



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Sumas e integrales oscilatorias

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Belén San Martín López

Tutor: Fernando Chamizo y Eva Tourís

Curso 2024-2025

Resumen

El tema de este trabajo es la estimación de sumas e integrales oscilatorias. Un primer capítulo introductorio contiene notaciones básicas y los lemas de van der Corput que muestran que variaciones de la fase inducen cancelación en una integral oscilatoria. Mucho más preciso, pero bajo hipótesis más restrictivas, es el principio de fase estacionaria estudiado en el segundo capítulo que produce una estimación asintótica de algunas integrales oscilatorias. Sus múltiples aplicaciones en física y matemáticas se ilustran aquí aproximando las funciones de Bessel y la solución de cierta ecuación diferencial. En principio, la estimación de sumas oscilatorias es un tema bien distinto, pues la aritmética de las frecuencias puede condicionar que haya cancelación o no. Sin embargo, como se muestra en el tercer capítulo, es posible desarrollar una teoría basada en integrales oscilatorias partiendo de una versión de la fórmula de Euler–Maclaurin. Los dos últimos capítulos son en cierta medida aplicaciones de los resultados obtenidos. En el cuarto se explica un fenómeno bastante curioso consistente en que al representar en el plano complejo las sumas parciales de algunas sumas oscilatorias, aparecen patrones inesperados. En el quinto capítulo se discuten dos aplicaciones relacionadas con temas de teoría analítica de números. La primera es una acotación para las sumas oscilatorias que aproximan la función zeta de Riemann y la segunda es un resultado acerca del problema del círculo de Gauss, consistente en acotar el error cuando se aproxima el número de puntos de coordenadas en un círculo grande por su área.

Abstract

The subject of this work is the estimation of oscillatory sums and integrals. The first, introductory chapter sets out basic notation and the van der Corput lemmas, which show how variations in the phase induce cancellation in an oscillatory integral. Much more precise, though under more restrictive hypotheses, is the stationary phase principle studied in the second chapter, which yields an asymptotic estimate for certain oscillatory integrals. Its many applications in physics and mathematics are illustrated here by approximating Bessel functions and the solution of a particular differential equation. At first sight, the estimation of oscillatory sums is an entirely different topic, since the arithmetic of the frequencies can determine whether cancellation occurs or not. However, as shown in the third chapter, one can develop a theory based on oscillatory integrals by starting from a version of the Euler–Maclaurin formula. The last two chapters are, to some extent, applications of the results obtained. Chapter 4 explains a rather curious phenomenon: when one plots in the complex plane the partial sums of certain oscillatory series, unexpected patterns emerge. In chapter 5, two applications related to analytic number theory are discussed. The first is a bound for the oscillatory sums that approximate the Riemann zeta function, and the second concerns Gauss’s circle problem, namely bounding the error when approximating the number of integer-coordinate points in a large circle by its area.

Índice general

1	Estimaciones básicas	1
2	El principio de la fase estacionaria	7
3	El método de Van der Corput	16
4	Algunos aspectos geométricos	23
5	Dos aplicaciones relacionadas con la aritmética	29
	Bibliografía	36

CAPÍTULO 1

Estimaciones básicas

En esta primera sección introduciremos algo de notación y daremos los primeros resultados sobre la acotación de integrales oscilatorias.

A lo largo del trabajo, usaremos la abreviatura $e(x)$ para indicar $e^{2\pi i x}$. Otra notación a destacar, es la *O de Landau*. Escribimos $f = O(g)$ para indicar que

$$\limsup \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Esto equivale a $|f| < K|g|$ para alguna constante K en la región que estamos considerando. Existen otras dos notaciones en este contexto, que son $f = o(g)$ y $f \sim g$, y significan, respectivamente,

$$\lim \frac{f}{g} = 0 \quad \text{y} \quad \lim \frac{f}{g} = 1.$$

Es importante notar que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$, aunque la implicación inversa no es cierta. A menudo, estas expresiones se presentan como términos en una suma. Por ejemplo, $1 + O(x)$ significa $1 + f$ con $f = O(x)$. De esta manera, $f \sim g$ puede expresarse como $f = g + o(g)$.

Consideraremos dos de los objetos fundamentales del análisis de Fourier. Sean

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x) dx \quad \text{y} \quad c_n(f) = \int_0^1 f(x) e(-nx) dx$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.1. *Fijado $k \in \mathbb{Z}^+$, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-k})$ y si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ es 1-periódica, entonces $c_n(f) = O(|n|^{-k})$.*

Demostración. En primer lugar, como $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, es diferenciable con soporte compacto, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x) dx = \frac{-f(x)}{2\pi i \xi} e(-\xi x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i \xi} f'(x) e(-\xi x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e(-\xi x) dx. \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso reiteradamente, llegamos a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i \xi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e(-\xi x) dx.$$

Como $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, sus derivadas también están acotadas y tienen soporte compacto, luego esta última integral, es finita para todo ξ . Por tanto, $\widehat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-k})$ como queríamos.

Por otro lado, podemos expandir f en una serie de Fourier, cuyos coeficientes están dados por

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x) e(-nx) dx.$$

Sabemos que $f(x)$ es suave y periódica, por lo que podemos derivar tantas veces como queramos, y las derivadas también serán periódicas y acotadas en el intervalo $[0, 1]$.

Análogamente, integrando por partes la expresión para los coeficientes de Fourier y repitiendo el proceso k veces, se tiene que

$$c_n(f) = \frac{1}{(2\pi i n)^k} \int_0^1 f^{(k)}(x) e(-nx) dx.$$

Como $f^{(k)}$ es derivable y periódica, la integral está acotada por una constante que no depende de n y por tanto, $c_n(f) = O(|n|^{-k})$ como queríamos. \square

Esto es similar si tomamos una f de decaimiento rápido.

En estimaciones dependientes de un parámetro, como las anteriores, suele escribirse O_k para señalar que no es posible asegurar $|\widehat{f}(\xi)| \leq K|\xi|^{-k}$ para $|\xi|$ grande de forma uniforme en k , sino que K o el rango donde se encuentra ξ dependerán de k .

Pasemos ahora a algunos resultados más generales sobre integrales oscilatorias.

Lema 1.1 (Primer lema de van der Corput). *Si $f \in C^2$ con f' monótona en el intervalo $[a, b]$ y cumple $|f'| \geq D_1 > 0$ en dicho intervalo, entonces se tiene que*

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \frac{2}{\pi D_1}.$$

Demostración. Como $f'(x)$ no se anula en $[a, b]$, podemos reescribir

$$e(f(x)) = \frac{1}{2\pi i f'(x)} \frac{d}{dx} e(f(x)),$$

definiendo $g(x) = \frac{1}{f'(x)}$ e integrando por partes, nos queda

$$\begin{aligned} \int_a^b e(f(x)) dx &= \int_a^b \frac{1}{2\pi i f'(x)} \frac{d}{dx} e(f(x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} (g(b)e(f(b)) - g(a)e(f(a))) - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b e(f(x))g'(x) dx. \end{aligned}$$

Sabemos que f' es monótona (creciente o decreciente), por tanto $g(x)$ también lo es y además, se tiene que para cualquier x , $|e(f(x))| = 1$. Tomando módulos a ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| &= \frac{1}{2\pi} |(g(b)e(f(b)) - g(a)e(f(a))) - \int_a^b e(f(x))g'(x) dx| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (|g(b)| + |g(a)|) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b |g'(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(b)|} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b |g'(x)| dx. \end{aligned}$$

Por ser g monótona, $\int_a^b g'(x) dx \leq g(b) - g(a)$, luego, $\int_a^b |g'(x)| dx \leq \left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(b)|} \right)$ entonces,

$$(1.1) \quad \left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(b)|} \right).$$

y como $|f'| \geq D_1 > 0$ en $[a, b]$, obtenemos la desigualdad que queríamos. \square

Una situación común en la que surge este problema es cuando la segunda derivada no se anula, en cuyo caso resulta útil el siguiente resultado.

Lema 1.2 (Segundo lema de van der Corput). *Si $f \in C^2$ y $|f''| \geq D_2 > 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces se cumple que*

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi D_2}}.$$

Demostración. Supongamos primero que f' se anula en cierto $x_0 \in [a, b]$ y sea $J = (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a, b]$ con $r = \left(\frac{\pi D_2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, tal que $\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq \left| \int_J e(f(x)) dx \right| + \left| \int_{[a, b] - J} e(f(x)) dx \right|$.

Por el teorema del valor medio, para cualquier $t \in [a, b]$, existe $\xi \in (x_0, t)$ tal que $f'(t) = f''(\xi)(t - x_0)$. Dado que $|f''(x)| \geq D_2 > 0$, para todo $x \in [a, b]$, entonces $|f'(t)| \geq D_2|t - x_0|$. Por tanto, si $|f'(t)| < \frac{2}{\pi}r^{-1}$, obtenemos $|t - x_0| < r$ lo que implica $t \in J$.

De otra manera, si $t \notin J$ entonces $|f'(t)| \geq \frac{2}{\pi}r^{-1}$, y por (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a, b] - J} e(f(x)) dx \right| &= \left| \int_{[a, c] \cup [d, b]} e(f(x)) dx \right| \leq \left| \int_a^c e(f(x)) dx \right| + \left| \int_d^b e(f(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{|f'(c)|} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{|f'(d)|} + \frac{1}{|f'(b)|} \right) \leq \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{2r^{-1}} + \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{2r^{-1}} = 2r. \end{aligned}$$

Ya que $\left| \int_J e(f(x)) dx \right| \leq |J| \leq 2r$, juntando ambas, obtenemos

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| \leq 2r + 2r = 4r = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi D_2}}.$$

Observamos que, incluso si la derivada no se anula en $[a, b]$, los puntos $t \in [a, b]$ tales que $|f'(t)| < \frac{2}{\pi} r^{-1}$ se encuentran dentro de un intervalo de longitud a lo sumo $2r$.

Si f' no se anula, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f' > 0$ ya que

$$\left| \int_a^b e(f(x)) dx \right| = \left| \int_a^b e(-f(x)) dx \right|.$$

Si f' es creciente, se tiene que $\frac{2}{\pi r} > f'(t) > f'(t) - f'(a) \geq (t-a)D_2$. Despejando y sustituyendo $D_2 = \frac{2r^{-2}}{\pi}$, nos queda $t < a + r$.

Si f' es decreciente, entonces $\frac{2}{\pi r} > f'(t) > f'(t) - f'(b) = |f'(t) - f'(b)| \geq (b-t)D_2$. Análogamente, obtenemos, $t > b - r$.

Por tanto, o bien $t \in [a, a+r)$ o bien $t \in (b-r, b]$, que tienen longitudes menores que $2r$ y la prueba anterior es válida en general. \square

Estos resultados se extienden a $\int_a^b g(x) e(f(x)) dx$ con $g \in C^1$ al introducir un factor

$$G = |g(b)| + \int_a^b |g'(t)| dt.$$

Si g es monótona, entonces $G \leq 3 \max |g|$. Esencialmente, G cuantifica tanto el tamaño como el número de extremos locales.

