Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

La función zeta de Riemann

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Carlos Cerviño Luridiana

Tutor: Fernando Chamizo Lorente
Eva Tourís Lojo

Curso 2024-2025

Resumen

La función zeta de Riemann, ζ, es uno de los objetos más estudiados de la teoría analítica de números. Su importancia radica en la relación que guardan sus ceros con la distribución de los números primos, y es este el contexto en el que emerge de forma natural la conocida hipótesis de Riemann. El objetivo del trabajo es desarrollar una teoría que nos permita explicitar esta relación entre la función zeta y los números primos. Para ello, se establecen las propiedades analíticas de ζ, primero construyendo extensiones meromorfas de la función a dominios más amplios y después a partir de su relación con la función Γ y de la ecuación funcional que surge a partir de esta relación. Tras esto, pasamos a estudiar diversas funciones relacionadas con ζ que sirven de base para desarrollar la demostración de Donald J. Newman del Teorema de los números primos. Por último, se presenta la famosa hipótesis de Riemann y, asumiendo que la hipótesis es falsa, se construyen cotas inferiores para la diferencia entre la función contadora de primos y el logaritmo integral.

Abstract

The Riemann zeta function, ζ, is one of the most studied objects of the analytic number theory. Its significance stems from the relation between its zeros and the distribution of the prime numbers, and is in this context where the well-known Riemann hypothesis naturally arises. The purpose of this paper is to develop the background necessary to make explicit this relation between the zeta function and the prime numbers. To achieve this, we establish the analytic properties of the zeta function, beginning with the construction of meromorphic extensions to broader domains and continuing through its relation with the Gamma function and the functional equation that arises from this relation. Afterward, we proceed with the study of a variety of functions related to the zeta function, which play a fundamental role in the Donald J. Newman's proof of the Prime Number Theorem. Finally, we state the famous Riemann hypothesis and, assuming that it is false, we build lower bounds for the difference between the prime counting function and the integral logarithm.

Índice general

1 Propiedades analíticas básicas **1**
1.1 Definición y propiedades analíticas 1
1.2 Aproximaciones a partir de las sumas parciales 3

2 La ecuación funcional de ζ **7**
2.1 La función Γ 7
2.2 La ecuación funcional 10
2.3 Los ceros triviales y otros valores 12

3 Relación con funciones aritméticas **15**
3.1 El producto de Euler 15
3.2 Funciones aritméticas y la función ζ 16

4 La distribución de los números primos **21**
4.1 Historia del teorema 21
4.2 El teorema de los números primos 22

5 La hipótesis de Riemann **27**
5.1 Resultados previos 27
5.2 La hipótesis de Riemann 28

Apéndice **31**

Bibliografía **33**

CAPÍTULO 1

Propiedades analíticas básicas

El contenido de este primer capítulo consiste en una primera definición de la función zeta de Riemann, ζ, y la prueba de algunas de sus propiedades analíticas. Dado que las extensiones analíticas (meromorfas) son únicas, con ζ nos referiremos tanto a la función en su primera definición como a su extensión a cualquier otro dominio.

1.1. Definición y propiedades analíticas

El objetivo de esta sección es dar una definición de ζ, demostrar su meromorfía y construir algunas de sus extensiones. Como es natural, empezamos con la definición.

Definición 1.1. La *función zeta de Riemann* se define como la siguiente serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{1.1}$$

En el tercer capítulo veremos que esta definición es equivalente a $\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}$, donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos. Por ahora, comprobemos que ζ es analítica.

Proposición 1.2. *La función ζ está bien definida y es holomorfa en $\Re(s) > 1$, y la serie diverge para $s < 1$ real.*

Demostración. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n(s) = n^{-s} = e^{-s\ln n}$ es holomorfa, aplicaremos el criterio M de Weierstrass. En este caso, para cada $\delta > 1$ tomamos $M_{\delta,n} := n^{-\delta}$ de modo que $\mid n^{-s} \mid = n^{-\Re(s)} \leq M_{\delta,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $Re(s) \geq \delta$. Así, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} < +\infty$, el criterio M de Weierstrass nos asegura que la serie converge localmente uniformemente y por tanto define una función holomorfa en $\Re(s) > 1$.

Para ver que la serie diverge para $s < 1$ real basta con compararla término a término con la serie armónica. $\square$

Ahora que sabemos que ζ es holomorfa en $\Re(s) > 1$, es natural preguntarse si es posible definirla para $\Re(s) \leq 1$ de alguna manera «razonable». Para avanzar en esta dirección nos ayudaremos del siguiente resultado:

Proposición 1.3. *Para* $\Re(s) > 1$ *se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

Demostración. Para la primera igualdad, vemos que podemos escribir

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{x^{s+1}}\mathbf{1}_{[n,n+1)}(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{n}{x^{s+1}}\mathbf{1}_{[n,n+1)}(x).$$

Para el caso s real tenemos una serie de funciones no negativas, de modo que por el Teorema de la convergencia monótona podemos alterar el orden de sumación e integración:

$$s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = s\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1}\frac{n}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty n\left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right) = \sum_{n=2}^\infty n^{-s} + 1 = \zeta(s).$$

Para s complejo, la sucesión de funciones que estamos integrando está dominada por $\lfloor x\rfloor x^{-\Re(s)-1}$ y, como esta función es integrable, el Teorema de la convergencia dominada nos permite de nuevo sacar el límite fuera de la integral y repetir los cálculos para llegar al mismo resultado, pero ahora con s no necesariamente real dentro de $\Re(s) > 1$.

Para la segunda igualdad, podemos fijarnos en que para $\Re(s) > 1$ las funciones x^{-s} y x^{-s-1} son integrables como funciones de x en $[1,\infty)$, por lo que por linealidad y por (1.2) se obtiene

$$\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \zeta(s) + \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty x^{-s}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} + \frac{s}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Dado que los cuatro sumandos de la derecha se cancelan en parejas, solo sobrevive $\zeta(s)$. □

Esta proposición nos acerca a una primera extensión de ζ a $\Re(s) > 0$: como la función $f(s,x) = (x - \lfloor x\rfloor - 1/2)\,x^{-s-1}$ es integrable como función de x en $[1,\infty)$ incluso para $0 < \Re(s) < 1$, su integral converge localmente uniformemente y define una función holomorfa en todo el dominio $\Re(s) > 0$. Para comprobar esto último nos apoyaremos en el Teorema de Fubini y en el Teorema de Morera. Dada una curva cerrada γ, C^1 a trozos en $\Re(s) > 0$, vemos por el Teorema de Fubini que

$$\oint_\gamma\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_1^\infty (x-\lfloor x\rfloor - 1/2)\oint_\gamma \frac{1}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$$

y como $s \mapsto x^{-s-1}$ es holomorfa, la integral de línea se anula y lleva la integral doble a 0, tal y como necesitábamos para que el Teorema de Morera nos asegure que la función es holomorfa.

Juntando este resultado con la segunda igualdad de (1.2) acabamos encontrar una extensión meromorfa de ζ a $\Re(s) > 0$, con un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. En el segundo capítulo veremos que la función puede ser extendida al resto del plano complejo y que este es su único polo.

1.2. Aproximaciones a partir de las sumas parciales

A lo largo de esta sección buscaremos una manera de aproximar ζ en la región $0 < \Re(s) < 1$, que es la región en la que se centra la hipótesis de Riemann. Antes de entrar en materia, continuamos con otra extensión, esta vez a $\Re(s) > -1$.

Proposición 1.4. *La función ζ admite una extensión a $\Re(s) > -1$ con un único polo en $s = 1$, que es simple, dada por*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s(s+1) \int_1^{\infty} g(x) x^{-s-2} \, \mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

donde $g(x) = \int_1^x \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t$.

Demostración. La función g está acotada y es 1-periódica, como se observa al desarrollar:

$$g(x) = \int_1^x \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{(x - \lfloor x \rfloor)^2 - (x - \lfloor x \rfloor)}{2}. \tag{1.4}$$

Apelando nuevamente al Teorema de Morera, podemos ver que

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s(s+1) \int_1^{\infty} g(x) x^{-s-2} \, \mathrm{d}x$$

define una función meromorfa en $\Re(s) > -1$ con un único polo en $s = 1$, de forma que solo queda comprobar que esa función coincide con ζ.

Para ello, por ahora nos centraremos en el término integral. Integrando por partes, obtenemos

$$(s+1) \int_1^{\infty} g(x) x^{-s-2} \, \mathrm{d}x = -g(x) x^{-s-1} \Big|_{x=1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

Como los dos extremos de la evaluación son 0, sustituimos y vemos que

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s(s+1) \int_1^{\infty} g(x) x^{-s-2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x = \zeta(s),$$

donde la última igualdad viene de (1.2). $\square$

Este resultado nos permite continuar con la extensión de ζ y sienta la base para la siguiente generalización:

Proposición 1.5. *Para $N \in \mathbb{Z}^+$, $\Re(s) > -1$ y con g defiinida en (1.4) se cumple la siguiente igualdad:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} - s(s+1)\int_N^\infty g(x)x^{-s-2}\,\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

Demostración. Para esta proposición daremos una prueba más rudimentaria. Denotemos por $\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s}$. Atacando primero el término integral, da como resultado

$$2\int_N^\infty g(x)x^{-s-2}\,\mathrm{d}x = \frac{N^{1-s}}{s-1} + \sum_{n=N}^\infty \frac{n^2}{s+1}\left(n^{-s-1} - (n+1)^{-s-1}\right)$$
$$-2\int_N^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x - \frac{N^{-s}}{s} + \int_N^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Si aquí nos centramos en los términos integrales nuevamente, vemos que tienen la misma estructura, de modo que basta comprobar que

$$\int_N^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\left(\sum_{n=N}^\infty n^{1-s} - \sum_{n=N+1}^\infty (n-1)n^{-s}\right) = \frac{\zeta(s) - \zeta_N(s) + N^{1-s}}{s},$$

mientras que con las mismas ideas de reindexar y expandir la serie da como resultado

$$\sum_{n=N}^\infty \left(n^{-s+1} - n^2(n+1)^{-s-1}\right) = 2\left(\zeta(s) - \zeta_N(s)\right) - \left(\zeta(s+1) - \zeta_N(s+1)\right) + N^{1-s}.$$

