j}{j}$ válida para $|z|<1$. Como estamos trabajando en $Re(s)>1$ está claro que si $z=\chi(n)p^{-s}$ podemos aplicar esta fórmula sin problemas y llegamos a

$$L(s,\chi)=\prod_{p\text{ primo}}\exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{\chi^n(p)}{np^{ns}}\right)=\exp\left(\sum_p\sum_{n=1}^\infty\frac{\chi^n(p)}{np^{ns}}\right)=\exp\left(\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}+O(1)\right).$$

El término de error sale de

$$\left|\sum_p\sum_{n=2}^\infty\frac{\chi^n(p)}{np^{ns}}\right|\leq\sum_p\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{np^{nRe(s)}}\leq\frac{1}{2}\sum_p\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{p^n}\ll\sum_p\frac{1}{p^2}\ll 1$$

donde recordemos que estamos trabajando para $Re(s)>1$.

Ahora, volviendo a los caracteres módulo 10, recordemos que al sumarlos todos teníamos una *función característica* de los restos iguales a 1 módulo 10 según la fórmula (2.7). Esto es lo mismo quiere decir que al multiplicar las 4 funciones L asociadas a caracteres módulo 4 se tiene

$$L(s,\chi_0)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_3) = \exp\left(\sum_{p\equiv 1(10)} \frac{1}{p^s} + O(1)\right). \tag{2.11}$$

El plan es ahora tomar $s > 1$ (número real) y hacer tender $s \to 1^+$. Por un lado, el término de la derecha converge a $\sum_{p\equiv 1(10)} \frac{1}{p} + O(1)$ por convergencia monótona (el error valía para $Re(s) > 1$, por tanto también vale al tomar el límite). Y por otra parte tenemos los límites de las funciones L. El carácter principal se expresaba en términos de la función zeta por (2.9):

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)(1-2^{-s})(1-5^{-s}).$$

Como ya sabíamos, la función ζ tiene un polo simple en $s = 1$ y por convergencia monótona, $\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1^+]{} \infty$. Para los caracteres no principales recordemos que habíamos visto que sus funciones L definían funciones holomorfas en $Re(s) > 0$, por tanto al tomar el límite cuando $s \to 1^+$ da un valor en $\mathbb{C}$. Si probamos que ese límite es no nulo ya habremos acabado, ya que eso significará que al tomar límites en (2.11) el lado de la izquierda se irá a infinito (la función L del carácter principal se va a infinito y las otras convergen a constantes no nulas) y por tanto el lado de la derecha también. Y esto significará que $\sum_{p\equiv 1 \text{ mód } 10} \frac{1}{p} + O(1) = \infty$, la suma de los inversos de los primos en esa progresión aritmética diverge, lo que en particular prueba que hay infinitos primos que acaban en 1.

Como se hace notar en [Cha13], esto prueba que podemos reducir la existencia de infinitos primos en progresión aritmética a ver que determinadas funciones no se anulan en 1. En el caso particular módulo 10 se puede hacer a mano viendo quiénes son esas funciones. Para el carácter χ_2 teníamos que $\chi_2(n) = e(2\phi(n)/4) = e(\phi(n)/2) = (-1)^{\phi(n)}$ (para n coprimo con 10, 0 en otro caso). Recordemos de la función ϕ es el isomorfismo que pasaba del grupo $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}),\bullet)$ a $(\mathbb{Z}_4,+)$. Por tanto para calcular $\lim_{s\to 1^+} L(s,\chi_2)$ basta ver quién es $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_2(n)/n$ (este límite existe por la cuenta que hemos hecho antes con la sumación por partes o sencillamente porque $L(s,\chi_2)$ es holomorfa en $s = 1$).

La suma que queremos ver que es no nula es:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_2(n)}{n} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Los cuatro primeros términos que he puesto ahí provienen de la suma de los 10 primeros sumandos (ya que el resto son 0). Esos 10 primeros términos suman aproximadamente $0,63$ y lo que se afirma en [Cha13] es que esos son suficientes. Si los agrupamos de dos en dos, obtenemos algo tipo $(1-1/3)-(1/7-1/9)+\ldots$ donde ahora esas series son alternadas (y de términos decrecientes claro). Como los caracteres son funciones periódicas de período 10, ese hecho es general y por tanto el error es menor al último término despreciado $1/11 - 1/13 \simeq 0{,}01$.

Para los caracteres χ_1 y χ_3 vamos sólo a calcular uno de ellos ya que uno es el conjugado del otro (y nosotros vamos a tomar partes reales). Si recordamos, $\chi_1(n) = e(\phi(n)/4) = i^{\phi(n)}$ y por tanto por un argumento análogo tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_1(n)/n = 1 + \frac{i}{3} - \frac{i}{7} - \frac{1}{9} + \ldots$$

Y tomando partes reales (que coincidirán con las de χ_3 ya que $\chi_1 = \overline{\chi}_3$) nos queda una serie de términos alternados $1 - 1/9 + 1/11 - 1/19 + \ldots$. Y de nuevo, al estar alternados el valor va a ser la suma de los 10 primeros que es $\simeq 0,88$ más un error menor al siguiente término despreciado $1/11 \simeq 0{,}09$.

Y esto ya concluiría nuestra prueba de que hay infinitos primos que terminan en 1 y algo más, que la suma de sus inversos es divergente.

2.2. Teorema de Dirichlet.

Ahora vamos a probar el teorema de Dirichlet en su versión general, que dice que en cualquier progresión aritmética *no trivial* existen infinitos números primos. Como se puede intuir, el punto clave del teorema será probar que la función L asociada a un carácter no principal tiende a algo no nulo en $s = 1$. Lo que voy a hacer es probar el teorema completo hasta la parte de ver que $L(1, \chi) \neq 0$ cuando χ es no principal y presentaré dos pruebas de ese hecho, una elemental y otra que usa variable compleja sacada de [Dav80] que se debe a E. Landau.

Teorema 2.2.1. *Teorema de Dirichlet.*
Existen infinitos primos en la progresión aritmética $\{a + nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ *donde* a *y* q *son coprimos.*

En primer lugar, vamos a calcular la derivada logarítmica de las funciones L. Fijado un carácter χ, el criterio M de Weierstrass nos permite calcular la derivada logarítmica de la función L cuando la tenemos expresada como producto infinito como en (2.8).

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_p \frac{\log p\chi(p)p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} \stackrel{?}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Esa última interrogación se prueba de manera fácil. Recordemos que estábamos trabajando en $Re(s) > 1$, para cada s tenemos convergencia absoluta, por tanto podemos reorganizar los sumatorios en las sumas de la derecha y si seleccionamos todas las potencias de un mismo número primo tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(p^k)\chi(p)^k}{p^{sk}} = \log p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^k = \log p \frac{-\chi(p)p^{-s}}{\chi(p)p^{-s}-1}.$$

Ahora al sumar sobre todos los primos llegamos a la expresión que teníamos antes y por tanto llegamos a una fórmula muy similar a la que teníamos con la ζ:

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \tag{2.12}$$

Que es válida en $Re(s) > 1$ (la parte de la derecha define una función holomorfa por el criterio M de Weierstrass). Es interesante notar que lo único que hemos usado (aparte de que $\chi(n) \ll 1$ para la convergencia) es que χ es una función totalmente multiplicativa.

Ahora, tenemos que recordar cómo usabamos los caracteres para seleccionar los restos congruentes con cierto $a \mod q$. Sea $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_q)$ y definimos $f : G \to \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 1$ y $f(n) = 0$ para $n \not\equiv a \mod q$. Calculamos su trasformada de Fourier discreta:

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi}(g) = \overline{\chi}(a).$$

Y si sumamos ahora las derivadas logarítmicas sobre todos los caracteres con esos pesos, obtenemos:

$$-\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\chi(n)}{n^s}.$$

Y por la fórmula de inversión (2.4) o directamente por las relaciones de ortogonalidad (2.2) sabemos que $\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\chi(n)=\sum_{\chi}\widehat{f}(\chi)\chi(n)=\varphi(q)f(n)$. Como aclaración, recordemos que los caracteres de Dirichlet se definen extendiendo los caracteres del grupo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_q)$ poniendo ceros en los no coprimos con q, así que en esos valores es directo que $\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\chi(n)=0$. Llegamos a la fórmula

$$-\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\varphi(q)\sum_{n\equiv a(q)}\frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{2.13}$$

Ahora supongamos el resultado de que $L(1,\chi)\neq 0$ cuando χ no es carácter principal (si no, ya sabemos que ahí hay un polo). Pongamos ahora $s>1$ (real) y tomemos el límite cuando $s\to 1^+$. La parte derecha de (2.13) converge por convergencia monótona a $\varphi(q)\sum_{n\equiv a(q)}\frac{\Lambda(n)}{n}$. Por otra parte, a la izquierda separamos el carácter principal del resto de caracteres

$$-\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}-\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(a)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}.$$

Como hemos supuesto que $L(1,\chi)\neq 0$ si $\chi\neq\chi_0$, la parte de la derecha tendrá un límite finito (el que sea). Y por otra parte, habíamos visto que por (2.9) la función ζ y $L(s,\chi_0)$ se relacionan del siguiente modo:

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|m}(1-p^{-s}).$$

Lo que prueba que $L(s,\chi_0)$ tiene en $s=1$ un polo de orden 1, así que su derivada logarítmica tendrá un polo de orden 1 con residuo igual a -1 en $s=1$:

$$\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)}=\frac{-1}{s-1}+O(1).$$

Y poniéndolo todo junto llegamos a

$$\varphi(q)\sum_{n\equiv a \mod q}\frac{\Lambda(n)}{n}=\lim_{s\to 1^+}-\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\lim_{s\to 1^+}\frac{1}{s-1}+O(1)=\infty.$$

Y esto ya concluiría la prueba, ya que si en la suma de la izquierda sólo hubiera un número finito de términos sería imposible que me diera infinito (recordemos que la función Λ es no nula sólo en las potencias de primos). Separando en $\varphi(q)\sum_{n\equiv a \mod q}\frac{\Lambda(n)}{n}$ los $n=p$ de los $n=p^k$ para $k\geq 2$ llegamos sin mucho esfuerzo a

$$\varphi(q)\sum_{\substack{n\equiv a \mod q\\ n\leq x}}\frac{\Lambda(n)}{n}=\varphi(q)\sum_{\substack{p\equiv a \mod q\\ p\leq x}}\frac{\log p}{p}+O(1).$$

Lo que prueba que efectivamente

$$\sum_{p\equiv a \mod q} \frac{\log p}{p} = \infty.$$

Ahora vamos a justificar el hecho de que $L(s,\chi) \neq 0$ para χ un carácter no principal.