Proposición 1.2. *Bajo las hipótesis del primer Lema de van der Corput (Lema 1.1), se tiene que*

$$\left| \int_a^b g(x) e(f(x)) dx \right| \leq \frac{2G}{\pi D_1}.$$

Mientras que, bajo las hipótesis del segundo Lema de Van der Corput (Lema 1.2), se verifica

$$\left| \int_a^b g(x) e(f(x)) dx \right| \leq \frac{4\sqrt{2}G}{\sqrt{\pi D_2}}.$$

Demostración. Definiendo $u(x) = g(x)$ y $v(x) = \int_a^x e(f(t)) dt$, integrando por partes y sustituyendo, nos queda

$$\left| \int_a^b g(x) e(f(x)) dx \right| = \left| \int_a^b u dv \right| \leq |u(b)||v(b)| + \int_a^b |u'(x)||v(x)| dx.$$

Si estamos bajo las hipótesis del Lema 1.1, entonces $|v(x)| \leq \frac{2}{\pi D_1}$ para todo $x \in [a, b]$ y

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x)) dx \right| \leq \frac{2}{\pi D_1} \left(|g(b)| + \int_a^b |g'(x)| dx \right) \leq \frac{2G}{\pi D_1}.$$

Similarmente, bajo las hipótesis del Lema 1.2, tenemos que $|v(x)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi D_2}}$ para todo $x \in [a, b]$ y

$$\left| \int_a^b g(x)e(f(x)) dx \right| \leq \frac{4\sqrt{2}G}{\sqrt{\pi D_2}}. \quad \square$$

Como aplicación de lo que hemos estudiado, vamos a obtener una aproximación de la *integral de Fresnel*, que es la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x e(t^2) dt.$$

Proposición 1.3. Para $x \rightarrow +\infty$, se tiene que $F(x) = \frac{1+i}{4} + \frac{e(x^2)}{4\pi ix} + O(x^{-3})$.

Demostración. La función $e(t^2)$ es una función compleja oscilatoria que tiene una fase cuadrática en t^2 . Cuando tenemos una integral de una función oscilatoria como $e(t^2)$, en intervalos grandes, la integral se debe acercar a cero debido a las cancelaciones de la oscilación.

Para ver que el $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ existe, demostraremos que $\int_X^Y e(t^2) dt \rightarrow 0$ cuando $X, Y \rightarrow \infty$. Esto es suficiente ya que implica que los cambios en $F(x)$ se vuelven arbitrariamente pequeños con valores grandes de x .

Por la ecuación (1.1) vista anteriormente, nos queda

$$0 \leq \left| \int_X^Y e(t^2) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2X} + \frac{1}{2Y} \right)$$

que tiende a cero cuando $X, Y \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el límite existe y es finito.

Por otra parte, tomando γ_x como el segmento real desde 0 hasta x , entonces

$$F(x) = \int_{\gamma_x} e(z^2) dz.$$

Definimos ahora un segundo camino γ_x^* como una rotación de γ_x en el plano complejo por un ángulo de $\pi/4$. Este camino γ_x^* va desde 0 hasta $xe^{i\pi/4}$. Para analizar el comportamiento de $F(x)$, consideramos el contorno cerrado $\gamma_x \cup C \cup \gamma_x^*$, donde C es el arco de circunferencia que conecta los puntos x y $xe^{i\pi/4}$ en el plano complejo. Por el Teorema de Cauchy, tenemos que la integral de $e(z^2)$ a lo largo de este contorno cerrado es cero, por tanto

$$F(x) = \int_{\gamma_x} e(z^2) dz = \int_{\gamma_x^*} e(z^2) dz - \int_C e(z^2) dz.$$

Parametrizamos el arco C usando $z = xe^{i\alpha}$ donde se cumple que $\sin(2\alpha) \geq \frac{4}{\pi}\alpha$, lo que implica que $|e(z^2)| = e^{-2\pi x^2 \sin(2\alpha)} \leq e^{-8x^2\alpha}$ y por tanto

$$\left| \int_C e(z^2) dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e(x^2 e^{2i\alpha}) i x e^{i\alpha} d\alpha \right| \leq \int_0^{\pi/4} x e^{-8x^2\alpha} d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Parametrizaremos ahora el camino γ_x^* tomando $z = te^{i\pi/4}$ con $t \in [0, x]$, y considerando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces

$$\int_{\gamma_x^*} e(z^2) dz = \int_0^x e(t^2 i) e^{i\pi/4} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^x e^{-2\pi t^2} dt \rightarrow \frac{1+i}{4} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Por tanto $F(\infty) = \int_0^{\infty} e(t^2) dt = \frac{1+i}{4}$ y se tiene que

$$F(x) = \int_0^x e(t^2) dt = \int_0^{\infty} e(t^2) dt - \int_x^{\infty} e(t^2) dt = \frac{1+i}{4} - \int_x^{\infty} e(t^2) dt.$$

Integrando por partes la última integral, obtenemos

$$4\pi i \int_x^{\infty} e(t^2) dt = -x^{-1} e(x^2) + \int_x^{\infty} t^{-2} e(t^2) dt.$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \frac{1+i}{4} + \frac{e(x^2)}{4\pi i x} - \int_x^{\infty} t^{-2} e(t^2) dt = \frac{1+i}{4} + \frac{e(x^2)}{4\pi i x} + O(x^{-3}). \quad \square$$

Esta fórmula asintótica obtenida, muestra que a medida que t aumenta, $F(t)$ se aproxima a un valor constante, $\frac{1+i}{4}$ ya que $\frac{e(t^2)}{t}$ y $O(t^{-3})$ decrecen rápidamente a medida que t crece. Por lo tanto, las oscilaciones tienen menos amplitud.

CAPÍTULO 2

El principio de la fase estacionaria

En este capítulo, nuestro objetivo es estimar integrales oscilatorias de la forma

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(\lambda f(t)) dt \quad \text{cuando } \lambda > 0 \text{ es grande.}$$

Asumiremos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $a \in C_0(\mathbb{R})$ o $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ denota el espacio de funciones de decrecimiento rápido. Estas funciones, junto con sus derivadas, satisfacen que son $\mathcal{O}(x^{-k})$ para todo $k > 0$.

Si f es una función lineal, la integral $I(\lambda)$ se relaciona directamente con la transformada de Fourier, que se mencionó en el capítulo anterior. En particular, para $f(t) = -t$, se tiene que $I(\lambda) = \hat{a}(\lambda)$, que ya sabemos que decrece rápidamente. En este capítulo nos enfocaremos en el caso no lineal, donde f puede tener puntos críticos.

Antes de comenzar, recordaremos dos fórmulas básicas del análisis de Fourier llamadas *fórmula de inversión* e *identidad de Parseval*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e(-x\xi) d\xi \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}g = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\overline{f}}\widehat{g},$$

donde la barra denota el conjugado. La primera fórmula recupera f a partir de su transformada \widehat{f} , y es válida, en principio, para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sin embargo, con una interpretación adecuada de las integrales, estas fórmulas se extienden al espacio $L^2(\mathbb{R})$. A continuación, veremos que estas fórmulas también pueden aplicarse a ciertas funciones fuera de este espacio.

Teorema 2.1. Si $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $f(t) = t^2$ entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j!(8\pi)^j} (i\lambda^{-1})^j + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

Demostración. Para demostrar el Teorema vamos a comenzar aplicando la identidad de Parseval a las funciones $f(x) = e(-\lambda x^2)$ y $g(x) = a(x)$. Para ello, calcularemos la transformada de Fourier de $f(x)$ con $\lambda > 0$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e(-\lambda x^2) e(-\xi x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e(-\lambda x^2 - \xi x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e\left(-\left[\sqrt{\lambda}\left(x^2 + \frac{\xi}{2\lambda}\right)\right]^2\right) e\left(\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) dx.$$

Aplicando el cambio de variable $u = \sqrt{\lambda}\left(x + \frac{\xi}{2\lambda}\right)$ y que la integral de Fresnel $2G(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} e(x^2) dx = \frac{1+i}{2}$, nos queda

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e\left(\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e(-u^2) du = \frac{1-i}{2\sqrt{\lambda}} e\left(\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) \quad \text{y} \quad \overline{\widehat{f}}(\xi) = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} e\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right).$$

Por lo tanto,

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) e(\lambda x^2) dx = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) e\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) d\xi \quad \text{para cualquier } a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Para completar la prueba, usaremos el Teorema de Taylor para orden $2k-2$ en el origen de la función $e\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right)$. Sustituyendo en la integral, nos queda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) e\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-\pi i}{2\lambda}\right)^j \frac{\xi^{2j}}{j!} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) O\left(\frac{\xi^{2k}}{\lambda^k}\right) d\xi \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-\pi i}{2\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) \xi^{2j} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) O\left(\frac{\xi^{2k}}{\lambda^k}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Derivando sucesivamente en la fórmula de inversión y tomando $x = 0$, nos queda

$$a^{(2j)}(0) = (-2\pi i)^{2j} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2j} \widehat{a}(\xi) d\xi.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi) e\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\right) d\xi = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{-\pi i}{2\lambda}\right)^j \frac{1}{j!} \frac{a^{(2j)}(0)}{(-2\pi i)^{2j}} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{i\lambda^{-1}}{8\pi}\right)^j \frac{1}{j!} a^{(2j)}(0)$$

Y, sustituyendo, llegamos al resultado. □

Para poner en práctica el resultado obtenido, lo aplicaremos a una ecuación diferencial que no tiene solución expresable en términos de funciones elementales.

Lema 2.1. *La solución $y = y(x)$ de la ecuación ordinaria*

$$4y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{es} \quad y(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} \cos(xt^2) dt$$

con C una constante arbitraria. Además, si $y_1(x)$ es la solución correspondiente a $C = 1$, se tiene que

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O(x^{-\frac{5}{2}}) \quad \text{para } x > 0 \text{ grande.}$$

Demostración. Para probarlo, usaremos que

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} t^{4k} dt \quad \text{satisface} \quad 4I_{k+1} = (4k+1)I_k \quad \text{para} \quad k \geq 0.$$

Sustituyendo el desarrollo de Taylor de $\cos(x^2t)$, obtenemos:

$$y(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} \cos(xt^2) dt = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} t^{4k}}{(2k)!} dt = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} I_k.$$

Derivando dicho resultado,

$$y'(x) = C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} I_k \quad y \quad y''(x) = C \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k-2)!} I_k.$$

de donde se deduce que $y'(0) = 0$. Además, desplazando convenientemente el índice k y usando la relación de recurrencia se tiene que

$$4y''(x) = 4C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!} k I_k + C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!} I_k.$$

$$2xy'(x) = -4C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!} k I_k.$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos que $4y'' + 2xy' + y = 0$ como queríamos.

Por otro lado, tomando $a(t) = e^{-t^4}$ en el Teorema 2.1 y teniendo en cuenta que y_1 es una función real, nos quedará

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O(x^{-\frac{5}{2}}). \quad \square$$

El Teorema 2.1 establece que, para $f(x) = x^2$, el comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ depende únicamente de lo que ocurre en las proximidades del origen. A continuación, veremos un enunciado bastante general, aunque para $f(t) = t^2$ se reduce a una versión algo imprecisa del Teorema 2.1.