Por tanto, tras un poco de trabajo y muchas simplificaciones, el término integral queda así:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{2\left(\zeta(s) - \zeta_N(s)\right) + N^{1-s} + N^{-s}}{s+1} - \frac{2\left(\zeta(s) - \zeta_N(s) + N^{1-s}\right) + N^{-s}}{s}\right).$$

A partir de aquí con sustituir y simplificar podemos llegar al resultado. □

De esta manera, a partir de las sumas parciales de ζ hemos obtenido una familia de expresiones equivalentes para la extensión meromorfa de ζ en $\Re(s) > -1$ que nos permitirán aproximar nuestra función en $0 < \Re(s) < 1$ a partir de sumas parciales. Antes de enunciar y demostrar el teorema necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.6. *La función g definida en (1.4) admite el siguiente desarrollo en serie de Fourier:*

$$g(x) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n^2}e^{2\pi i n x} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2}. \tag{1.6}$$

Demostración. Podemos ver que $g(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ en $(0,1)$. Como es 1-periódica, es C^1 a trozos y la convergencia es absoluta. Integrando por partes, vemos que sus coeficientes son

$$\hat{g}(0) = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}, \qquad \hat{g}(n) = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi^2 n^2},\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

El paso de la serie exponencial a la serie de cosenos es inmediato usando la definición exponencial del coseno. □

Y ahora tenemos todos los ingredientes para probar el resultado que buscábamos, que nos permite aproximar ζ en la región $0 < \Re(s) < 1$ a través de sus sumas parciales y de un término de corrección.

Teorema 1.7. *Existe una constante C tal que*

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{s-1}\right| \leq CN^{-\Re(s)} \qquad \text{para} \quad 0 < \Re(s) < 1 \text{ y } 1 + |\Im(s)| \leq N \in \mathbb{Z}^+.$$

Demostración. Definimos las sucesiones de funciones $f_n(x) := 2\pi n x - \Im(s)\log x$ y $h_n(x) := \left(f_n'(x)x^{\Re(s)+2}\right)^{-1}$ para $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, y observamos que para $\Re(s) > -1$, $1 + \left|\Im(s)\right| \leq N \in \mathbb{Z}^+$ y $x > N$ las funciones están bien definidas, pues f_n' no se anula. Apoyándonos en la identidad $e^{2\pi i n x}x^{-s-2} = f_n'(x)\,e^{if_n(x)}h_n(x)$, integramos en $[N,\infty)$ por partes y vemos que

$$\int_N^\infty e^{2\pi i n x}x^{-s-2}\,\mathrm{d}x = \int_N^\infty f_n'(x)\,e^{if_n(x)}h_n(x)\,\mathrm{d}x = ie^{if_n(N)}h_n(N) + i\int_N^\infty e^{if_n(x)}h_n'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Como f_n es real, $|e^{if_n(x)}| = 1$, así que tomando módulos y usando la desigualdad triangular,

$$\left|\int_N^\infty e^{2\pi i n x}x^{-s-2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|h_n(N)\right| + \int_N^\infty \left|h_n'(x)\right|\mathrm{d}x = 2\left|h_n(N)\right|,$$

pues h_n' es continua y no se anula, por lo que su signo no cambia. Además,

$$\left|h_n(N)\right| = \frac{N^{-\Re(s)-1}}{\left|2\pi n N - \Im(s)\right|} \leq N^{-\Re(s)-1},$$

tal y como se puede comprobar observando en qué región trabajamos.

Ahora, usando (1.5), vemos que

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{s-1} = -\frac{N^{-s}}{2} - s(s+1)\int_N^\infty g(x)x^{-s-2}\,\mathrm{d}x,$$

de manera que solo necesitamos acotar el módulo del último término por $AN^{-\Re(s)}$ para alguna constante A. Para ello, primero acotamos la integral: sustituimos g por su desarrollo en serie de Fourier y sacamos la serie fuera de la integral con el Teorema de Fubini:

$$\left|\int_N^\infty g(x)x^{-s-2}\,\mathrm{d}x\right| = \left| -\frac{1}{12}\frac{N^{-s-1}}{s+1} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{1}{n^2}\int_N^\infty e^{2\pi inx}x^{-s-2}\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \frac{N^{-\Re(s)-1}}{12} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{|h_n(N)|}{n^2} \leq AN^{-\Re(s)},$$

donde $A = \frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} n^{-2} < \infty$. Por tanto,

$$\left|s(s+1)\int_N^\infty g(x)x^{-s-2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{AN^{-\Re(s)}|s+1|}{N} \leq \frac{AN^{-\Re(s)}(2+\Im(s))}{N} \leq 2AN^{-\Re(s)},$$

de modo que $C = 1/2 + 2A$ es la cota deseada. $\square$

CAPÍTULO 2

La ecuación funcional de ζ

Este capítulo tiene por objetivo hallar una extensión de ζ al resto del plano complejo mediante una ecuación funcional siguiendo las ideas de Riemann en su famosa memoria de 1859 [2, §8], [4]. De esta salen, sin demasiada complicación, los resultados de evaluar ζ en los números pares negativos.

2.1. La función Γ

Antes de lanzarnos a por la ecuación funcional tenemos que definir ciertas propiedades de otra función involucrada en esta: la función Γ.

Definición 2.1. Definimos la *función Gamma* mediante la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 0. \tag{2.1}$$

Esta función es la generalización del factorial por antonomasia, como veremos a continuación. De hecho, su origen histórico está en la interpolación de factoriales [3].

Teorema 2.2. *La función Γ satisface $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y admite una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ con polos simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.*

Demostración. Integrando por partes, vemos que si $\Re(s) > 0$ tenemos

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^s e^{-x}\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty s x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = s\Gamma(s).$$

Si para $-1 < \Re(s) \leq 0$ con $s \neq 0$ definimos $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, obtenemos una continuación meromorfa a $\Re(s) > -1$ con un polo simple en $s = 0$. Repitiendo, en $-2 < \Re(s) \leq -1$, definimos $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}$, y así inductivamente para llegar a, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > -n. \tag{2.2}$$

Esto da lugar a una función meromorfa en el plano complejo con polos simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. □

Como decíamos, Γ es una generalización del factorial, pues $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal y como puede deducirse de la ecuación funcional junto con que $\Gamma(1) = 1$.

Para continuar con otras ecuaciones funcionales de Γ usaremos el siguiente lema:

Lema 2.3. *Para* $\Re(s) > \Re(w) > 0$ *se cumple*

$$\Gamma(s)\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\,\mathrm{d}x = \Gamma(s-w)\Gamma(w). \tag{2.3}$$

Demostración. Escribiendo la formulación integral de Γ vemos que

$$\Gamma(s)\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}y^{s-1}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

que con el cambio de variables $x = u/v$, $y = u+v$ queda como

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{w-1}v^{1-w}(v+u)^{-s}v^s(u+v)^{s-1}e^{-u-v}(u+v)v^{-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ \int_0^\infty u^{w-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\int_0^\infty v^{s-w-1}e^{-v}\,\mathrm{d}v = \Gamma(w)\Gamma(s-w).$$

□

Corolario 2.4. *La función* Γ *no se anula y por tanto* $1/\Gamma$ *define una función entera que solo se anula en* $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Demostración. Si $\Gamma(s_0) = 0$ para $\Re(s_0) > 0$, podemos tomar $w_n = 1/n$ partiendo de un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\Re(s_0) > 1$ para poder aplicar el lema. De esta manera, tenemos $\Gamma(s_0 - 1/n)\Gamma(1/n) = 0$ para todo $n \geq N$. Como $\Gamma(1/n) > 0$ si $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $\Gamma(s_0 - 1/n) = 0$ para $n \geq N$, contradiciendo el principio de la identidad.

De este modo, vemos que no hay ceros en $\Re(s) > 0$, y por (2.2) tampoco los hay en el resto del plano complejo. □

Ahora tenemos los ingredientes para proceder con la demostración de las fórmulas de reflexión y de duplicación, que aunque no son necesarias para llegar a una ecuación funcional de ζ nos servirán para deducir una segunda ecuación equivalente.

