Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de fin de grado

Las series de Eisenstein

Alejandro Sanz del Castillo

Curso 2025-2026

A mi familia por estar siempre ahí incluso cuando no entendían nada de lo que les contaba sobre matemáticas, y a mis profesores por el esfuerzo para que yo sí lo entendiera. A mis tutores, Eva y Fernando, por lidiar con mis despistes con toda la paciencia y cuidado que les podría pedir y más.

Resumen

En este trabajo se discuten, analizan y demuestran diferentes propiedades fundamentales de las series de Eisenstein. Comenzando por estudiar su convergencia, se procede a analizar su comportamiento bajo la acción del llamada grupo modular. Posteriormente, se obtiene la expresión de las series en su forma de series de Fourier y se discute la selección de un dominio fundamental apropiado para ellas. Finalmente se consideran como formas modulares y, mediante la fórmula de valencia, se clasifican los espacios vectoriales correspondientes, obteniendo resultados sobre su dimensión. Adicionalmente, en el último capítulo, se usan todas las herramientas recopiladas para estudiar el caso de peso 2, que constituye una excepción respecto al resto de las series de Eisenstein.

Abstract

This work discusses, analyzes, and proves several fundamental properties of Eisenstein series. It begins by analizing their convergence and then proceeds to study their transformations under the modular group. Subsequently, it derives the Fourier series expansions of Eisenstein series, and examines the choice of an appropriate fundamental domain. The series are then considered within the context of modular forms, and, through the use of the valence formula, their corresponding vectorial spaces are considered, along with any results obtained from studying their dimension. Finally, in the last chapter, all of the previously developed tools are applied to study the case of weight 2, which differs from other Eisenstein series.

Índice general

CAPÍTULO 1
Definición y propiedades básicas

El objetivo de este primer capítulo es presentar las series de Eisenstein y definir y demostrar las propiedades y teoremas más básicos que servirán como base para elaborar el resto del trabajo.

1.1. Las series de Eisenstein

Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ y $k \in \mathbb{Z}_{>2}$ par. Las *series de Eisenstein* son funciones $G_k : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, definidas como

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \sum (mz+n)^{-k}. \tag{1.1}$$

El valor k se denomina *peso* de la serie. La razón por la cual no se consideran pesos no enteros es que generarían cierta ambigüedad debido a la naturaleza multivaluada de la función raíz en los complejos. Adicionalmente, al considerar pesos enteros impares, nos encontramos con que los términos dados por $(-m, -n)$ se anulan al sumarse con los términos dados por (m, n) simplemente sacando factor común -1, lo que resulta en que la serie sea la función constante 0.
Es habitual considerar también las *series de Eisenstein normalizadas*, denotadas por

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(z) \qquad \text{con} \quad \zeta(k) = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \tag{1.2}$$

A la función $\zeta(k)$ se la conoce como *zeta de Rieman*, y jugará un papel mayor en los capítulos posteriores.
Veamos primero por qué no se puede considerar el peso exactamente 2 de la misma manera que el resto de pesos pares. Estudiemos la convergencia absoluta de la serie en el caso particular $z = i$.

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \sum |mi+n|^{-2} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \sum (m^2+n^2)^{-1}.$$

En lugar de considerar toda la serie, nos limitaremos a la contribución de la zona $m^2 \leq n^2 < (2m)^2$. Podemos verla como 4 regiones que parten del origen. Centrémonos en una única, por ejemplo, la del primer cuadrante.

La región comprende los puntos donde $0 < m \leq n < 2m$. Fijado un valor de m, se tienen exactamente m puntos válidos con ese m. El módulo de cada uno de ellos será menor que el del más alejado, es decir, menor que $|2mi + 2m|$. Así pues, se puede acotar la serie como:

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (m^2+n^2)^{-1} \geq 4\sum_{m\geq 1}\sum_{n=m}^{2m-1}(m^2+(2m)^2)^{-1} = 4\sum_{m\geq 1}\frac{m}{5m^2} = \frac{4}{5}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}.$$

Lo que resulta es la conocida serie armónica, que es divergente. Por tanto no se puede considerar el peso 2 como el resto de pesos pares enteros. Evidentemente, pesos menores que 2 resultarán en una divergencia mayor, por lo que tampoco se podrán considerar.
Veamos ahora que sí converge absolutamente para todo k par, con $k > 2$, es decir,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum |mz+n|^{-2-\epsilon} \quad converge \quad \forall\epsilon > 0.$$

Para ello, lo primero es considerar el siguiente resultado.

Lema 1.1. *Sea z un punto de $\mathbb{H}$. Entonces existe una constante $C = C(z) > 0$ tal que para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ y $\epsilon > 0$, se cumple que $|mz+n|^{2(-1-\epsilon)} \leq C^{-1-\epsilon}(m^2+n^2)^{-1-\epsilon}$.*

Demostración. Primero definimos la función de $S^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2+b^2 = 1\}$ a $\mathbb{R}$, $f(a,b) = |az+b|^2$. Sea entonces $C := \text{mín}_{(a,b)\in S^1}\{f(a,b)\}$. Como la función es continua en la circunferencia unidad, que es compacta, alcanzará su mínimo. Además, $C > 0$, pues si fuera 0 se tiene que $z = \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}$, y por tanto $z \notin \mathbb{H}$.
Ahora consideremos la expresión para $(m,n) \neq (0,0)$ tal que $r = \sqrt{n^2+m^2}$. Entonces $(a,b) = \frac{1}{r}(m,n) \in S^1$ y $|mz+n|^2 = r^2|az+b|^2 \geq C(m^2+n^2)$. Tomando la potencia $-1-\epsilon$ se tiene que $|mz+n|^{-2-2\epsilon} \leq C^{-1-\epsilon}(m^2+n^2)^{-1-\epsilon}$. □

Teorema 1.2. *Sea $k \in \mathbb{Z}_{>2}$ par. Se tiene que, para todo $z \in \mathbb{H}$, la serie de Eisenstein*

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (mz+n)^{-k}$$

converge absolutamente y define una función holomorfa en $\mathbb{H}$.

Demostración. Por el Lema 1.1, para un z fijo en $\mathbb{H}$ existe una constante $C = C(z) > 0$ tal que

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum |mz+n|^{-2-2\epsilon} \leq \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum C^{-1-\epsilon}(m^2+n^2)^{-1-\epsilon}.$$

Sea $r = \text{máx}\{|m|,|n|\} \geq 1$. Entonces $m^2+n^2 \geq r^2$ y $(m^2+n^2)^{-1-\epsilon} \leq r^{-2-2\epsilon}$. Para cada entero existen exactamente $8r$ puntos con ese máximo, de manera que

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum C^{-1-\epsilon}(m^2+n^2)^{-1-\epsilon} \leq C^{-1-\epsilon}\sum_{r\geq 1}\frac{8r}{r^{2+2\epsilon}} = C_2\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r^{1+2\epsilon}},$$

que converge siempre que $\epsilon > 0$, por lo que la serie converge absolutamente para dicho z. Si $K \subset \mathbb{H}$ es compacto, tomamos $C = \text{mín}_{z\in K,(a,b)\in S^1} |az+b|^2 > 0$, garantizando la convergencia uniforme en cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{H}$. Por el Teorema de Weierstrass podemos concluir que $G_k(z)$ con $k > 2$ es holomorfa en $\mathbb{H}$. $\square$

Veamos ahora algunas propiedades básicas de las series. Entre otras, las simetrías siguientes serán de gran utilidad lo largo del trabajo.

Lema 1.3. *Las series de Eisenstein cumplen que*

$$G_k(z+1) = G_k(z) \qquad y \qquad G_k(-1/z) = z^k G_k(z).$$

Demostración.

$$G_k(z+1) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (mz+m+n)^{-k} = \sum_{(m,n')\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (mz+n')^{-k} = G_k(z).$$

Por otro lado, con argumentos similares se tiene

$$\begin{aligned} G_k\left(\frac{-1}{z}\right) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum \left(\frac{-m}{z}+n\right)^{-k} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (m-zn)^{-k}\,\frac{(-1)^{-k}}{z^{-k}} \\ &= z^k \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (mz+n)^{-k} = z^k G_k(z), \end{aligned}$$

donde se realiza el cambio de (m,n) por $(n,-m)$. $\square$

1.2. Grupo SL_2 y acciones

Para R un anillo conmutativo con unidad se define el grupo (con la multiplicación)

$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{\gamma \in \mathcal{M}_{2\times 2}(R) \,:\, \det(\gamma) = 1\right\}$$

donde $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ son las matrices 2×2 con elementos en R.

Se define una *acción* del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}$ como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \gamma z \end{array} \qquad \text{donde} \quad \gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Al denominador de γz, con la notación anterior $cz+d$, se le denota $j_\gamma(z)$. Veamos algunas de las propiedades relevantes de estas acciones:

- $Iz = z$.
- $\gamma_1(\gamma_2 z) = (\gamma_1\gamma_2)z$.
- Si $z \in \mathbb{H}$, entonces $\gamma z \in \mathbb{H}$.

- Condición de cociclo: $j_{\gamma_1\gamma_2}.(z) = j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z)$.

Demostración. La primera es immediata:

$$Iz = \frac{1z+0}{0+1} = z.$$

Para la segunda consideramos

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix},$$

y se tiene que

$$\gamma_1(\gamma_2 z) = \gamma_1\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) = \frac{\frac{a_1a_2z+a_1b_2}{c_2z+d2}+b_1}{\frac{c_1a_2z+c_1b_2}{c_2z+b_2}+d_1} = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2} = (\gamma_1\gamma_2)z.$$

Veamos ahora qué ocurre con $\Im(\gamma z)$:

$$\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Im\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|j_\gamma(z)|^2}\right) = \Im\left(\frac{ac|z|^2+bd+adz+bc\bar{z}}{|j_\gamma(z)|^2}\right) = \frac{(ad-bc)\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

Como $ad-bc=1$, se tiene que, partiendo de $\mathbb{H}$, la acción permanece en $\mathbb{H}$.

Para la condición de cociclo se tiene

$$\begin{aligned} j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z) &= j_{\gamma_1}\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)(c_2z+d_2) = \left(\frac{c_1a_2z+c_1b_2}{c_2z+b_2}+d_1\right)(c_2z+d_2) \\ &= (c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2 = j_{\gamma_1\gamma_2}(z). \end{aligned}$$

□

De la demostración de la tercera propiedad se obtiene la siguiente identidad, que será útil a lo largo del trabajo.