Teorema 2.2 (Principio de fase estacionaria). *Sean $f \in C^\infty(I)$ con I un intervalo abierto y $a \in C_0^\infty$ con soporte incluido en I . Si f tiene un conjunto finito \mathcal{C} de puntos críticos en I y son todos no degenerados, entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$*

$$I(\lambda) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{(1 + s_c i) e(\lambda f(c))}{\sqrt{2\lambda s_c f''(c)}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c) \lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

donde $s_c \in \{1, -1\}$ es el signo de $f''(c)$ y los $a_j(c)$ son expresiones que dependen de las derivadas de a y f en c con $a_0(c) = a(c)$.

Aunque f solo esté definida en I , como el soporte de a está contenido en I , tiene sentido escribir $\int_{-\infty}^{\infty} a(t)e(\lambda f(t)) dt$. Esto implica un pequeño abuso de notación, ya que la forma en que se define f fuera de I no afecta el valor de la integral. Por otro lado, las series de Fourier sugieren la necesidad de una versión del principio de fase estacionaria para funciones 1-periódicas, integradas a lo largo de un período, por ejemplo, en el intervalo $[0, 1]$.

Teorema 2.3. *Sean $a, f \in C^\infty(\mathbb{R})$ funciones 1-periódicas y supongamos que el conjunto \mathcal{C} de puntos críticos de f en $[0, 1]$ es finito, son todos no degenerados y $0, 1 \notin \mathcal{C}$, entonces $\int_0^1 a(t)e(\lambda f(t)) dt$ admite la misma fórmula que $I(\lambda)$ en el resultado anterior.*

Es de notar, que la condición $0, 1 \notin \mathcal{C}$ no tiene mayor importancia, sino se cumpliera, consideramos la integral en $[\epsilon, 1 + \epsilon]$, que tiene el mismo valor para la periodicidad.

Como aplicación del Teorema 2.3, estimaremos una de las familias de funciones especiales más relevantes en la física matemática, las funciones de Bessel de primera especie y con índice entero:

$$(2.1) \quad J_N(\lambda) = \int_0^1 e\left(\frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi t) - Nt\right) dt \quad \text{con } N \in \mathbb{Z}.$$

Son funciones reales ya que la parte imaginaria desaparece por cierta simetría en la integral.

La siguiente proposición muestra la aproximación clásica que dice que $\sqrt{\lambda}J_N(\lambda)$ a la larga se parece mucho a una función trigonométrica sencilla.

Proposición 2.1. *Si $J_N(\lambda)$, $N \in \mathbb{Z}$ denota las funciones de Bessel definidas en (2.1), entonces:*

$$J_N(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi N}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-3/2}) \quad \text{para } \lambda > 0 \text{ grande y } N \in \mathbb{Z} \text{ fijado.}$$

Demostración. Reescribiendo $e\left(\frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi t) - Nt\right) = e\left(\frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi t)\right) e(-Nt)$, aplicaremos el Teorema 2.3 a las funciones $a(t) = e(-Nt)$ y $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t)$. Obsérvese que el conjunto de puntos críticos no degenerados de f en $[0, 1]$ es $\mathcal{C} = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ y $0, 1 \notin \mathcal{C}$. Entonces

$$I(\lambda) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{(1 + s_c i) e(\lambda f(c))}{\sqrt{2\lambda s_c f''(c)}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c) \lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

Tomando $k = 1$ y teniendo en cuenta que $e(-3N/4) = e(N/4)$, nos queda:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{(1 - i)e(\frac{\lambda}{2\pi})}{2\sqrt{\lambda\pi}} e\left(-\frac{N}{4}\right) + \frac{(1 + i)e(-\frac{\lambda}{2\pi})}{2\sqrt{\lambda\pi}} e\left(-\frac{3N}{4}\right) + O(\lambda^{-3/2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda\pi}} e\left(-\frac{1}{8} + \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{N}{4}\right) + e\left(\frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{N}{4}\right) + O(\lambda^{-3/2}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4} - \frac{N\pi}{2}\right) + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$J_N(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4} - \frac{N\pi}{2}\right) + O(\lambda^{-3/2}).$$

□

Dicho resultado, nos da valores muy aproximados. El valor $J_0(2024)$ con ocho cifras significativas es 0,017727756 mientras que el término principal de la fórmula anterior, nos da 0,01772772495.

A continuación, nos dedicaremos a probar el Teorema 2.2 y el Teorema 2.3. Para ello, comenzaremos con algunas reducciones.

El primer caso trata el conjunto de puntos críticos \mathcal{C} vacío, en el que no hay contribuciones significativas al análisis asintótico, ya que la suma sobre \mathcal{C} es trivialmente nula.

Lema 2.2. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.2 con $\mathcal{C} = \emptyset$, entonces $I(\lambda) = O(\lambda^{-k})$ con $k > 0$.*

Demostración. Como $\mathcal{C} = \emptyset$, tenemos que $f' \neq 0$ en I y podemos realizar el cambio de variable $t = f^{-1}(x)$, entonces

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e(\lambda f(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} e(\lambda x) dx = \widehat{F}(-\lambda).$$

Y, por la Proposición 1.1, nos queda $I(\lambda) = O(\lambda^{-k})$, tal como se quería. \square

En el caso de funciones 1-periódicas, el razonamiento es análogo. Aunque la periodicidad introduce ciertas consideraciones adicionales, el principio subyacente se mantiene: la ausencia de puntos críticos implica que las contribuciones oscilatorias se cancelan de manera eficiente, y los términos restantes pueden ser tratados de manera similar mediante integración por partes, lo que da como resultado un decaimiento rápido.

Este enfoque no solo clarifica el razonamiento, sino que también destaca la importancia de los puntos críticos en el análisis de $I(\lambda)$. Sin puntos críticos, la oscilación domina y lleva a un comportamiento que recuerda al decaimiento de transformadas de Fourier de funciones suaves.

Una simplificación mucho más significativa consiste en observar que basta con demostrar el Teorema 2.2. Para comprobarlo, usaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Dado $c \in (0, 1)$ y $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < c < 1 - 2\epsilon$, consideraremos cualquier función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ que cumpla*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [c - \epsilon, c + \epsilon], \\ 0 & \text{si } x \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]. \end{cases}$$

Sea

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x - \lfloor x \rfloor) & \text{si } x \in [c, c + 1], \\ 1 & \text{si } x \notin [c, c + 1]. \end{cases}$$

Entonces $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y para cualquier $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ que sea 1-periódica se cumple

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - \psi(t)) dt.$$

Demostración. En primer lugar, veremos que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Para ello, observando que podemos expresar la función ψ de la siguiente manera

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [c, 1], \\ \varphi(x-1) & \text{si } x \in [1, c+1], \\ 1 & \text{si } x \notin [c, c+1]. \end{cases}$$

Como la función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, sus derivadas son continuas y cumple

$$\varphi(c) = 1, \quad \varphi(1) = \varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi^{(j)}(c) = \varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(1) = 0 \quad \text{para } j \geq 1,$$

por tanto, ψ hereda la suavidad de φ y está bien definida en toda \mathbb{R} , luego $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Por otro lado, reescribiendo la integral de la siguiente manera

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 F(t)\varphi(t) dt + \int_0^1 F(t)(1 - \varphi(t)) dt,$$

usando la definición de ψ en la segunda integral y que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ es 1-periódica, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t)(1 - \varphi(t)) dt &= \int_0^c F(t)(1 - \varphi(t)) dt + \int_c^1 F(t)(1 - \varphi(t)) dt \\ &= \int_0^c F(t)(1 - \psi(t+1)) dt + \int_c^1 F(t)(1 - \psi(t)) dt \\ &= \int_1^{c+1} F(t-1)(1 - \psi(t)) dt + \int_c^1 F(t)(1 - \psi(t)) dt \\ &= \int_c^{c+1} F(t)(1 - \psi(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - \psi(t)) dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo y aplicando que tanto φ como ψ tienen soporte compacto, nos queda

$$\int_0^1 F(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1 - \psi(t)) dt$$

como queríamos. □

Demostración del Teorema 2.3 a partir del Teorema 2.2. Sea $c \in \mathcal{C}$ y ϵ tal que $[c-2\epsilon, c+2\epsilon] \subset [0, 1]$ y $[c-2\epsilon, c+2\epsilon] \cap \mathcal{C} = \{c\}$, usando la Proposición 2.2 con $F(t) = a(t)e(\lambda f(t))$, nos queda:

$$\int_0^1 a(t)e(\lambda f(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\varphi(t)e(\lambda f(t)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)(1 - \psi(t))e(\lambda f(t)) dt.$$

Aplicando el Teorema 2.2 a ambas integrales, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\varphi(t)e(\lambda f(t)) dt &= \frac{(1 + s_c i)e(\lambda f(c))}{\sqrt{2\lambda s_c f''(c)}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c)\varphi(c)\lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}). \\ \int_{-\infty}^{\infty} a(t)(1 - \psi(t))e(\lambda f(t)) dt &= \sum_{c' \in \mathcal{C} \setminus \{c\}} \frac{(1 + s_{c'} i)e(\lambda f(c'))}{\sqrt{2\lambda s_{c'} f''(c')}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c')(1 - \psi(c'))\lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}). \end{aligned}$$

Usando que $\varphi(c) = \psi(c) = 1$ y $\varphi(c') = \psi(c') = 0$, para todo $c' \in \mathcal{C} \setminus c$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 a(t)e(\lambda f(t)) &= \sum_{c' \in \mathcal{C}} \frac{(1 + s_{c'}i)e(\lambda f(c'))}{\sqrt{2\lambda s_{c'}f''(c')}} \sum_{j=0}^{k-1} [a_j(c')\varphi(c') + a_j(c')(1 - \psi(c'))] \lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}) \\ &= \sum_{c' \in \mathcal{C}} \frac{(1 + s_{c'}i)e(\lambda f(c'))}{\sqrt{2\lambda s_{c'}f''(c')}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c') \lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}) = I(\lambda). \end{aligned} \quad \square$$

Antes de demostrar el Teorema 2.2 para el caso $\mathcal{C} \neq \emptyset$, veremos dos resultados que se utilizarán a lo largo de la prueba.

Lema 2.3 (Teorema de la función inversa). *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} . Si $f'(c) \neq 0$ para algún $c \in I$, entonces existe un intervalo abierto $J \subseteq I$ que contiene a c y un intervalo abierto $K \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(J) = K$ y $f : J \rightarrow K$ es biyectiva. Además, la función inversa $f^{-1} : K \rightarrow J$ es diferenciable y se cumple:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \forall y \in K.$$

Lema 2.4. *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ con un punto crítico en el origen y $f(0) = 0$, existen $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que la función*

$$x(t) = t \sqrt{\frac{2f(t)}{t^2 f''(0)}} \quad \text{si } 0 < |t| < \varepsilon \quad \text{y} \quad x(0) = 0,$$

establece una biyección $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (-\delta_1, \delta_2)$ con inversa $t = t(x)$ que es C^∞ y satisface $t(0) = 0$, $t'(0) = 1$.

