Las fórmulas más profundas que probó Ramanujan caen dentro de la teoría de funciones elípticas y formas modulares. Aunque la identidad que veremos en esta hoja no es particularmente profunda ni, hasta donde yo sé, tiene consecuencias notables, es una de las más emblemáticas en su producción, quizá porque salvo un valor especial de la función Γ los objetos que aparecen en ella son asequibles para un estudiante de primero de un grado de ciencias. Como tantas otras veces, uno se pregunta cómo pudo descubrirla con su formación autodidacta que, al parecer, no incluía grandes conocimientos de variable compleja. La identidad en cuestión es [Ber91, Entry 11(i)]

$$(1)\qquad \Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{\cosh(\pi n)}\Big)^{-2}+\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh(nt)}{\cosh(\pi n)}\Big)^{-2}=\frac{2}{\pi}\Gamma^4(3/4)\qquad \text{para } t\in(-\pi,\pi).$$

Por extensión analítica, también es válida para valores complejos de t en la región de convergencia uniforme de las series (por cierto, aquí hay una errata al describirla en [Ber91]).

Para $t=0$ se sigue que es posible calcular la suma de los inversos de $\cosh(\pi n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cosh(\pi n)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma^2(3/4)}-\frac{1}{2}.$$

Con cinco términos de la serie se obtienen siete decimales de coincidencia con la constante.

Toda esta hoja está dedicada a la prueba de (1). El esquema es ver que esta identidad es equivalente a otra para la función de Jacobi $\operatorname{dn} z$ cuando $\tau=i$. Con lo que sabemos de la hoja anterior deduciremos (1) salvo identificar la constante del segundo miembro que para nosotros dependerá de $\theta(0)$. Hacer aparecer $2\Gamma^4(3/4)/\pi$ llevará a algunas manipulaciones extrañas con integrales reales. Sabiendo más acerca de la función Γ se podrían reducir un poco pero me he restringido a usar solo las cosas que vimos en el curso de Variable Compleja II. Ya que te gusta el análisis matemático, quizá te resulte atractiva la aparición de temas de análisis de Fourier o de técnicas de integración en combinación con las funciones elípticas.

1) Revisa tus apuntes de variable real para deducir que si una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ es par, 1-periódica y suficientemente regular, por ejemplo $f\in C^2(\mathbb{R})$, entonces admite un desarrollo de Fourier

$$(2)\qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi nx)\qquad \text{con}\quad a_n=\int_{-1}^{1}f(t)e^{-2\pi int}dt.$$

Seguramente esto no te resultará inmediato, aunque sí bastante fácil, a partir de la forma que conozcas del desarrollo de Fourier.

2) Comprueba que $f(x)=\operatorname{dn}(2Kx)$ es 1-periódica, par y está en $C^\infty(\mathbb{R})$. Esto se reduce a poco más que recordar la hoja anterior.

Esencialmente el desarrollo de Fourier (2) de f nos dará las series que aparecen en (1). Comprobarlo requiere hallar los coeficientes a_n y para ello aplicaremos el teorema de los residuos sobre el paralelogramos $\mathcal{P}$ de vértices -1, 1, τ y $-2+\tau$ orientado positivamente.

3) Usando las simetrías, prueba que para $f(z) = \operatorname{dn}(2Kz)$ se tiene

$$\left(1 + q^{-2n}\right)a_n = \int_{\partial\mathcal{P}} f(z)e^{-2\pi inz}\, dz$$

donde, como siempre, $q = e^{\pi i\tau}$ y deduce una fórmula explícita para a_n en función de K, q y n.

4) Combinando los ejercicios anteriores, prueba

$$\frac{2}{\pi}K \operatorname{dn}(Kx/\pi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\cos(\pi n\tau)}.$$

5) Comprueba que (1) se deduce de que para $\tau = i$ se tiene

$$\frac{1}{\operatorname{dn}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{dn}^2(ix)} = 2 \quad \text{para } -1 < \frac{\pi x}{K} < 1 \qquad \text{y} \qquad K = \frac{\pi^{3/2}}{2\Gamma^2(3/4)}. \tag{3}$$

La primera identidad es en realidad válida en el plano complejo fuera de los polos.

6) Comprueba que $(1/\operatorname{dn} z)^2 + \left(1/\operatorname{dn}(iz)\right)^2$ cuando $\tau = i$ es una función elíptica sin polos y deduce de ello la primera fórmula de (3).

Nota que si $\tau \neq i$ no tendríamos esta identidad porque necesitamos que el retículo de periodos tenga alguna simetría al multiplicar por i. Esto está relacionado con un tema avanzado de funciones elípticas y formas modulares llamado *multiplicación compleja*. Quizá aparezca en algún momento en tu trabajo más adelante.