Corolario 1.4. *Dado $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$, entonces $\Im(\gamma z) = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}$.*

Teorema 1.5. *Si una función $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ satisface $f(\gamma_j z) = j^k_{\gamma_j}(z)f(z)$ para $j=1,2$ entonces también satisface $f(\gamma z) = j^k_\gamma(z)f(z)$ para todo γ perteneciente al subgrupo generado por γ_1 y γ_2.*

Demostración. Basta comprobar la condición para $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ y γ^{-1}.

$$f((\gamma_1\gamma_2)z) = f(\gamma_1(\gamma_2 z)) = j^k_{\gamma_1}(\gamma_2 z)f(\gamma_2 z) = j^k_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j^k_{\gamma_2}zf(z) = j^k_{\gamma_1\gamma_2}(z)f(z).$$

Entonces, si se cumple para dos elementos, se cumple para su producto.
Por otro lado:

$$f(z) = f((\gamma\gamma^{-1})z) = f(\gamma(\gamma^{-1}z)) = j^k_\gamma(\gamma^{-1}z)f(\gamma^{-1}z).$$

Como $1 = j_{\gamma\gamma^{-1}}(z) = j_\gamma(\gamma^{-1}z)j_{\gamma^{-1}}(z)$, se tiene que $f(\gamma^{-1}z) = j^k_{\gamma^{-1}}(z)f(z)$. Así, la propiedad vale también para las inversas y, por tanto, se cumplirá para cualquier elemento generado por $\gamma \in \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$. □

De cara a las series de Eisenstein, un grupo importante es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, llamado *grupo modular*. Veremos más tarde que este grupo está generado por las matrices:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que representan una traslación unidad y una inversión actuando sobre $\mathbb{H}$. La primera tiene orden infinito mientras que la segunda tiene orden 4, actuando S^2 como un cambio de signo. Su efecto sobre una matriz es:

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Un resultado intermedio que necesitaremos para ver que son generadores es el siguiente.

Lema 1.6. *Para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definida como en (1.3), se tiene que*

1. *Si $ac \neq 0$, entonces eligiendo un $n \in \mathbb{Z}$ adecuado el valor de $\min\big(|a|, |c|\big)$ se puede reducir premultiplicando por T^nS o por T^n.*

2. *Si $ac = 0$, entonces $\gamma \in \langle T, S\rangle$.*

Demostración. Para el primer enunciado, obsérvese que $\min\big(|a|, |c|\big) > 0$. Entonces consideramos dos posibles casos. Si $|a| \geq |c|$, reducimos multiplicando por T^n. Este n debe ser el entero más próximo a $\frac{-a}{c}$, con lo que, aplicando el algoritmo de Euclides, se tiene: $a = qc + a'$, con $|a'| < |c|$, donde q es el entero que produce el resto más pequeño. Entonces $a - cq = a'$. Tomando $n = -q$, se tiene $a + nc = a'$, con $|a'| < |c| \leq |a|$.
La nueva matriz resultante, $T^n\gamma$, contará con un nuevo primer elemento a', que por construcción cumple que $|a'| < |c|$. Por tanto, $\min\big(|a'|, |c|\big) < \min\big(|a|, |c|\big)$, de modo que el valor mínimo se ha reducido como se deseaba.
Por otro lado, si $|a| < |c|$, se aplica S para intercambiar a y c reduciendo al caso anterior.
Para el segundo enunciado, se observa que no es posible que ambos sean 0 pues el determinante de la matriz γ sería 0. Si $c = 0$, entonces $ad = 1$, luego $a = \frac{1}{d}$. Pero como deben permanecer en los enteros, solo es posible que $d = \pm 1; a = \pm 1$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^bI = T^b \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^2T^{-b}.$$

Si $a = 0$, se tiene $-bc = 1$, luego $c = -\frac{1}{b}$. Pero como deben permanecer en los enteros, solo es posible que $c = \pm 1; a = \mp 1$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = ST^d \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} = -ST^{-d}.$$

En ambos casos se puede expresar γ como producto de T y S, demostrando que $\gamma \in \langle T, S\rangle$. □

El siguiente resultado muestra que todas las transformaciones del grupo modular se pueden obtener componiendo T y S.

Teorema 1.7. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle$.

Demostración. Primero observemos que, como T y S pertenecen a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, se tiene que $\langle T, S\rangle \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Sea $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Si $\text{mín}\big(|a|, |c|\big) = 0$, entonces $ac = 0$, luego por el Lema 1.6 se tiene $\gamma \in \langle T, S\rangle$. Si $\text{mín}\big(|a|, |c|\big) > 0$, entonces se reduce mediante el proceso explicado en el Lema 1.6 hasta que queda expresado como un producto de T^n y S y un último factor con $\text{mín}\big(|a'|, |c'|\big) = 0$, que por el Lema 1.6 pertenece a $\langle T, S\rangle$. Debido a las características del algoritmo de Euclides, esta reducción se completa en un número finito de pasos. De esta manera, γ puede escribirse como producto de potencias de T y S, es decir, $\gamma \in \langle T, S\rangle$, por tanto $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S\rangle$. $\square$

Acabaremos el capítulo con otro lema auxiliar que nos será de ayuda en el futuro.

Lema 1.8. *Para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se tiene $G_k(\gamma z) = j_\gamma^k(z) G_k(z)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.7 basta comprobarlo para los generadores T y S.
Como $Tz = z + 1$, entonces $j_T z = 1$ y

$$G_k(Tz) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (m(z+1)+n)^{-k} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (mz + (m+n))^{-k} = G_k(z),$$

con la conveniente reorganización de m y n.
Por otro lado, para $Sz = \frac{-1}{z}$ se tiene que $j_S(z) = z$ y, manipulando la expresión de manera similar, se tiene que

$$\begin{aligned} G_k(Sz) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum \left(\frac{-m}{z} + n\right)^{-k} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\sum (-1)^k \left(\frac{m - zn}{z}\right)^{-k} \\ &= z^k G_k(z) = j_S^k(z) G_k(z), \end{aligned}$$

de nuevo, reorganizando adecuadamente m y n. $\square$

CAPÍTULO 2

Desarrollo de Fourier

Durante este capitulo se discutirán expresiones alternativas de las series de Eisenstein. Con el fin de aligerar la notación, y siguiendo una tradición, definimos las siguientes funciones:

$$e(w) = e^{2\pi i w} \qquad \text{y} \qquad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

donde $w \in \mathbb{C}$ y $k, n \in \mathbb{N}$. Con $d|n$ se indican los divisores (positivos) de n.

2.1. Expresión en series de Fourier

A continuación se proveen ciertos lemas que ayudarán a construir el desarrollo de Fourier de las series de Eisenstein.

Lema 2.1. *Para todo $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ se cumple*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi r)}{(r+n)^2} = \pi^2.$$

Demostración. Usaremos la función $f(x) = \pi e(-r)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y su extension de periodo 1 en el resto. Obsérvese que $|f(x)| = \pi$. Calculando sus coeficientes de Fourier se tiene:

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e(nx)dx = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(-(n+r)x)dx = \frac{\operatorname{sen}(\pi(r+n))}{\pi(r+n)} = (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(\pi r)}{(r+n)}.$$

Ahora aplicamos la identidad de Parceval: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi r)}{(r+n)^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi^2 dx = \pi^2.$$

□

Con vistas al desarrollo de Fourier de las series de Eisenstein, conviene estudiar la función $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z+n)^{-2}$ y obtener una expresión más explícita de ella. Con este fin se tiene lo siguiente.

Lema 2.2. *La serie* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$ *define una función holomorfa en* $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ *que cumple*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{-4\pi^2 e(z)}{(1-e(z))^2}.$$

Demostración. Veamos primero la holomorfía. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(z) = (z+n)^{-2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. Ahora, para un compacto $K \subset \mathbb{C}-\mathbb{Z}$, se tiene que existe $M > 0$ tal que $|z| < M$ para todo $z \in K$. Entonces para $|n| > 2M$ se tiene que $|z+n| > |n| - |z| > \frac{n}{2}$, por lo que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} \leq 4\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2}$, de manera que se da convergencia absoluta y uniforme de la serie en los compactos. Como se tiene convergencia absoluta y uniforme en los compactos de $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ y cada $f_n(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}-\{-n\}$, por el Teorema de Weierstrass, la función $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$.
Por la fórmula de Euler, podemos escribir:

$$\operatorname{sen}^2(\pi z) = -e(-z)\frac{(e(z)-1)^2}{4} = -\frac{(1-e(z))^2}{4e(z)}.$$

Nuestro siguiente objetivo es aplicar el lema anterior, cuyas conclusiones solo abarcan los reales no enteros, a nuestro caso. Podemos extenderlo mediante la introducción de la función $g(z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$, que es holomorfa en $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$, y $f(r) = g(r) = \frac{1}{(r+n)^2}$ para todo $r \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Por extensión analítica, $f(z) = g(z)$, por lo que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \frac{-4\pi^2 e(z)}{(1-e(z))^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}.$$

□

Este resultado permite obtener en $\mathbb{H}$ una expresión de la serie anterior en términos de la función exponencial.

Lema 2.3. *Para* $z \in \mathbb{H}$ *se verifica*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne(nz).$$

Demostración. Como $|e(z)| = e^{-2\pi\Im(z)} < 1$ en $\mathbb{H}$, podemos usar la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{1-r}$. Derivando en la expresión respecto a r y sustituyendo $r = e(z)$, se tiene que $\frac{1}{(1-e(z))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(e(z))^{n-1}$. Entonces:

$$\frac{-\pi^2 4e(z)}{(1-e(z))^2} = -4\pi^2 e(z)\sum_{n=1}^{\infty} n(e(z))^{n-1} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne(nz), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

□

Con esto estamos listos para obtener la expresión en forma de series de Fourier de las series de Eisenstein.