Demostración. En primer lugar, calcularemos la derivada de $x(t)$ en $t = 0$. Usaremos la definición de derivada

$$x'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt{\frac{2f(t)}{t^2 f''(0)}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2f(t)}{t^2 f''(0)}}.$$

Para calcular este límite, expandimos $f(t)$ centrado en $t = 0$ usando la serie de Taylor, donde el término dominante es $\frac{1}{2}f''(0)t^2$. Sustituyendo, obtenemos

$$x'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}f''(0)t^2}{t^2 f''(0)}} = 1.$$

La función $x(t)$ cumple las condiciones del Lema 2.3, por lo tanto existen δ_1, δ_2 tal que $(-\delta_1, \delta_2)$ es un entorno abierto de 0, donde x es biyectiva y tiene una función inversa $t = t(x) = x^{-1}(t)$ que también es diferenciable y, además, $t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$, por tanto, $t'(0) = 1$ y $t(0) = 0$. \square

Demostración del Teorema 2.2. Comenzaremos probando que es suficiente considerar el caso en que $\mathcal{C} = \{0\}$ y que $f(0) = 0$.

Para probar que podemos suponer $\#\mathcal{C} = 1$ usaremos particiones de la unidad. Sea $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ el conjunto de puntos críticos no degenerados de f en el intervalo I . Por hipótesis, estos puntos son finitos y están dentro del soporte de a .

Sea U_i un recubrimiento de I tal que llamamos U_1, \dots, U_n a los que contienen a los puntos críticos c_1, \dots, c_n respectivamente con $c_j \notin U_i$, $j \neq i$. Elegimos $\{\phi_i\}$ partición de la unidad tal que $\phi_i \in C^\infty(U_i)$, $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in I$ y $\text{sop}(\phi_i) \subset (c_i - \epsilon, c_i + \epsilon)$. Entonces, reescribiendo $a(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)a(x)$ y sustituyendo en $I(\lambda)$, nos queda

$$I(\lambda) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\phi_i(t)e(\lambda f(t)) dt = \sum_{i=1}^n I_i(\lambda),$$

donde cada término de la suma tiene el soporte concentrado en un entorno único de U_i , donde c_i es el único punto crítico relevante. Por tanto, podemos escribir cada término como

$$I_i(\lambda) = \int_{U_i} a(t)\phi_i(t)e(\lambda f(t)) dt,$$

y el análisis local de $I_i(\lambda)$ depende únicamente de las propiedades de $f(t)$ cerca del punto c_i .

Finalmente, veamos las dos últimas simplificaciones,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e(\lambda f(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(u+c)e(\lambda f(c))e(\lambda(f(u+c)-f(c))) du \\ &= e(\lambda f(c)) \int_{-\infty}^{\infty} a(u+c)e(\lambda(f(u+c)-f(c))) du, \end{aligned}$$

tomando $h(u) = f(u+c) - f(c)$, vemos que 0 es punto crítico de h con $h(0) = 0$ y $h''(0) = f''(c) \neq 0$. Por todo esto, podemos asumir que $\mathcal{C} = \{0\}$ y $f(0) = 0$. Por lo que podemos aplicar el Lema 2.4 y, con el cambio de variable $t = t(x)$, obtenemos

$$(2.2) \quad I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t(x))t'(x)e\left(\frac{\lambda}{2}f''(0)x^2\right) dx,$$

donde el integrando se define como cero si $|t| \geq \epsilon$.

A continuación, aplicaremos el Teorema 2.1 a la integral (2.2) sustituyendo λ y $a(x)$ por $\frac{\lambda}{2}f''(0)$ y $a(t(x))t'(x)$, respectivamente. Para ello, vamos a diferenciar dos casos.

Si $f''(0) > 0$, nos queda

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1+i}{2\sqrt{\frac{1}{2}\lambda f''(0)}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j!(8\pi)^j} \left(i \frac{2\lambda^{-1}}{f''(0)}\right)^j + O(\lambda^{-k-1/2}) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda f''(0)}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j!(4\pi f''(0))^j} (i\lambda^{-1})^j + O(\lambda^{-k-1/2}). \end{aligned}$$

Tomando $a_j(0) = \frac{a^{(2j)}(0)i^j}{j!(4\pi f''(0))^j}$, con $a_0(0) = a(t(0))t'(0) = a(0)$ obtenemos

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda f''(0)}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(0)\lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

Para el caso $f''(0) < 0$, el Teorema 2.1 puede adaptarse considerando el comportamiento conjugado del integrando

$$I(-\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)e(-\lambda x^2) dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}(x)e(\lambda x^2) dx}.$$

Aplicando el Teorema 2.1 a esta última integral,

$$I(-\lambda) = \frac{1-i}{2\sqrt{\lambda}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j!(8\pi)^j} (-i\lambda^{-1})^j + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

□

CAPÍTULO 3

El método de Van der Corput

En los anteriores capítulos estudiamos cómo acotar o estimar integrales oscilatorias, mientras que en este, vamos a ver las sumas oscilatorias del tipo

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)).$$

Aunque de primeras parezca que estos temas no tienen mucho que ver, veremos que las integrales oscilatorias constituyen una herramienta fundamental para estimar sumas oscilatorias. El propio Van der Corput inició una teoría en ese sentido que en parte estará recogida en este capítulo.

En particular, probaremos los siguientes resultados:

Teorema 3.1. *Sea $f \in C^2([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, tal que f'' no se anula en $[a, b]$. Si $\alpha < f'(x) < \beta$ para $x \in [a, b]$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y $\beta - \alpha > 1$, entonces*

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = \sum_{n=\alpha}^{\beta} \int_a^b e(f(x) - nx) dx + O(\log(\beta - \alpha)).$$

En este y en los siguientes resultados, asumiremos de manera implícita que el intervalo $[a, b]$ es no trivial, lo que significa que $a < b$. Como veremos más adelante, aplicando el conocimiento sobre integrales oscilatorias, se puede concluir que si f'' es suficientemente pequeña, pero no demasiado, entonces siempre ocurre cancelación. En particular, el resultado establece lo siguiente:

Teorema 3.2. *Sea $f \in C^2([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y $0 < \lambda_2 < 1 < \mu$ tales que $\lambda_2 \leq |f''(x)| \leq \mu\lambda_2$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces se tiene*

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu(b-a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}).$$

En este caso, el uso de la notación O de Landau simplemente indica que el valor absoluto de la suma está acotado superiormente por una constante absoluta, cuyo valor exacto no calcularemos, multiplicada por la expresión dentro de la O . En realidad, la condición $0 < \lambda_2 < 1 < \mu$ no es estrictamente necesaria; basta con que $\lambda_2 \neq 0$, ya que $\lambda_2 > 0$, además, $\mu \geq 1$ se sigue de

$\lambda_2 \leq |f''(x)| \leq \mu\lambda_2$ y para $\lambda_2 \geq 1$, el resultado se vuelve trivial.

Incorporando una nueva idea, existe una generalización de este resultado que requiere controlar la derivada de orden k para algún $k \geq 2$. Sin embargo, nos centraremos únicamente en el caso $k = 3$, que refleja la esencia del método.

Teorema 3.3. Sea $f \in C^3([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y $0 < \lambda_3 < 1 < \mu$ tales que $\lambda_3 \leq |f'''(x)| \leq \mu\lambda_3$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces se tiene

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6} + (b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}).$$

A pesar de que, como hemos mencionado anteriormente, los resultados sobre sumas oscilatorias provienen de integrales oscilatorias, los primeros suelen tener más complicación técnica.

Para la prueba del Teorema 3.1 vamos a necesitar unos resultados previos. Comenzaremos con una identidad que permite expresar una suma como una integral.

Lema 3.1. Para $g \in C^1([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=a+1}^b g(n) = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b (x - \lfloor x \rfloor) g'(x) dx$$

donde $\lfloor x \rfloor$ indica la parte entera.

Demostración. Descompondremos la integral sobre cada subintervalo donde $\lfloor x \rfloor = n$ e, integrando por partes en dichos intervalos, se tiene que

$$\int_a^b (x - \lfloor x \rfloor) g'(x) dx = \sum_{n=a}^{b-1} \int_n^{n+1} (x - n) g'(x) dx = \sum_{n=a+1}^b g(n) - \int_a^b g(x) dx$$

y reorganizando obtenemos la integral buscada. \square

Lema 3.2. Bajo las condiciones del Teorema 3.1, para $n \notin [0, \beta - \alpha]$ e $I_n = \int_a^b (f'(x) - \alpha) e(f(x) - (\alpha + n)x) dx$, se tiene

$$\pi |I_n| \leq \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha - n|}.$$

Demostración. Reescribimos I_n de la siguiente forma:

$$I_n = \int_a^b \frac{f'(x) - \alpha}{f'(x) - (\alpha + n)} (f'(x) - (\alpha + n)) e(f(x) - (\alpha + n)x) dx.$$

Definimos $g(x) = \frac{f'(x) - \alpha}{f'(x) - (\alpha + n)}$ y usando integración por partes, nos queda

$$I_n = \frac{g(b)}{2\pi i} e(f(b) - (\alpha + n)b) - \frac{g(a)}{2\pi i} e(f(a) - (\alpha + n)a) - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b e(f(x) - (\alpha + n)x) g'(x) dx.$$

Como $g'(x) \neq 0$ para todo x en $[a, b]$, se tiene que es una función monótona en $[a, b]$, por tanto $\int_a^b |g'(x)| dx = |g(b) - g(a)|$. Además, $g(x)$ tiene signo constante en $[a, b]$ (según $n < 0$ o $n > \beta - \alpha$) por tanto, $|g(b) - g(a)| = ||g(b)| - |g(a)||$ y se tiene que

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left[|g(b)| + |g(a)| + \int_a^b |g'(x)| dx \right] = \frac{1}{\pi} \max\{|g(b)|, |g(a)|\}.$$

Obsérvese que la función $h(t) = \frac{t - \alpha}{|t - (\alpha + n)|}$ es una función creciente en $(\alpha, \beta]$, ya que es el valor absoluto de una función monótona que no se anula en $(\alpha, \beta]$, por tanto $\max\{|g(b)|, |g(a)|\} = \max\{h(f(b)), h(f(a))\} \leq h(\beta)$ y se tiene que

$$|I_n| \leq \frac{1}{\pi} \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha - n|}$$

como queríamos probar. □

Demostración del Teorema 3.1. Si aplicamos el Lema 3.1 a la función $g(x) = e(f(x) - \alpha x)$, teniendo en cuenta que $e(f(n)) = e(f(n) - \alpha n)$ y sustituyendo $x - \lfloor x \rfloor$ por su desarrollo en serie de Fourier, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e(nx)}{n}$, nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b e(f(n)) &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \int_a^b 2\pi i (x - \lfloor x \rfloor) (f'(x) - \alpha) e(f(x) - \alpha x) dx \\ &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \pi i \int_a^b (f'(x) - \alpha) e(f(x) - \alpha x) dx \\ &\quad - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_a^b \frac{e(nx)}{n} (f'(x) - \alpha) e(f(x) - \alpha x) dx \\ &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} \int_a^b (f'(x) - \alpha) e(f(x) - (\alpha - n)x) dx + O(1). \end{aligned}$$

Ahora, renombrando n como $-n$ y usando la expresión de I_n definida en el Lema 3.2, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b e(f(n)) &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_a^b \frac{1}{n} (f'(x) - \alpha) e(f(x) - (\alpha + n)x) dx + O(1) \\ &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} I_n + O(1) \\ &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n} I_n + \sum_{n=1}^{\beta-\alpha} \frac{1}{n} I_n + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n + O(1). \end{aligned}$$

A continuación, controlamos la siguiente expresión, para lo que aplicamos el Lema 3.2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{|n|} |I_n| + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{n} |I_n| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\beta-\alpha}{|n(\beta-\alpha-n)|} + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} \frac{\beta-\alpha}{|n(\beta-\alpha-n)|} \right) \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{\beta-\alpha}{n(\beta-\alpha-n)} + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} -\frac{\beta-\alpha}{n(\beta-\alpha-n)} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n-(\beta-\alpha)} - \frac{1}{n} + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{n-(\beta-\alpha)} - \frac{1}{n} \right).
\end{aligned}$$

Ambos sumatorios nos dan un comportamiento asintótico del orden $O(\log(\beta-\alpha))$, porque las sumas parciales de la serie armónica divergen logarítmicamente.

