Siguiendo el temario previsto, vamos a ver en esta entrega algo de electrodinámica básica. El objetivo es entender dos cosas que resultan cruciales para que sean posibles las imágenes por resonancia magnética: la existencia de las ondas electromagnéticas y la precesión de las partículas con momento magnético sometidas a un campo magnético constante. Ambas son consecuencias bastante matemáticas de leyes físicas muy básica, la primera de las ecuaciones de Maxwell y la segunda de la fuerza de Lorentz. No daré por supuesto que sabes casi nada previo aunque, por supuesto, si tienes conocimientos de física al respecto te ayudarán. La desventaja de proceder desde primeros principios es que esta hoja será larga.

En primer lugar tienes que aprender algo, aunque sea mínimo de las ecuaciones de Maxwell. Lo mejor que conozco al respecto, y sobre electrodinámica en general a nivel de grado, es [FLS64] y también me gusta mucho [Gar15] pero en ambos casos te llevaría tiempo leer los capítulos relevantes para nuestros propósitos. Te propongo un atajo muy drástico a través de algo que escribí hace unos años.

1) Lee las tres primeras secciones de [Cha16b].

Para ver que lo has entendido te propongo unos cálculos muy sencillos:

2) Muestra que para campos electromagnéticos de la forma $\vec{E} = \big(0, E(x,t), 0\big)$ y $\vec{B} = \big(0, 0, B(x,t)\big)$, las cuatro ecuaciones de Maxwell se reducen a las dos siguientes

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{1}$$

y deduce que E y B satisfacen la ecuación de ondas unidimensional. De alguna forma estas son las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos unidimensionales.

3) [Opcional] ¿Te atreves a aceptar el reto planteado en [Cha16b] de dar una prueba de la igualdad $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\Delta \vec{F}$ bajo $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ intentando que sea lo más sencilla posible?

La fuerza de Lorentz es la fuerza que sufre una partícula cargada por el hecho de estar en un campo eléctrico y magnético. En pocas palabras es lo que les pasa a las cargas cuando se exponen a soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Como digo en [Cha16b], la fórmula para esta fuerza es una especie de quinta ecuación de Maxwell. Lo que nos interesa para las resonancias magnéticas es la fuerza sobre imanes (porque consideramos el protón como un imán). Según lo que, si mal no recuerdo, se llama hipótesis de Ampère todos los campos magnéticos se comportan como generados por cargas que se mueven, por tanto es posible, como haremos más adelante, deducir a partir de la fuerza de Lorentz la fuerza sobre los imanes y de ahí obtendremos una ecuación diferencial cuya solución implica que deben oscilar como una peonza. La forma habitual de proceder en física es a través de una cantidad $\vec{m}$ llamada *momento magnético*. Intentaré evitarla para no ocultar el argumento matemático bajo términos físicos. No obstante no hace daño que sepas un poco de qué va esto y por supuesto debes recordar o aprender la fórmula de la fuerza de Lorentz.

4) Lee la sección 5 de [Cha16b] y la parte de la sección 7 que empieza en el párrafo "Ahora sí..." de la página 14. Si no sabes qué es la intensidad de corriente eléctrica lee también en la página 12 el párrafo que comienza "Al generar..." hasta la fórmula (23).

Tras estos prolegómenos empezamos con el modelo que nos llevará a la precesión del protón que será el objetivo final de esta hoja.

5) Suponemos un conductor circular C dado por la curva $x^2+y^2=r^2$, $z=0$ que tiene una carga total q distribuida uniformemente que se mueve con velocidad constante v. Justifica que la fuerza de Lorentz en cada elemento de longitud $d\vec{r}$ del conductor al someterle a un campo magnético constante $\vec{B}$ es

$$d\vec{F} = \frac{qv}{2\pi rc} d\vec{r} \times \vec{B}$$

y que esto también se puede escribir como $c^{-1} I d\vec{r} \times \vec{B}$.

Si no sabes ni cómo empezar lo que debes plantearte es por qué en cada instante la carga en $d\vec{r}$ es $(2\pi r)^{-1} q|d\vec{r}|$.

Si el conductor contiene una sola partícula cargada, cuando v es grande o r es pequeño podemos considerar la fórmula anterior válida porque nos parecerá un continuo (de hecho en los conductores reales solo hay un número finito de cargas). Entonces el modelo es ahora con una sola partícula que se mueve gobernada por una ecuación de movimiento

$$\vec{r}(t) = \big(r\cos(\omega t), r\,\mathrm{sen}(\omega t), 0\big) \qquad \text{donde } t \text{ es el tiempo.}$$

6) Expresa ω en términos de v y r y halla $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

En mecánica de rotación se define el momento angular $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Es algo así como el eje de giro hecho más largo cuanto más gira.