Proposición 2.4. *Para cada $k > 2$ par y $z \in \mathbb{H}$ se tiene*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e(nz),$$

y, en consecuencia,

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e(nz).$$

Demostración. Partiendo del Lema 2.3 podemos escribir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2\sum_{n=1}^{\infty}ne(nz).$$

Derivando $k-2$ veces a ambos lados, obtenemos

$$(k-1)!(-1)^k\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^k} = (2\pi i)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e(nz).$$

Sustituyendo z por mz, recordando que k es par y tomando sumatorios, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e(nmz).$$

Consideramos ahora reorganizar el término de la derecha. Como la serie doble converge absolutamente para $z \in \mathbb{H}$, podemos permutar el orden de la sumación y reagrupar términos, con $N = nm$. Entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}e(nmz) = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{n|N}n^{k-1}e(Nz) = \sum_{N=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(N)e(Nz).$$

Por tanto

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e(nz).$$

Ahora, dividimos la expresión usual de una serie de Eisenstein en los valores según $m > 0$, $m < 0$ y $m = 0$. Los términos con $m > 0$ coinciden con la expresión anterior. Por simetría, y teniendo en cuenta que k es par, lo mismo ocurre para los términos con $m < 0$. El caso $m = 0$ da lugar al conocido valor $2\zeta(k)$ que aparece en las series de Eisenstein normalizadas. Para ello, basta considerar la suma de los términos con valores positivos de n y después los términos con valores negativos, recordado que k es par. De esta manera, se obtiene el denominado desarrollo de Fourier de G_k.

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)e(nz).$$

□

2.2. Dominio fundamental y simetrías

Se dice que un abierto $D \subset \mathbb{H}$ es un *dominio fundamental* para la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$ si para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se verifica

$$a)\quad D \cap \gamma D = \varnothing \quad \text{para } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) - \{\pm I\} \qquad \text{y} \qquad b) \bigcup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma \overline{D} = \mathbb{H},$$

donde $\overline{D}$ es el cierre de D. En estos casos, se dirá que γD cubre todo $\mathbb{H}$ en "baldosas". Para las series de Eisentein, necesitaremos un dominio fundamental para la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$. Introduzcamos un lema previo que contribuirá a su comprensión.

Lema 2.5. *Dado $z \in \mathbb{H}$ y $\gamma_0 = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : |j_\gamma(z)|$ es mínimo$\}$, se tiene que*

$$\Im(T^n \gamma_0 z) = \Im(\gamma_0 z) \geq \Im(ST^n \gamma_0 z) = \frac{\Im(T^n \gamma_0 z)}{|T^n \gamma_0 z|^2} \qquad \textit{para cualquier} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. La primera igualdad es fácil de ver ya que $|j_{T^n}(z)| = 1$, luego $\Im(T^n \gamma_0 z) = |j_{T^n}(z)|^2 \Im(\gamma_0 z) = \Im(\gamma_0 z)$.
Para ver la segunda, escribimos $w = T^n \gamma_0 z$. Entonces:

$$\Im(ST^n \gamma_0 z) = \Im(Sw) = \Im\left(-\frac{1}{w}\right) = \Im\left(\frac{-\bar{w}}{|w^2|}\right) = \Im\left(\frac{w}{|w|^2}\right) = \Im\left(\frac{T^n \gamma_0 z}{|T^n \gamma_0 z|^2}\right).$$

Para la desigualdad, consideramos $\gamma' = ST^n \gamma_0 \in SL_2(\mathbb{Z})$. Usando que $\Im(\gamma z) = \frac{\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2}$, para toda $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$\Im(T^n \gamma_0 z) = \Im(\gamma_0 z) = \frac{\Im(z)}{|j_{\gamma_0}(z)|^2} \geq \frac{\Im(z)}{|j_{\gamma'}(z)|^2} = \Im(\gamma' z) = \Im(ST^n \gamma_0 z).$$

□

Presentamos ahora el protagonista de la sección.

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| > 1,\ |\Re(z)| < \frac{1}{2} \right\}. \tag{2.1}$$

Proposición 2.6. *El abierto $\mathcal{D}$ es un dominio fundamental de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Demostración. Para probar a) consideraremos casos. Sea $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Si $c = 0$, se tiene que $ad = 1$, por tanto $a = d = \pm 1$, luego:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^b, \text{ o bien } \gamma = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -T^{-b} \Rightarrow \gamma z = z \pm b.$$

Entonces, si $b = 0$, $\gamma z = z$, luego $\gamma \in \{\pm I\}$ y permanecemos en $\mathcal{D}$ mediante $\pm I$. Si $|b| \geq 1$, como $z \in \mathcal{D}$, entonces $|\Re(\gamma z)| \geq ||b| - |\Re(z)|| > \frac{1}{2}$ y no nos encontramos en $\mathcal{D}$, respetando la definición.

Si $c \neq 0$ el proceso es más largo. Sean $z_1 \in \mathcal{D}$ y $z_2 = \gamma z_1$ Observamos primero que, por la simetría de γ y γ^{-1}, es lícito suponer $\Im(z_1) \leq \Im(z_2)$. Esto, según lo visto en el Corolario 1.4, implica que $|j_\gamma(z_1)| \leq 1$. Además, debido a las condiciones de $\mathcal{D}$, se tiene que la menor parte imaginaria posible se dará cuando la circunferencia unidad interseque a las rectas $\Re(z) = \pm\frac{1}{2}$. Entonces por $|z_1| = 1$ se tiene que $\frac{1}{4} + \Im(z)^2 = 1$, luego $\Im(z_1) > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces $1 \geq |j_\gamma(z_1)| \geq |c||\Im(z_1)| \geq |c|\frac{\sqrt{3}}{2}$, luego $|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, y como $c \in \mathbb{Z}$, necesariamente $c = \pm 1$.

Desarrollando $|j_\gamma(z_1)|$ se tiene que $1 \geq |j_\gamma(z_1)|^2 = (c\Re(z_1) + d)^2 + (c\Im(z_1))^2 = (\Re(z_1) \pm d)^2 + \Im(z_1)^2 \geq (\Re(z_1) \pm d)^2 + \frac{3}{4}$, luego $|\Re(z_1) \pm d| \leq \frac{1}{2}$, y como $\Re(z_1) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $d \in \mathbb{Z}$, se tiene que necesariamente $d = 0$. De la condición $ad - bc = 1$ se tiene que $b = \pm 1$. Así pues:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^a S; \text{ o bien } \gamma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = T^a(-S).$$

Entonces, como $z \in \mathcal{D}$ se tiene que $|z| > 1$. Puesto que $|Sz| = |\frac{1}{z}| < 1$, se tiene que Sz está en el disco unidad, y por tanto $Sz \notin \mathcal{D}$. Multiplicar por T^a resulta en una traslación horizontal de distancia a, de manera que permanece fuera de $\mathcal{D}$ independientemente del valor de a. Con esto queda cubierto a).

Veamos ahora que se cumple b). Para ello debemos mostrar que para cada $z \in \mathbb{H}$ existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\gamma z \in \overline{\mathcal{D}}$.

Por un lado, por el Lema 2.5 se tiene que $\Im(T^n\gamma_0 z) \geq \frac{\Im(T^n\gamma_0 z)}{|T^n\gamma_0 z|^2}$. Como $\Im(T^n\gamma_0 z) > 0$ entonces $|T^n\gamma_0 z| \geq 1$.

Por otro lado, veamos ahora que $T^n\gamma_0 z \in \mathcal{D}$. Para ello, consideremos la parte real y la imaginaria por separado.
Para la parte real, se tiene que $\Re(T^n\gamma_0 z) = \Re(\gamma_0 z) + n$. Seleccionando un n apropiado siempre podemos hacer que $\Re(\gamma_0 z) + n \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. Basta considerar $n = \lfloor \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \rfloor$, pues de esta manera se tiene que

$$\left\lfloor \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \right\rfloor \leq \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \leq \left\lfloor \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Luego restando $\lfloor \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \rfloor - \frac{1}{2}$ a las tres expresiones se obtiene

$$-\frac{1}{2} \leq \Re(\gamma_0 z) - \left\lfloor \Re(\gamma_0 z) + \frac{1}{2} \right\rfloor \leq \frac{1}{2}.$$

Consideremos ahora la parte imaginaria. Por lo visto en el Corolario 1.4, la parte imaginaria permanece en $\mathbb{H}$. Además, $|T^n\gamma_0 z| \geq 1$, de modo que se cumplen las condiciones para estar en $\overline{\mathcal{D}}$. Dado un $z \in \mathbb{H}$, por la minimización vista en el Lema 1.6, podemos escoger un γ_0 que minimice $|j_\gamma(z)|$. Entonces existe $w = T^n\gamma_0 z \in \overline{\mathcal{D}}$, luego $z = \gamma_0^{-1} T^{-n} w$. $\square$

Posteriormente, veremos en qué nos ayuda expresar $\mathbb{H}$ en términos del dominio fundamental.

CAPÍTULO 3

El espacio de formas modulares

El propósito de este capítulo es caracterizar las series de Eisenstein como formas modulares y las propiedades que se derivan de tal consideración. Comencemos con una definición.
Dada una función $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa periódica cuyo desarrollo de Fourier se expresa como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e(nz)$, definimos su *orden en el infinito* $n(f,\infty)$ como el supremo de los m tales que $a_n = 0$ para $n < m$. Si este supremo es negativo o $-\infty$ (que es, por convenio, el supremo de $\varnothing$) entonces la función "explota" en el infinito porque $e(nit)$ crece exponencialmente cuando $t \to +\infty$. Para evitar esta situación imponemos $n(f,\infty) \geq 0$. En otras palabras, que el desarrollo de Fourier sea $f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e(nz)$ para algún N no negativo. Según lo dicho, si $a_N \neq 0$ entonces $N = n(f,\infty)$.

3.1. Formas modulares y ceros

Veamos entonces la definición principal del capítulo. Se dice que $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa es una *forma modular de peso* k (en nuestro caso par no negativo) si satisface

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(-1/z) = z^k f(z) \qquad \text{y} \qquad n(f,\infty) \geq 0.$$

Si bien la definición se puede aplicar a funciones de manera más general, la restricción a pesos pares no negativos se debe a que en el caso de las series de Eisenstein los pesos impares conducen únicamente a la función nula. Denotaremos con $\mathcal{M}_k$ al conjunto de formas modulares para un peso k. Cabe destacar que, por todo lo visto hasta ahora, las series de Eisenstein son formas modulares.
También vale la pena observar que las dos primeras relaciones se generalizan y equivalen a $f(\gamma z) = j_\gamma^k(z) f(z)$ para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La función nula, que tiene $n(f,\infty) = \infty$, se considera forma modular de cualquier peso y así $\mathcal{M}_k$ se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. A lo largo del capítulo realizaremos un estudio de qué consecuencias tiene esto para las series, y cómo aprovecharnos de la estructura de espacio vectorial. Además, calcularemos la dimensión de los $\mathcal{M}_k$.