Proposición 2.2.2. *$L(s,\chi) \neq 0$ para χ un carácter no principal módulo q.*

Empecemos por el caso fácil, cuando χ es un carácter que toma valores complejos (no sólo reales). Supongamos en este caso que $L(1,\chi) = 0$, lo que implica que

$$L(1,\chi) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leq N} \frac{\chi(n)}{n} = 0.$$

Si tomamos el conjugado en la expresión anterior obtenemos que

$$L(1,\overline{\chi}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leq N} \frac{\overline{\chi(n)}}{n} = 0.$$

Lo que quiere decir que la función L del carácter $\overline{\chi}$ también tendrá un cero en $s=1$. Al ser las funciones L holomorfas en $Re(s) > 0$ (cuando el carácter no es el principal), este cero tendrá un determinado orden k y como hemos impuesto que χ tome valores no sólo reales, $\chi \neq \overline{\chi}$. Tomando derivadas logarítmicas llegamos a

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{k}{s-1} + O(1), \quad \frac{L'(s,\overline{\chi})}{L(s,\overline{\chi})} = \frac{k}{s-1} + O(1).$$

El hecho de que el orden sea el mismo se deduce de que al derivar nos queda $L^{j)}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^j \log^j n\chi(n))/n^s$ y esta expresión converge cuando $Re(s) > 0$ (sumando por partes). Si evaluamos en $s=1$ y conjugamos vemos que lo único que hay que conjugar es el carácter, lo que nos da el valor de $L^{j)}(1,\overline{\chi})$.

Insertando esto en la fórmula (2.13) en $a=1$ llegamos a que

$$\varphi(q) \sum_{n\equiv 1(q)} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\sum_{\chi} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

$$= -\left(\underbrace{\frac{-1}{s-1}}_{\substack{\text{del polo}\\ \text{de } \chi_0}} + \underbrace{\frac{k}{s-1}}_{\substack{\text{del cero}\\ \text{de } \chi}} + \underbrace{\frac{k}{s-1}}_{\substack{\text{del cero}\\ \text{de } \overline{\chi}}} + \underbrace{\frac{k'}{s-1}}_{\substack{\text{de otros}\\ \text{posibles ceros}}} + O(1) \right).$$

Y organizandolo todo un poco llegamos a ($1 - 2k - k' = C \leq -1$ ya que $k \geq 1$ y $k' \geq 0$).

$$\varphi(q) \sum_{n\equiv 1 \mod q} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{C}{s-1} + O(1).$$

Y ahora está claro que al hacer tender $s \to 1^+$ el miembro de la izquierda convergerá a $\varphi(q)\sum_{n\equiv 1 \mod q} \frac{\Lambda(n)}{n} \geq 0$ mientras que el miembro de la derecha converge a $-\infty$!!

Esto reduce el problema a ver que las funciones L de los caracteres reales no se anulan en $s=1$. La primera prueba que voy a presentar es elemental (en el sentido de que no usa resultados de variable compleja).

Sea ahora χ un carácter que toma valores sólo en los reales. Definimos $f = 1 * \chi$. Para cualquier primo p que no divida a q tenemos que $\chi(p) = \pm 1$. Si $\chi(p) = 1$ está claro que para cualquier β tenemos la estimación $f(p^\beta) = \sum_{k=0}^{\beta} 1 \geq 1$. Por otra parte si es -1 nos tenemos que conformar con decir que $f(p^\beta) = \sum_{k=0}^{\beta}(-1)^k \geq 0$ y en el caso de un β par, como se empieza sumando en 1, tendríamos $f(p^\beta) = 1$. Resumiendo, si p no divide a q tenemos que $f(p^\beta) \geq 0$ y si β es par entonces $f(p^\beta) \geq 1$. Con esto vamos a probar la estimación $\sum_{n\leq x} f(n)/n^{1/2} \geq \log\log x + O(1)$.

Para hacer esa estimación, usando la multiplicabilidad, vemos que para los $n \leq x$ tales que sean coprimos con q y sean cuadrados perfectos tenemos que $f(n) \geq 1$ (y la prueba es poner n como el producto de sus factores primos y notar que todos los exponentes son pares). Con esto, podemos hacer la estimación:

$$\sum_{n\leq x} f(n)/n^{1/2} \geq \sum_{m^2\leq x,(m,q)=1} 1/m = \sum_{m^2\leq x}\sum_{d|(m,q)} \frac{\mu(d)}{m} = \sum_{d|q}\sum_{k\leq\sqrt{x}/d} \frac{\mu(d)}{dk}$$

$$= \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k\leq\sqrt{x}/d}\frac{1}{k} = \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\left(\log\frac{\sqrt{x}}{d} + O(1)\right) = \log\sqrt{x}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d} + O(1),$$

y usando que $\varphi(q) = \sum_{d|q}\mu(d)q/d$,

$$= \frac{\varphi(q)}{2q}\log x + O(1).$$

Con esta cota inferior en mente, ahora vamos a estimar esa suma intercambiando el orden de sumación:

$$\sum_{n\leq x}\frac{f(n)}{n^{1/2}} = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\frac{\chi(d)}{x^{1/2}} = \sum_{d\leq x}\sum_{k\leq x/d}\frac{\chi(d)}{\sqrt{dk}} = \sum_{d\leq\sqrt{x}}\sum_{k\leq x/d}\frac{\chi(d)}{\sqrt{dk}} + \sum_{k\leq\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}<d\leq x/k}\frac{\chi(d)}{\sqrt{dk}}$$

Lo único que hemos hecho al final ha sido separar la suma entre los términos con $d \leq \sqrt{x}$ y $d > \sqrt{x}$ (y en esta última hemos vuelto a invertir el orden de sumación). Ahora vamos a estimar cada sumando, el primero es igual a $\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\sum_{k\leq x/d}\frac{1}{\sqrt{k}}$, por tanto lo que queremos es una estimación de $\sum_{k\leq t} 1/\sqrt{k}$. Usando Euler-Maclaurin generalizado (1.48) llegamos a

$$\sum_{k\leq t}\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^t\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + O(1)\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int_1^t\frac{P_1(x)}{x^{3/2}}dx = 2\sqrt{t} + cte + O(1/\sqrt{t}). \tag{2.14}$$

El único punto delicado quizá es que $\int_1^t \frac{P_1(x)}{x^{3/2}}dx = \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^{3/2}}dx - \int_t^\infty \frac{P_1(x)}{x^{3/2}}dx = cte + O(1/\sqrt{t})$. Con esto sustituyendo en el primer sumando llegamos a

$$\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\sum_{k\leq x/d}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\left(2\sqrt{\frac{x}{d}} + cte + O(\sqrt{d/x})\right)$$

$$= 2\sqrt{x}\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d} + cte\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}} + O(1).$$

Ahora queremos ver a qué se parecen esos sumatorios. El primero está claro que al hacer x tender a infinito nos va a dar $L(1,\chi)$ y el segundo será $O(1)$ (sumando por partes).

Ahora para el segundo sumando, $\sum_{k\leq\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{\sqrt{x}<d\leq x/k}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}$ lo que nos interesa es una estimación buena de $\sum_{d\leq t}\chi(d)/\sqrt{d}$. Una vez más la sumación por partes nos permite despejar, llamamos $S(t)=\sum_{n\leq t}\chi(n)=O(1)$ y llegamos a:

$$\sum_{d\leq t}\chi(d)/\sqrt{d}=\frac{S(t)}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\int_1^t\frac{S(x)}{x^{3/2}}dx. \tag{2.15}$$

Restando dos de estos términos y teniendo en cuenta que $S(x)=O(1)$ obtenemos:

$$\sum_{\sqrt{x}<d\leq x/k}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}=\frac{O(1)}{\sqrt{x/m}}+\frac{O(1)}{x^{1/4}}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{x}}^{x/m}\frac{S(u)}{u^{3/2}}du=O(x^{-1/4}).$$

Donde lo que hemos usado es que $m\leq\sqrt{x}$ y la parte de la integral se aproxima por $\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{1}{u^{3/2}}du=O(x^{-1/4})$.

Con estas aproximaciones podemos concluir que (por (2.14))

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(q)}{2q}\log x+O(1)&\leq 2\sqrt{x}\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+O(1)+O(x^{-1/4}\sum_{k\leq\sqrt{x}}1/\sqrt{k})\\&=2\sqrt{x}\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+O(1).\end{aligned}$$

Ahora queremos *sustituir* $\sum_{d\leq\sqrt{x}}\chi(d)/d$ por $L(1,\chi)$ pero para hacer eso hay que quitar $\sum_{d>\sqrt{x}}\chi(d)/d$. Sumando por partes podemos concluir que $\sum_{d\leq\sqrt{x}}\chi(d)/d=L(1,\chi)+O(1/\sqrt{x})$ y por tanto:

$$\frac{\varphi(q)}{2q}\log x+O(1)\leq 2\sqrt{x}L(1,\chi)+O(1).$$

Tomando un x suficientemente grande está claro que podemos concluir que $L(1,\chi)>0$.

Ahora vamos a probar este mismo hecho (que la función L asociada a un carácter real no se anula en $s=1$) pero empleando variable compleja. Esta demostración viene de [Dav80] y fue dada originalmente por E. Landau.

Por reducción al absurdo supongamos que $L(s,\chi)$ tiene un cero en $s=1$. Como $L(s,\chi_0)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con un solo polo en $s=1$ de orden 1, el producto

$$L(s,\chi)L(s,\chi_0)$$

es holomorfa en $Re(s)>0$ (que es en principio donde hemos visto que $L(s,\chi)$ es holomorfa). Ahora, para $Re(s)>1/2$ tenemos que $L(2s,\chi_0)$ es holomorfa y no se anula por tanto

$$\eta(s)=\frac{L(s,\chi)L(s,\chi_0)}{L(2s,\chi_0)}$$

es holomorfa en $Re(s)>1/2$ y además como $L(2s,\chi_0)$ tiene un polo en $s=1/2$, $\eta(s)$ es holomorfa en $s=1/2$ y $\eta(1/2)=0$. La idea de esta demostración es casi la misma que la anterior ya que $L(s,\chi_0)$ es *prácticamente* $\zeta(s)$ y trabajar con $1*\chi$ como hemos hecho antes se corresponde en versión serie de Dirichlet a trabajar con $\zeta(s)L(s,\chi)$.

Volviendo a la prueba, los tres elementos que componen $\eta(s)$ tienen una expresión como producto infinito válido en principio cuando $Re(s) > 1$. Usando esta expresión llegamos a

$$\eta(s) = \frac{\prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \prod_p (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1}}{\prod_p (1-\chi_0(p)p^{-2s})^{-1}}.$$

Para los primos p que no sean coprimos con q (que son los primos que dividen a q), $\chi(p) = \chi_0(p) = 0$. Para el resto de primos $\chi_0(p) = 1$. Como $\chi(p) = \pm 1$ si $(p, q) = 1$ ocurre además que los primos tal que $\chi(p) = -1$ su factor se cancela ya que este es igual a

$$\frac{(1+p^{-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}}{(1-p^{-2s})^{-1}} = 1.$$

Por tanto nos hemos quedado sólo con los primos tal que $\chi(p) = 1$, que aparecerán en el producto infinito como

$$\frac{(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}}{(1-p^{-2s})^{-1}} = \frac{(1-p^{-s})(1+p^{-s})}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}.$$

Con lo que nos queda la expresión para $\eta(s)$:

$$\eta(s) = \prod_{\chi(p)=1} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}$$

válida en principio sólo cuando $Re(s) > 1$. Para empezar, ese productorio podría ser vacío, pero eso significaría que $\eta(s) = 1$ para $Re(s) > 1$ y por el principio de los ceros aislados η se extendería a la función constante 1 en todo $\mathbb{C}$ pero esto contradice el hecho de que $\eta(1/2) = 0$.