Ahora viene el cálculo que te puede resultar más trabajoso. Es totalmente matemático, no hay que usar nada de física más que las fórmulas vistas para $d\vec{F}$, $\vec{L}$ y $\vec{r}$.

7) Muestra la relación

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \times \vec{B}.$$

La integral de la izquierda es sobre C y al desarrollar $\vec{r} \times d\vec{F}$ se tienen tres integrales de línea, es decir, el resultado es un vector como el segundo miembro. Nota que el producto vectorial no es asociativo: en general $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Si creemos con Ampère que los imanes están generados por corrientes, un imán pequeñísimo corresponde en nuestro modelo a $r \approx 0$ y tendrá asociado un $\vec{L}$ que apunta en la dirección del eje de giro de la corriente (esto es, perpendicular al circuito). Antes de seguir, veamos una observación fácil por si no la conoces.

8) Fuera del contexto electromágnetico, en mecánica se sabe que $\vec{F} = md\vec{v}/dt$ (fuerza igual a masa por aceleración) implica $d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F}$. Explica por qué.

Volviendo a nuestro caso, la fuerza es la suma de las fuerzas sobre todos los trozos de conductor entonces $\vec{r} \times \vec{F}$ se ve sustituido por $\int \vec{r} \times d\vec{F}$ y se llega finalmente a

$$(*) \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{q}{2mc}.$$

9) [Opcional] En física el *momento (dipolar) magnético* $\vec{m}$ es $\gamma\vec{L}$ y coincide con el mencionado en [Cha16b]. Si A es el área limitada para nuestro pequeño circuito circular C, en los textos o en [Wik20b] verás la fórmula $\vec{m} = I\vec{A}$. ¿Sabrías decir de dónde viene? Recuerda de las integrales de superficie que el "área vectorial" $\vec{A}$ es el área multiplicada por el vector normal unitario.

Ahora vamos a resolver la ecuación (*).

10) Prueba que si $\vec{L}(t)$ es solución, su módulo $L = \|\vec{L}(t)\|$ no depende de t.

11) Explica por qué girando el sistema de coordenadas si $\vec{B}$ y $\vec{L}(0)$ forman un ángulo α, podemos suponer

$$\vec{B} = (0, 0, B) \qquad \text{y} \qquad \vec{L}(0) = (L \sin\alpha, 0, L\cos\alpha).$$

Digamos también que $\alpha \neq 0, \pi$ porque en otro caso la función constante $\vec{L}(t) = \vec{L}(0)$ obviamente resuelve (*).

12) Con las reducciones anteriores

$$\vec{L}(t) = \big(L\cos\varphi(t)\,\mathrm{sen}\,\alpha(t), L\,\mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\mathrm{sen}\,\alpha(t), L\cos\alpha(t)\big) \quad \text{con} \quad \alpha(0) = \alpha,\ \varphi(0) = 0.$$

Introduce esto en la ecuación (*) y deduce $\alpha(t) = \alpha$ y $\varphi(t) = -2\pi\nu t$ con ν la la *frecuencia de Larmor*

$$(**) \qquad \nu = \frac{\gamma B}{2\pi}$$

Es decir, se produce la *precesión de Larmor* que consiste en que $\vec{L}$ gira alrededor del eje marcado por $\vec{B}$ con la frecuencia de Larmor, la cual no depende del ángulo inicial α, es universal para todos los imanes pequeños.

Ahora vamos con tres comentarios que te pueden ser de interés sobre todo si comparas las fórmulas con otras fuentes.

Lo primero es muy básico. En algún sitio puedes ver que la frecuencia de Larmor tiene la fórmula con el signo cambiado o sin el 2π. Lo primero es solo para indicar el sentido de giro, lo segundo es porque en física se distingue entre *frecuencia* (número de oscilaciones por unidad de tiempo) y *frecuencia angular* (número de radianes por unidad de tiempo). La segunda es igual a 2π por la primera.

Otra observación más liosa es que en electromagnetismo hay un pequeño caos con las unidades. El Sistema Internacional no está bien elegido para que las fórmulas queden bonitas. Nosotros hemos usado las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz en unidades gaussianas, que en cierto modo son las buenas pero no las más empleadas en la práctica. Con ellas la carga q se mide en *estatculombios* y la inducción magnética B en *gauss* en vez de los *culombios* y *teslas* del sistema internacional. Como además las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz tienen otras constantes, resulta que la fórmula para γ varía. Sin entrar en detalles, la fórmula (**) se cumple en ambos sistemas de unidades mientras que (*) se cumple con unidades gaussianas y para que funcione con las del Sistema Internacional solo hay que quitar la c del denominador de γ. Si tienes curiosidad, en [Wik20a] se dan muchos detalles de cómo pasar de unas fórmulas electromagnéticas a otras.