Presentemos un ejemplo relevante denominado la *función discriminante*:

$$\Delta(z) = \frac{1}{12^3}\big(E_4^3(z) - E_6^2(z)\big). \tag{3.1}$$

Veamos $\Delta \in \mathcal{M}_{12}$ y calculemos el primer coeficiente en su desarrollo de Fourier. Para ello, necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sean $f_k(z) \in \mathcal{M}_k$, $f_l(z) \in \mathcal{M}_l$. Entonces $f_k(z)f_l(z) \in \mathcal{M}_{k+l}$.*

Demostración. Para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

$$f_k(\gamma z) = j_\gamma^k(z) f_k(z), \quad f_l(\gamma z) = j_\gamma^l(z) f_l(z).$$

Luego $f_k(\gamma z)f_l(\gamma z) = (cz+d)^{k+l} f_k(z)f_l(z) \in \mathcal{M}_{k+l}$. Además, si $n(f_k(z), \infty) \geq 0$ y $n(f_l(z), \infty) \geq 0$, se tiene que $n(f_k(z)f_l(z), \infty) \geq 0$. $\square$

Consideremos entonces $\Delta(z)$ e intentemos expresarla en la forma de Fourier correspondiente, como la discutida en el Lema 2.4. Nos ayudaremos de los valores conocidos de la función zeta de Riemann (véase [15]). Por un lado:

$$E_4(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^4}{3!\zeta(4)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e(nz) = 1 + 240 e(z) + o(e(z)).$$

Por otro lado:

$$E_6(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^6}{3!\zeta(6)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_6(n) e(nz) = 1 + \frac{(2\pi i)^6}{6!\zeta(6)} e(z) + o(e(z)).$$

Entonces

$$E_4^3(z) = 1 + 720 e(z) + o(e(z)),\ E_6^2 = 1 - 1008 e(z) + o(e(z)), \tag{3.2}$$

por lo que

$$\Delta(z) = \frac{1}{12^3}(1 + 720 e(z) - 1 + 1008 e(z) + o(e(z))) = e(z) + o(e(z)). \tag{3.3}$$

Por lo visto en la Proposición 3.1, se tiene que $E_4^3 \in \mathcal{M}_{12}$ y $E_6^2 \in \mathcal{M}_{12}$, luego $\Delta \in \mathcal{M}_{12}$. Además, el primer coeficiente es $a_1 = 1$, por lo que $n(\Delta, \infty) = 1$.
Para acabar la sección, presentaremos una pequeña modificación del dominio fundamental hasta ahora visto, añadiéndole la frontera derecha y el infinito, que denotaremos

$$\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \cup \{\infty\} \cup \partial\mathcal{D} \cap \{\Re(z) \geq 0\}.$$

Lema 3.2. *Se tiene que $\bigcup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma \mathcal{D}^+ = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Con el objetivo de aplicar la Proposición 2.6, veamos que todo punto de $\overline{\mathcal{D}}$ es equivalente a un punto de $\mathcal{D}^+$ bajo la acción de algún elemento de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Observemos que

$$\partial\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| = 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| > 1, |\Re(z)| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Pretendemos obtener esta frontera en términos de $\mathcal{D}^+$ transformados por elementos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Para la recta vertical izquierda de $\partial\mathcal{D}$, donde $\Re(z) = -\frac{1}{2}$, podemos usar una traslación de una unidad hacia la izquierda de la recta vertical derecha, es decir, $T^{-1}(z)$, con $z \in \left\{|z| > 1, \Re(z) = \frac{1}{2}\right\} \subset \mathcal{D}^+$, obteniendo así la expresión en la forma deseada.
Queda entonces ver cómo obtener a partir de $\mathcal{D}^+$ y γ la circunferencia unidad. Solo es necesario considerar $C^- = \{|z| = 1, \Re(z) < 0\}$, ya que el resto ya está en $\mathcal{D}^+$. Sea $C^+ = \{|z| = 1\} \bigcap \mathcal{D}^+$. Para obtener C^- basta con aplicar $S(z)$ a C^-, lo que se ve más claro al pasar por la fómula de Euler: si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ entonces $S(e^{i\theta}) = -\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(\pi-\theta)}$, por lo que $S(C^+) = C^-$.
Como el interior no varía, se concluye que $\overline{\mathcal{D}} \subset \bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+$ y, por la Proposición 2.6, se tiene $\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\overline{\mathcal{D}} \subset \bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+$. Finalmente, para $\infty \in \mathcal{D}^+$ y γ como en (1.3), se tiene que

$$\gamma(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si c} \neq 0 \\ \infty & \text{si c} = 0. \end{cases}$$

Entonces $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+$. Por tanto, $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subset \bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+$.
Para ver la otra inclusión, tomamos $z \in \mathcal{D}^+$, y distinguimos casos. Si $z \in \mathbb{H}$, se tiene que $\gamma(z) \in \mathbb{H}$. Si $z = \infty$, entonces $\gamma(\infty) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Por tanto, lo que tenemos es que $\bigcup_{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\mathcal{D}^+ \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. □

3.2. Clasificación de los ceros y fórmula de valencia

Con el fin de ahondar en el estudio de las series de Eisenstein como fórmulas modulares, consideraremos la llamada *fórmula de valencia* que establece que, *para* $f \in \mathcal{M}_k - \{0\}$, *se cumple*

$$\sum_{z\in\mathcal{D}^+} w_z n(f, z) = \frac{k}{12} \qquad \textit{donde} \quad w_z = \begin{cases} 1/2 & \textit{si } z = i, \\ 1/3 & \textit{si } z = e^{\pi i/3}, \\ 1 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $z_0 \neq \infty$, la notación $n(f, z_0)$ indica el orden en z_0 de f, es decir, el mayor N tal que $f(z)/(z - z_0)^N$ es holomorfa. La suma es finita en el sentido de que $n(f, z)$ se anula excepto en un número finito de casos.
En esta sección, expondremos la demostración que nos lleva hasta la fórmula de valencia. Para mayor simplicidad, solo vamos a probar la fórmula en el subconjunto $\mathcal{M}_k^*$ de $\mathcal{M}_k - \{0\}$ formado por las f que no tienen ceros en la frontera de $\mathcal{D}$ y que cumplen $f(z) \to c \neq 0$ para $\Im(z) \to +\infty$. En este subconjunto la fórmula de valencia se escribe simplemente como

$$\sum_{z\in\mathcal{D}} n(f, z) = \frac{k}{12} \qquad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}_k^*.$$

Comencemos con el proceso de demostración, primero presentando un lema técnico.

Lema 3.3. *Sea* $f \in \mathcal{M}_k^*$. *La derivada logarítmica* $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ *satisface la ley de transformación*

$$g\left(-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = \frac{k}{z} + g(z).$$

Demostración. Derivando la identidad $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$ y aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$f'\left(-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) = kz^{k-1}f(z) + f'(z)z^k.$$

Dividiendo entre $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$ obtenemos el resultado deseado. □

Ahora consideramos la siguiente igualdad.

Lema 3.4. *Sea $f \in \mathcal{M}_k^*$ y $\mathcal{D}$ el dominio fundamental de (2.1). Entonces*

$$\sum_{z\in\mathcal{D}} n(f,z) = \frac{k}{12}.$$

Demostración. Consideramos la limitación de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}_a = \mathcal{D} \cap \{z \in \mathbb{H} : \Im(z) < a\}$, con $a > 0$ suficientemente grande para que f no tenga ceros en $\partial\mathcal{D}_a$ (recuérdese que $f(z) \to a_0 \neq 0$ cuando $\Im(z) \to \infty$), y orientamos dicha frontera positivamente. Entonces f es una función holomorfa en $\overline{\mathcal{D}}_a$, sus ceros son aislados en el compacto $\overline{\mathcal{D}}_a$ y, por lo tanto, tiene una cantidad finita de ceros en $\mathcal{D}_a$. Aplicando el Principio del argumento se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}_a} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in\mathcal{D}_a} n(f,z),$$

donde la parte derecha denota la suma de las multiplicidades de los ceros de la función en $\mathcal{D}_a$. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)$, con $a_0 \neq 0$, entonces $f'(z) = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e(nz)$, de manera que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tendrá un decaimiento exponencial cuando $\Im(z) \to \infty$. Así pues, es lícito realizar el paso al límite $a \to \infty$ para obtener

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in\mathcal{D}} n(f,z).$$

Veamos entonces que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{k}{12}$. Sea $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Como $f(z) = f(z+1)$, se deduce que $g(z) = g(z+1)$. Consideramos ahora $\partial\mathcal{D}$ estudiando las rectas verticales y el arco de circunferencia por separado.
Para las rectas verticales denotamos $r^+(t) = \frac{1}{2} + it$, $r^-(t) = -\frac{1}{2} + it$, con $t \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$, de manera que $r^+(t) = r^-(t) + 1$. Entonces, considerando la orientación hacia la derecha del arco de circunferencia y siguiéndola para los lados verticales, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{r^+} g(z)dz + \int_{r^-} g(z)dz &= i\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} g(r^+(t)) - g(r^-(t))dt \\ &= i\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} g(r^+(t)) - g(r^+(t)+1)dt = 0,\end{aligned}$$

por la periodicidad de la función $g(z)$. Entonces la suma de las integrales a lo largo de los segmentos se anula por su orientación opuesta y $\int_{\partial\mathcal{D}} g(z)dz = \int_C g(z)dz$, donde $C = \left\{e^{i\theta} : \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right\}$ y con la orientación inducida por $\partial\mathcal{D}$. La transformación

$w = -\frac{1}{z}$ deja invariante C, pero invierte su orientación, de manera que por el Lema 3.3 se tiene

$$\int_C g(z)dz = -\int_C g\left(\frac{-1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw = -\int_C \left(\frac{k}{w} + g(w)\right)dw = -k\int_C \frac{1}{w}dw - \int_C g(w)dw.$$

Por tanto,

$$\int_C g(z)dz = -\frac{k}{2}\int_C \frac{1}{w}dw = -\frac{ki}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = -\frac{ki}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{k\pi i}{6},$$

luego

$$\sum_{z\in\partial\mathcal{D}} n(f,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)dz = \frac{k\pi i}{12\pi i} = \frac{k}{12}.$$

□

El problema para pasar de $\mathcal{M}_k^*$ a $\mathcal{M}_k - \{0\}$ es que $\int_{\partial\mathcal{D}} g$ deja de tener sentido si f se anula en algún punto de $\partial\mathcal{D}$ y que también hay problemas de convergencia si g no se anula en el infinito. La solución es conceptualmente simple: lo único que se hace es modificar ligeramente el contorno $\partial\mathcal{D}$ para que evite los ceros de la frontera y por arriba se cierra con una línea horizontal muy alta $\{x + iN : |x| \leq \frac{1}{2}\}$ para eliminar los problemas de convergencia. Véase [8, §1.6.2], [2, Fig. 2.7] o [7, §1.5].

