Está claro que fijado un peso k, que por la hoja anterior suponemos no negativo y par, las formas modulares de peso k forman un espacio vectorial V_k sobre $\mathbb{C}$. En esta hoja, en primer lugar vamos a ver que es posible calcular la dimensión de este espacio, resultando

$$\dim V_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12}, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\lfloor k/12 \rfloor$ significa la parte entera de $k/12$. También determinaremos una base de V_k con las series de Eisenstein y la función discriminante. Finalmente veremos algo acerca de lo que ocurre cuando se cambia $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ por otro grupo en la definición de forma modular.

1) Lee [Zag08, §1.3] y [Zag08, §2.1]. Con ello escribe una prueba completa de (1). Nota que el orden de tu exposición será bien diferente del de [Zag08] porque tú tienes cosas de la hoja anterior a las que hacer referencia. También debes aclarar algunos puntos que hace demasiado rápido, como la parte final de la prueba en la página 12.

2) Explica con detalle cómo se obtiene $E_4^2 = E_8$ y de ello

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

Esto se menciona en [Zag08, p.18] y se dice de pasada que hay pruebas (no fáciles) sin formas modulares. La verdad es que no las conozco. Si quieres buscarlas y poner alguna referencia, hazlo.

3) La función discriminante no se anula en $\mathbb{H}$, ¿sabrías probarlo? Usando este hecho muestra que para $k \geq 12$ se tiene $V_k = \Delta V_{k-12} \oplus \langle E_k \rangle$ donde $\langle E_k \rangle$ es el subespacio (unidimensional) generado por E_k y ΔV_{k-12} es el subespacio generado por las funciones de V_{k-12} multiplicadas por la función discriminante. Escribe con ello una base de V_{36}.

En la definición de forma modular empleamos el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, sin embargo en algunos contextos es natural considerar otros grupos. A veces, dependiendo de los autores, se llaman formas automorfas a estas formas modulares generalizadas. En particular, en teoría de números son muy importantes los grupos $\Gamma_0(N)$ definidos como $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ pero imponiendo además que c sea divisible por N, con la notación de la hoja anterior. En el resto de la hoja nos vamos a ocupar de $\Gamma_0(2)$.

Consecuentemente, llamamos forma modular de peso k para el grupo $\Gamma_0(2)$ a una función holomorfa $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface $f(\gamma z) = \big(j_\gamma(z)\big)^k f(z)$ para $\gamma \in \Gamma_0(2)$ y que tiene crecimiento a lo más polinómico cuando $\Im z \to +\infty$ (en realidad se prueba que el límite es necesariamente finito). Llamaremos $V_k(2)$ al espacio vectorial formado por estas formas modulares.

Antes de nada, el siguiente ejercicio da una idea de cómo aparece $\Gamma_0(2)$ y en general $\Gamma_0(N)$. Dicho sea de paso, históricamente aparecieron antes las formas modulares para grupos de este tipo y otros relacionados que para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ [Roy17]. Incluso se dice que Gauss dibujó el primer dominio fundamental y fue para $\Gamma_0(4)$ (aunque en [Roy17, §7.9] parece atribuirse a Riemann).

4) Comprueba que si $f \in V_k$ entonces $g \in V_k(2)$ con $g(z) = f(2z)$.

No es difícil probar (no hace falta que lo hagas) que $\Gamma_0(2)$ está generado por la matrices

$$-I, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En realidad $-I$ es irrelevante bajo nuestra hipótesis de k par, porque actúa como la identidad sobre z y el j_γ^k correspondiente es 1. Aprovecho para decirte que si utilizas sagemath, es capaz de hacer muchos cálculos referidos a formas modulares y a los grupos subyacentes. Por ejemplo, los generadores no triviales anteriores se obtendrían con `Gamma0(2).generators()`. Te indico más comandos en lo sucesivo pero no te sientas obligado a probarlos.