Esa expresión como producto infinito la podemos *deshacer* para obtener una expresión como serie de Dirichlet. Para ello descomponemos el productorio en dos partes, la primera es $\prod_{\chi(p)=1}(1+p^{-s})$ que es la representación como producto de Euler de la función aritmética

$$f(n) = \begin{cases} |\mu(n)| & \text{si en la factorización de } n \text{ sólo aparecen primos con } \chi(p) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ya que

$$\prod_{\chi(p)=1}(1+p^{-s}) = \prod_{\chi(p)=1}(1+|\mu(p)|p^{-s} + |\mu(p^2)|p^{-2s} + ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Por otra parte el otro factor es $\prod_{\chi(p)=1}(1-p^{-s})^{-1}$ que se corresponde con la serie de

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si en la factorización de } n \text{ sólo aparecen primos con } \chi(p) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

porque

$$\prod_{\chi(p)=1}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{\chi(p)=1}(1+p^{-s}+p^{-2s}+...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

Y ahora al multiplicar esas dos series de Dirichlet obtenemos η:

$$\eta(s) = \prod_{\chi(p)=1} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}. \tag{2.16}$$

Desde el punto de vista de la convergencia de todas estas series y productos, recordemos que estamos trabajando en $Re(s) > 1$, donde tenemos convergencia absoluta y por tanto puedo reorganizar los productos y los sumandos de las series.

Lo que nos va a interesar de (2.16) es que en esa expresión como serie de Dirichlet todos los coeficientes son mayores o iguales a 0 (ya que tanto f como g son positivas) y que el primero de los coeficientes es $(f*g)(1) = 1$. Recordemos siempre que la expresión (2.16) es sólo válida en principio para $Re(s) > 1$.

Pero como η era holomorfa en $Re(s) > 1/2$, por la fórmula integral de Cauchy el desarrollo en serie de potencias alrededor de $s = 2$ tendrá radio de convergencia como poco igual a $3/2$ (de hecho podemos decir un poco más, será válido en un radio de $3/2+\epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ ya que η es holomorfa también en $s = 1/2$). La serie de potencias alrededor de $s = 2$ será

$$\eta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^{m)}(2)}{m!}(s-2)^m. \tag{2.17}$$

El valor de esas derivadas lo podemos averiguar usando (2.16):

$$\eta^{m)}(2) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)\log^m n}{n^2} = (-1)^m b_m,$$

donde los b_m son mayores o iguales a 0. Insertando esto en (2.17) llegamos a

$$\eta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(2-s)^m.$$

Y ahora ya es trivial usando esta última expresión llegar a una contradicción. Como hemos señalado antes, este desarrollo debe ser válido en un radio de $3/2+\epsilon$, por tanto podemos sin más ciudado evaluar en $s = 1/2$ y obtenemos

$$0 = \eta(1/2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(1/2)^m \geq b_0 \geq 1.$$

Y esto concluye esta segunda demostración de que $L(1,\chi) \neq 0$ cuando χ es un carácter no principal.

Capítulo 3

Parte 3

El objetivo de esta última sección es un estudio más profundo de la función Zeta de Riemann que nos ayude a entender mejor su relación con los números primos. Muchos de los pasos que damos aquí son los que se dieron originalmente al avanzar en el estudio de la Zeta. Encontramos por ejemplo la demostración original de Riemann de la Ecuación Funcional y la teoría de funciones enteras que desarrolló Hadamard en su demostración del teorema de los números primos. Al final de la sección se da una idea de cómo es la demostración original que muestra la relación directa de los ceros de la función Zeta con el término de error en el teorema de los números primos (y con la hipótesis de Riemann).

Esta parte del trabajo se inició en Febrero y concluyó a finales de Marzo. El plan de trabajo nuevamente consistió en que el tutor proporcionó una lista de conceptos importantes y bibliografía recomendada para que estuvieran presentes. Para esta sección, los libros que he encontrado más útiles y claros son [Dav80], [Cha07] y [Cha13]. Por su parte, [Cha11] es una lectura muy interesante que presenta la mayoría de las ideas de este trabajo condensadas en pocas líneas.

3.1. Función Gamma y fórmula de sumación de Poisson.

Antes de meternos más en profundidad con la función ζ de Riemann vamos a probar o simplemente nombrar algunos resultados de por sí interesantes y que nos ayudarán más adelante con la función ζ.

En primer lugar, recordemos la definición de la función Γ:

Definición 3.1.1. *Función Gamma:*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad y \quad \Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s \prod_{n=1}^\infty (1 + s/n) e^{-s/n}}, \tag{3.1}$$

donde la primera definición es sólo válida para $Re(s) > 0$ mientras que la segunda es válida en todo $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2...\}$ y muestra a la función Gamma como una función meromorfa que no se anula nunca (el producto infinito converge por el criterio M de Weierstrass para productos infinitos). Pasar de una definición a otra no es sencillo pero en la siguiente sección daremos un esquema de la prueba usando teoría de funciones enteras.

La función Γ cumple algunas ecuaciones funcionales, la más conocida es que interpola al factorial mediante la fórmula

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Esto se puede probar con la definición como integral y permite ver cómo la función Γ se puede extender a una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$ con polos en los naturales negativos y el 0. Otras ecuaciones que verifica son:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{y} \quad \Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s).$$

Usando estas dos últimas y con manipulaciones sencillas llegamos a

$$\Gamma(s/2)/\Gamma(1/2-s/2) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{1-2s} \cos(\pi s/2)\Gamma(s), \tag{3.2}$$

que será importante cuando escribamos la ecuación funcional de ζ. Para probar todas estas identidades lo más fácil es usar la definición de Γ (3.1) como producto infinito y tener en mente cosas como la factorización del seno como producto infinito.

Lo que sí vamos probar aquí es la fórmula de Stirling, que afirma que dado $\epsilon > 0$ si nos restringimos a $|arg(s)| < \pi - \epsilon$ entonces:

$$\operatorname{Log}\Gamma(s) = (s-1/2)\operatorname{Log}(s) - s + 1/2\log 2\pi + O(|s|^{-1}), \tag{3.3}$$

donde Log es la rama principal del logaritmo y la constante implícita depende de ϵ. Y también una expresión similar para la derivada logarítmica:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \operatorname{Log}(s) - \frac{1}{2s} + O(|s|^{-2}). \tag{3.4}$$

Usando la definición como producto infinito de Γ de (3.1) es sencillo calcular la derivada logarítmica de Γ y derivando luego esa expresión llegamos a otra fórmula bien conocida de la función gamma:

$$\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2}. \tag{3.5}$$

Para estimar esta suma, usamos la fórmula de Euler-Maclaurin de orden 2, (1.21) a $f(t) = 1/(t+s)^2$. Por supuesto, siempre que nos mantengamos en s lejos del eje negativo todas estas fórmulas tienen sentido:

$$\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{(s+n)^2} = \int_0^M \frac{dt}{(s+t)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(M+s)^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$
$$+\frac{1}{12}\left(\frac{-2}{(M+s)^3} + \frac{2}{s^3}\right) - \frac{1}{2}\int_0^M P_2(t) f''(t)dt.$$

Haciendo tender $M \to \infty$ llegamos a:

$$\left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right)' = \frac{1}{s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{6s^3} - 3\int_0^\infty P_2(t)\frac{1}{(t+s)^4}dt. \tag{3.6}$$

Aquí hay que tener cuidado con la integral, nosotros hemos metido el límite pero realmente hay que ver que eso es posible. Fijado un $s \notin (-\infty, 0]$ y dividiendo la integral en el trozo de 0 a $2|s|$ y de $2|s|$ a M podemos aplicar la desigualdad $|t+s|^4 \geq (t-|s|)^4$ en el segundo trozo para usar convergencia dominada. Recordemos que para hacer esta cuenta lo que necesitamos es que la función f sea C^2 en el intervalo $[0, M]$, por tanto tenemos que excluir todos los valores de s negativos y esto nos dice que la fórmula (3.6) es válida para $s \notin (-\infty, 0]$.

Ahora que tenemos una derivada vamos a integrar para hallar la primitiva. Para cada $z \in \{|arg(s)| < \pi - \epsilon\}$ definimos $\gamma_z : [0,1] \to \mathbb{C}$ el camino que une en línea recta el 1 con z. Integrando ambos miembros de (3.6) llegamos a:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \gamma + \operatorname{Log}(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{7}{12} - 3\int_{\gamma_z}\int_0^\infty P_2(t)\frac{1}{(t+s)^4}dtds.$$

De nuevo lo que requiere explicación es la parte de la integral, ya que lo que queremos es intercambiar esas integrales. No es complicado ver que podemos aplicar Fubini, basta notar que $|\gamma_z(u)| \leq M$ y también que $|\gamma_z(u) + t| \geq \delta > 0$ para algunas M y δ con lo que logramos:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = C + \operatorname{Log}(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \int_0^\infty P_2(t)\frac{1}{(t+z)^3}dt \tag{3.7}$$

donde hemos agrupado las contribuciones de todas las constantes en C. Ahora es cuando vamos a usar el hecho de que tenemos que coger s fuera de una franja que incluya al eje real negativo, ya que lo que buscamos es acotar el término integral.

A ojo nos gustaría concluir que ese término es $O(|z|^{-2})$ pero si supusiéramos esto cierto y válido para todo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ llegaríamos pronto a una contradicción ya que si en (3.7) el término de error fuera $O(|z|^{-2})$, al coger $z = e^{\alpha i}$ y hacer $\alpha \to \pi^+$ tendríamos que el miembro de la derecha está acotado (ya que el logaritmo tiene límite, aunque no sea continuo) pero como Γ'/Γ tiene un polo en $z = -1$ el miembro de la izquierda se iría a infinito.

Así que por eso imponemos que $|arg(z)| < \pi - \epsilon$, esto nos permite garantizar que este ejemplo no se da. Para hacer la acotación que permite concluir el resultado, tenemos de nuevo que encontrar una cota inferior adecuada para $|t+z|$. Para cualquier $t \in [0, \infty)$ está claro que $|t+z| \geq |t - |z|e^{i\epsilon}|$ (por un argumento geométrico, tomando z en la franja indicada). Elevando al cuadrado y con varias manipulaciones llegamos a que

$$|z+t|^2 \geq (t-|z|)^2 + 2t|z|\delta$$

donde $\delta = 1 - \cos\epsilon > 0$ (el hecho de que esto sea > 0 es lo que será crucial). Una vez hecho este paso, para acotar el término de error lo que hacemos es dividir en tres trozos la integral y acotar cada uno de ellos por separado (nos olvidamos ya de $P_2(t) = O(1)$)

$$\int_0^\infty \frac{1}{|t+z|^3}dt \leq \int_{2|z|}^\infty \frac{1}{|t+z|^3}dt + \int_{|z|/2}^{2|z|} \frac{1}{|t+z|^3}dt + \int_0^{|z|/2} \frac{1}{|t+z|^3}dt.$$

En el primer trozo usamos que $|z+t| \geq (t-|z|)$, en el segundo $|z+t| \geq \sqrt{2t|z|\delta}$ y en el último $|z+t| \geq (|z|-t)$. Con esto obtenemos la fórmula (3.4) (con este esquema no se obtiene la constante directamente pero se puede hallar con la definición de la constante γ con Euler-Maclaurin, sale $C = 0$). Por último si integramos una vez más (3.7) y acotamos el término de error de forma similar obtenemos la fórmula de Stirling en su forma más clásica

(3.3) (de nuevo, a salvo de constantes, mirar [CC92] para una prueba de las constantes en la fórmula de stirling).

