

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html> donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. Imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente L^AT_EX, los ficheros MS20hoja*.tex, te serán muy útiles como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo cuando al principio tengas menos soltura con L^AT_EX. Mi recomendación es que, si no lo has hecho ya, lo instales cuanto antes en tu ordenador y pruebes a compilar esta hoja, también puedes usar Overleaf (<https://www.overleaf.com/>). Yo uso BibT_EX para las referencias, que las toma de un fichero externo, pero cambiaré los ficheros que cuelgue para que los puedas compilar sin ello (a no ser que sepas usarlo). Si alguna vez ves que faltan las referencias al compilar, házmelo saber porque será que se me ha olvidado cambiarlo.

Por cierto, voy a impartir el curso de L^AT_EX, lo mismo te ayuda algo del material que ponga en <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/2021latex/2021latex.html>.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. Al final te indicaré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en L^AT_EX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y te lo mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Pasando a generalidades sobre tu trabajo, la idea es dar las bases teóricas físicas y matemáticas de las imágenes por resonancia magnética. No te asustes por lo de la física. En este importante instrumento para el diagnóstico médico se utiliza el espín que es un concepto cuántico pero en realidad todo se puede explicar cualitativamente con argumentos clásicos así que solo en §4, aparecerá algo de física cuántica y si se te hace cuesta arriba nos lo podemos saltar. No doy por supuesto que sepas prácticamente nada de física más allá de $F = ma$ y cosas así. El electromagnetismo necesario lo veremos desde cero en el tercer apartado. Si es un tema que ya dominas, dímelo y así avanzaremos más rápido.

En esta hoja veremos una versión un poco ampliada de lo que ya te propuse. El objetivo es entender el concepto de resonancia de un oscilador.

Nuestra experiencia diaria es mayor con péndulos que con osciladores armónicos puros (lineales) así que empezaremos por ahí.

1) Lee acerca de la ecuación del péndulo simple en cualquier libro de física (p.ej. [AF73]) o en el material que encuentres en la red. Debes llegar a la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$ para el periodo de las pequeñas oscilaciones donde g es la aceleración de la gravedad.

Si te sientes con ganas, puedes tratar de ver cómo se obtendría una aproximación más precisa y lo mismo eso te lleva a decir algo de funciones elípticas [AE06]. En relación con esto,

la fórmula “de verdad” para el periodo es

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{con} \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2}$$

donde θ_0 es el ángulo inicial desde el que se suelta el péndulo, que conduce a la aproximación anterior cuando $\theta_0 \rightarrow 0$. Resulta que cambiando el intervalo de integración $[0, \pi/2]$ por $[0, x]$ la función $T = T(x)$ tiene una inversa con propiedades bastante curiosas cuando se estudia en el plano complejo y es lo que se llama una función elíptica.

Ahora pasa ya al oscilador armónico que responde a la fórmula $x'' + \omega^2 x = 0$ y seguro que ha aparecido en tu estudio del péndulo. Esta es una EDO lineal que tiene una solución general sencilla con senos y cosenos. Por si te ayuda para algo, te recuerdo que las ecuaciones lineales de segundo orden se pasan a otras vectoriales de primer orden definiendo $y = x'$. En el caso del oscilador armónico, uno puede escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \vec{c}.$$

En la práctica hay un rozamiento que debilita las oscilaciones y comúnmente una fuerza que las mantiene. Si piensas en que un oscilador armónico es la linealización de un péndulo de un reloj, como ya habrás, el rozamiento viene del aire y la fuerza externa se debe a la cuerda o a los contrapesos.

2) Mira las primeras páginas de [Cha20] que te sugerí y complétalas leyendo §20, §23 y §24 de [FLS63]¹.

3) Comprueba con un cálculo que un péndulo de longitud 1 tiene con bastante precisión un semiperiodo de 1 s. Es decir, si colgamos un objeto más o menos puntual de una cuerda ligera o de un hilo de 1 m y lo dejamos oscilar con oscilaciones no muy amplias, el número de veces que alcanza los extremos es casi igual al número de segundos. Explica por qué el rozamiento apenas afecta a esta relación.

4) [opcional] Comprueba experimentalmente que lo anterior se cumple en la práctica: el péndulo da una medida bastante precisa de los segundos hasta que las oscilaciones son tan pequeñas que se hacen indistinguibles.

Resuelve las dos tareas que te propuse:

5) En la p.2 de [Cha20] intenta deducir que (1.7) es realmente solución particular de la ecuación y que, como afirmo, es el límite cuando el tiempo tiende a infinito de cualquier solución. ¿Sabrías dar una fórmula para la φ en el argumento del coseno?

¹En <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/> tienes acceso gratuito a este clásico.

6) Escribe un ejemplo en el que halles explícitamente la solución cuando hay resonancia primero en el caso sin rozamiento. Esto es, elige para $a = 0$ un $\omega = \omega_e$, un φ_e y un F_e , invéntate unas condiciones iniciales y resuelve la ecuación. Elige todos estos parámetros y la condiciones para que la solución sea sencilla y sirva para ilustrar la resonancia. Trata de buscar también otro ejemplo con $0 < 4a^2\omega_e^2 < 1$, correspondiente al caso con rozamiento.

7) Dibuja con tu *software* favorito (`matlab`, `octave`, `sagemath`...) el ejemplo del ejercicio anterior en el caso $a = 0$ y compáralo con lo que ocurre cuando se toma algún $\omega \neq \omega_e$. Esto requerirá que resuelvas la ecuación diferencial con ese ω bajo las mismas condiciones iniciales (o que el ordenador lo haga por ti).

8) Como ejemplo llamativo para citar en tu trabajo (quizá con precaución por lo que menciono después), busca información sobre el colapso del famoso puente de Tacoma. Todo lo que necesitas seguramente está en [Wik20]. Allí podrás ver que no todos los ingenieros y físicos están de acuerdo acerca del papel de la resonancia con el viento. Hay una discusión sobre ello en [BS91]. Intenta conseguir información fiable que corrobore o no el papel desempeñado por la resonancia.

Si no puedes localizar [BS91] y te interesa mirarlo, te lo puedo pasar.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 4 páginas con el formato de esta hoja. Seguramente necesites menos. Si todavía no dominas el \LaTeX quizá tardes bastante. No te preocupes, hasta dentro de tres semanas o así no te mandaré recordatorios.

Referencias

- [AE06] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [AF73] M. Alonso and E. J Finn. *Fundamental university physics. 1. Mechanics and thermodynamics*. Addison-Wesley, 1973.
- [BS91] K. Y. Billah and R. H. Scanlan. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys.*, 59(2):118–124, 1991.

- [Cha20] F. Chamizo. A course on signal processing. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/libreria.html>, 2020.
- [FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963.
- [Wik20] Wikipedia contributors. Tacoma narrows bridge (1940) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 5-September-2020].