El último comentario es el más profundo. Lo que quiero es que entiendas la situación sin preocuparte en indagar las razones porque son realmente muy complicadas. Si una partícula elemental cargada como un electrón o un protón[1] se comporta como un imán podemos pensar, al menos hipotéticamente, que tiene corrientes dentro, aunque si realmente creemos que es elemental parece más sensato creer que no hay nada dentro y lo que pasa es que gira sobre sí misma y este giro es el que causa el campo magnético. Este es el origen del término *spin* (en español traducido a veces como *espín*), por la palabra inglesa para indicar giros rápidos. Pues bien, desde tiempos muy tempranos en el siglo XX se vio que para electrones (*) funcionaba como si la fórmula para γ fuera $q/(mc)$, es decir, como si la fuerza del imán del electrón fuera el doble de lo que correspondería a lo que giraba. Para otras partículas subatómicas o conjuntos de ellas también parecía que el γ estaba afectado por una constante inexplicable y actualmente se escribe

(***) $$\gamma = \frac{qg}{2mc} \qquad \text{y se dice que } g \text{ es el } g\text{-factor.}$$

(Recuerda que en unidades del SI la c no está). Es importante notar que en los experimentos que uno podría hacer en un laboratorio universitario de electricidad y magnetismo (*) es cierto tal como está, no hay g-factor fuera de la escala subatómica. La mecánica cuántica más básica que opera a esas escalas tampoco daba una explicación a ello. Solo cuando P.A.M. Dirac asentó los rudimentos de la mecánica cuántica relativista consiguió probar $g = 2$ para electrones. Más adelante se vio que esta mecánica era solo una aproximación de la teoría cuántica de campos (todavía no desbancada), en cuyo desarrollo J. Schwinger encontró que g debería ser para electrones algo próximo a $2 + (137\pi)^{-1}$ lo cual es coherente con los experimentos. Tanto Dirac como Schwinger ganaron el premio Nobel y el primer logro ya da para un trabajo de fin de

[1] En rigor el protón no es del todo elemental porque contiene *quarks* pero olvídate de ello.

grado mientras que el segundo lo excede y está grabado en la tumba de Schwinger (si quieres referencias y más información da un vistazo a [Cha16a]). En el caso de los protones, que son los que se usan en las imágenes por resonancia magnética, se sabe experimentalmente que $g \approx 5{,}5856$. Hasta donde yo sé (no te fíes demasiado) no hay cálculos que deduzcan esto de leyes básicas como en el caso del electrón. ¿Qué consecuencias tiene esto para nosotros? En breve que nuestro análisis clásico es cualitativamente correcto pero por razones profundas relacionadas con la cuantización del campos electromagnéticos, hay que cambiar el valor de γ de (*) por (***) por $g \approx 5{,}5856$, incrementando con ello la frecuencia a la que esperábamos tener resonancia.

13) Busca la carga en culombios y la masa en kilos del protón y halla la frecuencia de Larmor cuando en un hospital se usa una máquina de $1{,}5\,T$ (la T indica teslas). ¿Es mayor o menor que la frecuencia en la que trabaja un teléfono móvil?

Recuerda, culombios, kilos y teslas son unidades del sistema internacional.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que contenga todo lo que has aprendido en esta hoja siempre teniendo en mente que el objetivo es la existencia de las ondas electromagnéticas y la precisión de Larmor. Aparte de resolver los ejercicios me gustaría que explicases ideas obre electrodinámica, por ejemplo relativas a las ecuaciones de Maxwell . Piensa que es muy posible que el tribunal que lo lea no tenga mucha idea de ello.

La extensión la dejo a tu elección. No es recomendable que supere las 8 páginas y seguramente no hay material para llenarlas. Tampoco me parece razonable que llenes menos de 3. Tómate el tiempo que necesites. Si me parece demasiado, ya te avisaré. Esta es una parte importante de tu TFG por tanto prefiero que tardes a que la hagas con poco cuidado.

Referencias

[Cha16a] F. Chamizo. Electron anomalous magnetic moment: history and current status. (Presentación). `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/electron_anomalous.pdf`, 2016.

[Cha16b] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2016.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[Gar15] T. A. Garrity. *Electricity and magnetism for mathematicians*. Cambridge University Press, New York, 2015. A guided path from Maxwell's equations to Yang-Mills.

[Wik20a] Wikipedia contributors. Gaussian units — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 4-November-2020].

[Wik20b] Wikipedia contributors. Magnetic moment — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 4-November-2020].