El otro elemento que usaremos más adelante es la fórmula de sumación de Poisson:

Proposición 3.1.2. *Fórmula de sumación de Poisson.*
Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ *tal que* $f, f', f'' = O(1/(1+|x|)^2)$ *entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n). \tag{3.8}$$

Para demostrar esta fórmula seguimos el esquema de [Cha13] y comenzamos definiendo $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. Está claro que esta función está bien definida ya que para cada x la función $f(x+n)$ decae como $1/n^2$ y por tanto es absolutamente sumable. Además es periódica de periodo 1, y como la función f es continua por convergencia dominada está claro que esta también. Al ser una función continua en el intervalo $[0,1]$ es integrable y podemos hallar sus coeficientes de Fourier:

$$c_n = \int_0^1 F(x)e(-nx)dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e(-nx)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e(-nx)dx.$$

Cambiar el orden de integración es sencillamente aplicar Fubini usando que $f(x+n) \ll 1/(1+|x+n|)^2 \leq 1/n^2$. Y ahora haciendo el cambio de variable $x+n=t$ llegamos a

$$c_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)e(-nt)dt = \hat{f}(n)$$

(sale además un término $e(-n^2)$ pero como este siempre es 1 no hay mayor problema).

Ahora podemos usar toda la teoría de transformada de Fourier. Como f es C^2, $f^{(\alpha)} \in L^1$ para $\alpha \leq 2$ y además $f^{(\alpha)} \in C_0$ (funciones que en el infinito se van a 0) para $\alpha \leq 1$ entonces

$$\widehat{(f^{(\alpha)})}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Por el lemma de Riemann-Lebesgue también sabemos que si $g \in L^1$ entonces $\widehat{g} \in C_0$, en particular es acotada. Si tomamos $g = f''$, como esta última es L^1 entonces tenemos que

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{(f'')}(n)}{(2\pi in)^2} \ll \frac{1}{n^2}$$

(claro está, si $n \neq 0$). Esto me dice que la serie de Fourier de F es *buena* ya que converge absolutamente. Por tanto la serie de Fourier converge a la función, $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e(nx)$ y evaluando en $x=0$ tenemos (3.8).

Como ejemplo de aplicación de la fórmula de Poisson vamos a deducir una interesante ecuación funcional. Llamamos

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2 z) \tag{3.9}$$

que define una función holomorfa en $\{Im(z) > 0\}$ aplicando el criterio M de Weierstrass.

Proposición 3.1.3. *La función θ verifica la ecuación funcional*

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{2z}}\,\theta\left(\frac{-1}{4z}\right) \tag{3.10}$$

para $z \in \{Im(z) > 0\}$ donde hay que interpretar la raíz como la que toma valores reales positivos en los reales positivos, $\sqrt{z} = e^{1/2\mathrm{Log}(z)}$.

Para demostrarlo lo primero es comprobarlo para números imaginarios puros, sea $z = ib$ con $b > 0$ y sea $f(x) = e(n^2 ib) = e^{-2\pi b x^2}$. Es claro que $\theta(ib) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$, y como la función f es todo lo regular que queramos (es la gaussiana) se verifican las hipótesis necesarias para aplicar (3.8). Lo único que tenemos que hacer es calcular quién es la trasformada de la gaussiana. Una demostración muy corta e interesante es la que aparece en [Fo99] que es la que presentamos. Para no ir arrastrando un factor 2, vamos a transformar $g(x) = e^{-a\pi x^2}$.

Está claro que se verifica $g'(x) = -2\pi a e^{-a\pi x^2} = -2\pi a x g(x)$. Usando las propiedades de la trasformada de Fourier (g es lo suficientemente buena como para que todos los cálculos siguientes estén justificados) y transformando ambos lados de la expresión anterior llegamos a

$$\widehat{g'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{g}(\xi)$$

y por otra parte

$$\widehat{-2\pi a x}g(\xi) = -ia\widehat{-2\pi i x}g(\xi) = -ia\frac{d\widehat{g}}{d\xi}.$$

Igualando esas expresiones obtenemos la ecuación diferencial $-2\pi\xi\widehat{g}(\xi) = a\frac{d\widehat{g}}{d\xi}$, y esta es de las que sabemos resolver, $\widehat{g}(\xi) = Ce^{-\pi\xi^2/a}$. El valor de la constante se obtiene evaluando en $\xi = 0$, $C = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}dx = a^{-1/2}$ (para hacer esa integral lo más fácil es hacer un cambio de variable y relacionarlo con $\Gamma(1/2)$). Por tanto concluimos que

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{e^{-\pi\xi^2/a}}{\sqrt{a}}.$$

Sustituyendo ahora $a = 2b$ y aplicando (3.8):

$$\theta(ib) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi b n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{2b}}}{\sqrt{2b}} = \frac{1}{\sqrt{2b}}\theta\left(\frac{-1}{4ib}\right).$$

Por tanto para valores ib con $b > 0$ tenemos que se verifica (3.10). Sin embargo, está claro que la función $\sqrt{\frac{i}{2z}}\theta\left(\frac{-1}{4z}\right)$ define una función holomorfa en $Im(z) > 0$ (lo único que hay que tener en cuenta es que si $Im(z) > 0$ entonces $Im(-1/(4z)) > 0$ y $Re(i/(2z)) > 0$, la raíz se define como antes). Por tanto tenemos que esa función coincide con $\theta(z)$ en un conjunto con acumulaciones lo que por el principio de ceros aislados me dice que entonces ambas coinciden en todo el dominio donde están definidas, en este caso $\{Im(z) > 0\}$.

3.2. La ecuación funcional de Zeta.

Riemann demostró en su famosa memoria de 1859 (reproducida en [Edw01]) que la función Zeta verifica una relacción de simetría conocida como *ecuación funcional.* Esta dice que

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s), \tag{3.11}$$

y si se multiplica a ambos lados por $s(s-1)$ obtenemos una función entera.

Para demostrar esta relacción procedemos como hizo originalmente Riemann. En primer lugar, restingiendonos al semiplano $\{Re(s) > 1\}$ podemos hacer:

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\pi^{-s/2}}{n^s}x^{s/2-1}e^{-x}dx.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \pi n^2 t$ llegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\pi^{-s/2}}{n^s}(\pi n^2 t)^{s/2-1}e^{-\pi n^2 t}\pi n dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{s/2-1}e^{-\pi n^2 t}dt.$$

Ahora queremos cambiar el orden de summción. Si llamamos $s = \sigma + it$ y metemos valores absolutos dentro de la suma y la integral, lo que queremos es ver que $t^{\sigma/2-1}e^{-\pi n^2 t}$ es integrable para $\sigma > 1$. Pero deshaciendo el cambio de variable llegaríamos de nuevo a $\pi^{-\sigma/2}\Gamma(\sigma/2)\zeta(\sigma) < \infty$. De modo que intercambiando suma con integral de nuevo llegamos a

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{s/2-1}(\theta(it/2)-1)dt$$

donde θ es la función definida como en (3.9).

Dividimos esa integral en dos, $\int_0^{\infty} = \int_1^{\infty} + \int_0^1$ y en el trozo que va de 0 a 1 usamos la ecuación funcional (3.10) que ya hemos demostrado

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{s/2-1}(\theta(it/2)-1)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{s/2-1}(t^{-1/2}\theta(i/(2t))-1)dt.$$

Ahora resta hacer el cambio de variable $u = 1/t$ para llegar a

$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty} u^{-1-s/2}(u^{1/2}\theta(iu/2)-1)du.$$

Dentro del paréntesis sumamos y restamos $u^{1/2}$ y después de manipular esas integrales llegamos a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{s/2-1}(\theta(it/2)-1)dt = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} u^{-1/2-s/2}(\theta(iu/2)-1)du.$$

Poniendolo todo junto (esto último es sólo el trozo de 0 a 1) obtenemos

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(t^{s/2-1} + t^{-1/2-s/2})(\theta(it/2)-1)dt. \tag{3.12}$$

Si multiplicamos todo por $s(s-1)$ a la derecha obtenemos una función entera que es invariante al cambiar s por $1-s$. Por tanto, por la unicidad de la extensión analítica, el miembro de la izquierda debe ser también una función entera y tener esa simetría además. Aquí el único punto un poco más delicado es quizá ver que la integral de (3.12) define una función entera pero esto se prueba por el teorema de Morera teniendo en cuenta además que la función $\theta(it/2) - 1$ decae muy rápidamente ya que:

$$\frac{\theta(it/2) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e(n^2 it/2) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi t} + \int_1^{\infty} e^{-\pi t x^2} dx \ll e^{-\pi t}.$$

Y esto ya prueba la ecuación funcional en su forma (3.11).

Usando las propiedades de la función gamma, en particular (3.2) es sencillo llegar a la forma asimétrica de la ecuación funcional:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s).$$

Como vamos a usarla más adelante, es conveniente darle nombre a esta función entera:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s). \tag{3.13}$$

Usando que $\xi(s)$ es entera podemos ver en qué región están los ceros de ζ. Como $\Gamma(s)$ tiene polos de orden 1 en $s = 0, -1, -2...$ (para ver esto basta mirar (3.1)), $\Gamma(s/2)$ tendrá polos en los pares negativos (y el 0). El polo de 0 queda anulado al multiplicar por s y el resto de polos deben anularse forzosamente por ceros de la función ζ, lo que prueba que ζ tiene ceros (los llamados ceros triviales) en los pares negativos. Pero además, el resto de ceros de ζ deben estar en la región $\{0 \leq Re(s) \leq 1\}$. Si tuviéramos un cero de ζ en s_0 con $Re(s_0) < 0$ (y s_0 distinto de un par negativo) entonces como $\Gamma(s_0) \neq \infty$ (no tiene un polo) tiene que pasar que $\xi(s_0) = 0$. Por la simetría de $\xi(s)$, entonces $\xi(1-s_0) = 0$. Y ahora esto significa que algún factor de ξ se anula en $1-s_0$ pero cuál? Los primeros términos está claro que no y la función Γ no se anula nunca (por su definición como producto infinito, (3.1)). Por su parte como $Re(1-s_0) > 1$ es válida la representación de Euler como producto infinito (1.8) y por tanto la función zeta no se anula en ningún punto de $\{Re(s) > 1\}$ así que $\xi(1-s_0) \neq 0$ lo que es una contradicción. Además, por un argumento análogo, los ceros de ζ en los pares negativos deben ser de orden 1, ya que si fueran de orden superior matarían al polo correspondiente de la función Γ y al aplicar la simetría de $\xi(s) = \xi(1-s)$ llegaríamos a una contradicción igual que antes. De aquí salen los corolarios:

Corolario 3.2.1. *La función ζ tiene ceros de orden 1 en los pares negativos y el resto de posibles ceros deben estar en la banda crítica* $\{0 \leq Re(s) \leq 1\}$.