3.3. Dimensión de M_k

Una vez demostrada la fómula de valencia, podemos usarla, junto a otras herramientas, para obtener información sobre las dimensiones de los diferentes $\mathcal{M}_k$. Intentaremos primero probar que $\dim(\mathcal{M}_k) < \infty$. Para ello, veamos el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Sea $\{f_1(z), f_2(z), ..., f_m(z)\}$ una colección de funciones holomorfas tal que $f_i : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces, existe una combinación lineal no trivial de ellas que se anula en al menos $m-1$ puntos de $\mathbb{H}$.*

Demostración. Tomamos $m-1$ puntos distintos, $z_1, z_2, ..., z_{m-1} \in \mathbb{H}$. Buscamos entonces coeficientes $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in \mathbb{C}$ tal que la función $F(z) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(z)$ se anule en dichos puntos. La condición $F(z_j) = 0$ para $j = 1, ..., m-1$ da lugar al sistema homogéneo

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_i f_i(z_1) & = 0, \\ \sum_{i=1}^m a_i f_i(z_2) & = 0, \\ & ... \\ \sum_{i=1}^m a_i f_i(z_{m-1}) & = 0, \end{cases}$$

de m incógnitas y $m-1$ ecuaciones, así que tiene solución no trivial $a_1, ..., a_m$. Por tanto, F tiene al menos $m-1$ ceros en $\mathbb{H}$. □

Corolario 3.6. *El espacio $\mathcal{M}_k$ es de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que $\dim(\mathcal{M}_k) = \infty$. Tomamos m funciones linealmente independientes, $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathcal{M}_k$, con m arbitrariamente grande. Se tiene por la Proposición 3.5 que existe una combinación lineal no trivial con al menos $m-1$ ceros en $\mathbb{H}$, $F(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(z) \in \mathcal{M}_k - \{0\}$. Por otro lado, por la fórmula de valencia, se tiene que el número de ceros de $F(z)$ cumple que $\frac{k}{12} \geq m-1$ y entonces $m \leq \frac{k}{12}+1$, lo que contradice que m pueda ser arbitrariamente grande. Por tanto, $\dim(\mathcal{M}_k) < \infty$. □

Veamos algunos casos ilustrativos de $\mathcal{M}_k$. Comenzando por $k = 0$, y usando el Corolario 3.6, podemos ver que $\dim(\mathcal{M}_0) \leq 1$. Como las funciones constantes $f(z) = z_0 \in \mathbb{C}$ pertenecen a $\mathcal{M}_0$, podemos identificar cada función con su valor, de manera que $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$.
Para el caso $k = 2$ se tiene que, si $f \in \mathcal{M}_2 - \{0\}$, entonces $\frac{2}{12} = \sum_{z \in \mathcal{D}^+} w_z n(f, z) = \frac{1}{2}n(f, i) + \frac{1}{3}n(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) + ...$, donde todos los términos de la derecha son no negativos. Si $n(f, i) \geq 1$, entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$, lo cual es imposible, por lo que $n(f, i) = 0$. Análogamente, si $n(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) \geq 1$, la suma sería al menos $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$, que también es imposible. Luego, necesariamente, $n(f, e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$. Por tanto, $f(z)$ no podría tener ceros en $\mathcal{D}^+$, lo que contradice la fórmula de valencia y, por tanto, $\mathcal{M}_2 = \{0\}$.

Ahora, para $k = 4$ y $k = 6$ hemos visto que existen términos no idénticamente nulos de los espacios, los $E_4(z)$ y $E_6(z)$. Por otro lado, para $k = 8$ y $k = 10$, basta con basta con operar los anteriores y usar la Proposición 3.1 para ver que ninguno son espacios vacíos. Por tanto, para $k \in \{4, 6, 8, 10\}$ se tiene que $\dim(\mathcal{M}_k) = 1$.

El paso a dimensiones superiores requiere de ciertas sutilezas. Para ello, necesitaremos ver lo siguiente.

Proposición 3.7. *Para todo $z \in \mathbb{H}$, se cumple $\Delta(z) \neq 0$.*

Demostración. Vimos en (3.3) que el primer coeficiente no nulo de $\Delta(z)$ es $a_1 = 1$. Entonces, por la fórmula de valencia: $\frac{12}{12} = \frac{1}{2}n(\Delta, i) + \frac{1}{3}n(\Delta, e^{i\frac{\pi}{3}}) + n(\Delta, \infty) + ...$; y como el orden en el infinito es 1 y el resto son no negativos, se tiene que deben ser todos 0, es decir, no hay más ceros en el dominio fundamental, y por tanto no hay más ceros en general. □

Lema 3.8. *Sea una función $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa periódica con $n(f, \infty) \geq 0$. Entonces $f(\frac{1}{2\pi i}\log(z))$ es holomorfa en el disco unidad abierto, y para todo $b > 0$, el número de ceros de f en $\{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, \Im(z) \geq b\}$ es finito.*

Demostración. Estudiemos primero la holomorfía de la función logaritmo del interior de f. Consideramos $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ y definimos en él la función $g(z) = \frac{\log(z)}{2\pi i}$. Lo primero que debemos ver para la holomorfía es que la elección de la rama del logaritmo no afecta. Para considerar las distintas ramas expandimos el logaritmo, de manera que $\log_1(z)$ y $\log_2(z)$ sean dos ramas distintas. Entonces se tiene que $\log_2(z) = \log_1(z) + 2\pi i k$, con $k \in \mathbb{Z}$, luego

$$g_1(z) = \frac{\log_1(z)}{2\pi i}, \quad g_2(z) = \frac{\log_2(z)}{2\pi i} = \frac{\log_1(z)}{2\pi i} + k = g_1(z) + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como $f(z)$ es periódica, se tiene que $f(g_2(z)) = f(g_1(z)+k) = f(g_1(z))$, de manera que f no depende de la rama elegida.
Observamos ahora que

$$\Re(g(z)) = \frac{arg(z)}{2\pi} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \Im(g(z)) = -\frac{\log(|z|)}{2\pi}.$$

Si se tiene para z que $|z| < 1$, entonces $\Im(g(z)) > 0$ y la función g es tal que se cumple $g : \mathbb{D}^* \longrightarrow \{\Re(z) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \Im(z) > 0\} \subset \mathbb{H}$. Una vez seleccionada la rama del logaritmo, la función g es holomorfa en $\mathbb{D}^*$, y f también es holomorfa y otorga independencia de la rama, por lo que la composición $f \circ g : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es también holomorfa en $\mathbb{D}^*$. Para ver la holomorfía en 0, basta con comprobar qué tipo de singularidad es. Dada la definición de $g(z)$, la expresión local de Fourier de $f(g(z))$ queda:

$$f(g(z)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

En estas condiciones, $f \circ g$ se extiende de manera holomorfa a 0 si los coeficientes de Fourier negativos son todos nulos, es decir, si se cumple que $n(f,\infty) \geq 0$, que era una de las condiciones iniciales. Por tanto la singularidad es aislada evitable y se puede extender la holomorfía a $\mathbb{D}$.
Ahora, para $b > 0$, consideramos el dominio $S_b = \{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, \Im(z) \geq b\}$. Mediante el cambio de variable $w = e^{2\pi i z}$, la región S_b se identifica con $\mathbb{D}_b = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| \leq e^{-2\pi b}\}$, pero como $f \circ g$ se extiende holomórficamente a 0, podemos considerar el compacto $\overline{\mathbb{D}}_b = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq e^{-2\pi b}\} \subset \mathbb{D}$. Entonces, la función $f \circ g$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, sus ceros en el compacto $\overline{\mathbb{D}}_b$ son aislados y, por los teoremas de holomorfía clásicos, $f \circ g$ tiene una cantidad finita de ceros en $\overline{\mathbb{D}}_b$, lo que implica una cantidad finita de ceros en S_b. □

Consideremos ahora las aplicaciones
(3.4)

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C} \times \mathcal{M}_k & \longrightarrow & \mathcal{M}_{k+12} \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda E_{k+12} + f\Delta \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{M}_{k+12} & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathcal{M}_k \\ g & \longmapsto & \big(a_0, (g - a_0 E_{k+12})/\Delta\big), \end{array}$$

con $a_0 = \lim_{t\to\infty} g(it)$ (el coeficiente de Fourier de orden 0).
Veamos que son lineales, están bien definidas y son inversas.
Primero comprobemos que están bien definidas. Si $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times M_k$, por la Proposición 3.1 se tiene que $\Phi(\lambda, f) \in M_{k+12}$ y Φ está bien definida.
Hay que destacar que si $g(z) = a_0 + O(e(z))$, en particular con $z = it$ el límite cuando $t \longrightarrow \infty$ existe y es precisamente el término constante, de modo que el coeficiente a_0 queda bien definido. Para Ψ, por la Proposición 3.7, dividir por Δ no causa problemas, mientras que, por la Proposición 3.1, se tiene que los dominios de definición y llegada son correctos. Así pues, ambas funciones están bien definidas.
La linealidad es inmediata, pues todas las operaciones de las funciones son lineales. Para ver que son inversas, observemos por un lado que el coeficiente constante de E_{k+12} es 1, y el de $f\Delta$ es 0, de manera que el término constante de $\lambda E_{k+12} + f\Delta$ es λ y se tiene

$$\Psi(\Phi(\lambda, f)) = \left(\lambda, \frac{\lambda E_{k+12} + f\Delta - \lambda E_{k+12}}{\Delta}\right) = (\lambda, f).$$

Por otro lado

$$\Phi(\Psi(g)) = \Phi\left(a_0, \frac{g - a_0 E_{k+12}}{\Delta}\right) = a_0 E_{k+12} + \frac{g - a_0 E_{k+12}}{\Delta}\Delta = g,$$

por lo que son inversas.
La consecuencia de esto es que hemos establecido un isomorfimo entre los espacios, por lo que serán de la misma dimensión, es decir, se tiene que:

Corolario 3.9. $\dim(\mathcal{M}_k) + 1 = \dim(\mathcal{M}_{k+12})$

Ya quedaron determinadas las dimensiones para todos los pesos de k menores a 12, y con el Corolario 3.9 se pueden obtener para los mayores. Basta con descomponer en $k = 12q + r$, donde $q \in \mathbb{N}$ es el cociente y $0 \leq r < 12$ es el resto. Usando el corolario q veces, se tendrá que $\dim(\mathcal{M}_k) = q + \dim(\mathcal{M}_{k-12q})$. Entonces, considerando la anterior clasificación de dimensiones de peso $k < 12$, se tiene que

$$\dim(\mathcal{M}_k) = \begin{cases} 1 + \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } 12 \nmid k - 2, \\ \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } 12 \mid k - 2. \end{cases}$$

3.4. Base de $\mathcal{M}_k$

En esta sección demostraremos que la familia

$$\mathcal{B} = \left\{ E_4^j E_6^\ell \,:\, 4j + 6\ell = k \text{ con } j, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

constituye una base de $\mathcal{M}_k$ y observaremos qué sorprendentes propiedades y fórmulas podemos derivar de ello.
Pretendemos expresar los $\mathcal{M}_k$ mediante los conocidos E_4 y E_6. Para ello, consideremos qué condiciones debe cumplir k para expresarlo como sumas y productos de estos espacios.

