El propósito de esta hoja es introducir las formas modulares. Una de las mejores fuentes que conozco de la teoría básica es [Zag08], un largo artículo que incluye pocas pruebas pero da una panorámica magnífica. Está disponible en `https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/978-3-540-74119-0_1/`. Un librito clásico con lo básico de formas modulares es [Ser73] aunque posiblemente te resulten más atractivo para consultar notas como [Mas15] o el libro [Iwa97].

En la teoría temprana de funciones elípticas ya aparecieron expresiones como $\sum_{\omega\in\Lambda^*}\omega^{-k}$ que dependía homogéneamente del retículo de periodos $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2\}$. Es decir que al multiplicar el retículo por un número (complejo) el resultado se multiplicaba una potencia (negativa) de dicho número. Para concretar

1) Dados $\{\omega_1, \omega_2\}$ y $\{\omega_1', \omega_2'\}$ ordenados de forma que $\Im(\omega_1/\omega_2)$ y $\Im(\omega_1'/\omega_2')$ sean positivos, prueba que ambos generan un mismo retículo Λ si y solo si

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \qquad \text{para cierta matriz} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Por si no lo has visto nunca, se llama $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ al grupo de matrices de determinante 1 con elementos en $\mathbb{Z}$.

De esta forma para que una función de los periodos dependa solo del retículo, debe cumplir $F(\omega_1, \omega_2) = F(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)$. Si es homogénea se puede sacar un factor $(c\omega_1 + d\omega_2)^{-k}$. Redefiniendo $z = \omega_1/\omega_2$, que está en el semiplano superior $\mathbb{H}$. Esta idea de funciones homogéneas de un retículo lleva a considerar funciones $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$f(\gamma z) = \big(j_\gamma(z)\big)^k f(z) \tag{1}$$

donde, con la notación anterior se define γz para $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ como $\gamma z = (az + b)/(cz + d)$ y $j_\gamma(z) = cz + d$. Tomando $\gamma = -I$ se ve que la única posibilidad para f no idénticamente nula es que k sea un entero par. Consideraremos en lo sucesivo $k \ge 0$. El caso $k < 0$ correspondería a los recíprocos de funciones que no se anulan y cumplen (1).

2) Comprueba las propiedades

$$\Im\gamma z = \frac{\Im z}{|j_\gamma(z)|^2} \qquad \text{y} \qquad j_{\gamma_1\gamma_2}(z) = j_{\gamma_1}(\gamma_2 z) j_{\gamma_2}(z).$$

Fíjate que la primera asegura que $f(\gamma z)$ tiene sentido. Puedes dar una demostración de la segunda casi sin cuentas notando que la derivada (con respecto de z) de γz es $\big(j_\gamma(z)\big)^{-2}$.

Se puede probar que el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ está generado por $\{\pm I, S\}$ con S la matriz del giro que ángulo $\pi/2$, que da la inversión $Sz = -1/z$. Por tanto pedir (1) para k par es lo mismo que pedir $f(z + 1) = f(z)$ y $f(-1/z) = z^k f(z)$. A base de aplicar estas transformaciones la función f queda caracterizada por sus valores en el llamado *dominio fundamental estándar* $\{z : |z| \geq 1, \ |\Re z| \leq 1/2\}$.

3) Busca en la bibliografía una prueba de estos hechos y escribe una líneas explicando las ideas. Esto viene en casi cualquier sitio [Zag08, Prop.1], [Mas15, Th.1.5.1] (por si te sirve, en [CR10] dimos una prueba esquemática).

Consideramos las funciones holomorfas que cumplen (1). Son en particular 1-periódicas y admiten un desarrollo de Fourier. Imponiendo que $f(x+iy)$ crezca menos que un polinomio cuando $y \to +\infty$ (o equivalentemente la holomorfía en el infinito en cierto sentido que no explico) se llega a que tal desarrollo no tiene términos con exponentes negativos, es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}. \tag{2}$$

Se llama *forma modular de peso k* a una función holomorfa $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumple (1) con crecimiento a lo más polinómico en $\Im z$.

Diferentes autores dan variantes de la definición distinguiendo por ejemplo entre *formas* modulares y *funciones* modulares. Lo menciono solo por si te choca en algo de lo que leas.

El ejemplo más básico de forma modular ya ha aparecido antes:

$$G_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}{}' (mz+n)^{-k} \tag{3}$$

donde la prima indica que se omite $(m,n) = (0,0)$. Se dice que G_k es la *serie de Eisenstein de peso k*. El factor $1/2$ a veces no se pone, depende de los autores.