Corolario 3.2.2. *La función ξ tiene todos sus ceros (si los hay) en la región* $\{0 \leq Re(s) \leq 1\}$ *y coinciden con los de ζ en esa banda.*

3.3. Fórmula de Jensen y funciones enteras de orden finito

Ahora vamos a querer estudiar la función ξ ya que esta función es entera y sus ceros son exactamente los ceros no triviales de Zeta que se encuentran en la banda crítica $\{0 \leq Re(s) \leq 1\}$. Además tiene la ventaja de tener una simetía muy cómoda, $\xi(s) = \xi(1-s)$. Para ello necesitamos hablar un poco de la fórmula de Jensen y de funciones enteras de orden finito (de orden 1 será lo que nos interese en nuestro caso).

Definición 3.3.1. *Una función entera $f(z)$ se dice que es orden finito cuando existe un $\alpha > 0$ tal que*

$$f(z) \ll e^{|z|^\alpha}.$$

Excluimos de esta definición las constantes. Al ínfimo de los números α con la propiedad anterior se le denomina el orden de f.

Para empezar, vamos a probar que una función f entera de orden finito sin ceros es necesariamente de la forma $f = e^g$ donde $g(z)$ es un polinomio cuyo orden es el orden de f.

Lo primero, como $\mathbb{C}$ es símplemente conexo, sabemos que si f no se anula en $\mathbb{C}$ entonces existe una función $g(z)$ entera tal que $f = e^g$. Tomando módulos aquí y luego el logaritmo llegamos a que $Re(g) = \log|f(z)| \ll R^\alpha$ para $|z| \leq R$. Al ser g entera es igual a su serie de potencias en todo punto:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)z^n.$$

Tomando partes reales y $z = Re^{i\theta}$

$$Re(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cos n\theta - \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n \sin n\theta.$$

Ahora si recordamos que $\{\sin n\theta, \cos m\theta\}_{n,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ forman un sistema ortogonal en $[0, 2\pi]$ para recuperar los coeficientes a_m y b_m lo que podemos hacer es multiplicar por $\cos m\theta$:

$$a_m R^m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Re(g(z)) \cos m\theta d\theta$$

La prueba de esto es que como g es entera, su serie de potencias converge uniformemente sobre compactos y eso justifica que podamos intercambiar la suma con la integral. Como todos los términos se van a anular salvo el que tenga en $\cos m\theta$ se obtiene el resultado (suponemos $m \geq 1$).

Metiendo valores absolutos y teniendo en cuenta que si $|z| = R$ entonces $Re(g) \ll R^\alpha$ llegamos a

$$\pi|a_m|R^m \leq \int_0^{2\pi} |Re(g(z))| d\theta \ll R^\alpha.$$

Y ya está claro que si pasamos dividiendo el R^m y tomamos el límite cuando $R \to \infty$ llegamos a que $a_m = 0$ para los $m > \alpha$. De modo análogo se razona con los b_m (para $m \geq 1$, ya que en la serie de g no aparece b_0) y esto prueba que $g(z)$ es en realidad un polinomio de grado a lo más α. Por tanto el orden de una función entera (si existe) siempre va a ser un entero. Un detalle importante es que no necesitamos que se de la acotación $Re(g) \ll R^\alpha$ para todos los R, con que exista una sucesión de Rs que tiendan a infinito con esa propiedad podemos concluir igualmente el resultado.

Para continuar con el estudio de funciones enteras necesitamos la fórmula de Jensen:

Proposición 3.3.2. *Fórmula de Jensen.*

Sea f una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}(0, R)}$ tal que $f(0) \neq 0$. Supongamos además que $f(z)$ no se anula en la frontera de ese disco y que los ceros de f en $|z| < R$ son $z_1, z_2, ...z_n$ repetidos acorde con la multiplicidad. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)| = \log\frac{R^n}{|z_1|...|z_n|}. \tag{3.14}$$

Está claro que algunas de las hipótesis puestas son mejorables, podemos centrar el disco en cualquier otro punto distinto de 0 y la hipótesis de $f(0) \neq 0$ puede quitarse poniendo $f(z)/z^k$ y despejando.

Para demostrar esta fórmula basta poner $f(z) = (z - z_1)...(z - z_n)h(z)$ donde ahora h no se anula en $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$ y por tanto $h(z) = e^{g(z)}$ para alguna g holomorfa en ese disco. Ahora para hacer la integral basta integrar cada uno de los trozos. Para el término en h, como $\log|h| = Re(g)$ lo que nos queda es

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(g(Re^{i\theta}))d\theta = Re(g(0)) = \log|h(0)|.$$

(la cuenta es la misma exactamente que antes, es poner $Re(g)$ como su serie e intercambiar la suma con la integral).

Y para los demás términos $(z - z_j)$, lo que tenemos que hacer es

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - z_j|d\theta = \log R + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 - \frac{z_j}{R}e^{-i\theta}|d\theta.$$

Como una de tantas veces lo que hacemos ahora es pensar en el desarrollo en serie de potencias de $\text{Log}(1 - w) = -\sum_{k=1}^{\infty} w^k/k$ válido cuando $|w| < 1$. Si tomamos $w = \frac{z_j}{R}e^{-i\theta}$ se verifica lo que nosotros queremos y por tanto como $Re(\text{Log}(1 - w)) = \log|1 - w|$ sustituyendo esto arriba:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - z_j|d\theta = \log R + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_j^k}{kR^k}e^{-ik\theta}\right)d\theta.$$

Tomando ahora $z_j = r_j e^{iw_j}$ lo que nos queda es:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_j^k}{kR^k}\cos(k(\theta - w_j))d\theta = 0.$$

De nuevo, para concluir que la integral es 0, cambiamos la suma con la integral (ya que hay convergencia absoluta de la serie, quitando los cosenos) y usamos que la función 1 es ortogonal con $\cos k\theta$ para $k \geq 1$. Poniendo todo esto junto (y usando que $\log|f(0)| = \log|h(0)| + \log|z_1| + ... \log|z_n|$) se concluye (3.14). Una fórmula alternativa al miembro derecho de (3.14) es

$$\int_0^R r^{-1}n(r)dr,$$

donde $n(r)$ es el número de ceros en $|z| < r$. Para probarlo basta notar que si $|z_j| = r_j$ y ordenandolos de manera creciente entonces la integral es igual a

$$\log r_2/r_1 + 2\log r_3/r_2 + ... + n\log R/r_n = \log R^n/r_1...r_n.$$

Usando esta fórmula, si ρ es el orden de f, para $\alpha > \rho$ tenemos que $\log|f(Re^{i\theta})| \ll R^\alpha$ para R suficientemente grande. Por la fórmula de Jensen, (3.14) tenemos que

$$\int_0^R r^{-1}n(r)dr \ll R^\alpha$$

y como

$$\int_R^{2R} r^{-1}n(r)dr \geq n(R)\int_R^{2R} r^{-1}dr = n(R)\log 2$$

se concluye que (en principio para R grande, pero podemos extenderlo a cualquier R siempre que $n(0) = 0$)

$$n(R) \ll R^\alpha.$$

Tomando en la fórmula anterior $R = r_n + \delta$ con $\delta > 0$ se tiene que $n \leq n(r_n + \delta) \ll (r_n+\delta)^\alpha$ y por tanto tomando $\delta \to 0$ concluimos que $n \ll r_n^\alpha$ (recordemos que la constante es absoluta). Por tanto ahora, para cualquier $\beta > \alpha$ (y por tanto para cualquier $\beta > \rho$) se tiene que

$$\sum_{n=1}^\infty r_n^{-\beta} \leq K\sum_{n=1}^\infty n^{-\beta/\alpha} < \infty$$

ya que $\beta/\alpha > 1$.

Ahora, vamos a centrarnos en el caso de funciones enteras de orden 1 ($\rho = 1$). El resultado anterior dice que para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $\sum r_n^{-1-\epsilon} < \infty$ y en particular, para $\epsilon = 1$ tenemos que $\sum r_n^{-2} < \infty$ y por tanto podemos aplicar el resultado de Weierstrass que nos dice que

$$P(z) = \prod_{n=1}^\infty (1 - z/z_n)e^{z/z_n}$$

define una función entera ya que el producto infinito converge uniformemente sobre compactos. Esta función tiene los mismos ceros de f y del mismo orden por tanto es sencillo concluir que

$$f(z) = P(z)e^{g(z)}$$

donde $g(z)$ es una función entera.

Pero llegados aquí, lo que nos gustaría es poder concluir que e^g es una función entera de orden 1 y que por tanto g es un polinomio de grado 1. Para obtener este resultado lo que necesitamos es obtener una cota inferior de $P(z)$ y así conseguir una cota superior para e^g. Para ello, apelaremos al resultado anterior (justo antes que la fórmula de Jensen) que nos dice que si logramos una cota inferior de $|P(z)|$ para una sucesión de R tal que $R \to \infty$ ya con eso podemos concluir que $g(z)$ es un polinomio de grado 1.

La forma de obtener esta cota está sacada de [Dav80] y no tiene ninguna idea muy profunda, es sólo un trabajo técnico. Para empezar, la sucesión de Rs que elegimos es una que evite los intervalos $(r_n - r_n^{-2}, r_n + r_n^{-2})$ (existe ya que $\sum r_n^{-2} < \infty$) y por tanto cumple que

$$|R - r_n| > r_n^{-2} \quad \text{para todo } n. \tag{3.15}$$

Ahora dividimos $P(z) = P_1(z)P_2(z)P_3(z)$ donde en cada término están los ceros correspondientes a:

$$\begin{array}{ll} P_1: & |z_n| < R/2 \\ P_2: & R/2 \leq |z_n| \leq 2R \\ P_3: & 2R < |z_n|. \end{array}$$

Necesitamos una cota inferior para cada factor en $|z| = R$.

***P*₁ :** Para cada factor de P_1 hacemos

$$|(1 - z/z_n)e^{z/z_n}| \geq (|z/z_n| - 1)e^{Re(z/z_n)} \geq e^{-|z/z_n|} = e^{-R/r_n}.$$

Por tanto poniendo todos los factores nos queda

$$|P_1(z)| > e^{R(-\sum_{|r_n|<R/2} r_n^{-1})}$$

Y por último, para cualquier $\epsilon > 0$ (luego veremos que basta $\epsilon < 1/4$)

$$\sum_{|r_n|<R/2} r_n^{-1} = \sum_{|r_n|<R/2} \frac{r_n^\epsilon}{r_n^{1+\epsilon}} < (R/2)^\epsilon \sum_{|r_n|<R/2} r_n^{-1-\epsilon} \leq KR^\epsilon.$$

Así que nuestra cota final es

$$|P_1(z)| > \exp(-R^{1+\epsilon}cte) > \exp(-R^{1+2\epsilon}) \tag{3.16}$$

para R suficientemente grande (ponemos 2ϵ para no arrastrar la constante).