Teorema 2.5. (Fórmula de reflexión de Euler). *La función* Γ *cumple*

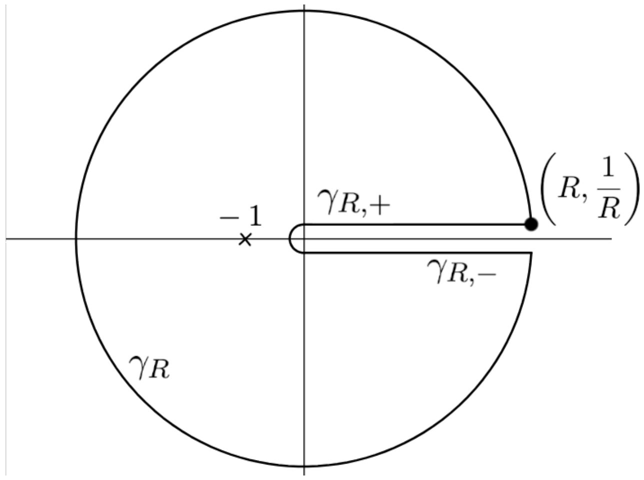
$$\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)} \qquad \textit{para} \quad w \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Demostración. Tomando $s = 1$ y $0 < \Re(w) < 1$ en (2.3) vemos que

$$\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \int_0^\infty \frac{x^{w-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x =: I(w). \tag{2.5}$$

Definimos γ_R como la curva cerrada C^1 a trozos construida conectando i/R con $R+i/R$ y $R - i/R$ con $-i/R$ mediante segmentos de recta que denominaremos $\gamma_{R,+}$ y $\gamma_{R,-}$

respectivamente, y los correspondientes extremos mediante arcos de circunferencia de radio $1/R$ y $\sqrt{R^2+R^{-2}} =: R_*$ centrados en el origen, como muestra el esquema:



Por el Teorema de los residuos, vemos que para todo $R>0$

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1}\left(\frac{z^{w-1}}{1+z}\right) = -2\pi i e^{\pi i w}.$$

Separando la integral en las cuatro integrales sobre segmentos de recta y arcos, vemos que las integrales sobre los arcos tienden a 0: una estimación básica del módulo demuestra que la del arco interior está acotado por $\pi R^{1-\Re(w)}/(R-1)$ y la del exterior por $2\pi R_*^{\Re(w)}/(R_*-1)$, y $\Re(s), 1-\Re(s) < 1$. Por otra parte, en el segmento $\gamma_{R,+}$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{(x+i/R)^{w-1}}{1+x+i/R}\,\mathrm{d}x = I(w)$$

porque los integrandos están dominados por el de $I(\Re(w))$. Por otro lado, debido a la orientación y a la continuidad de la determinación del ángulo a lo largo de γ_R,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,-}} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = -e^{2\pi i w} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z.$$

Juntando todo,

$$-2\pi i e^{\pi i w} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \left(1-e^{2\pi i w}\right) \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{z^{w-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \left(1-e^{2\pi i w}\right) I(w),$$

y despejando llegamos a $I(w) = \pi \operatorname{cosec}(\pi w)$. Esto se extiende al resto del plano complejo considerando $f(w) = \Gamma(1-w)\Gamma(w) - \pi\operatorname{cosec}(\pi w)$ en $0 < \Re(w) < 1$ y comprobando que extiende analíticamente a 0 en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ de forma natural. □

Teorema 2.6. (Fórmula de duplicación de Legendre). *La función* Γ *cumple*

$$\Gamma(s)\Gamma\big(s+1/2\big) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s), \qquad \textit{para} \quad 2s \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}_{\le 0}. \tag{2.6}$$

Demostración. Para $\Re(s) > 1/2$, sustituyendo $w = 1/2$ en (2.4) tenemos que

$$\frac{\Gamma(s-1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(s)} = \int_0^\infty x^{-1/2}(1+x)^{-s}\,\mathrm{d}x,$$

y con el cambio $x = \frac{(y-1)^2}{4y}$ vemos que $(1+x)^{-s} = 2^{2s}y^s(1+y)^{-2s}$, así que queda

$$\int_0^1 \frac{2y^{1/2}}{y-1}2^{2s}y^s(1+y)^{-2s}\frac{y^2-1}{4y^2}\,\mathrm{d}y = 2^{2s-1}\int_0^1 y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,\mathrm{d}y,$$

que con el cambio $y \to y^{-1}$ queda como

$$2^{2s-1}\int_0^1 y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,\mathrm{d}y = 2^{2s-1}\int_1^\infty y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,\mathrm{d}y.$$

Uniendo las dos integrales, como $\Re(2s-1-s+1/2) > 0$ llegamos a

$$\frac{\Gamma(s-1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(s)} = 2^{2s-2}\int_0^\infty y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,\mathrm{d}y = 2^{2s-2}\frac{\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s-1)}.$$

Tomando $s \to s+1/2$ y despejando, para $\Re(s) > 0$ obtenemos

$$\Gamma(s)\Gamma\big(s+1/2\big) = 2^{1-2s}\Gamma(1/2)\Gamma(2s) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s),$$

lo que se extiende al resto del dominio de Γ de manera similar a como probamos la anterior. Es inmediato que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, pues podemos sustituir $s = 1/2$ en (2.4) y en la Definición 2.1 para ver que su cuadrado es π y que es positivo. □

2.2. La ecuación funcional

El propósito de esta sección es presentar una prueba de la ecuación funcional y analizar las consecuencias que se pueden extraer de la misma. Aunque al final se pueden encontrar dos ecuaciones funcionales, una es un disfraz que podemos ponerle o quitarle a la otra mediante las fórmulas de reflexión y de duplicación de Γ.

Empezamos con una proposición y un lema necesarios para probar el teorema.

Proposición 2.7. *Para $y \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2 - 2\pi i x y}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi y^2}. \tag{2.7}$$

Demostración. Sea $h(y) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2-2\pi i x y}\,\mathrm{d}x$. Vemos que $h(0) = 1$, mientras que

$$h'(y) = -i\int_{-\infty}^\infty 2\pi x e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x y}\,\mathrm{d}x = -2\pi y\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2-2\pi i x y}\,\mathrm{d}x = -2\pi y h(y),$$

donde la segunda igualdad viene de integrar por partes. Por tanto, $h(y) = e^{-\pi y^2}$. □

Lema 2.8. *Sea* $G(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. *Para* $t \in \mathbb{R}^+$ *se cumple* $G(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t}$.

Demostración. Como $F(x) := \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2/t}$ es continua y 1-periódica, coincide con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n) e^{2\pi i n x}$, su serie de Fourier. Para calcular $\hat{F}(n)$, como todo converge absolutamente, usamos Fubini y cambiamos $x + n \to x$ para llegar a

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-1/2}^{n+1/2} e^{-\pi x^2/t} e^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2 - 2\pi i n\sqrt{t}w}\,\mathrm{d}w = e^{-\pi n^2 t},$$

donde $w = \frac{x}{\sqrt{t}}$ y usamos (2.7). Evaluando $F(0)$ obtenemos la igualdad. $\square$

Ahora tenemos los elementos necesarios para el siguiente teorema, del que se deducen los resultados que buscamos de manera casi inmediata.

Teorema 2.9. *Sea la función* $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ *y* $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. *Para* $\Re(s) > 1$ *tenemos la siguiente igualdad:*

$$\xi(s) = s(1-s) \int_1^{\infty} \big(x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}\big)\omega(x)\,\mathrm{d}x - 1.$$

Demostración. En primer lugar, podemos ver que

$$\omega(x^{-1}) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x). \tag{2.8}$$

Esto se deduce del Lema 2.8 y de que $\omega(x) = \frac{G(x)-1}{2}$ con $G(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$:

$$\omega(x^{-1}) = \frac{G(x^{-1})-1}{2} = \frac{\sqrt{x}G(x)-1}{2} = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x).$$

Si consideramos las definiciones originales de ζ y Γ y cambiamos $t = \pi n^2 x$, vemos que

$$\xi(s) = s(1-s) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\pi n^2}\right)^{s/2} e^{-t} t^{-1}\,\mathrm{d}t = s(1-s) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Como converge absolutamente, aplicamos Fubini para llegar a la primera igualdad:

$$\xi(s) = s(1-s) \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x}\,\mathrm{d}x = s(1-s) \int_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para la segunda igualdad, cambiamos $x \mapsto x^{-1}$ en $(0,1)$ y usamos (2.8):

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\infty} x^{-s/2-1}\omega(x^{-1})\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\infty} x^{-s/2-1}\frac{\sqrt{x}-1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \left(x^{(1-s)/2-1} + x^{s/2-1}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De esta manera, como la primera integral vale $\frac{1}{s(s-1)}$, llegamos a lo que buscábamos:

$$\xi(s) = -1 + s(1-s) \int_1^{\infty} \left(x^{(1-s)/2-1} + x^{s/2-1}\right)\omega(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Pasemos a analizar qué se deduce del Teorema 2.9. En primer lugar, como ω es de la clase de Schwartz, la integral converge para todo $s \in \mathbb{C}$, definiendo una función entera y, además, la segunda igualdad vemos que $\xi(s) = \xi(1-s)$ para $s \in \mathbb{C}$. Los siguientes corolarios son consecuencia directa de estas dos observaciones.

Corolario 2.10. *La función* $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ *es entera.*

Demostración. Vemos que $F(s) := (s-1)\zeta(s) = -\frac{\xi(s)\pi^{s/2}}{s\Gamma(s/2)}$ es entera, pues es producto de $-\xi(s)$, $\pi^{s/2}$ y $\frac{1}{s\Gamma(s)}$, funciones enteras. Como $F(1) = 1$, es inmediato que $\big(F(s) - F(1)\big)/(s-1) = \zeta(s) - 1/(s-1)$ es entera si la definimos en $s = 1$ como γ, la constante de Euler-Mascheroni (ver Proposición A.2 en el apéndice). □

Corolario 2.11. (Ecuación funcional simétrica). *Para* $s \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s). \tag{2.9}$$

Corolario 2.12. (Ecuación funcional no simétrica). *Para* $s \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{2.10}$$

Demostración. Despejando ζ de (2.9) tenemos que

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma\big((1-s)/2\big)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s).$$

Por las fórmulas de reflexión (2.4) y de duplicación (2.6),

$$\frac{\Gamma\big((1-s)/2\big)}{\Gamma(s/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s/2)}{\pi}\Gamma\big((1-s)/2\big)\Gamma(1-s/2) = 2^s\pi^{-1/2}\operatorname{sen}(\pi s/2)\Gamma(1-s).$$

Sustituyendo, se tiene el resultado deseado. □

2.3. Los ceros triviales y otros valores

Vamos a mostrar rápidamente la existencia de infinitos ceros (los llamados ceros triviales) de ζ y a mostrar cómo calcular alguno de sus otros valores.

