Entender por completo el modelo matemático del tema de esta hoja llevaría demasiado tiempo y por eso solo te daré una descripción muy somera y parcial de lo que motiva el problema que vamos a abordar. Sugiero que en tu trabajo sigas la misma política. Si quieres incluir más información, la introducción de [1] te puede servir de ayuda.

Un filamento vorticial es una especie de curva singular que se puede formar en un fluido. Dentro de los gases un ejemplo típico son los anillos de humo y dentro de los líquidos quizá hayas visto vídeos de delfines jugando con ellos[1]. Desde hace más de cien años, comenzando con [3], se han estudiado las ecuaciones que rigen la evolución de estos objetos. En [2] se encontró una relación con una ecuación que tiene cierto parecido con la ecuación paraxial que usaste el capítulo anterior y por eso no parece descabellado que aparezcan sumas de Gauss. En esta línea, dos investigadores españoles estudiaron hace unos años en [1] la evolución de los filamentos vorticiales que en el instante inicial vienen dados por un polígono regular de M lados y, usando sumas de Gauss, concluyeron que para tiempos dados por múltiplos racionales de $2\pi/M^2$ el filamento se transforma en un nuevo polígono siguiendo la regla:

$$t = \frac{2\pi a}{qM^2} \quad \text{con } q \text{ impar} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{l}\text{polígono alabeado}^2\text{de } qM \text{ lados iguales y} \\ \text{ángulo constante } \rho \text{ entre lados contiguos.}\end{array}$$

Aquí se sobreentiende que a/q es irreducible, aunque a y M^2 pueden tener factores comunes. También consideraron el caso q par que es ligeramente distinto. No lo discutiremos aquí por brevedad. Esto es, en toda la hoja q será siempre un entero positivo impar.

El ángulo ρ tiene que ver con las sumas de Gauss de una forma en principio complicada. La siguiente fórmula, que será nuestro punto de partida, no está escrita en [1], pero se deduce, con algún esfuerzo, de lo que se explica en su tercera sección:

$$\sum_{k=0}^{(q-1)/2} T_k \cos^{q-2k}\left(\frac{\rho}{2}\right) \operatorname{sen}^{2k}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{M} \tag{1}$$

donde $T_0 = 1$ y para $k > 0$

$$T_k = \sum_{0 \le n_1 < \cdots < n_{2k} < q} \cos\left(\theta_{n_1} - \theta_{n_2} + \cdots + \theta_{n_{2k-1}} - \theta_{n_{2k}}\right) \qquad \text{con} \qquad e^{i\theta_n} = \frac{G(-a, n, q)}{\sqrt{q}}.$$

Los autores del trabajo conjeturaron [1, (25)] que ρ admite la fórmula sencilla:

$$\rho = 2 \arccos\left(\sqrt[q]{\cos(\pi/M)}\right). \tag{2}$$

Por cierto, los lados se consideran como vectores orientados y ρ es el ángulo entre vectores consecutivos, por eso para $a/q = 0/1$ (el tiempo inicial) sale $\rho = 2\pi/M$ en vez del $\rho = \pi - 2\pi/M$

[1] Por ejemplo, `https://www.youtube.com/watch?v=trA05LXyjtI`.

[2] Un *polígono alabeado* es una línea poligonal cerrada en tres dimensiones. Es decir, el polígono que se describe es algo así como un polígono regular en el que los vértices no necesariamente están todos en el mismo plano [5].

que quizá te resulte más natural (es decir, es el ángulo externo en lugar del interno [4]). Cuando M es grande ρ es pequeño y el polígono tiende a ser una circunferencia.

La prueba de (2) acaba de salir publicada y el propósito de esta hoja es que la obtengas completando los ejercicios sin mirar la referencia donde se ha probado (que no te doy). La demostración es breve, aunque en absoluto trivial. Independientemente de lo que te cueste, esta hoja debería resultar más corta que cualquiera de las anteriores.

El siguiente ejercicio es muy tonto, solo para que te familiarices con la notación.

1) Explica por qué los θ_n son números reales, por qué podemos suponer $0 \le \theta_n < 2\pi$ y por qué la conjetura (2) se sigue si demostramos $T_k = 0$ para $k > 1$.

En definitiva, todo el trabajo en esta hoja consiste en probar que unas sumas construidas de una manera muy complicada a partir de las sumas de Gauss se anulan. El primer paso es simplificarlas un poco. Los θ_n dependen de propiedades aritméticas finas relacionadas con residuos cuadráticos, sin embargo, el siguiente ejercicio muestra que hay una expresión para T_k que las evita y que recuerda a la propia definición de las sumas de Gauss. En lo sucesivo, sin repetirlo cada vez, suponemos k entero entre 1 y $(q-1)/2$, en consonancia con el rango indicado en (1) excluyendo $k = 0$.

2) Con lo que sabes de la evaluación de las sumas de Gauss, prueba que

$$T_k = \Re(E_k) \qquad \text{con} \qquad E_k = \sum_{0 \le n_1 < \cdots < n_{2k} < q} e\Big(\frac{b}{q}(n_1^2 - n_2^2 + \cdots + n_{2k-1}^2 - n_{2k}^2)\Big)$$

con cierto entero b tal que b/q es irreducible.