***P*₂ :** Aquí lo que hacemos es (usando (3.15) para estimar $|z - z_n|$)[1]:

$$|(1 - z/z_n)e^{z/z_n}| \geq e^{-2}|z - z_n|/2R > KR^{-3}.$$

Ahora, como el número de factores esta controlado por $R^{1+\epsilon}$ (ya que $n(R) \ll R^\alpha$ para cualquier $\alpha > 1$) podemos estimar esto por:

$$|P_2(z)| > (KR^{-3})^{R^{1+\epsilon}} > \exp(-R^{1+2\epsilon}) \tag{3.17}$$

para R suficientemente grande (de nuevo, aumentamos un poco el exponente para quitarnos las constantes y el factor $\log R$ que aparece).

***P*₃ :** Por último para estimar estos factores lo que hacemos es de nuevo recurrir al desarrollo en serie de potencias del logaritmo. Como

$$1 - z/z_n = e^{\mathrm{Log}(1-z/z_n)} = \exp(-\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_n}\right)^j)$$

que es válido ya que $|z/z_n| < 1/2$, lo que tenemos que estimar es

$$|(1 - z/z_n)e^{z/z_n}| = \exp(-\sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j} Re\left(\frac{z}{z_n}\right)^j).$$

Y no es la primera ver que tenemos que estimar esa suma, recordando que $|z| = R$:

$$|\sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j} Re\left(\frac{z}{z_n}\right)^j| \leq \frac{1}{2}\sum_{j=2}^\infty \left|\frac{z}{z_n}\right|^j = \frac{1}{2}\frac{(R/r_n)^2}{1 - R/r_n} \ll (R/r_n)^2.$$

[1] K no es siempre la misma constante en cada aparición

Lo que justifica que $|(1 - z/z_n)e^{z/z_n}| > \exp(-K(R/r_n)^2)$. Por otra parte, podemos hacer

$$\sum_{r_n > 2R} r_n^{-2} < (2R)^{-1+\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1-\epsilon}.$$

Y al final llegamos a

$$|P_3(z)| > \exp(-cR^2 \sum_{|r_n| > 2R} r_n^{-2}) > \exp(-cR^2(2R)^{-1+\epsilon}K)) > \exp(-R^{1+2\epsilon}) \tag{3.18}$$

para R suficientemente grande.

Y poniendolo todo junto, (3.16), (3.17) y (3.18) llegamos a (para R grande):

$$|P(z)| \geq \exp(-3R^{1+2\epsilon}) > \exp(-R^{1+3\epsilon}).$$

Usando que por ser f de orden 1 se cumple que $|f(z)| \ll \exp(|z|^{1+\epsilon})$ tenemos que para una sucesión de infinitos R que tiende a infinito se cumple que $|e^g| < \exp(R^{1+4\epsilon})$ y por el resultado anterior podemos concluir que $g(z)$ es un polinomio de orden 1. Para ponerlo todo junto:

Corolario 3.3.3. *Sea f una función entera de orden 1 tal que $f(0) \neq 0$. Entonces para ciertos valores de A y B se cumple que*

$$f(z) = e^{A+Bz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n)e^{z/z_n} \tag{3.19}$$

donde los z_n son los ceros de f. Además se cumple que para todo $\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1-\epsilon} < \infty$.

De hecho podemos decir algo más de esta función. Si se cumple la condición más fuerte de que $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} < \infty$ entonces podemos hacer la estimación trivial de que para alguna constante C se cumple

$$|f(z)| < e^{C|z|}, \tag{3.20}$$

acotando sencillamente con $|(1 - s)e^s| \leq e^{2|s|}$.

Corolario 3.3.4. *Representación de Γ como producto infinito .*

Una de las aplicaciones de la teoría de funciones enteras de orden 1 es el paso de la representación integral de Γ a la forma como producto infinito (ver (3.1)). Sin meternos en detalles, la idea de cómo probar esto es la siguiente; con la definición de Γ como integral se pueden deducir las propiedades de $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ y con un poco más de trabajo se puede deducir que $\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \pi/\sin \pi s$ (ver [Cha13] para una prueba de esto). Con estas relaciones se ve que la función Gamma se extiende de manera meromorfa a todo $\mathbb{C}$ con polos en los naturales negativos y el 0 y que no se anula nunca.

Por tanto, la función $1/s\Gamma(s)$ será entera, y tendrá ceros en los naturales negativos. Ahora sólo hay que encontrarle una acotación de orden 1 para poder aplicar nuestro resultado anterior. Sea $s = \sigma + it$, para valores de $\sigma \geq 1/2$ usando la definición como integral se puede hallar fácilmente que $|\Gamma(s)| \ll \exp(e^{\lambda})$ para cualquier $\lambda > 1$. Esta cota nos permite obtener una cota superior para $1/s\Gamma(s)$ en $\sigma \leq 1/2$ por medio de la identidad

$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$. Lo que falta es hallar una cota para los s con parte real mayor a $1/2$, pero esto se puede hacer fácilmente usando $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ para llevarnos cualquier valor con $\sigma > 1/2$ a uno con $-1/2 < \sigma \leq 1/2$ y ahí podemos usar la cota que ya hemos hallado (al hacerlo formalmente hay que evitar los naturales, que es donde van a aparecer polos, pero esto se soluciona por el principio del módulo máximo). Esto probaría que para todo $\lambda > 1$ se tiene la estimación $1/s\Gamma(s) \ll e^{|s|^\lambda}$ y aplicando lo que acabamos de probar llegamos a (3.19) que en este caso (después de hallar las constantes) es (3.1).

3.4. Producto infinito para la función ξ.

Toda la teoría que acabamos de ver al final la queremos aplicar al estudio de la función ζ . Sin embargo es más cómodo trabajar con la función ξ definida en (3.13). Para esta prueba seguimos [Dav80], lo que queremos es ver que

$$|\xi(s)| = \exp(C|s|\log|s|) \quad \text{para } |s| \to \infty, \tag{3.21}$$

lo que nos dirá que la función ξ es entera de orden 1 (como mucho). Por la relación de simetría que cumple $\xi(s) = \xi(1-s)$ es suficiente ver la acotación en $Re(s) \geq 1/2$. Si recordamos la definición de ξ:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Acotamos cada uno de los factores; los primeros términos no van a dar problemas y para la Γ hemos probado la fórmula de Stirling (3.3), que nos da directamente que[2] $|\Gamma(s/2)| < \exp(C|s|\log|s|)$. Usando la representación de ζ como integral (1.32), vemos que

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{s+1}}dt.$$

Podemos multiplicar aquí por el $s-1$ si nos molesta el polo aunque realmente sólo nos importen los valores grandes. Como la parte de la integral está acotada para $Re(s) \geq 1/2$ está claro que $|\zeta(s)| < C|s|$ para valores de $|s|$ grandes. Esto concluye la demostración de (3.21).

Usando lo probado en la sección anterior llegamos a algo tipo (3.19). Es más, si tomemos s real y lo hacemos tender a infinito como $\zeta(s) \to 1$, el crecimiento de ξ estará controlado por el de Γ, y por Stirling (3.3) tenemos que $\Gamma(s) \sim s\log s$ por tanto la estimación fuerte (3.20) es falsa, así que debe ocurrir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} = \infty,$$

y para cualquier $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{1+\epsilon}} < \infty.$$

Por tanto ξ tiene infinitos ceros y la suma de los inversos de sus radios diverge. Por el corolario 3.2.2 sabemos que esto quiere decir que ζ tiene infinitos ceros en la banda crítica ($\{0 \leq Re(s) \leq 1\}$) con las propiedades anteriores.

[2] la constante C no es necesariamente la misma en cada aparición

Podemos escribir

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1 - s/\rho)e^{s/\rho} \tag{3.22}$$

donde ρ recorre los ceros no triviales de la ζ. Si ahora además tomamos derivadas logarítmicas en (3.13) y aplicamos (3.22) llegamos a:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{3.23}$$

Las constantes A y B pueden calcularse explícitamente, la A es fácil, evaluando en 0 y la B tiene un poco más de trabajo evaluando la derivada logarítmica en 0. En [Dav80] están hechos los cálculos, y sale

$$e^A = 1/2 \quad \text{y} \quad B = -\gamma/2 - 1 + \log\sqrt{4\pi}.$$

Un dato que aún no hemos mencionado es otra simetría de la función ζ, para todo s se verifica que $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$. Esto es así porque la función $\overline{\zeta(\overline{s})}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ y como coincide con $\zeta(s)$ en todos los $s > 1$ (ya que toman valores reales) entonces por ceros aislados deben ser iguales en todo el dominio. Este hecho junto con la simetría de $\xi(s)$ nos dice que para cada cero ρ de ζ, hay otros tres ceros más; $\overline{\rho}, 1-\rho$ y $1-\overline{\rho}$. Ya sabemos que la serie $\sum_\rho |\rho|^{-1} = \infty$ pero la serie $\sum_\rho \rho^{-1}$ converge si al sumar agrupamos los términos ρ y $\overline{\rho}$ ya que:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} = \frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2} \leq \frac{2}{|\rho|^2}$$

donde (y a partir de ahora) $\rho = \beta + i\gamma$ será un cero no trivial[3] de ζ.

3.5. Fórmula asintótica para $N(T)$.

Ahora vamos a probar una fórmula asintótica para $N(T)$, que es el número de ceros de ζ en la región $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ (recordemos que $s = \sigma + it$). Para empezar, se puede ver *a mano* que la función ζ no se anula en $t = 0$, por ejemplo usando la representación como integral (1.32).

Usaremos el principio del argumento sobre la función ξ en vez de ζ ya que su ecuación funcional es más sencilla y además ya sabemos que sus ceros en la banda crítica son los mismos. Sea $T > 0$ (grande) y que no coincida con la ordenada de ningún cero y sea R el rectángulo de vértices 2, $2+iT$, $-1+iT$ y -1 recorrido en sentido positivo. Por el principio del argumento tenemos que el número de ceros de ζ en la banda crítica con $0 < Im(\rho) < T$ es

$$2\pi N(T) = Im\int_R \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds.$$

Ahora vamos a estimar esa integral. Para empezar, cuando recorremos la base del rectángulo esa integral dará cero, ya que en el eje real ξ toma valores reales y no se anula

[3] γ también representa la constant de Euler pero por el contexto se infiere en qué momento nos referimos a una u otra.

nunca. Además, la variación del argumento (que es esencialmente la integral anterior) cuando nos movemos desde 2 hasta $2+iT$ y luego a $1/2+iT$ es la misma que cuando vamos de $1/2+iT$ a $-1+iT$ y luego a -1 ya que como $\xi(\bar{s})=\overline{\xi(s)}$ y $\xi(s)=\xi(1-s)$:

$$\xi(\sigma+it)=\xi(1-\sigma-it)=\overline{\xi(1-\sigma+it)}.$$

(Ver esto es sencillamente parametrizarse el camino, cambiar de variable y usar la simetría).