5) Prueba que para $k > 2$ par

$$E_{\infty,k}(z) = \sum_{\substack{\mathrm{mcd}(m,n)=1 \\ m \text{ par},\, n \text{ impar}}} \sum (mz+n)^{-k} \qquad \text{y} \qquad E_{0,k}(z) = \sum_{\substack{\mathrm{mcd}(m,n)=1 \\ m \text{ impar}}} \sum (mz+n)^{-k}$$

están en $V_k(2)$, donde mcd indica el máximo común divisor y $n, m \in \mathbb{Z}$. Estas series son los análogos de las series de Eisenstein, de hecho también se llaman así. Indicación: ¿Qué ocurre con los generadores?

6) Da una prueba de que el dibujo de la página 26 de [Mas15] es realmente un dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$.

7) Si en sagemath ejecutas `FareySymbol(Gamma0(2)).fundamental_domain()` obtendrás como dominio fundamental de $\Gamma_0(2)$ la región $\{0 \le \Re(z) \le 1,\ |z - 1/2| \ge 1/2\} \cap \mathbb{H}$. ¿Sabrías demostrar por qué es también dominio fundamental? Si te resulta muy difícil sáltate este ejercicio pero puedes usar también este dominio fundamental en lo siguiente.

Hay una fórmula general para la dimensión que está en [DS05, Th.3.5.1] o en [Shi94, §2.6]. Por cierto, este último libro es el gran clásico de las formas modulares con mucha información sobre esta parte de tu trabajo pero a mí me parece un poco difícil de seguir. En el caso $k \ge 2$ par, puedes ver en estas referencias que para grupos generales la fórmula es

$$\text{(2)} \qquad \dim = (k-1)(g-1) + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \epsilon_2 + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \epsilon_3 + \frac{k}{2} \epsilon_\infty.$$

La demostración utiliza el teorema de Riemann-Roch que supongo que no te sonará de nada y no hace falta que la mires porque es complicado. En esta fórmula, g es el *genero*, ϵ_2 es el número de *puntos elípticos de orden 2*, ϵ_3 es el número de *puntos elípticos de orden 3* y ϵ_∞ es el número de *cúspides*.

8) Usando la bibliografía o internet, busca qué significa cada uno de los términos en letra inclinada. Una vez hecho esto, halla g, ϵ_2, ϵ_3 y ϵ_∞ para $\Gamma_0(2)$ y consigue así traducir (2) en una fórmula para $\dim V_k(2)$. Si quieres comprobar los resultados, con `sagemath` estas cantidades corresponden a los comandos `Gamma0(2).genus()`, `Gamma0(2).nu2()`, `Gamma0(2).nu3()` y `Gamma0(2).ncusps()`. Por otro lado, para $k \geq 4$ par la dimensión se calcula indirectamente con `2+dimension_cusp_forms(Gamma0(2),k)`. No sé si hay un comando directo.

9) Comprueba que (1) para $k \geq 2$ par es un caso particular de (2). Quizá este ejercicio te resulte más fácil que el anterior y prefieras reordenarlo en tu exposición. Requiere alguna consideración aritmética, por eso lo he puesto después.

Solo por curiosidad, el primer k para el que $V_k(2)$ contiene algo más que lo generado por las dos series de Eisenstein antes mencionadas es $k = 8$. Concretamente, $V_8(2)$ contiene a la forma modular $\big(\Delta(z)\Delta(2z)\big)^{1/3}$. Esto está demostrado en [Shi94, Ex.2.28].

Tarea a entregar. Redacta un documento que conecte lo que has escrito para los ejercicios de esta hoja. No te pongo limitación de espacio pero intenta ser breve.

Referencias

[DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[Mas15] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). `http://homepages.warwick.ac.uk/~masmat/files/teaching/modforms.pdf`, 2015.

[Roy17] R. Roy. *Elliptic and modular functions from Gauss to Dedekind to Hecke*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[Shi94] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, volume 11 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. Reprint of the 1971 original, Kanô Memorial Lectures, 1.

[Zag08] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.