Lema 3.10. *Para cualquier k par no negativo, el número de soluciones no negativas de la ecuación diofántica $4x + 6y = k$ coincide con la fórmula para $\dim \mathcal{M}_k$.*

Demostración. Intentamos encontrar una solución a la ecuación diofántica $k = 4x+6y$. Como k es par, se puede sustituir por $\frac{k}{2} = 2x + 3y$. Esta ecuación tiene solución pues gcd(2,3) $= 1$. Para encontrar la solución general buscamos una concreta:

$$3 = 2 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 2 \Rightarrow \frac{k}{2} = 3\,\frac{k}{2} + 2\left(-\frac{k}{2}\right).$$

Así, una solución particular es $(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$. Por tanto las soluciones generales son tal que $x = -\frac{k}{2} + 3t$; $y = \frac{k}{2} - 2t$, con $t \in \mathbb{Z}$. Como no podemos obtener espacios de dimensión negativa, necesitamos que $x \geq 0$, $y \geq 0$, por lo que

$$x = -\frac{k}{2} + 3t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{k}{6},\ y = \frac{k}{2} - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{k}{4} \Leftrightarrow t \in I_k := \left[\frac{k}{6}, \frac{k}{4}\right].$$

Por tanto, las soluciones enteras corresponderán a los valores $t \in I_k \bigcap \mathbb{Z}$, y el número de soluciones será $N_k = |I_k \bigcap \mathbb{Z}|$. Para que la solución siempre exista, basta que este intervalo siempre encierre un entero. Debemos además ver que el número de soluciones coincide con la $\dim(\mathcal{M}_k)$.
Ya hemos clasificado las dimensiones de los espacios con los casos con $k < 12$ inmediatamente después del Corolario 3.6. Veamos entonces que su dimensión coincide con el número de soluciones enteras en el intervalo, es decir, con N_k.
Si $k = 0$, la única solución posible es $t = 0$, resultando en $(x, y) = (0, 0)$. Si $k = 2$, $N_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ no encierra ningún entero, luego no existe solución. Para N_4, se tiene una única solución tal que $t = 1$, resultando en $(x, y) = (1, 0)$, que es el conocido $E_4(z)$. Similarmente para $k = 6$ solo es posible $t = 1$ y consecuentemente $(x, y) = (0, 1)$, resultando en el $E_6(z)$. Para $k = 8$, se tiene que el único valor válido es $t = 2$, de manera que $(x, y) = (2, 0)$, correspondiente con $E_4^2(z)$. Finalmente, para $k = 10$, $t = 2$ es la única solución, obteniendo $(x, y) = (1, 1)$. Queda entonces comprobado que, para los pesos pares tal que $0 \leq k < 12$, $N_k = \dim(\mathcal{M}_k)$.

El número de enteros en el intervalo para $k \geq 12$ es $N_k = \lfloor \frac{k}{4} \rfloor - \lceil \frac{k}{6} \rceil + 1$. Entonces podemos considerar $k' = k - 12$ de manera que

$$N_k = \left\lfloor \frac{k' + 12}{4} \right\rfloor - \left\lceil \frac{k' + 12}{6} \right\rceil + 1 = \left(\left\lfloor \frac{k'}{4} \right\rfloor + 3 \right) - \left(\left\lceil \frac{k'}{6} \right\rceil - 2 \right) + 1 = N_{k'} + 1.$$

Este proceso se puede repetir hasta que se obtenga uno de los casos donde $k' < 12$, y es además finito. Entonces $N_k = N_{k-12} + 1$ para todo $k \geq 12$. Por otra parte, por el Corolario 3.9, se tiene que $\dim(\mathcal{M}_k) = \dim(\mathcal{M}_{k-12}) + 1$, y como $N_k = \dim(\mathcal{M}_k)$ para los casos $0 \leq k < 12$, se deduce por inducción sobre k que $N_k = \dim(\mathcal{M}_k)$ para k par. $\square$

Lema 3.11. *Los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Partimos de probar la existencia de un polinomio $P(x) = \sum_{m=0}^{d} a_m x^m$ no idénticamente nulo tal que $P(E_4^3/E_6^2) = 0$. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente dependientes, se tiene que existe una combinación no trivial tal que $\sum_{j,l} a_{j,l} E_4^j(z) E_6^l(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$, con $k = 4j + 6l$. Por otro lado, por el Lema 3.10, se tiene que, dada una solución particular $k = 4j_0 + 6l_0$, la solución general responde a $j = j_0 + 3t$, $l = l_0 - 2t$, con $t \in I_k \bigcap \mathbb{Z}$, luego podemos reescribir el polinomio como

$$0 = \sum_{t \in I_k \bigcap \mathbb{Z}} a_t E_4^{j_0+3t} E_6^{l_0-2t} = E_4^{j_0} E_6^{l_0} \sum_{t \in I_k \bigcap \mathbb{Z}} a_t \left(\frac{E_4^3}{E_6^2} \right)^t,$$

donde $a_t := a_{j_0+3t, l_0-2t}$. Así,

$$0 = E_4^{j_0} E_6^{l_0} \sum_{t \in I_k \bigcap \mathbb{Z}} a_t \left(\frac{E_4^3}{E_6^2} \right)^t = E_4^{j_0} E_6^{l_0} P \left(\frac{E_4^3}{E_6^2} \right).$$

Como ni $E_4^{j_0}$ ni $E_6^{l_0}$ se anulan, necesariamente debe existir el polinomio no nulo tal que $P\left(\frac{E_4^3}{E_6^2}\right) = 0$.

Ahora, veamos que el polinomio $Q(x) = (x-12^3)P\left(\frac{x}{x-12^3}\right)$ tampoco es idénticamente nulo y $Q(E_4^3/\Delta) = 0$. Observamos que $Q(x)$ no es nulo, pues $P(x)$ no lo era y el factor $(x - 12^3)$ tampoco lo es. Consideramos ahora la reescritura de Δ como

$$\Delta = \frac{(E_4^3 - E_6^2)}{12^3} \Rightarrow \frac{E_4^3}{E_6^2} = \frac{\frac{E_3^4}{\Delta}}{\frac{E_4^3}{\Delta} - 12^3}.$$

Entonces se tiene que

$$Q\left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right) = \left(\frac{E_4^3}{\Delta} - 12^3\right) P\left(\frac{\frac{E_4^3}{\Delta}}{\frac{E_4^3}{\Delta} - 12^3}\right) = \left(\frac{E_4^3}{\Delta} - 12^3\right) P\left(\frac{E_4^3}{E_6^2}\right) = 0.$$

Esto demuestra que $Q(x)$ se anula en $\frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Pero $\frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$ toma infinitos valores en $\mathbb{H}$. Para verlo, observemos qué ocurre con $\frac{E_4^3(it)}{\Delta(it)}$ cuando $t \to \infty$. Recordando la expresión de Fourier de estas funciones discutida en (3.3) se puede ver que

$$\frac{E_4^3(it)}{\Delta(it)} = \frac{1 + 720e(it) + O(e(it))}{e(it) + O(e(it))} = \frac{1 + O(e(it))}{e(it)(1 + O(e(it)))}.$$

Ahora, si $t \to \infty$, se tiene que $e(it) \to e^{-\infty}$, luego en realidad Q se anula en una cantidad infinita de puntos, lo que es imposible a no ser que $Q(x) \equiv 0$, llevando hasta la contradicción.

$\square$

Entonces los elementos del conjunto $\mathcal{B}$ que hemos considerado son linealmente independientes y, además, su cardinal es $\dim(\mathcal{M}_k)$, por lo que forman una base de $\mathcal{M}_k$.

Veamos un par de ejemplos para ilustrar el verdadero alcance de estas propiedades en relación con los espacios $\mathcal{M}_8$ y $\mathcal{M}_{10}$. Anteriormente, descubrimos que $\dim(\mathcal{M}_8) = \dim(\mathcal{M}_{10}) = 1$. Por tanto, basta encontrar una forma modular no nula en cada uno de ellos para determinar completamente dichos espacios.
Por la Proposición 3.1, se tiene que $E_4^2(z) \in \mathcal{M}_8$ y que $E_4(z)E_6(z) \in \mathcal{M}_{10}$. Por lo tanto, $\{E_4^2\}$ es base de $\mathcal{M}_8$, y $\{E_4E_6\}$ es base de $\mathcal{M}_{10}$. Por otra parte, $E_8(z) \in \mathcal{M}_8$ y $E_{10}(z) \in \mathcal{M}_{10}$, por lo que existen constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tal que $E_8 = \lambda E_4^2$ y $E_{10} = \mu E_4 E_6$. Comparando los coeficientes constantes de sus desarrollos de Fourier, se tiene que $\lambda = \mu = 1$, y por lo tanto $E_8 = E_4^2$ y $E_{10} = E_4E_6$.
Cabe destacar que estas conclusiones son realmente sorprendentes, pues un simple argumento basado únicamente en dimensiones permite deducir las identidades obtenidas. Estas igualdades no son evidentes a partir de las definiciones, y muestran que conocer la dimensión de los espacios $\mathcal{M}_k$ proporciona más información de la que se esperaría inicialmente sobre los propios elementos de M_k

CAPÍTULO 4

El caso de peso 2

Como hemos visto, no se puede afirmar la convergencia absoluta de las series de Eisenstein de peso 2 en general. Sin embargo, en este capítulo veremos que se pueden imponer órdenes de sumación que llevan a una convergencia condicional, que permite estudiar las series de peso 2 como un caso excepcional de las series hasta ahora conocidas.