Por tanto lo que al final tenemos que:

$$\pi N(T)=Im\int_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds \tag{3.24}$$

donde ahora L es el camino que va de 2 a $2+iT$ y luego a $1/2+iT$. Usamos la definición de (3.13) para hacer esta estimación, si recordamos, $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. La derivada logarítmica del producto es la suma de derivadas logarítmicas, por tanto tenemos que atacar cada factor por separado. Si dividimos $L=\gamma_1+\gamma_2$ donde ahora γ_1 es el camino en línea recta de 2 a $2+iT$ y γ_2 el camino de $2+iT$ a $1/2+iT$ tenemos que, empezando con el factor $s-1$:

$$Im\int_L \frac{1}{s-1}ds=Im\int_{\gamma_1}\frac{1}{s-1}ds+Im\int_{\gamma_2}\frac{1}{s-1}ds.$$

Y resolviendo, como podemos hacer $\gamma_1:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_1(t)=2+iTt$ y $\gamma_2:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_1(t)=2+iT-3t/2$:

$$Im\int_{\gamma_1}\frac{1}{s-1}ds=Im\int_0^1\frac{iT}{1+iTt}dt=\int_0^1\frac{T}{1+T^2t^2}dt=\arctan(T)=\frac{\pi}{2}+O(T^{-1}).$$

Y la otra parte sería:

$$Im\int_{\gamma_2}\frac{1}{s-1}ds=\int_{1/2}^1\frac{Tdt}{t^2+T^2}=\arctan(1/T)-\arctan(1/2T)=O(T^{-1}).$$

El factor $\pi^{-s/2}$ es directo ya que:

$$Im\int_L -\frac{1}{2}\log\pi ds=-\frac{1}{2}\log\pi Im(1/2+iT-2)=-\frac{1}{2}T\log\pi.$$

Por otra parte, como $\frac{1}{2}s\Gamma(s/2)=\Gamma(s/2+1)$ lo que tenemos que estimar es

$$\frac{1}{2}Im\int_L\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}ds.$$

Y para esto hemos probado la aproximación de Stirling en su forma (3.4) (recordemos que s está lejos del 0, por eso podemos poner de esa forma el error):

$$\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}=\mathrm{Log}(s/2+1)-\frac{1}{s+2}+O(|s|^{-2}).$$

Metiendo esta expresión en la fórmula anterior e integrando se llega sin muchos problemas a

$$\frac{1}{2}Im\int_L\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}ds=\frac{1}{2}T\log\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}T+\frac{3}{8}\pi+O(T^{-1}).$$

Así que, metiendo todo esto en (3.24) llegamos a:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O(T^{-1}), \tag{3.25}$$

donde ahora sólo queda estimar $\pi S(T) = Im\int_L \zeta'/\zeta$. Para hacer esto, seguimos el esquema de [Dav80], en primer lugar vamos a probar que

Proposición 3.5.1. *Si $\rho = \beta + i\gamma$ son los ceros no triviales de ζ, entonces se cumple que*

$$\sum_\rho \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T). \tag{3.26}$$

Para probar esto partimos de la fórmula (3.23), donde tomamos partes reales y usamos Stirling (3.4) para aproximar la derivada logarítmica de Γ en la región $t \geq 2$ y $1 \leq \sigma \leq 2$ (recordemos que $s = \sigma + it$):

$$-Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A\log t - \sum_\rho Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{3.27}$$

donde A es una constante absoluta. Además, cada uno de los términos de la suma en ρ son positivos ya que

$$Re\frac{1}{s-\rho} = \frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} \quad \text{y} \quad Re\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{|\rho|^2}.$$

Si tomamos $s = 2 + iT$ podemos acotar

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} < \infty,$$

y por tanto[4] para $T \geq 2$

$$\sum_\rho Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) < A\log T.$$

Por la cuenta de antes, como los sumandos de las series son positivos podemos quitar uno de ellos (los $Re(1/\rho)$) y para los otros

$$Re\frac{1}{s-\rho} = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2},$$

con lo que se prueba (3.26).

De esta fórmula salen dos corolarios, el primero es que el número de ceros con $T-1 < \gamma < T+1$ es $O(\log T)$ y el otro que la suma $\sum_{|T-\gamma|\geq 1}(T-\gamma)^2 = O(\log T)$. Esto se usa para probar que:

[4] A puede no ser la misma constante en cada aparición.

Proposición 3.5.2. *Para $t \geq 2$ y que no coincida con la parte imaginaria de un cero de ζ y $-1 \leq \sigma \leq 2$,*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho}{}' \frac{1}{s-\rho} + O(\log t). \tag{3.28}$$

Donde la suma es sólo sobre los ceros de ζ tal que $|t-\gamma| < 1$.

Para demostrar esto, cogemos la fórmula (3.23), evaluamos en $s = \sigma + it$ y en $2 + it$ y restando esas expresiones llegamos a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right). \tag{3.29}$$

Si nos fijamos, el único punto delicado es la parte de la derivada logarítmica de Γ. Podemos usar Stirling pero como no queremos problemas con el logaritmo otra opción es usar la expresión de la derivada logarítmica de Γ como suma infinita y al final lo que queremos es ver que para todo s (con $t \geq 2$ y $-1 \leq \sigma \leq 2$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2+it+2n} \right) = O(1).$$

Y probar esto se reduce a desarrollar esos sumandos hasta que queda

$$\frac{2-\sigma}{(s+2n)(2+it+2n)}.$$

Y para acotar esto notamos que $|2-\sigma| \ll 1$ y que $|(s+2n)(2+it+2n)| \gg n^2$ (para cualquier s en la franja, t grande para evitar dividir por 0 en ningún caso). Y esto ya prueba (3.29).

Ahora, para cada sumando de (3.29) tenemos que si $|\gamma - t| \geq 1$ entonces

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+it-\rho)|} \leq \frac{3}{|\gamma - t|^2}$$

(esto es sólo usar que $|Im(z)| \leq |z|$), y por el corolario anterior sabemos que la suma de estos es $O(\log t)$. Por otra parte, para los términos con $|\gamma - t| < 1$ sabemos que $|2+it-\rho| \geq 1$ y que como mucho hay $O(\log t)$ (la otra parte del corolario anterior). Esto concluye la prueba de (3.28).

Con esto ya estamos en disposición de acotar $S(T)$. Si recordamos, habíamos divido el camino L en dos, $L = \gamma_1 + \gamma_2$. La parte de γ_1 contribuirá poco ya que

$$\int_{\gamma_1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = -\int_{\gamma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds$$

y por Fubinni (se cumplen las hipótesis) cambiamos el orden de sumación para obtener

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{\gamma_1} e^{-s \log n} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{1}{n^{2+iT} \log n} - \frac{1}{n^2 \log n} \right) = O(1).$$

Asi que llegamos a:

$$\pi S(T) = O(1) + Im \int_{\gamma_2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Y para resolver esa última integral tendremos que usar (3.28). Recordemos que la suma de esa fórmula es sólo sobre los ceros con $|t-\gamma| < 1$ y como

$$Im \int_{\gamma_2} \frac{1}{s-\rho} ds \leq \pi$$

(esto se puede hacer con la integral, acotando dos arcotangentes o por un argumento geométrico) al haber como mucho $O(\log T)$ términos ya casi hemos acabado. La parte del término de error es muy fácil ya que es meter valores absolutos y tener en cuenta que γ_2 es un camino que mide $1'5$. Esto concluye la prueba de la fórmula asintótica

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{3.30}$$

Podemos usar esta fórmula para hallar cómo de rápido se va a infinito la suma $\sum |\rho|^{-1}$. Lo que hacemos es ver cómo crece:

$$\sum_{0 \leq Im(\rho) \leq T} \frac{1}{|\rho|}$$

Como la parte real de los ceros está entre 0 y 1, es claro que lo que va a controlar $|\rho|$ será $Im(\rho)$. Una sencilla cuenta nos lleva a $|\rho|^{-1} = Im(\rho)^{-1} + O(Im(\rho)^{-2})$. De modo que nos va a interesar $\sum_{0 \leq Im(\rho) \leq T} Im(\rho)^{-1}$. Para hacer esta cuenta, llamamos $T_1, T_2, ..., T_k$ a la parte imaginaria de los ceros con $0 \leq Im(\rho) \leq T$ y por conveniencia $T_{k+1} = T$ (es claro que $k = N(T)$). Es trivial ver que $\int_{T_n}^{T_{n+1}} t^{-2} dt = T_n^{-1} + T_{n+1}^{-1}$ y por tanto

$$\sum_{n=1}^{k} n \int_{T_n}^{T_{n+1}} t^{-2} dt = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + ... + \frac{1}{T_k} - \frac{k}{T_{k+1}} = \sum_{0 \leq Im(\rho) \leq T} \frac{1}{Im(\rho)} - \frac{k}{T_{k+1}}.$$

Pero si cambiamos de orden la suma y la integral y usamos que $k = N(T)$ tenemos

$$\sum_{0 \leq Im(\rho) \leq T} \frac{1}{Im(\rho)} = \frac{N(T)}{T} + \int_{\delta}^{T} \frac{N(t)}{t^2} dt.$$

En el límite inferior he puesto $\delta > 0$ ya que como sabemos (por la expresion de zeta como integral (1.32)) que en $0 \leq \sigma \leq 1$ la función zeta no se anula, ese delta es un número tal que $\delta < T_1$. Por un argumento similar a este, el error que cometemos al cambiar $|\rho|^{-1}$ por $Im(\rho)^{-1}$ es $O(1)$ así que no es muy significativo.

Usando una versión más débil de (3.30) ($N(T) = \frac{T}{2\pi} \log T + O(T)$) ya se puede ver que el término principal de la suma es:

$$\sum_{0 \leq Im(\rho) \leq T} \frac{1}{|\rho|} = \frac{\log^2 T}{4\pi} + O(\log T). \tag{3.31}$$

3.6. Esquema de la demostración clásica del teorema de los números primos y relación con los ceros de ζ.

Para acabar el trabajo, vamos a dar una idea de cómo se completa la demostración clásica del teorema de los números primos. El punto de partida es la representación de la función ζ como producto de Euler y más explícitamente la fórmula:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{3.32}$$

Como ya hemos visto, el teorema de los números primos es equivalente a varios resultados y uno de ellos era que $\psi(x) \sim x$. La relación (1.41) podemos pasar *fácilmente* de uno a otro. Todo este plan está sacado de [Cha11] en cuyo Capítulo 1 podemos encontrar todos los resultados necesarios para conseguir despejar $\psi(x)$ de (3.32).

Si recordamos, en la demostración del teorema de los números primos sacada de [IK04] un punto clave era la fórmula (1.46), que permitía *despejar* de una suma infinita G, (1.44) los *primeros términos* que eran la función F, (1.45). En [Cha11] encontramos una fórmula muy similar:

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c\pm iR)} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + \mathbf{error} & \text{si } a > 1 \\ \mathbf{error} & \text{si } a < 1, \end{cases}$$

donde integrar en $(c \pm iR)$ es en el segmento que va de $c - iR$ a $c + iR$. Usando esto es razonable llegar a despejar

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(c\pm iR)} \frac{x^s \zeta'(s)}{s\zeta(s)} ds + \mathbf{Error}. \tag{3.33}$$

Para no tener que calcular $I(1)$ suponemos x no entero. La diferencia con (1.46) era que antes teníamos un denominador que decaía como $1/t^2$ pero ahora tenemos que decae sólo como $1/t$ (que no es integrable), por eso tenemos que tomar sólo un segmento y nos aparece un término de error.