Teorema 2.13. *La función* ζ *se anula en los números pares negativos.*

Demostración. Evaluando $s = -2n$ con $n \in \mathbb{Z}_+$ en (2.10), el seno se anula y el resto de términos son finitos, por lo que $\zeta(-2n) = 0$. □

Ahora pasaremos a evaluar $\zeta(-1)$ y $\zeta(-3)$. Resulta curioso como, a pesar de que si los evaluamos en la definición original $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ el resultado es claramente infinito, los valores en ζ coinciden con los asignados por Ramanujan a estas series divergentes. En otras palabras, el famoso $1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}$ tiene «sentido».

Proposición 2.14. *Se tiene que* $\zeta(-1) = -1/12$ *y* $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$.

Demostración. Evaluando $s = -1$ en (2.10), como $\Gamma(2) = 1$ y $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, vemos que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Para $\zeta(-3)$ repetimos el proceso: como $\Gamma(4) = 6$ y $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, llegamos a que $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$. □

Se puede probar (ver [4, §1.5]) que para los enteros negativos $\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1}$, donde B_k representa el k-ésimo número de Bernoulli, dado por $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.

CAPÍTULO 3

Relación con funciones aritméticas

Para entender la famosa relación entre ζ y los números primos debemos salir un momento del mundo del análisis complejo y empezar a estudiar su relación con las funciones aritméticas, es decir, las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

3.1. El producto de Euler

En esta brevísima sección vamos a demostrar que ζ admite una definición como producto infinito, tal y como adelantamos al inicio del primer capítulo. En lo que sigue, p denota un primo y $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, ...\}$ es el conjunto de todos los primos.

Teorema 3.1. *La función ζ admite el siguiente desarrollo como producto infinito:*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \qquad \textit{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{3.1}$$

Demostración. Consideramos, para $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_k := \{n \in \mathbb{N} : p|n \Rightarrow p \leq k\}$, el conjunto de los números sin factores primos mayores que k. Dado $\Re(s) > 1$, se tiene que $p^{-\Re(s)} < 1$, por lo que podemos sustituir cada término del producto por su correspondiente serie geométrica. Además, al ser un producto finito de series absolutamente convergentes, podemos multiplicarlas y reordenarlas para llegar a

$$\prod_{p\leq k} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p\leq k} \sum_{n=0}^{\infty} p^{-ns} = \sum_{n\in\mathcal{N}_k} n^{-s}.$$

De esta manera, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge absolutamente, tenemos que

$$\left|\zeta(s) - \prod_{p\leq k} (1 - p^{-s})^{-1}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n\in\mathcal{N}_k} n^{-s}\right| \leq \sum_{n\notin\mathcal{N}_k} n^{-\Re(s)} \leq \sum_{n=k}^{\infty} n^{-\Re(s)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

$\square$

En realidad, este teorema no es exclusivo de ζ, sino que es un caso particular de un teorema más general [11, Theorem 1.9]. Además, como $\prod_{p\leq k}(1 - p^{-s})^{-1} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\Re(s) > 1$ y converge a ζ localmente uniformemente en ese abierto, el Teorema de Hurwitz [1, Teorema 2.3] nos asegura que $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) > 1$.

3.2. Funciones aritméticas y la función ζ

En primer lugar, lo natural es preguntarse qué son las funciones multiplicativas que se mencionan en [11, Theorem 1.9] y dar algún ejemplo.

Definición 3.2. Una función aritmética $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ se dice *multiplicativa* si $f(1) = 1$ y $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo n y m coprimos. Si $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se dice que la función es *completamente multiplicativa.*

Esta definición de función multiplicativa no solo abarca la función constante $\mathbf{1}$ o la función identidad, que cumplen las propiedades de forma trivial, sino que también recoge, por ejemplo, a la función de Euler $\varphi(n) = \#\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, (n, m) = 1\}$, que es multiplicativa pero no completamente multiplicativa. Esto se deduce observando que cuando $(n, m) = 1$ tenemos $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ por el Teorema chino del resto. Como $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, tomando unidades a ambos lados llegamos al resultado. Por tanto, basta saber que, para p primo y $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$, lo que ya indica que no es completamente multiplicativa, pues por ejemplo $\varphi(4) = 2 \neq 1 = \varphi(2)\varphi(2)$.

Otro ejemplo no trivial es la función $d(n) = \#\{m \in \mathbb{N} : m|n\}$, que cuenta el número de divisores de un número entero, ya que la identidad $d(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1+1) \cdots (\alpha_k+1)$ revela su naturaleza multiplicativa. Nuevamente, $d(4) = 3 \neq 4 = d(2)d(2)$, por lo que d tampoco es completamente multiplicativa.

El siguiente resultado relaciona φ y d con ζ de forma muy directa.

Teorema 3.3. *Para $\Re(s) > 2$ se cumple*

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \qquad y \qquad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}. \tag{3.2}$$

Demostración. Usando el producto de Euler para ζ, vemos que en $\Re(s) > 2$

$$\zeta^2(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-ns} \right)^2 = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p^{-ns} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} d(p^n)p^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s},$$

donde la última igualdad viene de la versión general del Teorema 3.1. Sin embargo, para aplicarlo falta comprobar que $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s}$ converge absolutamente. Usando la cota trivial $d(n) \leq n$ la convergencia absoluta para todo $\Re(s) > 2$ es inmediata, aunque como ilustraremos esta región no es la óptima.

Para la segunda igualdad, usamos la fórmula producto, la misma cota y el Teorema:

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n(s-1)}(1 - p^{-s}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} p^n p^{-ns}(1 - p^{-s})$$

$$= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n p^{-ns} - \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} p^{-ns} \right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(p^n)p^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)n^{-s}.$$

$\square$

Obsérvese que, en la primera identidad del Teorema 3.3, se puede afinar la región de igualdad hasta $\Re(s) > 1$ probando que $d(n) = o(n^\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, pero esto se sale del objetivo del trabajo.

Aunque ahora pueda parecer que todas las funciones aritméticas relacionadas con ζ son multiplicativas, esto no es así, como demuestra el siguiente ejemplo:

Definición 3.4. La *función de von Mangoldt* se define como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ para algún } p \text{ primo y } k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Aunque Λ claramente no es multiplicativa, aparece de forma natural al derivar ζ.

Proposición 3.5. *Sea Λ la función de von Mangoldt. Entonces*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \textit{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{3.4}$$

Demostración. Como $\zeta(s) \neq 0$ en $\Re(s) > 1$, podemos aplicar el logaritmo al producto de Euler de ζ, y al ser continuo transforma el producto en serie:

$$-\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - p^{-s}).$$

Derivando a ambos lados e identificando la serie geométrica,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=1}^{\infty} p^{-ns} \log p = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

□

Antes de continuar tendiendo puentes entre ζ y los números primos, estudiaremos la función $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ en su dominio más natural: el complementario de $\mathcal{Z} = \{\rho \in \mathbb{C} : \zeta(\rho) = 0\}$. Observamos que $\mathcal{Z}$ es cerrado porque está compuesto de puntos aislados sin puntos de acumulación (si no, el principio de la identidad forzaría a ζ a ser idénticamente nula), por lo que $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{Z}$ es abierto.

Proposición 3.6. *La función $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en el abierto $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{Z}$ y tiene polos simples en los elementos de $\mathcal{Z}$.*

Demostración. En primer lugar, vemos que $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en $\mathcal{U} - \{1\}$ por ser diferencia de funciones holomorfas en este abierto.

Veamos ahora que tiene polos simples en cada $\rho \in \mathcal{Z}$. Sea $\rho \in \mathcal{Z}$ un cero de ζ orden n. Entonces, existen un entorno B de ρ y una función g holomorfa en B que no se anula tal que $\zeta(s) = (s-\rho)^n g(s)$ en B. Por tanto, $\zeta'(s) = (s-\rho)^{n-1}\big(ng(s) - (s-\rho)g'(s)\big)$ tiene un cero de orden $n-1$ en ρ. Dividiendo, llegamos a que $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = \rho$.

Por último, veamos que $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ tiene límite en $s = 1$. Sea $F(s) = (s-1)\zeta(s)$, entera con $F(1) = 1$ y $F'(1) = \gamma$, la constante de Euler-Mascheroni (ver Proposición A.2 en el apéndice). Vemos que $\zeta'(s) = \frac{F'(s)}{s-1} - \frac{F(s)}{(s-1)^2}$, por lo que

$$\lim_{s\to 1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) = \lim_{s\to 1}\left(-\frac{F'(s)}{F(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\right) = -\gamma \in \mathbb{R}.$$

□

La función Λ puede ser complicada de tratar, por lo que manejaremos una «imitación» que se limita a los primos y que su serie no añade singularidades en $\Re(s) > 1/2$.

Definición 3.7. Para $\Re(s) > 1$ definimos $\Phi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}\log p$.

Como $\log p = o(p^{\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$, la serie converge absolutamente en $\Re(s) > 1$ y define una función holomorfa. Su parecido a $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ motiva el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *La función $\Phi(s) + \zeta'(s)/\zeta(s)$ admite una extensión holomorfa a $\Re(s) > 1/2$.*

Demostración. Basta con considerar sus expresiones en serie:

$$\Phi(s) + \zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s}\log p - \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty} p^{-ns}\log p = -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=2}^{\infty} p^{-ns}\log p.$$

Para que la serie defina una función holomorfa basta con que converja absolutamente, y como para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\log p = o(p^{\varepsilon})$, basta ver que, dado $\varepsilon > 0$, en $\Re(s) > 1/2 + \varepsilon$ tenemos

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=2}^{\infty} p^{-n\Re(s)+\varepsilon} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{-2\Re(s)+\varepsilon}}{1 - p^{-\Re(s)}} \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{-2\Re(s)+\varepsilon}}{1 - 1/4} \leq \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\Re(s)+\varepsilon} < \infty.$$

□

La importancia de la función Φ está en los resultados que mostraremos a continuación, pues la relacionan con la primera función de Chebyshev ϑ.