Para $k > 2$ par, separando los términos con $m = 0$ en la definición de G_k, se tiene

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{\vec{0}\}} (mz+n)^{-k} = 2\zeta(k) + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (mz+n)^{-k}.$$

Por tanto, una definición natural de G_2 es

$$G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (mz+n)^{-2}, \tag{4.1}$$

donde aquí y en lo sucesivo entendemos $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ como $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}$. Se define también

$$E_2(z) = (2\zeta(2))^{-1}G_2(z) = 3\pi^{-2}G_2(z).$$

Además, si bien la Proposición 2.4 se formuló para $k > 2$, los cálculos que conducen al desarrollo de Fourier siguen siendo válidos para la definición (4.1) de $G_2(z)$, de manera que se tiene

$$G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e(nz). \tag{4.2}$$

Esta expresión no presenta problemas de convergencia, pues la serie de la derecha converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{H}$, ya que $|e(nz)| = e^{-2\pi n \Im(z)}$ decrece exponencialmente con n, mientras que $\sigma_1(n)$ tiene un crecimiento polinómico.

Nuestro primer objetivo es estudiar la convergencia del caso de peso 2, y bajo qué condiciones se da. Para ello, consideramos la adición de un nuevo término en su expresión, basado en un antiguo método para acelerar series. Tal término viene dado por la serie

$$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0} a_n(mz) \qquad \text{donde} \quad a_n(z) = (z+n-1)^{-1} - (z+n)^{-1}. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1. *Para todo $z \in \mathbb{H}$ se tiene que*

$$G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((mz+n)^{-2} - a_n(mz) \right),$$

donde la serie doble converge absolutamente en $\mathbb{H}$.

Demostración. Veamos primero que la serie no se ve alterada por la adición del nuevo término. Fijado un m, observamos que la suma parcial

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n(mz) = \sum_{n=-N}^{N} \left((mz+n-1)^{-1} - (mz+n)^{-1} \right)$$

es telescópica, de manera que

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n(mz) = (mz-N-1)^{-1} - (mz+N)^{-1}.$$

Entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(mz) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n(mz) = \lim_{N \to \infty} \left((mz-N-1)^{-1} - (mz+N)^{-1} \right) = 0,$$

lo que implica que $\sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(mz) = 0$. De esta manera:

$$\begin{aligned} G_2(z) = G_2(z) - \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(mz) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((mz+n)^{-2} - a_n(mz) \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(mz+n)^2} - \frac{1}{mz+n-1} + \frac{1}{mz+n} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{-1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}. \end{aligned}$$

El módulo de los elementos de la serie es menor o igual que $C(m^2+n^2)^{-1}|m|^{-1}$ con C una constante que depende de z, por ejemplo $C = \Im(z)^{-3}(|z|^2+1)$. Además, tenemos que $(m^2+n^2)^{-1}|m|^{-1} \leq |m|^{-3}$ ya que $m^2+n^2 \geq m^2$. Como además se da que $\sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m^2+n^2)^{-1}|m|^{-1}$ converge, la serie doble converge absolutamente para cualquier $z \in \mathbb{H}$. Este argumento sigue unos principios similares a los discutidos en el Teorema 1.2. □

4.1. Propiedades básicas.

Es fácil ver que la invarianza por traslaciones enteras se mantiene igual siguiendo la misma demostración original del Lema 1.3 tal que $G_2(z) = G_2(z+1)$. Sin embargo, no se puede decir lo mismo para $G_2\left(-\frac{1}{z}\right)$, pues utiliza una reorganización de los términos que requiere de la convergencia absoluta no condicional.

El siguiente paso para ver cómo se modifica esta propiedad es obtener una nueva expresión para $G_2\left(-\frac{1}{z}\right)$. Para ello, usamos la expresión del Teorema 4.1. Se tiene que

$$G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\left(n-\frac{m}{z}\right)^{-2} - a_n\left(-\frac{m}{z}\right)\right).$$

El primer término de la serie se expande a

$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{nz-m}{z}\right)^{-2} = z^2\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(nz-m)^{-2}.$$

Aquí, reorganizamos como en el Lema 1.3 y sumamos y restamos el término con $n=0$, de manera que nos queda

$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{nz-m}{z}\right)^{-2} = z^2\left(G_2(z) - \sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz)^2}\right) = z^2G_2(z) - \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m^2} = z^2G_2(z) - \frac{\pi^2}{3}.$$

Ahora, el segundo término de la serie verifica que

$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_m\left(-\frac{m}{z}\right) = S\left(-\frac{1}{z}\right),$$

y, consecuentemente, se tiene que

$$G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2G_2(z) - S\left(-\frac{1}{z}\right). \tag{4.4}$$

Así pues, una forma de obtener la expresión buscada radica en evaluar $S\left(-\frac{1}{z}\right)$. Con los siguientes resultados, veremos que es posible obtener una evaluación explícita. Para ello, necesitamos algunos pasos intermedios.

Lema 4.2. *Sea la función* $g(z) = -\pi\cot(\pi z) + z^{-1}$ *y* $\Omega = (\mathbb{C}-\mathbb{Z})\cup\{0\}$. *Entonces* $\sum_{m\neq 0}(m+z)^{-2} = g'(z)$ *para* $z\in\Omega$.

Demostración. Primero, obsérvese que $g(z)$ se extiende a una función holomorfa en el abierto Ω. Derivando $g(z)$ allí y expresando la secante resultante en términos de la fórmula de Euler, se observa que

$$g'(z) = \pi^2\operatorname{sen}^{-2}(\pi z) - \frac{1}{z^2} = -\frac{\pi^2 4e(z)}{(1-e(z))^2} - \frac{1}{z^2}.$$

Por otro lado, por el Lema 2.2 se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2} = -\frac{4\pi^2 e(z)}{(1-e(z))^2}.$$

Cambiando n por m se obtiene el resultado. $\square$

Con el siguiente resultado obtendremos una manera explícita de evaluar $S\left(-\frac{1}{z}\right)$.

Proposición 4.3. *Para todo $z \in \mathbb{H}$ se cumple la siguiente igualdad*

$$S(z) = z^{-1} \lim_{N\to+\infty} \left(g\left(\frac{N}{z}\right) - g\left(\frac{-N-1}{z}\right)\right)$$

Demostración. Recordemos que

$$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\neq 0} a_n(mz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\neq 0} \left((mz+n-1)^{-1} - (mz+n)^{-1}\right).$$

Usando la identidad $\frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} = \int_0^\infty \left((A+t)^{-2} - (A+1+t)^{-2}\right) dt$, se obtiene la igualdad

$$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\neq 0} \int_0^\infty \left((mz+n-1+t)^{-2} - (mz+n+t)^{-2}\right) dt.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(w) = w^{-2}$, se tiene que

$$(mz+n-1+t)^{-2} - (mz+n+t)^{-2} = O(|m|^{-3}),$$

que converge uniformemente en $t \geq 0$.

Como $\sum_{m\neq 0} |m|^{-3}$ converge, el criterio M de Weierstrass implica la convergencia uniforme respecto de t, lo que permite intercambiar suma e integral.

Por lo tanto, factorizando en z, se puede escribir

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \sum_{m\neq 0} \left((mz+n-1+t)^{-2} - (mz+n+t)^{-2}\right) dt \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \sum_{m\neq 0} \left(\left(m + \frac{n-1+t}{z}\right)^{-2} - \left(m + \frac{n+t}{z}\right)^{-2}\right) dt. \end{aligned}$$

Usando ahora la función $g(z)$ del Lema 4.2, se tiene que

$$S(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \left(g'\left(\frac{n-1+t}{z}\right) - g'\left(\frac{n+t}{z}\right)\right) dt.$$

Aplicamos el cambio de variable $u = \frac{n+t}{z}$ (análogamente $u = \frac{n-1+t}{z}$) y por el Teorema Fundamental del Cálculo se obtiene que

$$\int_0^\infty \left(g'\left(\frac{n-1+t}{z}\right) - g'\left(\frac{n+t}{z}\right)\right) dz = z\left(g\left(\frac{n}{z}\right) - g\left(\frac{n-1}{z}\right)\right).$$

De nuevo, usando el paso al límite y percatándose de que es una suma telescópica, se llega a

$$S(z) = \frac{1}{z} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(g\left(\frac{n}{z}\right) - g\left(\frac{n-1}{z}\right)\right) = \frac{1}{z} \lim_{N\to\infty} \left(g\left(\frac{N}{z}\right) - g\left(\frac{-N-1}{z}\right)\right).$$

□

Con estas herramientas procedemos a la evaluación de $S\left(-\frac{1}{z}\right)$.

Teorema 4.4. *Para todo z en $\mathbb{H}$, se tiene que*

$$G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z.$$

Demostración. Consideremos la función $g(z)$ del Lema 4.2. Obsérvese que $g(-z) = -g(z)$, luego se tiene que $g\left(\frac{-N-1}{z}\right) = g\left(\frac{N+1}{z}\right)$. Entonces, por la Proposición 4.3

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{z} \lim_{N\longrightarrow\infty} \left(g\left(\frac{N}{z}\right) + g\left(\frac{N+1}{z}\right)\right) = \frac{2}{z} \lim_{N\longrightarrow\infty} g\left(\frac{N}{z}\right) \\ &= \frac{2}{z} \lim_{N\longrightarrow\infty} \left(\frac{-\pi(1+e^{\frac{2\pi i N}{z}})}{i\left(1-e^{\frac{2\pi i N}{z}}\right)} + \frac{z}{N}\right) = \frac{2}{z}(i\pi)(-1) = -\frac{2\pi i}{z}. \end{aligned}$$

Así pues

$$S\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\pi i z,$$

y por (4.4) se deduce el resultado. □

Podemos extender las propiedades al caso de las series normalizadas mediante el siguiente corolario.