Es posible ver que **Error** en (3.33) es $O(\frac{x}{R}\log^2(Rx))$, por tanto lo que tenemos que aproximar ahora es la integral. La forma más simple es usar el teorema de los residuos para hacer un rectángulo hacia la izquierda del segmento $(c \pm iR)$, por eso necesitamos la extensión de ζ holomorfa en todo el plano complejo. Los ceros y polos de ζ serán los polos de la derivada logarítmica que tendremos que calcular (además del polo en $s = 0$ que hemos añadido). Para ello hemos visto ya dónde están esos ceros. Llegamos a la fórmula (1.16) de [Cha11]:

$$\psi(x) = x - \sum_{|Im(\rho)|<R} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) + \mathbf{Error}, \tag{3.34}$$

donde están representados los distintos polos de $\frac{x^s\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$ y las contribuciones de las paredes del restángulo (distintas al segmento $c \pm iR$) en **Error**. Lo que hacemos es hacer tender la pared lateral izquierda a $-\infty$ y con ello se abarcan todos los ceros triviales.

El polo que hemos añadido en $s = 0$ da lugar a esa derivada logarítmica de ζ en 0 y la contribución de los ceros triviales (los de los pares negativos) están agrupados en el término del logaritmo. Por último, nos queda sumar la parte correspondiente a los ceros no triviales y al polo que sabemos que ζ tiene en $s = 1$. El primer sumando, x, proviene del polo de ζ y las contribuciones de los ceros no triviales es la suma en ρ. Esto es claro, más el error de (3.33) que ya teníamos acumulado.

Una versión de (3.34) especificando el error es

$$\psi(x) = x - \sum_{|Im(\rho)|<R} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\frac{x}{R}\log^2(Rx) + \log x). \tag{3.35}$$

Para hacer esto tendríamos que tener bien controlada la contribución de las paredes laterales en la integral y para ello se usa (3.30), que nos dice que hasta altura R nos vamos a encontrar del orden de $(R/2\pi)\log R$ ceros. Con esta información podremos *pasar* de un lado a otro teniendo bien controlado la base y la parte superior del rectángulo (cogiendo un R *alejado* de la parte imaginaria de ningún cero).

Si en (3.34) tomamos R del orden de x, entonces **Error** $= O(\log^2 x)$. Suponiendo esto, es sencillo deducir las fórmulas (1.17) y (1.18) de [Cha11] ya que lo que tenemos es

$$\psi(x) = x - \sum_{|Im(\rho)|<x} \frac{x^\rho}{\rho} + O(\log^2 x).$$

Suponiendo que todos los ceros no triviales tienen parte real menor o igual a α_0 la contribución de estos sería del orden de

$$\left| \sum_{|Im(\rho)|<x} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \sum_{|Im(\rho)|<x} \frac{x^{\alpha_0}}{|\rho|} = O(x^{\alpha_0}\log^2 x)$$

por (3.31). Lo que prueba la aproximación

$$\psi(x) = x + O(x^{\alpha_0}\log^2 x). \tag{3.36}$$

La simetría de la función ξ nos dice que si ζ tiene un cero (no trivial) en ρ también tendrá un cero en $1-\rho$ y por tanto el mejor caso posible sería que todos los ceros tuvieran parte real igual a $1/2$. Y esta es la hipótesis de Riemann, si todos los ceros no triviales (que ya hemos visto que hay infinitos) tuvieran parte real igual a $1/2$ entonces la cota de (3.36) sería la óptima con $\alpha_0 = 1/2$.

De esta ecuación y usando (1.41) tendríamos la aproximación de $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\alpha_0}\log x) + O\left(\int_2^x \frac{t^{\alpha_0}}{t}dt\right) + O(\sqrt{x}) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\alpha_0}\log x).$$

Esta fórmula es falsa para cualquier $\alpha_0 < 1/2$ [Ell75], por lo que la hipótesis de Riemann da el resultado óptimo del teorema de los números primos. Nosotros lo que sí hemos probado es que no puede ser que todos los ceros tengan parte real menor a $1/2$ (por la simetría de ξ).

Desafortunadamente no se conoce ningún $\alpha_0 < 1$ que controle la parte real de todos los ceros. Sin embargo, todas estas ideas permiten concluir el teorema de los números primos con un término de error (mucho peor lógicamente). Lo que vamos a ver es que hay una región libre de ceros que no es un semiplano, si no una región curva que va pegándose a $\{Re(s) = 1\}$. Para esto seguimos la prueba de [Dav80], que a su vez tiene las ideas que presentó de la Vallée Poussin en 1899.

Proposición 3.6.1. *Existe una constante $c > 0$ tal que la función ζ no tiene ceros en la región*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t}, \quad t \geq 2 \tag{3.37}$$

donde como de costumbre, $s = \sigma + it$.

Para probar esto, usamos la misma desigualdad que vimos para la prueba del teorema de los números primos, que dice $2(1+\cos\theta)^2 = 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$. Tomando partes reales en (3.32) tenemos que (por supuesto, para $\sigma > 1$):

$$-Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \log n).$$

Por tanto está claro que:

$$3\left(-Re\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\left(-Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) + \left(-Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0. \tag{3.38}$$

El comportamiento de $\zeta(\sigma)$ es bien conocido, si nos restringimos a $1 < \sigma \leq 2$ tenemos que

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A$$

donde A es una constante absoluta. Para los otros términos, ya habíamos probado la fórmula (3.27) que decía

$$-Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A \log t - \sum_{\rho} Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

para $t \geq 2$ y $1 \leq \sigma \leq 2$ (la constante A puede ser distinta en cada aparición). Además sabemos que los términos de la suma son todos positivos, por tanto para el caso $\sigma + 2it$ sencillamente los quitamos y obtenemos:

$$-Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} < A \log t.$$

Y por último, para $s = \sigma + it$, escogemos $t = \gamma$ la parte imaginaria de un 0 no trivial $\rho = \beta + i\gamma$ para $\gamma \geq 2$. De todo el sumatorio de (3.27) tiramos todos los términos salvo $Re\frac{1}{s-\rho}$ y llegamos a

$$-Re\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < A \log t - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

Sustituyendo estas tres acotaciones en (3.38) llegamos sin problema a (recordemos que la constante A es distinta en cada aparición):

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1} + A\log t.$$

Tomamos $\sigma = 1 + \delta/\log t$ para una constante positiva δ. Entonces

$$\beta < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4\delta}{(3+A\delta)\log t},$$

y escogiendo un $\delta < 4/(3A)$ llegamos a la conclusión de que

$$\beta < 1 - \frac{c}{\log t}$$

para cierta constante $c > 0$ (y esto era recordemos, para $t \geq 2$). Y esto es esencialmente una cota para los ceros de ζ que depende de la altura, por tanto la región de $\mathbb{C}$, $\sigma \geq 1-c/\log t$ es libre de ceros con lo que se concluye (3.37). Como hemos impuesto que $t \geq 2$ esta condición sólo afecta a un trozo de la banda crítica, la versión más habitual (que encontramos en [Dav80] o [Cha11]) de la región libre de ceros es que

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)} \tag{3.39}$$

es libre de ceros (ahora ya sin restricciones sobre la t). Ver esto es sólo ver qué pasa con el caso $|t| \leq 1$, pero no hay ceros en esa región (se puede ver que $|\gamma| > 6$ por ejemplo en [Dav80]).

Volviendo a nuestro problema original, la idea era acotar de algún modo $\sum_{|Im(\rho)|<R} \frac{x^\rho}{\rho}$ de (3.35) para poder deducir de ahí el teorema de los números primos. Teniendo en cuenta (3.39) si nos restringimos a los ceros con parte imaginaria menor a R tenemos que $\beta < 1 - c/\log(R+2)$. Metiendo valores absolutos como antes y usando (3.30) llegamos a

$$\sum_{|Im(\rho)|<R} \frac{x^\beta}{|\rho|} \ll x\exp\left(-c\frac{\log x}{\log(R+2)}\right)\log^2 R.$$

Tomando R de manera que se vaya a infinito pero muy lentamente, $R \asymp e^{\sqrt{\log x}}$ (esto quiere decir que se cumple $\ll$ y $\gg$) llegamos a que lo de arriba se acota por

$$\leq x\exp\left(\log\log x - c'\sqrt{\log x}\right) \ll x\exp(-c''\sqrt{\log x})$$

para ciertas constantes $c', c'' > 0$.

Con el otro término de error de (3.35) una cuenta muy similar nos lleva a

$$\frac{x}{R}\log^2(Rx) \ll xe^{-\sqrt{\log x}}\log^2(e^{\sqrt{\log x}}x)$$
$$\ll xe^{-\sqrt{\log x}+2\log\log x} \ll xe^{-K\sqrt{\log x}}.$$

Y esto ya prueba el teorema de los números primos en su versión con término de error:

$$\psi(x) = x + O(xe^{-K'\sqrt{\log x}}).$$

Para finalizar, podemos pasar esta condición a términos de la función $\pi(x)$ mediante la fórmula (1.41) y obtendríamos que para otra constante K'':

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-K''\sqrt{\log x}}).$$

Si ahora volvemos a atrás en el trabajo, cuando estábamos viendo las equivalencias del teorema de los números primos, vimos en (1.3.1) que las funciones $x/\log x$ y $\mathrm{Li}(x)$ iban a discrepar *mucho* para valores de x grandes, en concreto $\mathrm{Li}(x) - x/\log x \asymp x/\log^2 x$. Esto va a implicar que la aproximación $\pi(x) = x/\log x + O(xe^{-K''\sqrt{\log x}})$ es falsa, $x/\log x$ no es una buena aproximación de $\pi(x)$ (entendiendo como que $\mathrm{Li}(x)$ es mejor). Por reducción al absurdo, supongamos que el error que cometemos al aproximar $\pi(x)$ por $x/\log x$ es pequeño, tan pqueño como $O(xe^{-K''\sqrt{\log x}})$. Si esto fuera así entonces como

$$\frac{x}{\log^2 x} \asymp \frac{x}{\log x} - \mathrm{Li}(x),$$

sumando y restando $\pi(x)$ al final la parte de la derecha se podría (dando por supuesta la cota para $\pi(x)$ que también es válida para $\mathrm{Li}(x)$) acotar por:

$$\frac{x}{\log^2 x} \ll xe^{-K''\sqrt{\log x}}.$$

Pero esto es falso, ya que despejando llegaríamos a $e^{K''\sqrt{\log x}}/\log^2 x \ll 1$ (y el límite de la izquierda es infinito).

Índice alfabético

Bibliografía

[Ap99] Apostol,T.M. *An Elementary View of Euler's Summation Formula.* The American Mathematical Monthly 106

[CC92] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números.* Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[Cha07] F. Chamizo. Temas de teoría de números. 2007.

[Cha11] F. Chamizo. Ocho lecciones de teoría de números. 2011.

[Cha13] F. Chamizo. Aplicaciones del análisis armónico, 2012/2013.

[Dav80] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1980. Revised by Hugh L. Montgomery.

[Edw01] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0466039 (57 #5922)].

[Ell75] W. J. Ellison. *Les nombres premiers.* Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec Michel Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[Fo99] G. B. Folland *Real Analysis, Modern techniques and their applications*, second edition A Wiley-lnterscience Publication, 1999

[Hua82] L.-K. Hua. *Introduction to number theory.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982. Translated from the Chinese by Peter Shiu.

[HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

[IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[New98] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[Sp98] M. Spivak *Calculus. Cálculo infinitesimal*, segunda edición Reverté S.A., Barcelona, 1998.