Definición 3.9. Para $x \geq 1$, definimos la *primera función de Chebyshev* ϑ como

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p, \qquad \text{donde } p \text{ recorre los primos.} \tag{3.5}$$

Esta función es protagonista de la demostración del Teorema de los números primos que presentaremos aquí. Seguimos con la siguiente igualdad que relaciona Φ y ϑ.

Proposición 3.10. *Sea ϑ la primera función de Chebyshev. Se cumple*

$$\Phi(s) = s\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{3.6}$$

Demostración. Escribiendo $\vartheta(x)x^{-s-1} = \sum_{p\in\mathbb{P}}(\log p)x^{-s-1}\mathbf{1}_{[p,\infty)}(x)$, para s real y mayor que 1, tenemos una sucesión creciente de funciones (medibles) no negativas. Por tanto, por el Teorema de la convergencia monótona,

$$s\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = s\sum_{p\in\mathbb{P}}(\log p)\int_p^\infty x^{-s-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{p\in\mathbb{P}}(\log p)p^{-s} = \Phi(s).$$

Para $\Re(s) > 1$ en general, usamos el Teorema de la convergencia dominada, pues es precisamente $\vartheta(x)x^{-\Re(s)-1}$ la función integrable que domina la sucesión con s. $\square$

Estas relaciones permiten, asumiendo la existencia de un límite, determinar el comportamiento asintótico de ϑ. El resultado es puramente analítico y no depende de ϑ en particular, pero aplicarlo a esta función tiene consecuencias interesantes como la aparición recurrente de primos en cierta clase de intervalos. Vamos con el teorema.

Teorema 3.11. *Si $\ell = \lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}$ existe, entonces $\ell = 1$.*

Demostración. En primer lugar, observamos que, por las proposiciones anteriores, la función Φ tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo igual a 1. Definimos $f(x) = \frac{\vartheta(x)}{x}$ y vemos que

$$\lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_1^\infty f(x)x^{-s}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = 1. \tag{3.7}$$

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $x_0 > 1$ tal que para todo $x \geq x_0$ se cumple $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Separando la integral por x_0 y tomando el límite, vemos que

$$\lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_1^\infty f(x)x^{-s}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_{x_0}^\infty f(x)x^{-s}\,\mathrm{d}x \tag{3.8}$$

Por tanto, como para todo $C \in \mathbb{R}$ tenemos $C = \lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_{x_0}^\infty Cx^{-s}\,\mathrm{d}x$,

$$\ell - \varepsilon \leq \lim_{s\to 1^+}(s-1)\int_{x_0}^\infty f(x)x^{-s}\,\mathrm{d}x \leq \ell + \varepsilon.$$

Juntando esto con (3.7) y (3.8), dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $|1-\ell| \leq \varepsilon$, es decir, $\ell = 1$. $\square$

A falta de mostrar por qué son equivalentes, el resultado hermano del Teorema de los números primos consiste precisamente en que $\ell = 1$, por lo que todavía necesitaríamos probar la existencia de ℓ. Por otra parte, en el siguiente corolario sí entra en juego la naturaleza de ϑ (al contrario que en el teorema anterior), y, aunque seguimos necesitando que ℓ exista, no importa que $\ell = 1$ sino que $\ell \neq 0$.

Corolario 3.12. *Si ℓ existe, entonces para cada $\alpha > 1$ existe un n_0 tal que el intervalo $(n, \alpha n]$ contiene un primo para todo $n > n_0$.*

Demostración. Sea $\alpha > 1$. Supongamos que existen $n_1 < n_2 < \ldots$ tales que no hay primos en $(n_k, \alpha n_k]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando n_1 suficientemente grande, podemos suponer que $\alpha n_k \geq n_k + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que, como no hay primos en $[n_k + 1, \alpha n_k]$, tenemos que $\vartheta(n_k + 1) = \vartheta(\alpha n_k)$. Así, llegamos a que

$$\ell = \lim_{k\to\infty} \frac{\vartheta(\alpha n_k)}{\alpha n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\vartheta(n_k+1)}{n_k+1}\frac{n_k+1}{\alpha n_k} = \frac{1}{\alpha}\lim_{k\to\infty}\frac{\vartheta(n_k+1)}{n_k+1} = \frac{\ell}{\alpha}.$$

Como suponemos que ℓ existe, $\ell = 1$ por el Teorema 3.11, lo que hace que $\ell = \ell/\alpha$ sea imposible con $\alpha > 1$, contradiciendo la existencia la sucesión creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$. □

Por último, vamos a presentar una primera conexión directa entre la función ζ y la función contadora de primos π. Como ya es habitual, es una integral lo que conecta ambas funciones.

Teorema 3.13. *Sea $\pi(x) = \#\{p \leq x\}$ la función contadora de los primos. Entonces*

$$\log\zeta(s) = s\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{para} \quad \Re(s) > 1. \tag{3.9}$$

Demostración. Obsérvese que la función $\log\zeta(s)$ está bien definida para $\Re(s) > 1$ por la ausencia de ceros en esa región. Ahora, notando que $\pi(x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \mathbf{1}_{[p,\infty)}(x)$, para $s > 1$ estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Tonelli para cambiar sumación e integración, y estamos en la región de convergencia del producto de Euler. Uniendo estos dos datos

$$s\int_2^\infty \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\mathbf{1}_{[p,\infty)}(x)}{x(x^s-1)}\,\mathrm{d}x = \sum_{p\in\mathbb{P}}\int_p^\infty \frac{sx^{-s-1}}{1-x^{-s}}\,\mathrm{d}x = -\sum_{p\in\mathbb{P}}\log(1-p^{-s}) = \log\zeta(s).$$

Para el caso $s \notin (1,\infty)$, basta notar que las dos expresiones definen funciones holomorfas en $\Re(s) > 1$ y coinciden en $(1,\infty)$. Apelando al principio de la identidad, deducimos que definen la misma función en esta región. □

CAPÍTULO 4
La distribución de los números primos

El *Teorema de los números primos* afirma que $\pi(x) \sim x/\log x$, donde $\pi(x) = \#\{p \leq x\}$ es la función contadora de los primos, es decir, que *para* x *suficientemente grande la proporción de primos en* $[1, x]$ *es aproximadamente* $1/\log x$. Aunque pueda parecer que este resultado se puede deducir del estudio de $\mathbb{N}$ o de $\mathbb{Z}$, las primeras demostraciones se basaron fuertemente en el análisis de la función ζ como función de variable compleja.

4.1. Historia del teorema

A principios del siglo XIX, el matemático francés Andrien-Marie Legendre conjeturó que $\pi(x)$ podía aproximarse por $x/(\log x - B)$ (ver [10, §4.VIII]), donde $B = 1{,}08366$ pasó a conocerse como la *constante de Legendre*. Alrededor de esas fechas, Gauss y Dirichlet consideraron el logaritmo integral $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ como función aproximadora de primos, lo que reforzaba la idea de que la conjetura sobre el comportamiento asintótico de Legendre era correcta, aunque esta segunda función (o el otro logaritmo integral $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$, donde se considera el valor principal de Cauchy para $x > 1$) es una aproximación mucho mejor y es protagonista de las consecuencias más inmediatas de la hipótesis de Riemann, como veremos en el quinto capítulo.

Las primeras aproximaciones al teorema se deben al matemático ruso Pafnuty Chebyshev, que logro probar resultados más débiles considerando la función ζ para valores reales. En 1896, Hadamard y de la Vallée Poussin obtuvieron de manera independiente las primeras demostraciones completas, ambas basadas en las ideas de Riemann que consideraban ζ como función de variable compleja, y no fue hasta 1949 que Selberg [15] y Erdős [6] dieron con una prueba «elemental», sin variable compleja ni la función ζ. La cuestión de si la demostración debía publicarse en un solo artículo conjunto o si cada uno debía publicar su contribución dio lugar a una disputa entre ambos [7].

Volviendo a la conjetura de Legendre, es curioso cómo el valor más lógico de la constante de Legendre B se obtiene despejando $\pi(x) \sim x/(\log x - B)$, es decir,

$B = \text{lím}_{n\to\infty}\left(\log n - \frac{n}{\pi(n)}\right)$. Se puede probar (ver [13]) que este límite existe y es igual a 1, lo que convierte esta *constante de Legendre* en el número más sencillo posible.

4.2. El teorema de los números primos

La demostración que presentaremos aquí se la debemos al matemático estadounidense Donald J. Newman [12], que conserva la idea original con unas reducciones muy drásticas, aunque seguiremos la simplificación de D. Zagier [17]. Al igual que el resto, empieza probando que $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) = 1$, para lo que necesitaremos el siguiente lema:

Lema 4.1. *Para $\sigma > 1$ se tiene*

$$(4.1)\quad (1-\sigma)\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\frac{\zeta'(\sigma+ikt_0)}{\zeta(\sigma+ikt_0)} = (\sigma-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\left(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2}\right)^4 \geq 0.$$

Demostración. Usando (3.4), llegamos a lo siguiente:

$$-\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\frac{\zeta'(\sigma+ikt_0)}{\zeta(\sigma+ikt_0)} = \sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+ikt_0}} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}n^{-ikt_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}n^{2it_0}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}n^{-ikt_0}.$$

Identificando lo último como $n^{2it_0}(1+n^{-it_0})^4 = (n^{it_0/2}+n^{-it_0/2})^4$, tenemos que

$$(1-\sigma)\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\frac{\zeta'(\sigma+ikt_0)}{\zeta(\sigma+ikt_0)} = (\sigma-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\left(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2}\right)^4 \geq 0,$$

pues tenemos una serie de términos reales no negativos debido a que $n^{it_0/2}+n^{-it_0/2} = 2\cos(t_0\log(n)/2) \in \mathbb{R}$. □