Obsérvese que, integrando por partes I_n , se tiene que $I_n = n \int_a^b e(f(x) - (\alpha+n)x) dx + O(1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^b e(f(n)) &= \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \sum_{n=1}^{\beta-\alpha} \left[\int_a^b e(f(x) - (\alpha+n)x) dx \right] + O(\log(\beta-\alpha)) \\
&= \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} \int_a^b e(f(x) - (\alpha+n)x) dx + O(\log(\beta-\alpha)) \\
&= \sum_{n=\alpha}^{\beta} \int_a^b e(f(x) - nx) dx + O(\log(\beta-\alpha)),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Demostración del Teorema 3.2. Con el fin de aplicar el Teorema 3.1, tomamos α y β números enteros, tales que

$$\beta \in (\max_{x \in [a,b]} \{f'(x)\}, \max_{x \in [a,b]} \{f'(x)\} + 1] \quad \text{y} \quad \alpha \in [\min_{x \in [a,b]} \{f'(x)\} - 1, \min_{x \in [a,b]} \{f'(x)\})$$

y, por el Teorema del Valor Medio a f' , se tiene que

$$\beta - \alpha \leq \max_{x \in [a,b]} \{f'(x)\} - \min_{x \in [a,b]} \{f'(x)\} + 2 \leq |f''(c)|(b-a) + 2 \leq \mu \lambda_2 (b-a) + 2.$$

Podemos aplicar ahora la descomposición de la suma oscilatoria $\sum_{n=a}^b e(f(n))$ dada en el Teorema 3.1, teniendo en cuenta que, por un lado, el término principal que depende de la suma de integrales oscilatorias, cuyas integrales pueden ser acotadas gracias al Segundo Lema de Van der Corput (Lema 1.2), tomando $g(x) = f(x) - nx$, entonces

$$\left| \int_a^b e(g(x)) dx \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \lambda_2}} = O(\lambda_2^{-1/2}) \quad \text{para} \quad |g''| \geq \lambda_2 > 0.$$

Por otro lado, el término de error $O(\log(\beta - \alpha))$ depende de la longitud efectiva de $\beta - \alpha$ que, gracias a las condiciones del Teorema 3.1, sabemos que es grande y, sustituyendo la cota vista anteriormente en el error, nos queda

$$O(\log(\beta - \alpha)) = O(\log(\mu\lambda_2(b - a) + 2)).$$

Juntando ambas partes,

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = \sum_{n=a}^{\beta} O(\lambda_2^{-1/2}) + O(\log(\beta - \alpha)) = O(\mu(b - a)\lambda_2^{1/2} + 2\lambda_2^{-1/2} + \log(\mu\lambda_2(b - a) + 2)).$$

Como $\lambda_2 < 1$ se tiene que $\log(\mu\lambda_2(b - a) + 2) \ll \mu(b - a)\lambda_2^{1/2} + 2\lambda_2^{-1/2}$, por lo tanto

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu(b - a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}). \quad \square$$

A continuación, nos dedicaremos a probar el Teorema 3.3. Para ello, necesitamos el siguiente resultado,

Lema 3.3. *Para cualquier número complejo $e(f(n))$ tenemos*

$$\left| \sum_{n=a}^b e(f(n)) \right|^2 \leq \left(1 + \frac{b-a}{Q} \right) \sum_{|q| < Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q} \right) \sum_{a \leq n, n+q \leq b} e(f(n+q) - f(n))$$

donde Q es cualquier integrando positivo.

Demostración. Vamos a considerar $S = \sum_{n=a}^b e(f(n))$. Fijando $e(f(n)) = 0$ si $n \notin (a, b)$, obtenemos:

$$(3.1) \quad S = \sum_{a < n < b} e(f(n)) = \sum_n e(f(n)) = \sum_n e(f(n+q))$$

para cualquier $q \in \mathbb{Z}$. Resumiendo esto sobre q con $0 \leq q < Q$, tenemos

$$QS = \sum_{a-Q+1 < n < b} \sum_{0 \leq q < Q} e(f(n+q)).$$

Tomando la desigualdad de Cauchy,

$$\begin{aligned} Q^2 S^2 &\leq (b - a + Q) \sum_n \left| \sum_{0 \leq q < Q} e(f(n+q)) \right|^2 = (b - a + Q) \sum_{0 \leq q_1, q_2 < Q} e(f(n+q_1) - f(n+q_2)) \\ &= (b - a + Q) \sum_{|q| < Q} (Q - |q|) \sum_n e(f(n+q) - f(n)) \end{aligned}$$

y, despejando, obtenemos lo que queríamos. \square

Demostración del Teorema 3.3. Tomando $Q = \lfloor \lambda_3^{-1/3} \rfloor$ en la desigualdad del Lema 3.3. La parte entera no es relevante para las estimaciones porque $\frac{1}{2}\lambda_3^{-1/3} \leq Q \leq \lambda_3^{-1/3}$ es bastante inmediato.

Además, vemos que si $\lambda_3^{-1/3} \geq b - a$, podemos elegir $Q = b - a$. En este caso, la desigualdad nos da una estimación trivial de $O(b - a)$ para S dada en (3.1), lo que significa que el resultado del Teorema 3.3 no aporta información nueva.

Por lo tanto, supondremos que $\lambda_3^{-1/3} < b - a$, de forma que $1 + \frac{b-a}{Q} = O(\lambda_3^{1/3}(b-a))$. Sustituyendo en la desigualdad del Lema 3.3, obtenemos:

$$|S|^2 = O \left(\lambda_3^{1/3}(b-a) \sum_{|q| \leq Q} \left| \sum_{a \leq n, n+q \leq b} e(f(n+q) - f(n)) \right| \right).$$

Si separamos la contribución del caso $q = 0$ y usamos la simetría $q \leftrightarrow -q$, nos lleva a la estimación:

$$(3.2) \quad |S|^2 = O \left(\lambda_3^{1/3}(b-a)^2 + \lambda_3^{1/3}(b-a) \sum_{q=1}^Q \left| \sum_{n, n+q \in [a, b]} e(f(n+q) - f(n)) \right| \right).$$

Gracias al Teorema del Valor Medio, $q\lambda_3 \leq |f''(x+q) - f''(x)| \leq \mu q\lambda_3$, y podemos aplicar el Teorema 3.2 para finalizar la demostración.

Por un lado, se tiene que $\sum_{n, n+q \in [a, b]} e(f(n+q) - f(n)) = O(\mu(b-a)q^{1/2}\lambda_3^{1/2} + q^{-1/2}\lambda_3^{-1/2})$, luego, $\sum_{q=1}^Q |O(\mu(b-a)q^{1/2}\lambda_3^{1/2} + q^{-1/2}\lambda_3^{-1/2})| = O(\mu(b-a) + \lambda_3^{-2/3})$.

Sustituyendo esto en la expresión (3.2) y operando, llegamos a

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6} + (b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}),$$

como queríamos. □

Para concluir este capítulo, vamos a experimentar con los teoremas dados considerando como ejemplo sumas oscilatorias del tipo

$$S_N = \sum_{n=N}^{2N} e\left(\frac{n^\delta}{N}\right)$$

con $\delta > 0$ fijado y N grande. La estimación trivial es $S_N = O(N)$ ya que $|S_N|$ es menor o igual que el número de términos en la suma.

Tomando el ejemplo $\delta = \frac{1}{2}$, y aplicando el Teorema 3.2 obtenemos los valores $\lambda_2 = \frac{N^{-5/2}}{4}$ y $\mu = 2^{-3/2}$ de forma que la cota nos queda

$$\sum_{n=N}^{2N} e\left(\frac{n^{1/2}}{N}\right) = O(N^{-1/4} + N^{5/4}).$$

Como $O(N^{5/4})$ es mayor que $O(N)$, el Teorema 3.2 no es útil en este caso. Análogamente $\delta = \frac{7}{2}$, nos queda el mismo resultado.

Calcularemos ahora el intervalo de valores de δ para los que el resultado es no trivial. Para ello acotando $|f''(x)|$ en $[N, 2N]$ podemos tomar $\lambda_2 = |\delta(\delta - 1)|N^{\delta-3}$ y $\mu = 2^{\delta-2}$, y el Teorema 3.2 nos da que

$$S_N = O(N^{(\delta-1)/2} + N^{(3-\delta)/2}),$$

además, el teorema nos proporciona una cota mejor si y sólo si $1 < \delta < 3$.

Sin embargo, con $\delta = \frac{7}{2}$, en el Teorema 3.3 obtenemos las constantes $\lambda_3 = \frac{105}{8}N^{-1/2}$ y $\mu = 2^{1/2}$, de forma que la cota nos queda $S_N = O(N^{11/12} + N^{7/12})$ y este valor sí es mejor que la estimación trivial $O(N)$.

Se deduce que el Teorema 3.2 no es eficaz cuando la gráfica de f presenta una curvatura muy baja o extremadamente alta. El segundo caso es intuitivo, ya que $f(n)$ puede tomar muchos valores enteros, lo que reduce la oscilación de $e(f(n))$. Sin embargo, en esta situación aún es posible obtener estimaciones útiles mediante el Teorema 3.3. Por otro lado, el primer caso es menos evidente, y en tales circunstancias la aplicación directa del Teorema 3.1 puede proporcionar mejores cotas.

El caso particular $\delta = 1$ es singular, ya que el Teorema 3.2 no se puede emplear debido a que $f'' = 0$. No obstante, al analizar la suma de una progresión geométrica, se obtiene que $S_N = 1$, lo que implica que $S_N = O(1)$. Vamos a obtener el resultado óptimo a partir del Teorema 3.1, podemos aplicar dicho teorema gracias a que en su demostración, en realidad no se ha empleado $f'' \neq 0$, sólo la monotonía de f' . Tomando $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, determinamos el intervalo en el que está acotada f' y el teorema da que

$$S_N = \sum_{n=0}^2 \int_N^{2N} e\left(\frac{x}{N} - nx\right) dx + O(\log(2)) = O(1).$$

CAPÍTULO 4

Algunos aspectos geométricos

Para este capítulo, consideraremos el siguiente conjunto de puntos asociado a una suma trigonométrica:

$$\mathcal{P}(N) = \{(\Re(S_m), \Im(S_m))\}_{m=1}^N \quad \text{con} \quad S_m = \sum_{n=1}^m e(f(n)).$$

Es decir, dibujamos los números complejos S_1, S_2, \dots, S_N de la manera habitual como puntos en el plano. Uno podría esperar que si la función crece suficientemente se obtiene una nube de puntos caótica que no sigue ningún patrón. Sin embargo, hay funciones para las cuales aparecen figuras geométricas sorprendentes como las espirales.