Nuestro objetivo pasa a ser ahora probar $\Re(E_k) = 0$ de donde se deduce la conjetura (2). El plan es hallar primero una fórmula explícita para E_1 que implica $\Re(E_1) = 0$ inmediatamente. En el resto de los casos se desconoce una fórmula explícita y utilizaremos un argumento indirecto para concluir que la parte real de E_k es nula.

3) Usando el ordenador, haz una tabla de los valores de $E_1/\sqrt{q}$ con q (impar) entre 1 y 100 cuando $b = 1$ y busca un patrón. Repite lo mismo para $b = 2$. Indicación: No te dejes engañar por el ε-máquina, si ves algo del orden de 10^{-15} seguro que es cero.

Para otros valores mayores de b, los signos parecen volverse más aleatorios. Enseguida veremos por qué.

4) Aplicando los cambios de variable $(u, v) = (n_2 - n_1, n_2)$ y $(u, v) = (q - n_2 + n_1, q - n_2)$ demuestra que E_1 admite las fórmulas

$$E_1 = \sum_{u=1}^{q-1} \sum_{v=u}^{q-1} e\Big(\frac{b}{q}(u^2 - 2uv)\Big) \qquad \text{y} \qquad E_1 = \sum_{u=1}^{q-1} \sum_{v=1}^{u} e\Big(\frac{b}{q}(u^2 - 2uv)\Big).$$

5) Sumando ambas expresiones muestra $2E_1 = G(-b,q) - G(b,q)$ y, evaluando las sumas de Gauss, halla una fórmula explícita para E_1. Indicación: Nota que $\sum_{v=0}^{q-1} e(-2buv/q)$ se anula. Simplifica el resultado lo máximo posible separando los casos $q \equiv \pm 1$ (4).

La fórmula anterior implica $\Re(E_1) = 0$, pero el argumento no parece generalizable a E_k. Para tratar todos los casos, consideramos la biyección f_l, $l \in \mathbb{Z}$, definida en $\{0, 1, \dots, q-1\}$ que suma l y halla el resto al dividir por q. Escribe alguna línea si no ves claro que es una biyección. En general, f_l no respeta el orden. Por ejemplo, para $q = 7$, $0 < 2 < 4 < 5$ mientras que $f_3(4) < f_3(5) < f_3(0) < f_3(2)$. La clave del argumento es que las reordenaciones que obra f_l son irrelevantes en $\Re(E_k)$. A ver si consigues resolver lo siguiente con la única indicación vaga de que $\cos x = \cos(-x)$ es importante.

6) Demuestra que para cualquier $l \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{0 \le n_1 < \cdots < n_{2k} < q} \cos\Big(\frac{2\pi b}{q}(n_1^2 - n_2^2 + \cdots + n_{2k-1}^2 - n_{2k}^2)\Big)$$

da el mismo resultado si dentro del coseno cambiamos cada n_j por $f_l(n_j)$.

7) Utilizando el ejercicio anterior para $0 \le l < q$, prueba

$$q\Re(E_k) = \sum_{0 \le n_1 < \cdots < n_{2k} < q} \sum_{l=0}^{q-1} e\Big(\frac{b}{q}\big((n_1+l)^2 - (n_2+l)^2 + \cdots + (n_{2k-1}+l)^2 - (n_{2k}+l)^2\big)\Big).$$

8) Explica por qué para cualesquiera $0 \le n_1 < \cdots < n_{2k} < q$ se cumple

$$\sum_{l=0}^{q-1} e\Big(\frac{2bl}{q}(n_1 - n_2 + \cdots + n_{2k-1} - n_{2k})\Big) = 0$$

y concluye con el ejercicio anterior que $\Re(E_k) = 0$ y, por tanto, la conjetura (2) es cierta.

Tarea a entregar. Como otras veces, debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Te recomiendo una extensión de 4 o 5 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Yo creo que da de sobra y no tendrás apuros incluso poniendo detalles de las explicaciones. El resultado conformará un cuarto capítulo de tu TFG llamado *Vórtices en fluidos* o la variante que elijas. Si se te ocurre alguna notación más breve para escribir las sumas, incorpórala. En caso de que te parezca mal suponer (1), dímelo y añadimos cierta justificación parcial de esta fórmula en un apéndice.

Referencias

[1] F. de la Hoz and L. Vega. Vortex filament equation for a regular polygon. *Nonlinearity*, 27(12):3031–3057, 2014.

[2] H. Hasimoto. A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 51(3):477–485, 1972.

[3] L. S. Da Rios. Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22(1):117–135, 1906. In Italian.

[4] Wikipedia contributors. Internal and external angles — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Internal_and_external_angles&oldid=1246493512`, 2024. [Online; accessed 16-December-2024].

[5] Wikipedia contributors. Skew polygon — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Skew_polygon&oldid=1260892606`, 2024. [Online; accessed 16-December-2024].