Corolario 4.5. *Para todo z en $\mathbb{H}$, se tiene*

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 E_2(z) - \frac{6iz}{\pi}.$$

Demostración. Tenemos, por (1.2) y usando el valor de la función Zeta de Riemann, que

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{\pi^2} G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 E_2(z) - \frac{6iz}{\pi}.$$

□

Esta es la correcta expresión para $G_2\left(-\frac{1}{z}\right)$ y $E_2\left(-\frac{1}{z}\right)$. Observamos que con esto es fácil obtener ciertos resultados, como por ejemplo los casos

$$G_2(i) = G_2\left(-\frac{1}{i}\right) = i^2 G_2(i) + \frac{2\pi i}{i} \Rightarrow G_2(i) = \pi,$$

$$E_2(i) = -E_2(i) - \frac{6i^2}{\pi} \Rightarrow E_2(i) = \frac{3}{\pi}.$$

4.2. Forma producto de la función determinante. Consecuencias.

Nuestro siguiente objetivo será obtener una fórmula debida a Jacobi para la función determinante Δ:

$$\Delta(z) = P(z) \qquad \text{con} \quad P(z) = e(z) \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - e(nz)\big)^{24}. \tag{4.5}$$

Para obtener esta formula, realizaremos una prueba indirecta. Nuestro primer paso será relacionar $P(z)$ con $E_2(z)$ y deducir que $P(z) \in \mathcal{M}_{12}$.

Proposición 4.6. *Para todo $z \in \mathbb{H}$, la función $P(z)$ cumple que*

$$\frac{P'(z)}{2\pi i P(z)} = E_2(z).$$

Demostración. Primero consideramos la expresión inicial como una derivada logarítmica:

$$\frac{P'(z)}{2\pi i P(z)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(\log\left(P(z)\right)\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(2\pi i z + \sum_{n=1}^{\infty} 24 \log(1 - e(nz))\right).$$

Ahora, para poder derivar término a término, consideramos un compacto $K \subset \mathbb{H}$ de manera que existe algún $y > 0$ tal que $\Im(z) \geq y$ para todo z en K. Entonces, se tiene que $|e(nz)| < e^{-2\pi n y}$. Además,

$$\left|\frac{d}{dz}\log(1 - e(nz))\right| = \left|\frac{-2\pi i n e(nz)}{1 - e(nz)}\right| \leq C n e^{-2\pi n y},$$

para cierta constante $C > 0$ independiente de n y z. Como $\sum_{n\geq 1} n e^{-2\pi n y}$ converge, el criterio M de Weierstrass implica que la serie coverge uniformemente en K y se puede derivar término a término. De esta manera, se tiene que

$$\frac{P'(z)}{2\pi i P(z)} = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-e(nz)2\pi i n}{(1 - e(nz))2\pi i} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n e(nz)}{1 - e(nz)}.$$

Como $|e(nz)| < 1$, podemos usar la suma geométrica $\frac{e(nz)}{1-e(nz)} = \sum_{k=1}^{\infty} e(nz)^k = \sum_{k=1}^{\infty} e(knz)$, con $k \in \mathbb{N}$, obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n e(nz)}{(1 - e(nz))} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e(knz) n.$$

Para cada n, tenemos sus múltiplos por los naturales kn, por lo que reorganizamos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e(knz) n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n|m}^{\infty} n\right) e(mz) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) e(mz).$$

Así que, volviendo a la expresión original, acabamos con

$$\frac{P'(z)}{2\pi i P(z)} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)e(nz) = E_2(z).$$

□

Teorema 4.7. *La función $P(z)$ pertenece a $\mathcal{M}_{12}$.*

Demostración. Usando la Proposición 4.6 y el Corolario 4.5 se obtiene

$$\begin{aligned} z^{-2}\frac{P'\left(-\frac{1}{z}\right)}{P\left(-\frac{1}{z}\right)} &= z^{-2}2\pi i E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{-2}2\pi i\left(z^2E_2(z) - \frac{6iz}{\pi}\right) = 2\pi i E_2(z) + \frac{12}{z} \\ &= \frac{P'(z)}{P(z)} + \frac{12}{z} = \frac{d}{dz}\left(\log(P(z)) + 12\log(z)\right) = \frac{d}{dz}\left(\log(P(z)z^{12})\right) \\ &= \frac{(z^{12}P(z))'}{z^{12}P(z)}. \end{aligned}$$

De aquí, podemos observar que

$$\frac{d}{dz}\left(\log P\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{d}{dz}\left(\log\left(P(z)z^{12}\right)\right).$$

Por tanto, existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$P\left(-\frac{1}{z}\right) = cz^{12}P(z).$$

Tomando $z = i$ se obtiene que $c = 1$, por lo que $P\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12}P(z)$. Además, se tiene que

$$P(z+1) = e(z)e(1)\prod_{n}^{\infty}(1 - e(nz) - e(1)) = P(z).$$

Como $z \in \mathbb{H}$, entonces $|e^{2\pi izn}| < 1$, luego los términos de $P(z)$ convergen, y como cada factor en su expresión es holomorfo, $P(z)$ lo es.
Es decir, $P(z)$ cumple todas las propiedades de las formas modulares de peso 12 y efectivamente $P(z) \in \mathcal{M}_{12}$. □

Teorema 4.8. *Para todo $z \in \mathbb{H}$, se tiene que $\Delta(z) = P(z)$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}$ y que existe la correspondencia biyectiva definida en (3.4)

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{12} \\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & \lambda E_{12} + \mu\Delta. \end{array}$$

Como hemos visto, $P(z) \in \mathcal{M}_{12}$. Por tanto, necesariamente existen $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ tal que $P(z) = \lambda E_{12}(z) + \mu\Delta(z)$. Observamos que $P(z) = e(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e(nz))$ no tiene término independiente de $e(z)$ en su expresión. Sin embargo, mediante la expresión usual de las series de Eisenstein normalizadas, es claro que $E_{12}(z)$ sí tiene tal término, de manera que necesariamente $\lambda = 0$. Entonces $P(z) = \mu\Delta(z)$.

Para obtener μ, escribimos $P(z) = e(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-e(nz))^{24} = e(z) + O(e(2z))$ y $\Delta(z) = \frac{1}{12^3}\left(E_4^3(z) - E_6^2(z)\right)$. Por lo visto en (3.2), se tiene que

$$E_4^3(z) = 1 + 720(z) + O(e(2z)) \quad \text{y} \quad E_6^2 = 1 - 1008e(z) + O(e(2z)),$$

luego $\Delta(z) = e(z) + O(e(2z))$. Comparando el primer coeficiente con la expresión de $P(z)$, queda claro que $\mu = 1$. □

4.3. Algunas ecuaciones diferenciales

Ramamujan se percató de que las series de Eisenstein satisfacen ecuaciones diferenciales sencillas. Veamos como última parte del trabajo una de tales ecuaciones.

Proposición 4.9. *La función $F(z) = \pi E_2^2(z) + 6iE_2'(z)$ pertenece a $\mathcal{M}_4$.*

Demostración. Veamos que cumple cada una de las propiedades de una forma modular de peso 4. Para ver la holomorfía, recordamos que si una función es holomorfa en un dominio abierto como es $\mathbb{H}$, es infinitamente holomorfa en este, de manera que su derivada también es holomorfa. Aplicando esto a $E_2(z)$ podemos obtener la holomorfía de $F(z)$.
Por otro lado, $F(z) = F(z+1)$ se obtiene directamente aplicando la regla de la cadena. Además, se tiene que

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2E_2(z) - \frac{6iz}{\pi},$$

luego

$$E_2'\left(-\frac{1}{z}\right)z^{-2} = 2zE_2(z) + E_2'(z)z^2 - \frac{6i}{\pi},$$

por lo que se tiene que

$$F\left(-\frac{1}{z}\right) = \pi E_2^2\left(-\frac{1}{z}\right) + 6iE_2'\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4\pi E_2^2(z) + z^4E_2'(z)6i = z^4F(z).$$

Queda entonces ver su orden en el infinito. A partir del desarrollo de Fourier de $E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)e(nz)$, podemos derivar término a término dado que se da convergencia absoluta para todo $z \in \mathbb{H}$, de manera que queda

$$E_2'(z) = -48\pi i\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_1(n)e(nz) = -48\pi i e(z) + O(e(2z)).$$

Entonces, el orden en el infinito de $E_2'(z)$ es 1. Teniendo en cuenta que $E_2^2(z) = 1 + O(e(z))$, se tiene que $F(z) = \pi + O(e(z))$, de manera que su coeficiente constante es no nulo. En consecuencia, $n(F;\infty) = 0$ y se verifica la condición de holomorfía en el infinito, cumpliendo la última condición para pertenecer a $\mathcal{M}_4$. □

Corolario 4.10. *$E_2(z)$ es solución particular de la ecuación diferencial*

$$6iy'(z) + \pi y^2(z) = \pi E_4(z).$$

Demostración. Recordemos que $\dim(\mathcal{M}_4) = 1$, y por la Proposición 4.9, se tiene que $F(z) \in \mathcal{M}_4$, de manera que $F(z) = \lambda E_4(z)$ para un $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerando los coeficientes constantes de cada una de las expresiones, se tiene que

$$\lambda E_4(z) = \lambda + O(e(z)), \quad F(z) = \pi + O(e(z)),$$

y comparando los términos constantes se obtiene que $\lambda = \pi$. Entonces

$$F(z) = \pi E_2^2(z) + 6iE_2'(z) = \pi E_4(z).$$

□

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.

[2] T. M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[3] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf, 2019.

[5] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[6] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[7] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[8] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). https://mdave16.github.io/notes/Modular%20Forms%20-%20Marc%20Masdeu.pdf, 2015.

[9] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. With a foreword by T. Tao.

[10] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[11] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[12] Wikipedia contributors. Fundamental domain — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fundamental_domain&oldid=1307704781, 2025. [Online; accessed 2-November-2025].

[13] Wikipedia contributors. Group action — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Group_action&oldid=1304854793, 2025. [Online; accessed 15-August-2025].

[14] Wikipedia contributors. Kummer's transformation of series — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kummer%27s_transformation_of_series&oldid=1279130702, 2025. [Online; accessed 16-March-2026].

[15] Wikipedia contributors. Particular values of the Riemann zeta function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function&oldid=1316608585, 2025. [Online; accessed 2-November-2025].

[16] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.