Ejemplo 1. Como primer ejemplo, veremos $f(x) = x^{3/2}$ (ver figura 4.1). Es un modelo simple que nos permitirá comprender en qué momentos aparecen los centros de las espirales. Observamos que, en las proximidades de estos centros, la sucesión S_m experimenta variaciones mínimas, lo que implica que $S_{m-k} \approx S_m$ para algún valor pequeño de k . Cuanto menor sea k , menor será la variación de S_m , lo que sugiere que nos encontramos más cerca del centro. Dado que la diferencia entre términos consecutivos es $|S_m - S_{m-1}| = 1$, el caso $k = 1$ puede descartarse, pues no permitiría una reducción suficiente de la variación. Por lo tanto, consideraremos el caso $k = 2$ como una mejor aproximación para la localización de los centros.

Si $S_{m-2} \approx S_m$, entonces

$$S_m - S_{m-2} = \sum_{n=1}^m e(f(n)) - \sum_{n=1}^{m-2} e(f(n)) = e(f(m-1)) + e(f(m)) \approx 0,$$

lo que implica que $e(f(m)) \approx -e(f(m-1))$ y, dividiendo a ambos lados por $e(f(m-1))$, obtenemos que $e(f(m) - f(m-1)) \approx e\left(\frac{2m+1}{2}\right)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$f(m) - f(m-1) \approx \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sustituyendo en $f(x)$, y usando que si $m \neq 0$ entonces $m-1 = m(1 - m^{-1})$, se tiene que $m^{3/2} - (m-1)^{3/2} \approx m + \frac{1}{2}$ y por tanto,

$$m^{3/2}(1 - (1 - m^{-1})^{3/2}) \approx m + \frac{1}{2}, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, sustituyendo en la serie de Taylor de la función $g(x) = 1 - (1 - x)^{3/2}$, obtenemos que para m grande, el término dominante es $\frac{3}{2}m^{1/2}$, por lo que podemos aproximar la igualdad original por $\frac{3}{2}m^{1/2} \approx n + \frac{1}{2}$ lo que implica que

$$m \approx \frac{4}{9} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

La condición $S_{m-2} \approx S_m$ indica que en torno a estos índices m , los cambios en la suma parcial son muy pequeños. Esto implica que S_m y S_{m-1} están muy próximos y por ello, el punto medio $\frac{1}{2}(S_m + S_{m-1})$ resulta una buena aproximación del centro de la espiral en esa región de la trayectoria.

La fórmula $m \approx \frac{4}{9} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$ permite, para cada n , dentro del rango adecuado, calcular un índice m en el cual se espera que el cambio S_m sea mínimo, es decir, que estemos cerca de un centro de espiral.

Al tomar el conjunto de puntos de S_m con m cercano a estos valores y resaltarlos en la gráfica de $P(2500)$, podemos observar que estos puntos se agrupan en las zonas centrales de las espirales, validando la aproximación obtenida mediante el análisis de Taylor.

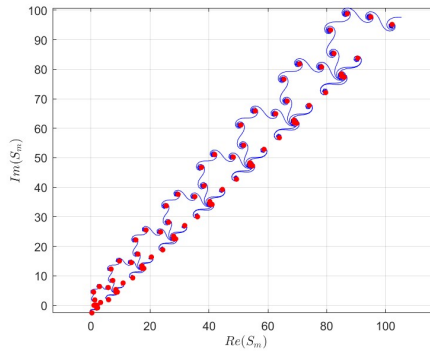


Figura 4.1: $f(x) = x^{3/2}$ con los centros de las espirales destacados.

Ejemplo 2. Como segundo ejemplo, consideraremos el caso $f(x) = \frac{t_0}{2\pi} \log x$ y nos centraremos en los casos con t_0 pequeño. El caso con t_0 grande es importante en teoría de números en relación con la función ζ de Riemann, y aparecerá en el siguiente capítulo.

Para $t_0 = 3$, su gráfica se aproxima muy bien con la *espiral equiangular* o *logarítmica* dada por la siguiente ecuación en coordenadas polares $r = ae^{\theta/3}$ donde $a = \frac{1}{\sqrt{10}} \exp\left(\frac{1}{3} \arctan 3\right)$. Superponiendo ambas gráficas,

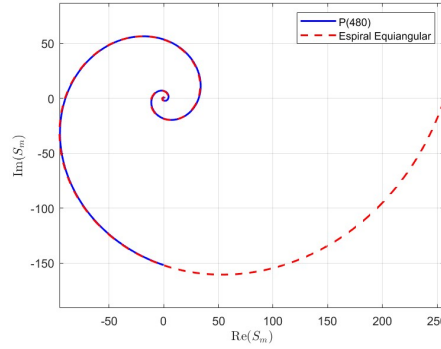


Figura 4.2

El siguiente resultado muestra la aproximación por la espiral equiangular dada.

Lema 4.1. Dada $f(x) = \frac{t_0}{2\pi} \log x$, entonces

$$S_m = \int_1^m e(f(x)) dx + O(1).$$

Además, se tiene que $S_m = re^{i\theta} + O(1)$ donde $\theta = t_0 \log(m) - \arctan t_0$ y $r = \frac{e^{(\arctan t_0 + \theta)/t_0}}{\sqrt{t_0^2 + 1}}$.

Demostración. Observéese que estamos en las hipótesis del Teorema 3.1 del capítulo anterior, ya que $f \in C^2([1, m])$ y $0 < f' < 2$, por tanto

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^m e(f(n)) = \sum_{n=0}^2 \int_1^m e(f(x) - nx) dx + O(\log 2) \\ &= \int_1^m e(f(x)) dx + \int_1^m e(f(x) - x) dx + \int_1^m e(f(x) - 2x) dx + O(1). \end{aligned}$$

Gracias al primer lema de Van der Corput (Lema 1.1), podemos acotar las dos últimas integrales de forma que

$$\left| \int_1^m e(f(x) - nx) dx \right| \leq \frac{2}{\pi D_n}, \quad \text{donde } |f'(x) - n| \geq D_n > 0.$$

Luego, $\sum_{n=1}^m e(f(n)) = \int_1^m e(f(x)) dx + O(1)$.

Por otro lado, evaluando la integral, queda $\int_1^m e(f(x)) dx = \frac{m^{it_0+1}}{it_0+1} = \frac{m}{\sqrt{t_0^2+1}} e^{i(t_0 \ln m - \arctan t_0)}$.

Así pues, la relación entre el módulo $r = \frac{m}{\sqrt{t_0^2+1}}$ y el argumento $\theta = t_0 \ln m - \arctan(t_0)$ es

$$r = \frac{1}{\sqrt{t_0^2+1}} e^{\frac{\arctan t_0}{t_0}} e^{\theta/t_0}$$

que es, precisamente, la ecuación de una espiral equiangular. \square

Ejemplo 3. Ahora vamos a ver otro ejemplo, $f(x) = \pi^{-1}\sqrt{x/2}$, en el que también sale una única espiral, pero en vez de ser equiangular es una *espiral de Arquímedes*, es decir, el radio crece proporcionalmente con el ángulo en vez de exponencialmente. En la siguiente gráfica se muestra que es muy similar a la espiral $(t \sin t + \cos t - 3/2, -t \cos t + \sin t)$ con $1 \leq t \leq \sqrt{1000}$.

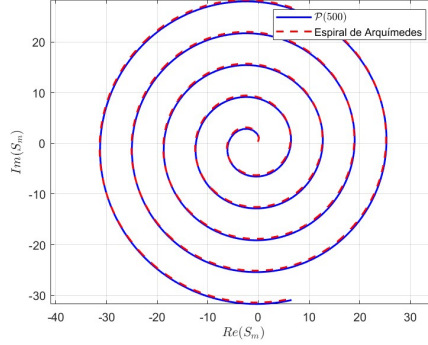


Figura 4.3

De nuevo, veamos la aproximación por esta espiral.

Lema 4.2. Sea $f(x) = \pi^{-1}\sqrt{x/2}$, entonces

$$S_m = e^{i\sqrt{2m}}(1 - i\sqrt{2m}) - e^{i\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{2}) + O(1).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.1 con $a = 1$, $b = m$, $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ se tiene que

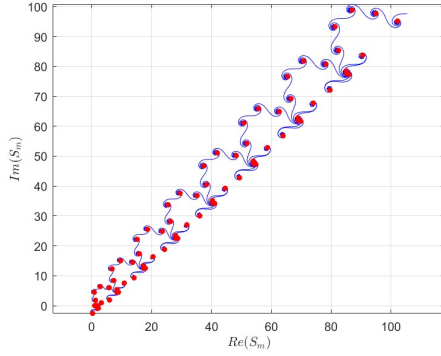
$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=0}^2 \int_1^m e^{\left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{2}} - nx\right)} dx + O(\log 2) = \int_1^m e^{i\sqrt{2x}} dx + O(1) \\ &= e^{i\sqrt{2m}}(1 - i\sqrt{2m}) - e^{i\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{2}) + O(1). \end{aligned} \quad \square$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, se llega a la siguiente forma:

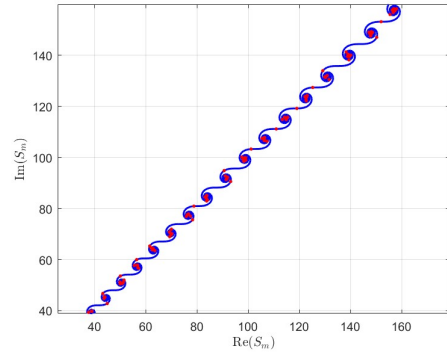
$$S_m = \left[\cos(\sqrt{2m}) + \sqrt{2m} \sin(\sqrt{2m}) \right] + i \left[\sin(\sqrt{2m}) - \sqrt{2m} \cos(\sqrt{2m}) \right] + O(1).$$

Por tanto, sustituyendo $t = \sqrt{2m}$, obtenemos la espiral que queríamos salvo por el $3/2$ que, es pequeño en comparación con los términos multiplicados por t .

Ejemplo 4. Como último ejemplo, tomemos $f(x) = 2(x/3)^{3/2}$ que solo difiere del ejemplo inicial en una constante, sin embargo el aspecto de la figura es más simple. Veamos ambas figuras



(a) $f(x) = x^{3/2}$ con los centros de las espirales destacados.



(b) $f(x) = 2(x/3)^{3/2}$ con los centros de las espirales destacados.