La única prueba que se me ha ocurrido de la evaluación de K en (3) con lo que has visto de funciones elípticas y lo que sabes de la función Γ, es muy indirecta. Si uno tratase de seguir [Ber91, Ch.17] sería bastante más complicada. Si se te ocurre alguna idea mejor, por favor házmelo saber.

Lo primero que vamos a ver es una identidad que resultará más natural cuando estudiemos la función θ como forma modular. Debes conocer la fórmula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\cos(2\pi ax)\, dx = e^{-\pi a^2}$. Si nunca te la han contado, la puedes dar por supuesto. Es un cálculo bastante común en análisis de Fourier (en caso de que tengas mucha curiosidad, en [Cha13, p.12] hay una demostración sin detalles en tres líneas).

7) Demuestra la identidad

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+x+1/2)^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi n^2}\cos(2\pi nx)$$

aplicando (2) a la función que define la serie del primer miembro. Se te tiene que ocurrir algo para que la integral que define a_n se transforme en la antes mencionada. Es ingenioso pero no difícil.

8) Siempre bajo la hipótesis $\tau = i$ deduce $\theta(1/2) = e^{-\pi/4}\theta(i/2)$ del ejercicio anterior y a partir de [Cha18b, (25)] concluye $k^2 = 1/2$.

Tras el último ejercicio de la hoja anterior, tendrás que en un entorno del origen se cumple

$$x = \int_{\operatorname{cn} x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2+k^2t^2)}}.$$

Si no lo escribiste exactamente de esta forma, no hace falta que vuelvas a los cálculos.

9) Prueba que $\operatorname{cn} K = 0$ y por tanto en nuestro caso

$$K = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Ahora hay que relacionar esta integral con Γ. Lo más rápido que se me ocurre es utilizar [Cha18a, (13)] para establecer una relación previa entre dos integrales, una de las cuales se puede evaluar.

10) Con la definición de la función Γ comprueba que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y aplicando [Cha18a, (13)] con $w = 1/4$ primero con $s = 3/4$ y después con $s = 1$ deduce

$$\int_0^\infty (x+x^2)^{-3/4}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)}\int_0^\infty x^{-3/4}(1+x)^{-1}\,dx\,dx$$

y con un cambio de variable y el teorema de los residuos

$$\int_0^\infty (x+x^2)^{-3/4}\,dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^4}\,dt\,dx = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2(3/4)}.$$

11) En la fórmula integral para K haz el cambio $t = (1+u^{-1})^{-1/4}$ y obtén la evaluación de K enunciada en (3) y con ello finaliza la prueba de (1).

Si uno descodifica la notación esta evaluación nos da la fórmula

$$\theta(0) = \frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)} \qquad \text{cuando } \tau = i.$$

En virtud de la multiplicación compleja que antes he mencionado, en principio cabe esperar evaluaciones de $\theta(0)$ para algunos otros valores irracionales cuadráticos de τ. Ramanujan obtuvo por ejemplo algo equivalente a la fórmula impresionante

$$\theta(0) = \frac{\sqrt[8]{28}}{14}\Big(\sqrt{13+\sqrt{7}} + \sqrt{7+3\sqrt{7}}\Big)\frac{\pi^{1/4}}{\Gamma(3/4)} \qquad \text{cuando } \tau = 7i.$$

Es decir, la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-7\pi n^2}$ admite la suma explícita dada por el segundo miembro.

Tarea a entregar. El objetivo está claro. Tienes que escribir un documento que contenga una prueba completa de (1). Ya que Ramanujan es uno de los pocos matemáticos conocidos por un público medianamente amplio, estaría bien que dijeras algo acerca de él. Si quieres ir más allá de las historias de divulgación típicas, en [Ber01] hay una descripción rápida de sus contribuciones matemáticas. Su autor, B. Berndt es uno de los mayores conocedores de la obra de Ramanujan y tiene muchos artículos al respecto. Llevó a cabo la monumental obra de recoger los resultados que aparecían en sus cuadernos y dar pruebas de ellos, la mayor parte de lo relativo a funciones elípticas está en [Ber91]. La prueba que hemos seguido responde al esquema de las páginas 162–163. Allí hay algunas notas adicionales, con referencias sobre todo al clásico [WW96]. Por otro lado está [Har59] que probablemente es el libro de contenido matemático más famoso sobre Ramanujan.

Intenta que el documento no exceda las cinco páginas. A no ser que escribas mucho acerca de lo que hizo Ramanujan, yo creo que es espacio más que suficiente.

Referencias

[Ber91] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part III.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[Ber01] B. C. Berndt. An overview of Ramanujan's notebooks. In *Ramanujan: essays and surveys*, volume 22 of *Hist. Math.*, pages 143–164. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Cha13] F. Chamizo. Aplicaciones del análisis armónico. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcavan.pdf, 2013.

[Cha18a] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/con.pdf, 2018.

[Cha18b] F. Chamizo. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosco/files/ell_th.pdf, 2018.

[Har59] G. H. Hardy. *Ramanujan: twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[WW96] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.