Corolario 4.2. *La función ζ no tiene ceros para $\Re(s) = 1$.*

Demostración. Como $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$, vemos que $\zeta(s) = 0 \Leftrightarrow \zeta(\bar{s}) = 0$. Supongamos que ζ tiene ceros de orden $m, n \geq 0$ en $s_0 = 1 \pm it_0$ y en $s_1 = 1 \pm 2it_0$ respectivamente. Aplicando ideas similares a la del principio del argumento, vemos que

$$\lim_{\sigma\to1^+}(1-\sigma)\frac{\zeta'(\sigma\pm it_0)}{\zeta(\sigma\pm it_0)} = -m \qquad \text{y} \qquad \lim_{\sigma\to1^+}(1-\sigma)\frac{\zeta'(\sigma\pm 2it_0)}{\zeta(\sigma\pm 2it_0)} = -n,$$

y, por la Proposición 3.6, $\text{lím}_{\sigma\to1^+}(1-\sigma)\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = 1$. Tomando el límite en (4.1) llegamos a que $0 \leq \binom{4}{2} - m\binom{4}{1} - m\binom{4}{3} - n\binom{4}{0} - n\binom{4}{4} \leq 6 - 8m$, imposible para $m \geq 1$ y por tanto ζ no tiene un cero en $1 \pm it_0$. Como t_0 es arbitrario, $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) = 1$. □

La ausencia de ceros de ζ en $\Re(s) = 1$ es necesaria para garantizar que la función $\Phi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} \log p$ se comporta bien cerca de $\Re(s) = 1$, que es lo que necesitamos para probar el Teorema de los números primos.

Corolario 4.3. *La función $G(s) = \Phi(s) - (s-1)^{-1}$, donde $\Phi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} \log p$, admite una extensión holomorfa a un abierto $\mathcal{U} \supset \mathcal{R} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 1\}$.*

Demostración. La función $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en el abierto $\mathcal{A} = \{s \in \mathbb{C} : \zeta(s) \neq 0\}$ y $\Phi(s) + \zeta'(s)/\zeta(s)$ es holomorfa en $\mathcal{B} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1/2\}$ (ver Proposiciones 3.6 y 3.8). La suma $\Phi(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en la intersección $\mathcal{U} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, y ambos abiertos contienen a $\mathcal{R}$ por el corolario anterior. $\square$

En realidad, la expresión para G que nos interesa es la siguiente

$$G(s) = \int_1^\infty (\vartheta(x) - x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}}. \tag{4.2}$$

La reducción de Newman (y nuestro objetivo ahora) consiste en demostrar el Teorema 4.5 o, equivalentemente, que la integral de Riemann impropia $\int_1^\infty (\vartheta(x) - x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Vamos a probar un resultado sencillo antes de aventurarnos a demostrarlo y ver cómo deducir de ello el teorema de los números primos.

Proposición 4.4. *La función $\vartheta(x)/x$ está acotada en $(1,\infty)$.*

Demostración. Dado $x > 1$, existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \in (2^{k-1}, 2^k]$, de modo que $\vartheta(x) \leq \vartheta(2^k)$. Vemos que $\vartheta(1) = 0$ sienta la base de una suma telescópica, y notando que $p \in (2^{j-1}, 2^j]$ implica que p divide a $\binom{2^j}{2^{j-1}}$, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\vartheta(x) \leq \sum_{j=1}^{k} \big(\vartheta(2^j) - \vartheta(2^{j-1})\big) \qquad \text{y} \qquad e^{\vartheta(2^j)-\vartheta(2^{j-1})} = \prod_{2^{j-1}<p\leq 2^j} p \leq \binom{2^j}{2^{j-1}}.$$

De este modo, $\vartheta(x) \leq \sum_{j=1}^k \log\binom{2^j}{2^{j-1}} \leq \sum_{j=1}^k \log 2^{2^j} \leq 2^{k+1}\log 2$. Como $x > 2^{k-1}$, concluimos que $\vartheta(x) \leq 4x\log 2$, es decir, $\vartheta(x)/x \leq 4\log 2$. $\square$

Ahora, con un poco de análisis complejo podemos demostrar el teorema previo al Teorema de los números primos en el que se basa la reducción de Newman.

Teorema 4.5. *Sea ϑ la primera función de Chebyshev. Se cumple*

$$\mathcal{I}(a,b) = \int_a^b (\vartheta(x) - x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \to 0 \qquad \textit{cuando} \quad b > a \to \infty. \tag{4.3}$$

Demostración. Consideraremos $\mathcal{U}$ como en el Corolario 4.3 y la región $D = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq R,\ \Re(s) > -\delta\}$ con $R > 1$, donde $\delta \in (0,1)$ es tal que $\{s+1 : s \in D\} \subset \mathcal{U}$

y definimos, para $c > 1$, $G_c(s) = \int_1^c (\vartheta(x) - x)\, x^{-s-1}\, \mathrm{d}x$ y las siguientes familias de funciones:

$$h_c(s) = c^s\Big(1+\frac{s^2}{R^2}\Big), \qquad B_c(s) = G_c(s+1)h_c(s) \qquad \text{y} \qquad A_c(s) = B_c(s) - G(s+1)h_c(s).$$

Por (4.2) todas estas funciones son holomorfas en $\mathcal{U}$. Usando la fórmula integral de Cauchy, vemos que, sumando y restando un término cruzado,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \big(G_b(s+1) - G_a(s+1)\big)h_b(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \big(G_a(s+1) - G(s+1)\big)\,(h_a(s) - h_b(s))\,\frac{\mathrm{d}s}{s} = G_b(1) - G_a(1) = \mathcal{I}(a,b).$$

La segunda igualdad viene de que, por la Proposición 4.4, $|\frac{\vartheta(x)-x}{x^{s+1}}| \le Kx^{-1} \in L^1([a,b])$ para $\Re(s) > 1$, así que podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada:

$$G_b(1) - G_a(1) = \lim_{s\to 1^+}\int_a^b \frac{\vartheta(x) - x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ahora, descomponiendo $\partial D = C_1 \sqcup C_2$ con C_1 la semicircunferencia derecha $\{|s| = R,\ \Re(s) \ge 0\}$ y C_2 el resto, vemos que, con las definiciones de A_c y B_c,

$$2\pi i\mathcal{I}(a,b) = \int_{C_1} \big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{\mathrm{d}s}{s} + \int_{C_2} \big(B_b(s) - B_a(s) - (h_b(s) - h_a(s))G(s+1)\big)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

El objetivo ahora es demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $R > 1$ tal que

$$J_1 = \left|\int_{C_1} (A_b(s) - A_a(s))\,\frac{ds}{s}\right| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad J_2 = \left|\int_{C_2} \big(B_b(s) - B_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}\right| < \varepsilon.$$

Para ello, abreviemos $\Re(s) = \sigma$. Para $s \in C_1$, se tiene que

$$|h_c(s)| = c^\sigma \frac{|s|}{R}\left|\frac{s}{R} + \frac{R}{s}\right| = c^\sigma\left|\frac{s}{R} + \frac{R\bar{s}}{R^2}\right| = c^\sigma R^{-1}|s + \bar{s}| = c^\sigma R^{-1}2\sigma \qquad \text{y}$$
$$|G_c(s+1) - G(s+1)| \le \int_c^\infty \frac{|\vartheta(x) - x|}{x^{\sigma+2}}\,\mathrm{d}x \le \int_c^\infty \frac{K}{x^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}x = K\sigma^{-1}c^{-\sigma}.$$

Con esto, llegamos a que $J_1 \le \pi R \sup_{s\in C_1} \frac{|A_b(s)-A_a(s)|}{|s|} \le \pi R\frac{4KR^{-1}}{R} = 4\pi K R^{-1}$, por lo que J_1 es tan pequeño como queramos.

Por otro lado, para acotar J_2, como $B_c(s)/s$ es holomorfa en $\Re(s) < 0$ podemos cambiar el contorno sobre el que integramos a $C_3 = \{|s| = R,\ \Re(s) < 0\}$. Además, para $s \in C_3$ se cumple $|G_c(s+1)| \le K|\sigma|^{-1}(c^{-\sigma} - 1) \le K|\sigma|^{-1}c^{-\sigma}$ y $|h_c(s)| = 2|\sigma|c^\sigma R^{-1}$, por lo que de nuevo $J_2 \le \pi R \sup_{s\in C_3} \frac{|B_b(s)-B_a(s)|}{|s|} \le 4\pi K R^{-1}$.

Con esto, solo nos queda demostrar que $\int_{C_2} \big(h_b(s) - h_a(s)\big)G(s+1)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}$ tiende a 0 cuando $b > a \to \infty$. Sabemos que $\sup_{s\in C_2} \frac{|G(s+1)|}{|s|} =: S < \infty$, y como $\Re(s) < 0$ para $s \in C_2$, también tenemos que $|h_b(s) - h_a(s)| \le |h_b(s)| + |h_a(s)| \le 4a^{\Re(s)}$ por lo que

$$\left|\int_{C_2} \big(h_b(s) - h_a(s)\big)G(s+1)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \le \int_{C_2} 4Sa^{\Re(s)}\,|\mathrm{d}s| \xrightarrow{a\to\infty} 0.$$

En resumen, $|\mathcal{I}(a,b)|$ con $b > a$ es arbitrariamente pequeño cuando $a \to \infty$. $\square$

Con esto, la demostración del Teorema de los números primos se reduce a relacionar $\vartheta(x)$ con $\pi(x)$ y trabajar con límites superiores e inferiores.