Figura 4.4

Según el Teorema 3.1, y aplicando el cambio de variable $x = n^2 t$, la suma oscilatoria S_m se aproxima por

$$\sum_{1 \leq n \leq 1 + \sqrt{m/3}} \int_1^m e(f(x) - nx) dx = \sum_{1 \leq n \leq 1 + \sqrt{m/3}} n^2 \int_{1/n^2}^{m/n^2} e(n^3(f(t) - t)) dt.$$

Obsérvese que podemos omitir la integral en $n = 0$, ya que es de orden $O(1)$ por el primer Lema de van der Corput (Lema 1.1). Como $f(t) - t$ tiene un único punto crítico en $t = 3$, que se encuentra en el intervalo de integración para $n \leq \sqrt{m/3}$, los resultados vistos en el Capítulo 2 permiten asumir que los términos en los extremos son de orden inferior y, como consecuencia, se puede reemplazar la última integral por $\int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(n^3(f(t) - t)) dt$, donde $a \in C_0^\infty$ es una función de soporte compacto que vale 1 en un entorno del punto crítico (por ejemplo, en $(2, 4)$). Así, se llega a la aproximación:

$$(4.1) \quad S_m \approx \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{m/3}} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(n^3(f(t) - t)) dt \quad \text{con } a \in C_0^\infty, a|_{[2,4]}(x) = 1.$$

Para más detalles sobre esta aproximación ver [10, §3.3] o [9, Th. 8.16].

Aplicando ahora el Teorema 2.2 (*Principio de la fase estacionaria*) con $\lambda = n^3$ y $k = 1$ a la integral en (4.1)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(n^3(f(t) - t)) dt &= \frac{(1+i)e(n^3(f(3) - 3))}{\sqrt{2n^3 f''(3)}} a_0(3) + O(n^{-9/2}) \\ &= \sqrt{3}(1+i)n^{-3/2} e(-n^3) + O(n^{-9/2}). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.1), obtenemos

$$S_m \approx \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{m/3}} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(n^3(f(t) - t)) dt = \sum_{1 \leq n \leq (\sqrt{m/3})} \left(\sqrt{3}(1+i)n^{1/2} + O(n^{-5/2}) \right).$$

Para simplificar esta última expresión, observemos que del Lema 3.1 se deduce que $\sum_{n=1}^N n^{1/2} = \frac{2}{3}N^{3/2} + O(N^{1/2})$. Por tanto,

$$S_m \approx \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{m/3}} \left(\sqrt{3} (1+i)n^{1/2} + O(n^{-5/2}) \right) = \frac{2(1+i)}{\sqrt{3}} \left(\frac{m}{3} \right)^{3/4} + O(m^{1/4}).$$

Esto implica que, para m grande, S_m está en la dirección de $1+i$, que en coordenadas representa el vector $(1, 1)$. Luego la dirección de los puntos $\mathcal{P}(N)$ es la misma que la de la recta $y = x$ que se extiende desde el valor mínimo, $x = \frac{2}{3^{5/4}}$, hasta el valor máximo $x = \frac{2N^{3/4}}{3^{5/4}}$.

En cuanto a la localización de los centros de las espirales, realizando un proceso análogo al que hicimos en el Ejemplo 1, tenemos que para la función $f(x) = 2(x/3)^{3/2}$ se verifica

$$2 \left(\frac{m}{3} \right)^{3/2} (1 - (1 - m^{-1})^{3/2}) \approx n + \frac{1}{2} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z},$$

y despejando, obtenemos que para m grande,

$$m \approx 3 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{con } n + \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{N}{3}}.$$

Por tanto, los centros de las espirales, están próximos a los puntos (α, α) con $\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{3/2}$.

CAPÍTULO 5

Dos aplicaciones relacionadas con la aritmética

En ese capítulo estudiaremos dos aplicaciones de las sumas oscilatorias que tienen interés en teoría de números.

Aplicación 1. La hipótesis de Lindelöf. Consideramos acotaciones del tipo

$$S(t) = O(t^\delta) \quad \text{para} \quad S(t) = \sum_{1 \leq n < t} \frac{1}{n^{1/2+it}} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 2}.$$

La llamada *hipótesis de Lindelöf* afirma que esta acotación se cumple para cualquier $\delta > 0$. Lo mejor que se conoce a día de hoy [1] es que es válida para $\delta > 13/84$ pero en este capítulo, probaremos que se cumple para $\delta > 1/6$.

La función ζ de Riemann, definida en el plano complejo, desempeña un papel crucial en la teoría de números al estudiar la distribución de los números primos. La hipótesis de Riemann, está estrechamente vinculada a la precisión en la estimación del conteo de primos. Es posible demostrar que $\zeta(1/2 + it)$ se aproxima adecuadamente por $S(t)$, esta aproximación está relacionada con los resultados expuestos en [8, Th. 1.8]. Utilizando este resultado junto con técnicas avanzadas de análisis complejo se puede deducir que, si la hipótesis de Lindelöf fuera falsa, la hipótesis de Riemann también lo sería [14, §14.2]. Esta implicación sugiere que, en ese caso, la distribución de los primos sería más irregular y caótica de lo que se espera en el contexto clásico.

Por otro lado, la hipótesis de Lindelöf implica que la separación entre números primos consecutivos está limitada, concretamente

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^\sigma) \quad \text{para todo } \sigma > 1/2,$$

donde p_n denota el n -ésimo número primo. Este resultado refuerza la idea de que existe una estructura regulada en la distribución de los primos, en contraste con un comportamiento que podría ser más caótico.

Para obtener la prueba de la cota de $S(t)$, necesitamos unos resultados previos.

Lema 5.1. Si se cumple $\sum_{n=N}^M n^{-1/2-it} = O(t^{1/6})$ para $M < \min(2N, t)$, entonces

$$S(t) = O(t^\delta) \quad \text{para todo } \delta > 1/6.$$

Demostración. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^j \leq t/n < 2^{j+1}$, por tanto $n \in [2^{-j-1}t, 2^{-j}t)$ y podemos escribir $[1, t) \cap \mathbb{Z} = \bigcup_{0 \leq j \leq \log_2 t} ([2^{-j-1}t, 2^{-j}t) \cap \mathbb{Z})$. Veremos ahora la cota para la suma $S(t)$ dada en el enunciado. Si dividimos la suma en los intervalos que acabamos de definir, obtenemos

$$S(t) = \sum_{j=0}^{\log_2 t} S_j(t) \quad \text{con} \quad S_j(t) = \sum_{n \in [2^{-j-1}t, 2^{-j}t) \cap \mathbb{Z}} n^{-1/2-it}.$$

Por hipótesis, para $M < \min(2N, t)$ se tiene $\sum_{n=N}^M n^{-1/2-it} = O(t^{1/6})$. Si tomamos $N = 2^{-j-1}t$ y $M = 2^{-j}t$, entonces $S_j(t) = O(t^{1/6})$. Luego, al juntar todas las sumas, se obtiene $S(t) = \sum_{j=0}^{\log_2 t} S_j(t) = O(t^{1/6} \log_2 t)$. Finalmente, dado que para cualquier exponente $\delta > \frac{1}{6}$ se cumple que $\log_2 t = O(t^{\delta-1/6})$, se concluye que $t^{1/6} \log_2 t = O(t^\delta)$ para todo $\delta > \frac{1}{6}$. Por lo tanto, se deduce que $S(t) = O(t^\delta)$. \square

Lema 5.2. Sea $\{a_n\}_{n=N}^M$ una lista de números complejos y $S_n = \sum_{k=N}^n a_k$. Se cumple que

$$\left| \sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{N \leq n \leq M} |S_n|.$$

Demostración. En primer lugar, recordamos que la fórmula de sumación por partes (Fórmula de Abel) para dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ es

$$\sum_{n=N}^M a_n b_n = S_M b_M - \sum_{n=N}^{M-1} S_n (b_{n+1} - b_n).$$

Si tomamos $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, y aplicamos dicha fórmula, obtenemos

$$\sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} = S_M \frac{1}{\sqrt{M}} - \sum_{n=N}^{M-1} S_n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=N}^{M-1} S_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) + \frac{S_M}{\sqrt{M}}.$$

Tomando el valor absoluto y aplicando la desigualdad triangular, nos queda:

$$\left| \sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right| \leq \sum_{n=N}^{M-1} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| |S_n| + \left| \frac{S_M}{\sqrt{M}} \right|.$$

La sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es estrictamente decreciente para $n \geq 1$, por lo que $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Además, para $n \in [N, M]$, se tiene $|S_N| \leq \max_{N \leq k \leq M} |S_k|$. Sustituyendo en lo anterior, tenemos:

$$\left| \sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \max_{N \leq k \leq M} |S_k| + \max_{N \leq k \leq M} |S_k| \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{N \leq k \leq M} |S_k|. \quad \square$$

Teorema 5.1. *Se cumple $S(t) = O(t^\delta)$ para cualquier $\delta > 1/6$.*

Demostración. Consideramos la función $f(x) = \frac{t \log x}{2\pi}$ en el intervalo $[N, M]$ con $N, M \in \mathbb{Z}^+$ y $M \leq 2N < t$. Distinguiamos dos casos.

Si $N \geq t^{2/3}$ aplicamos el Teorema 3.2 con $\lambda_2 = \frac{t}{8\pi N^2}$ y $\mu = 4$, resultando

$$N^{-1/2} \sum_{n=N}^M e(f(n)) = N^{-1/2} O\left(t^{1/2} + \frac{N}{t^{1/2}}\right) = O(N^{-1/2} t^{1/2} + N^{1/2} t^{-1/2}) = O(t^{1/6}).$$

Si $N \leq t^{2/3}$ usamos el Teorema 3.3 con $\lambda_3 = \frac{t}{8\pi N^3}$ y $\mu = 8$ para obtener

$$N^{-1/2} \sum_{n=N}^M e(f(n)) = N^{-1/2} O\left(N \frac{t^{1/6}}{N^{1/2}} + N^{1/2} \frac{N^{1/2}}{t^{1/6}}\right) = O(t^{1/6} + N^{1/2} t^{-1/6}) = O(t^{1/6}).$$

Tomando ahora $a_n = e\left(-\frac{t \log n}{2\pi}\right) = n^{-it}$ y $\overline{S_n} = \sum_{k=N}^n e\left(\frac{t \log k}{2\pi}\right)$, acabamos de ver que $N^{-1/2} \overline{S_M} = O(t^{1/6})$ y, por el Lema 5.2, se tiene que

$$\sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{it+1/2}} = O(t^{1/6}).$$

Finalmente, el Lema 5.1 nos da que $S(t) = O(t^\delta)$ para $\delta > 1/6$. □

Aplicación 2. El problema del círculo. Este es un problema clásico que tiene sus orígenes en el trabajo de Gauss. La cantidad de formas en que un número puede escribirse como suma de dos cuadrados enteros es caótica. Para estudiar el comportamiento promedio de esta función, se analiza cuántos puntos con coordenadas enteras se encuentran dentro de un círculo de radio R , ya que cada representación de un número $N \leq R^2$ como suma de dos cuadrados corresponde a una solución entera de la ecuación $x^2 + y^2 = N$, es decir, un punto dentro de dicho círculo. Es evidente que para valores grandes de R , esta cantidad $C(R)$ debería aproximarse al área del círculo. El llamado *problema del círculo* busca determinar cuánto se puede reducir el término de error en esta aproximación.

Teorema 5.2. *Dado un círculo de radio R centrado en el origen, el número $C(R)$ de puntos de coordenadas enteras (m, n) que se encuentran en dicho círculo está dado por*

$$C(R) = \pi R^2 + O(R^{2/3}) \quad \text{donde} \quad C(R) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq R^2\}.$$

En nuestra demostración, consideraremos únicamente radios de la forma $R = N\sqrt{2}$ con $N \in \mathbb{Z}^+$, con el fin de simplificar la exposición, ya que el caso general se maneja de forma similar.