4) Comprueba que para $k > 2$ par G_k es una forma modular de peso k.

5) Se llama *serie de Eisenstein normalizada de peso k* a E_k definida como G_k pero restringiendo la sumación a los m, n coprimos (sin divisores comunes distintos de ± 1). Prueba que $E_k(z) = G_k(z)/\zeta(k)$ donde el denominador es la función ζ de Riemann.

Ahora vamos a hallar el desarrollo de Fourier (2) de G_k. Veremos que sus coeficientes dependen de la función aritmética

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

donde la suma es sobre los enteros $d > 0$ que dividen a n.

6) Demuestra

$$\pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \Big) \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{H}.$$

La sugerencia es que sumes el primer miembro como una serie geométrica y después emplees la descomposición en fracciones simples de $\cot z$ explicando un poco de dónde sale (mira por ejemplo [SS03, §3.2] o [Ahl78]).

7) Derivando suvesivamente halla el desarrollo de Fourier de $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z+n)^{-k}$ para $k \ge 2$ par.

8) Deduce finalmente que para $k > 2$ par

$$G_k(z) = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}. \tag{4}$$

Las formas modulares que cumplen $f(i\infty) = 0$, es decir, las que tienen $a_0 = 0$ en (2) se llaman *cusp forms* (a veces *formas parabólicas* o *cuspidales*, en español) y desempeñan un papel importante. El resto de la hoja está dedicado a la más famosa, la *función discriminante*

$$\Delta(z) = e^{2\pi i z} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - e^{2\pi i n z}\big)^{24}. \tag{5}$$

Está claro que tiene $a_0 = 0$, lo que no está nada claro es que sea una forma modular. El resto de los a_n se suelen denotar como $\tau(n)$ y se dice que τ es la *función de Ramanujan*, quien observó sin prueba algunas propiedades que después resultaron ser cruciales en un contexto más amplio y relacionadas con profundas cuestiones de teoría de números.

Una de las observaciones de Ramanujan, a partir de la pequeña tabla que elaboró, es que $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si n y m son coprimos. Esto lo probaremos más adelante en tu trabajo y la prueba será bastante indirecta.

9) Halla $\tau(2)$ y $\tau(3)$. Sabiendo que $\tau(6) = -6048$, comprueba que $\tau(6) = \tau(2)\tau(3)$.

Nota que calcular $\tau(6)$ a mano llevaría un buen rato de operaciones con (5). Si tienes curiosidad, en [Ram00] Ramanujan presenta un atajo y da una tabla de $\tau(n)$ para $n \le 30$.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que (5) es una forma modular de peso 12. Para ello notemos primero que aunque G_2 no tiene sentido con la definición original (por la falta de convergencia), el segundo miembro de (4) sí lo tiene para $k = 2$ (¿ves claro por qué esa serie sí converge?) y por tanto podemos definir G_2 a través de ella y también $E_2(z)$ como $G_2(z)/\zeta(2)$.

Una sorpresa es que G_2 definida de esta forma no es exactamente modular de peso 2. Lo que se cumple es

$$G_2^*(\gamma z) = \big(j_\gamma(z)\big)^2 G_2^*(z) \qquad \text{con} \quad G_2^*(z) = G_2(z) - \frac{\pi}{2\Im z}. \tag{6}$$

Nota que G_2^* no es estrictamente una forma modular de peso 2 porque no es holomorfa.

10) Busca la prueba de (6) en internet o en la bibliografía (por ejemplo [Zag08, §2.3], [Ser73, VII.4], [Mas15, §1.7]) y escribe un esquema resumido de ello.

11) Prueba que

$$\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} = 2\pi i E_2(z).$$

12) Usando (6) y el ejercicio anterior, prueba

$$\Big(\frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)}\Big)' = 0$$

y tomando $z = i$ deduce que Δ es una forma modular de peso 12.

Tarea a entregar. Redacta un documento que conecte lo que has escrito para los ejercicios de esta hoja. Ya sé que es un poco larga. No te pongo limitación de espacio pero intenta ser breve.

Referencias

[Ahl78] L. V. Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[CR10] F. Chamizo and D. Raboso. Formas modulares y números casi enteros. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 13(3):539–555, 2010.

[Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Mas15] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). `http://homepages.warwick.ac.uk/~masmat/files/teaching/modforms.pdf`, 2015.

[Ram00] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[Ser73] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[SS03] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[Zag08] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.