Teorema 4.6. (Teorema de los números primos). *Sea* $\pi(x) = \#\{p \leq x\}$ *la función contadora de los primos. Entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1. \tag{4.4}$$

Demostración. Argumentando por reducción al absurdo, supongamos primero que $\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} > 1$, es decir, existe un $L > 1$ y una sucesión creciente no acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\pi(x_n)\log x_n > Lx_n$. Sea $\beta = \frac{L+1}{2L}$. Vemos que, por un lado, para $x \geq x_n$,

$$\vartheta(x) - \beta\left(\pi(x_n) - \pi(x_n^{\beta})\right)\log x_n \geq \sum_{x_n^{\beta}<p\leq x_n} \log p - \sum_{x_n^{\beta}<p\leq x_n} \beta\log x_n = \sum_{x_n^{\beta}<p\leq x_n} \log p - \log x_n^{\beta} \geq 0;$$

y por otro lado, por las definiciones de L y β y porque $\pi(x_n^{\beta}) \leq x_n^{\beta}$, tenemos que

$$\beta\left(\pi(x_n) - \pi(x_n^{\beta})\right)\log x_n \geq \frac{L+1}{2}x_n - \beta x_n^{\beta}\log x_n.$$

Combinando estas dos desigualdades, llegamos a que para $x \geq x_n$ se cumple $\vartheta(x) \geq \frac{L+1}{2}x_n - \beta x_n^{\beta}\log x_n$. Sustituyendo esta desigualdad en (4.3) obtenemos

$$\mathcal{I}(x_n, Lx_n) \geq \int_{x_n}^{Lx_n} \left(\frac{L+1}{2}x_n - \beta x_n^{\beta}\log x_n - x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{L^2-1}{2L} - c_n - \log L,$$

donde $c_n = \frac{L^2-1}{2L^2}x_n^{\beta-1}\log x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ porque $\beta < 1$. Por tanto, utilizando (4.3) y la hipótesis de que $L > 1$, llegamos a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(x_n, Lx_n) \geq \frac{L^2-1}{2L} - \log L > 0,$$

una contradicción. De esta manera, deducimos que $\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq 1$.

Para ver que $\liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq 1$, la idea es la misma: suponemos que existe una constante $\ell < 1$ y una sucesión creciente no acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\pi(x_n)\log x_n < \ell x_n$ para todo n. Usamos la desigualdad trivial $\vartheta(x) \leq \pi(x_n)\log x_n$ para $x \leq x_n$ y observamos que $\mathcal{I}(\ell x_n, x_n) \leq 1 - \ell + \log \ell < 0$, contradiciendo (4.3) nuevamente. □

Con este resultado surgen otras preguntas, como cuál es la velocidad de convergencia o si hay alguna cota para la diferencia entre las funciones. Las conjeturas de Legendre, de Gauss y de Dirichlet eran correctas, pues

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \frac{x}{\log x - 1} \sim \mathrm{Li}(x) \sim \mathrm{li}(x). \tag{4.5}$$

De todas estas, el logaritmo integral es la que mejor aproxima $\pi(x)$, y las cotas para sus diferencias dependen directamente de los ceros no triviales de ζ (los distintos de 2, 4, ...). Es en este contexto en el que aparece la famosa hipótesis de Riemann.

CAPÍTULO 5

La hipótesis de Riemann

El propósito de este capítulo es presentar la famosa hipótesis de Riemann y un teorema en el que se muestra su relación con la distribución de los números primos.

5.1. Resultados previos

Antes de introducir la Hipótesis y el último teorema, demostraremos dos resultados que necesitaremos más adelante. Empezamos con uno relativo a los ceros de ζ.

Proposición 5.1. *La función ζ no se anula para $s \in (0,1)$.*

Demostración. Recurriremos a una expresión similar a la dada en (1.2): como $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$ se tiene que $\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \geq 0$ para $s \in (0,1)$, por lo que en este intervalo

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{s}{s-1} < 0.$$

□

Esta proposición nos permitirá usar el siguiente teorema en la demostración del de la siguiente sección.

Teorema 5.2 (Lema de Landau). *Sea $f : [2,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable tal que $f(x)/x$ es positiva y acotada para x mayor que cierto x_0. Si la trasformada integral*

$$L_f(s) = \int_2^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x$$

se extiende a una función holomorfa en algún abierto que contiene a un intervalo $(\sigma, 1]$ con $0 < \sigma < 1$, entonces la integral converge en $\Re(s) > \sigma$ y es holomorfa allí.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $f \geq 0$ en $[2,\infty)$, pues la transformada integral de la parte negativa de f define una función entera y la integración en un intervalo finito no afecta a la convergencia.

Ahora, definimos $\sigma' := \text{ínf}\{\delta > \sigma : L_f(s) \text{ converge para } \Re(s) > \delta\}$. Está claro que $\sigma' \in [\sigma,1]$. En primer lugar, vemos que $L_f(\delta)$ no converge si y solo si $L_f(\delta) = \infty$, de modo que converge para $\Re(s) \geq \delta$ si y sólo si $L_f(\delta) < \infty$, pues para cada s con $\Re(s) \geq \delta$ la integral converge absolutamente porque $L_f(\Re(s)) \leq L_f(\delta) < \infty$. Por tanto, para $\delta < \sigma'$, $L_f(\delta) = \infty$, pues si no σ' no sería ínfimo.

Supongamos que $\sigma < \sigma'$ y sean $\sigma < \sigma_- < \sigma' < \sigma_+$ tales que σ_- pertenece a un disco centrado en σ_+ en el que L_f tiene una extensión holomorfa F. Se cumple

$$F(\sigma_-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_f^{(n)}(\sigma_+)}{n!}(\sigma_- - \sigma_+)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_+ - \sigma_-)^n}{n!} \int_2^{\infty} \frac{f(x)(\log x)^n}{x^{1+\sigma_+}} \, \mathrm{d}x.$$

Aplicando el Teorema de Tonelli, llegamos a una contradicción, pues vemos que

$$F(\sigma_-) = \int_2^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_+ - \sigma_-)^n (\log x)^n}{n!} \frac{f(x)}{x^{1+\sigma_+}} \, \mathrm{d}x = \int_2^{\infty} x^{\sigma_+ - \sigma_-} \frac{f(x)}{x^{1+\sigma_+}} \, \mathrm{d}x = L_f(\sigma_-)$$

y $F(\sigma_-) = |F(\sigma_-)| < \infty$ pero $L_f(\sigma_-) = \infty$ porque $\sigma_- < \sigma'$. Por tanto, $\sigma = \sigma'$, y usando los Teoremas de Fubini y Tonelli llegamos a que $F(s) = L_f(s)$ para $\Re(s) > \sigma$.

$\square$

5.2. La hipótesis de Riemann

Tras hallar algunos de los primeros ceros no triviales, Riemann conjeturó en su famosa memoria de 1859 que todos tenían parte real igual a 1/2. Esta es la hipótesis de Riemann, que se puede formular equivalentemente como que la constante

$$\sigma_0 = \sup\{\sigma > 0 \, : \, \zeta(\sigma + it) = 0 \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\},$$

de la que depende el error en la aproximación dada por el Teorema de los números primos, es igual a 1/2. Para ver que ambas formulaciones son equivalentes, lo primero que podemos notar es que no hay ceros para $\Re(s) > 1$, y observando la ecuación funcional simétrica (2.9) vemos que, para $0 < \sigma < 1$, $\rho = \sigma + it$ es un cero si y solo si $\rho' = (1 - \sigma) + it$ lo es, por lo que si $\sigma \neq 1/2$ alguno de los dos ceros tendrá parte real mayor que 1/2. Esto nos indica que $1/2 \leq \sigma_0 \leq 1$.

La importancia de σ_0 radica en su relación con el error de la aproximación del Teorema de los números primos, pues $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\sigma_0} \log x)$ como demuestra [8, Theorem 30] De esta manera, la hipótesis de Riemann se coloca en el mejor caso posible en lo que a error se refiere. En esta línea, el siguiente teorema proporciona, suponiendo que la Hipótesis es falsa, cotas para el error y muestra que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) \neq O(x^{\sigma_0 - \varepsilon})$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Teorema 5.3. *Supongamos $\sigma_0 \neq \frac{1}{2}$. Si el supremo que define σ_0 es un máximo, esto es, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\zeta(\rho_0) = 0$ con $\rho_0 = \sigma_0 + it_0$, entonces*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x} \geq \frac{1}{|\rho_0|} \qquad y \qquad -\frac{1}{|\rho_0|} \geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x}.$$

En particular, el límite no existe. Por otro lado, si el supremo no es máximo, entonces

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)-\mathrm{Li}(x)}{x^\sigma} = -\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)-\mathrm{Li}(x)}{x^\sigma} = +\infty \qquad \textit{para cualquier } \sigma < \sigma_0.$$

Demostración. Empecemos suponiendo que el supremo que define σ_0 es un máximo y sea $\rho_0 = \sigma_0 + it_0$ un cero donde se alcanza el máximo, que, por el Corolario 4.2, vemos que $1/2 < \sigma_0 < 1$. Para el límite superior, la idea es aplicar el Lema de Landau a

$$f(x) = -\pi(x) + \mathrm{Li}(x) + \frac{\ell x^{\sigma_0}}{\log x} = \frac{x^{\sigma_0}}{\log x}\left(\ell - \frac{\pi(x)-\mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x}\right),$$

donde ℓ es mayor que el límite superior del enunciado si este es finito (si es infinito no hay nada que probar), pues $f(x)/x$ es acotada y positiva a partir de cierto punto. Para ello, vamos a estudiar cada una de las componentes por separado.

En primer lugar, para $g(x) = -\pi(x)$, vemos que $L_g(s) + s^{-1}\log\zeta(s)$ tiene una extensión holomorfa a $\Re(s) > 1/2$. Podemos comprobar que para $\Re(s) > 1$ la transformada L_g está bien definida y, recordando el Teorema 3.13, en esta región

$$L_g(s) + s^{-1}\log\zeta(s) = -\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}(x^s-1)}\,\mathrm{d}x,$$

y como $\pi(x)/x$ está acotado, la integral converge absolutamente para $\Re(s) > 1/2$ y define una función holomorfa para esta región.