Para nuestro objetivo, necesitamos unas desigualdades de análisis. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 5.1. Dado $M \in \mathbb{Z}_{>1}$ se definen los *polinomios trigonométricos de Beurling* B_M^+ y B_M^- como

$$B_M^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \pm \sum_{k=1}^{M-1} f_1(k/M) \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{M-1} f_2(k/M) \sin(2\pi kx)$$

con $f_1(x) = 1 - x$ y $f_2(x) = (x - 1) \cot(\pi x) - \pi^{-1}$.

Proposición 5.1 (Lema de Vaaler ([10])). Sean B_M^+ y B_M^- los polinomios trigonométricos de Beurling, se tiene que

$$B_M^-(x) \leq Mx - \frac{M}{2} \leq B_M^+(x) \quad \text{para } x \in [0, 1).$$

Lema 5.3. Sean B_M^+ y B_M^- los polinomios trigonométricos de Beurling, entonces

$$(5.1) \quad B_M^\pm(x) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} a_k^\pm e(kx) \quad \text{con } a_0^\pm = \pm \frac{1}{2}$$

y $|k a_k^\pm| \leq CM$, para cierta constante C .

Demostración. Las fórmulas de Euler $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ y $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, permiten reescribir B_M^\pm como en (5.1), donde los coeficientes a_k^\pm son combinaciones lineales de $f_1(x_k)$ y $f_2(x_k)$ con $x_k = k/M$. Por tanto, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a_k^\pm| \leq C_1(|f_1(x_k)| + |f_2(x_k)|) \Leftrightarrow |x_k a_k^\pm| \leq C_1(|x_k f_1(x_k)| + |x_k f_2(x_k)|).$$

De esta forma, para demostrar que $|x_k a_k^\pm|$ está uniformemente acotado, es suficiente ver que las funciones $x_k f_1(x_k)$ y $x_k f_2(x_k)$ lo están para $x_k = k/M$ con $0 \neq |k| < M$, lo que implica acotar $x f_1(x)$ y $x f_2(x)$ para $0 < x < 1$.

Por un lado, $x f_1(x) = x - x^2$ es una función continua en $[0, 1]$ y, por tanto acotada. Por otro, $x f_2(x) = x(x - 1) \cot(\pi x) - \frac{x}{\pi}$ es una función continua en $(0, 1)$. Analizando su comportamiento en los extremos del intervalo $(0, 1)$, obtenemos $\lim_{x \rightarrow 0} x f_2(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} x f_2(x) = -\frac{1}{\pi}$. Extendiendo $x f_2(x)$ por los límites anteriores al intervalo $[0, 1]$, se obtiene una función continua y, por tanto, de nuevo acotada.

Entonces, $|x_k a_k^\pm| \leq C$ con C independiente de k y M . □

Lema 5.4. Dada $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, entonces

$$\left| \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}) \right| \leq \frac{2N+1}{2M} + 2C \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) \right|.$$

Además,

$$\sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) = O(R^{1/2} k^{1/2}).$$

Demostración. Como $\lfloor x \rfloor = 0$ para todo x en $[0, 1)$, entonces $\psi(x) = x - \frac{1}{2}$ y la Proposición 5.1 da que

$$B_M^-(x) \leq M\psi(x) \leq B_M^+(x),$$

la 1-periodicidad de las funciones B_M^\pm y $\psi(x)$ garantiza las desigualdades en todo \mathbb{R} . Tomando $x = \sqrt{R^2 - n^2}$, para cada n con $-N \leq n \leq N$, se tiene:

$$B_M^-(\sqrt{R^2 - n^2}) \leq M\psi(\sqrt{R^2 - n^2}) \leq B_M^+(\sqrt{R^2 - n^2}),$$

y, en consecuencia

$$\sum_{n=-N}^N B_M^-(\sqrt{R^2 - n^2}) \leq M \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}) \leq \sum_{n=-N}^N B_M^+(\sqrt{R^2 - n^2})$$

por tanto,

$$(5.2) \quad \left| \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}) \right| \leq \frac{1}{M} \max \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N B_M^-(\sqrt{R^2 - n^2}) \right|, \left| \sum_{n=-N}^N B_M^+(\sqrt{R^2 - n^2}) \right| \right\}.$$

Por (5.1) se tiene que $B_M^\pm(\sqrt{R^2 - n^2}) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} a_k^\pm e(k\sqrt{R^2 - n^2})$, entonces

$$\sum_{n=-N}^N B_M^\pm(\sqrt{R^2 - n^2}) = \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} a_k^\pm e(k\sqrt{R^2 - n^2}) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} a_k^\pm \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}).$$

Dividiendo la suma en dos partes, $k = 0$ y $1 \leq k \leq M-1$, y por el Lema 5.3, se deduce:

$$\left| \sum_{n=-N}^N B_M^\pm(\sqrt{R^2 - n^2}) \right| \leq \frac{2N+1}{2} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{2CM}{k} \left| \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) \right|$$

y sustituyendo en (5.2) queda,

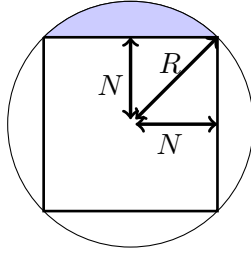
$$\left| \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}) \right| \leq \frac{2N+1}{2M} + 2C \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) \right|.$$

Finalmente, aplicando el Teorema 3.2 a la función $f(x) = k\sqrt{R^2 - x^2}$ con $\lambda_2 = \frac{k}{R}$ y $\mu = \frac{R^3}{(R^2 - N^2)^{3/2}}$, y teniendo en cuenta que $N = O(R)$, se tiene que

$$\sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) = O \left(N \left(\frac{k}{R} \right)^{1/2} + \left(\frac{k}{R} \right)^{-1/2} \right) = O \left(R^{1/2} k^{1/2} + \frac{R^{1/2}}{k^{1/2}} \right) = O(R^{1/2} k^{1/2}).$$

□

Demostración del Teorema 5.2. Comenzaremos probando que el número de puntos enteros dentro del círculo de radio R dado por la siguiente figura, puede escribirse como:



$$C(R) = 4S_1 - 4S_2 + 4N^2 - 1$$

$$\text{donde } S_1 = \sum_{n=-N}^N (\sqrt{R^2 - n^2} - N)$$

$$S_2 = \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}).$$

Para ello, observamos que el cuadrado centrado en el origen de lado $2N + 1$, con N tal que $N < R < N + 1$, contiene un total de $(2N + 1)^2$ puntos enteros. Por simetría, el número de puntos que están dentro del círculo pero fuera del cuadrado puede expresarse en términos de una suma sobre las filas $n \in [-N, N]$. Para cada n , el número de valores enteros m tales que $m^2 + n^2 \leq R^2$ está dado por

$$\#\{m \in \mathbb{Z} : m^2 \leq R^2 - n^2\} = 2 \left\lfloor \sqrt{R^2 - n^2} \right\rfloor + 1.$$

En comparación, el cuadrado tiene $2N + 1$ puntos por fila. Entonces, para cada n , la diferencia de puntos entre el círculo y el cuadrado es $2 \left(\left\lfloor \sqrt{R^2 - n^2} \right\rfloor - N \right)$. Sumando esta diferencia para $n = -N$ a N , y multiplicando por 2 (por simetría en m), se obtiene:

$$(5.3) \quad C(R) = (2N + 1)^2 + 4 \sum_{n=-N}^N \left(\left\lfloor \sqrt{R^2 - n^2} \right\rfloor - N \right).$$

Ahora, usando la función $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ y sumando en n , se obtiene:

$$\sum_{n=-N}^N \left(\left\lfloor \sqrt{R^2 - n^2} \right\rfloor - N \right) = \sum_{n=-N}^N \left(\sqrt{R^2 - n^2} - N \right) - \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}) - \frac{2N + 1}{2},$$

donde $S_1 = \sum_{n=-N}^N (\sqrt{R^2 - n^2} - N)$ y $S_2 = \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2})$, y sustituyendo en (5.3) se tiene que

$$C(R) = (2N + 1)^2 + 4 \left(S_1 - S_2 - \frac{2N + 1}{2} \right) = 4S_1 - 4S_2 + 4N^2 - 1.$$

Para terminar, demostraremos que $S_1 = \frac{\pi R^2}{4} - N^2 + O(1)$ y $S_2 = O(R^{2/3})$.

En primer lugar, aplicando el Lema 3.1 y el Segundo Teorema de Valor Medio para integrales a $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - M$, obtenemos

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-N}^N (g(x) + \psi(x)g'(x)) dx = 2 \int_{-N}^0 (g(x) + g'(x)\psi(x)) dx \\ &= 2 \int_{-N}^0 g(x) dx + O(1) = \frac{\pi R^2}{4} - N^2 + O(1). \end{aligned}$$

Por otro lado, para obtener S_2 , aplicaremos el Lema 5.4. Teniendo en cuenta que $M \in \mathbb{Z}_{>1}$ se puede escoger de forma arbitraria, tomamos $M = \lfloor R^{1/3} \rfloor$. Con esta elección, se tiene que $\frac{2N+1}{2M} = O(R^{2/3})$ y $\sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) \right| = O(R^{1/2} \sum_{k=1}^{R^{1/3}} k^{-1/2}) = O(R^{1/2} R^{1/6}) = O(R^{2/3})$. Por tanto deducimos que $S_2 = O(R^{2/3})$, como queríamos probar.

Aplicando esto a la igualdad vista previamente para $C(R)$,

$$C(R) = 4 \left(\frac{\pi R^2}{4} - N^2 + O(1) \right) - 4O(R^{2/3}) + 4N^2 - 1 = \pi R^2 + O(R^{2/3}). \quad \square$$

Bibliografía

- [1] J. Bourgain. Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(1):205–224, 2017.
- [2] C.A. Catalá de la Torre. A new proof for a sharp van der Corput’s lemma. *Amer. Math. Monthly*, 122(2):138–142, 2015.
- [3] F. Chamizo and D. Raboso. Van der Corput method and optical illusions. *Indag. Math. (N.S.)*, 26(5):723–735, 2015.
- [4] J.-M. Deshouillers. Geometric aspect of Weyl sums. In *Elementary and analytic theory of numbers (Warsaw, 1982)*, volume 17 of *Banach Center Publ.*, pages 75–82. PWN, Warsaw, 1985.
- [5] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [6] S. W. Graham and G. Kolesnik. van der Corput’s method of exponential sums, volume 126 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [7] M. N. Huxley. Exponential sums and lattice points. III. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(3):591–609, 2003.
- [8] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York].
- [9] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [10] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [11] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [12] C. D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*, volume 210 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2017.

-
- [13] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II*. Editorial Reverté, Barcelona, 1984.
- [14] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [15] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.
- [16] Wikipedia contributors. Archimedean spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedean_spiral&oldid=1251955193, 2024. [Online; accessed 9-February-2025].
- [17] Wikipedia contributors. Euler spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_spiral&oldid=1232819038, 2024. [Online; accessed 23-August-2024].
- [18] Wikipedia contributors. Logarithmic spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmic_spiral&oldid=1270340202, 2025. [Online; access]