En segundo lugar, si consideramos $h_\sigma(x) = x^\sigma/\log x$ donde $\sigma \le 1$, vemos que $L_{h_\sigma}(s) + \log(s-\sigma)$ está bien definida para $\Re(s) > \sigma$ y define una función holomorfa. Además, con el Teorema de la convergencia dominada llegamos a que su derivada es

$$L'_{h_\sigma}(s) + \frac{1}{s-\sigma} = \int_2^\infty \frac{-\log x}{x^{s-\sigma+1}\log x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{s-\sigma} = \frac{-2^{\sigma-s}+1}{s-\sigma},$$

que se extiende a una función entera, y como $\mathbb{C}$ es convexo, la primitiva de esta función entera, $L_{h_\sigma}(s) + \log(s-\sigma)$, también se extiende a una función entera.

Por último, consideramos $h(x) = \mathrm{Li}(x)$. Para $\Re(s) > 1$, integrando por partes,

$$sL_h(s) = s\int_2^\infty x^{-s-1}\mathrm{Li}(x)\,\mathrm{d}x = -x^{-s}\mathrm{Li}(x)\Big|_{x=2}^{\infty} + \int_2^\infty \frac{x}{x^{s+1}\log x}\,\mathrm{d}x = L_{h_1}(s),$$

de modo que $sL_h(s) + \log(s-1) = L_{h_1}(s) + \log(s-1)$ es entera.

Uniendo estos tres resultados, tenemos una extensión holomorfa a $\Re(s) > 1/2$ de

$$L(s) = L_f(s) + s^{-1}\log\big((s-1)\zeta(s)\big) + \ell\log(s-\sigma_0),$$

y, en particular, tenemos una extensión a un entorno de $\Re(s) \ge \sigma_0$. Además, L_f se extiende a una función holomorfa en $\Re(s) > \sigma_0$ y, por el Lema de Landau, la extensión sigue dada por la transformada integral.

Ahora, dada una constante C tal que $g(x) = f(x) + C \ge 0$ en $[2,\infty)$, metiendo el módulo dentro de la integral obtenemos que $L_g(s)/|L_g(s+it_0)| \ge 1$ para $s > \sigma_0$.

Llamando $R(s) = L(s) + C2^{-s}/s$, vemos que R sigue siendo holomorfa en $\Re(s) > 1/2$, por lo que está acotada en entornos de σ_0 y ρ_0, y $L_g(s) = R(s) - s^{-1}\log\big((s-1)\zeta(s)\big) - \ell\log(s-\sigma_0)$. De esta manera, atendiendo a los elementos que divergen, tenemos que

$$1 \leq \lim_{s\to\sigma_0^+} \frac{L_g(s)}{|L_g(s+it_0)|} = \lim_{s\to\sigma_0^+} \frac{-\ell\log(s-\sigma_0)}{|(s+it_o)^{-1}\log\zeta(s+it_0)|} = \left|\lim_{s\to\sigma_0^+} \frac{\log(s-\sigma_0)}{\log\zeta(s+it_0)}\right|\ell|\rho_0|.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{s\to\sigma_0^+} \frac{\log(s-\sigma_0)}{\log\zeta(s+it_0)} = \left(\lim_{s\to\sigma_0^+} (s-\sigma_0)\frac{\zeta'(s+it_0)}{\zeta(s+it_0)}\right)^{-1} = m^{-1},$$

donde $m \geq 1$ es la multiplicidad del cero. De este modo, llegamos a que

$$\frac{1}{|\rho_0|} \leq \frac{m}{|\rho_0|} \leq \frac{m}{|\rho_0|}\lim_{s\to\sigma_0^+} \frac{L_g(s)}{|L_g(s+it_0)|} = \ell.$$

Así, como podemos tomar ℓ arbitrariamente cerca del límite superior, necesariamente

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x} \geq \frac{1}{|\rho_0|}.$$

La prueba para el límite inferior es idéntica: considerando ℓ menor que este y

$$-f(x) = \frac{x^{\sigma_0}}{\log x}\left(\frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x} - \ell\right),$$

que también cumple las hipótesis del Lema de Landau, comprobamos que $\ell \leq -1/|\rho_0|$, y tomando ℓ arbitrariamente cerca del límite inferior, llegamos a

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x} \leq -\frac{1}{|\rho_0|}.$$

Para finalizar, si el supremo no es máximo, podemos tomar un cero $\rho_0' = \sigma_0' + it_0'$ con $1/2 < \sigma_0' < \sigma_0$ y notamos que, por la Proposición 5.1, el cero no está en $(\sigma_0', 1)$. Suponiendo que existe un ℓ mayor que el límite superior, notamos que L_f (con σ_0' en lugar de σ_0 en la definición de f) todavía se extiende a una función holomorfa en un entorno de $(\sigma_0', 1]$, por lo que por el Lema de Landau se extiende a $\Re(s) > \sigma_0'$. Sin embargo, esto lleva a una contradicción, pues L y L_f son holomorfas en $\Re(s) > \sigma_0'$ pero $L(s) - L_f(s) = s^{-1}\log\big((s-1)\zeta(s)\big) + \ell\log(s-\sigma_0')$ tiene infinitos polos en $\sigma_0' < \Re(s) < \sigma_0$, por lo que no puede ser holomorfa. Por tanto, no puede existir un ℓ mayor que el límite superior. El caso para el límite inferior es análogo. □

De forma colateral, este teorema demuestra que hay infinitos cambios de signo de $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ si $\sigma_0 \neq 1/2$.

Apéndice

En este apéndice, nos apoyaremos en la teoría desarrollada a lo largo del primer capítulo para establecer dos resultados básicos sobre la función $(s-1)\zeta(s)$, a la que apelamos en los siguientes capítulos, y para dar con expresiones sencillas para determinados valores de ζ. Destaca por su valor histórico el problema de Basilea o la relación de nuestra función con la constante de Euler-Mascheroni γ, aunque no nos reduciremos solo a ellos.

Definición A.1. La *constante de Euler-Mascheroni* se define como

$$\gamma := \lim_{N\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log(N+1)\Big).$$

Este límite existe y es finito, como demuestra la siguiente observación: dado que

$$0 \le \frac{1}{n}-\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$$

y que $\zeta(2)<\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$ converge por comparación. Descomponiendo las sumas parciales en una suma armónica y una parte logarítmica, como la parte logarítmica es telescópica obtenemos que el valor de la serie es precisamente γ.

Proposición A.2. *La función $F(s)=(s-1)\zeta(s)$ admite una extensión holomorfa en un entorno de $s=1$, que cumple $F(1)=1$ y $F'(1)=\gamma$.*

Demostración. Para $\Re(s)>0$ usamos la ecuación (1.2) y vemos que

$$F(s) = s-\frac{s-1}{2}-s(s-1)\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x,$$

de modo que claramente $\lim_{s\to1}F(s)=1$ y al definir $F(1):=1$ se obtiene una función holomorfa.

Ahora, tomando la derivada por definición y usando (1.2), vemos que la convergencia de la integral en $\Re(s)>0$ permite meter el límite dentro:

$$F'(1)=\lim_{s\to1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{2}-\lim_{s\to1}\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Por otro lado,

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\left(\log(N)-\sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2N}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\gamma,$$

de modo que $F'(1)=\gamma$, tal y como buscábamos. □

Esto nos revela los primeros términos del desarrollo de Laurent de la función zeta: $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\cdots$. Pasando al problema de Basilea y sus generalizaciones, tenemos el siguiente resultado.

Proposición A.3. *Se cumple que* $\zeta(0)=-1/2$, $\zeta(2)=\pi^2/6$ *y* $\zeta(4)=\pi^4/90$.

Demostración. Usando (1.3) vemos que

$$\zeta(0)=\frac{1}{0-1}+\frac{1}{2}-0\int_1^\infty g(x)x^{-2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

Para $\zeta(2)$ evaluamos en $x=0$ la expresión de g en serie de cosenos dada en (1.6):

$$0=g(0)=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(0)}{n^2}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2\pi^2}\zeta(2).$$

Despejando, $\zeta(2)=\pi^2/6$.

Por último, para $\zeta(4)$ recurrimos a la identidad de Parseval y a (1.6), que nos aseguran que

$$\frac{1}{120}=\int_0^1|g(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(n)|^2=\frac{1}{144}+\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}\frac{1}{16\pi^4n^4}=\frac{1}{144}+\frac{1}{8\pi^4}\zeta(4).$$

Nuevamente, despejamos para obtener $\zeta(4)=\pi^4/90$. □

Bibliografía

[1] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. Variable Compleja II. https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf, Curso 2018/2019.

[2] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by H. L. Montgomery.

[3] J. Dutka. The early history of the factorial function. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 43(3):225–249, 1991.

[4] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[5] W. J. Ellison. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec M. Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[6] P. Erdős. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Nat. Acad. Scis. U.S.A.*, 35 (1949), 374–384.

[7] D. Goldfeld. The Elementary proof of the Prime Number Theorem, An Historical Perspective. Selected Publications of Dorian Goldfeld, https://www.math.columbia.edu/~goldfeld/ErdosSelbergDispute.pdf, 2003.

[8] A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.

[9] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[10] A. M. Legendre. *Essai sur la théorie des nombres, seconde édition*. Courcier, Paris, 1808.

[11] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[12] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[13] J. Pintz. On Legendre's Prime Number Formula. *The American Mathematical Monthly*, 87(9), 733–735, 1980.

[14] L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. *Math. Comp.*, 30(134):337–360, 1976.

[15] A. Selberg. An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem. *Annals of Mathematics*, 87(9), 50(2), 305–313, 1949.

[16] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[17] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.