Con lo que has leído, ya sabrás que originalmente en el siglo XIX, sobre todo en la primera mitad, se hacía hincapié en considerar las funciones elípticas como inversas de integrales elípticas. Desde el punto de vista actual esto no es tan buena idea si uno quiere hacer una teoría rigurosa. Piensa que si alguien quisiera definir $\operatorname{sen} z$ en $\mathbb{C}$ como la inversa de

$$f(w) = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

que da una rama de $\operatorname{arc\,sen} w$ para $w \in [-1,1]$, enseguida entraríamos en problemas técnicos. A fin de cuentas $\operatorname{sen} z$ no es inyectiva y por tanto no puede ser estrictamente la inversa de nada. Habría que probar que hay una inversa de f en un entorno del origen que admite una extensión entera. En el caso de las integrales elípticas, probar con el rigor actual que la inversa local tiene una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$, la función elíptica, no es nada fácil (hay comentarios al respecto en [AE06, §2.1]).

En esta hoja vamos a estudiar tres de las funciones elípticas que introdujo Jacobi. Dos de ellas son una especie de variante doblemente periódica de las funciones trigonométricas seno y coseno. Esto es bastante atractivo porque los péndulos oscilan con las funciones de Jacobi y no con el seno y el coseno [Bae17] [Law89]. Por lo señalado antes, en vez de proceder como Jacobi definiendo las funciones como inversas de integrales y después relacionándolas con funciones θ, procederemos al revés, dando una definición extraña en términos de funciones θ que permite probar sus propiedades de manera más sencilla y terminaremos viendo que invierten integrales elípticas.

Un problema cuando uno se adentra en la teoría clásica de funciones θ es que la notación es muy farragosa. Peor todavía, hay diferentes escuelas que utilizan notaciones diferentes y bastante asentadas. A continuación te indico la traducción de las funciones θ_j que definió Jacobi y la única θ que definí (para no liaros con la notación) en Variable Compleja II [Cha18a].

$$\theta_1(z) = -iq^{1/4}e^{\pi i z}\theta\big(z+(1+\tau)/2\big), \qquad \theta_2(z) = q^{1/4}e^{\pi i z}\theta\big(z+\tau/2\big),$$
$$\theta_3(z) = \theta(z), \qquad \theta_4(z) = \theta(z+1/2).$$

En realidad Jacobi escribía θ en lugar de θ_4 pero aquí supondría un gran lío. En [WW96, XXI] o [AE06, §4.9] hay una discusión de las notaciones que te será útil si miras diferentes libros[1].

Todas estas θ_j tienen una expresión como sumatorio parecida a la que ya conoces de $\theta(z)$.

$$\theta_1(z) = -i\sum(-1)^n e\big((n+1/2)z\big)q^{(n+1/2)^2}, \qquad \theta_2(z) = \sum e\big((n+1/2)z\big)q^{(n+1/2)^2},$$
$$\theta_3(z) = \sum e(nz)q^{n^2}, \qquad \theta_4(z) = \sum(-1)^n e(nz)q^{n^2},$$

donde todas las sumas son sobre $n \in \mathbb{Z}$.

[1] Si usas [Cha85], ahí llama θ, θ_1, θ_3 y θ_2 a lo que hemos llamado θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4, respectivamente.

Las tres funciones principales que consideró Jacobi son $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$, dadas por

$$\operatorname{sn}(2Kz) = \frac{\theta_1(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)}, \qquad \operatorname{cn}(2Kz) = \frac{\sqrt{k'}\theta_2(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)}, \qquad \operatorname{dn}(2Kz) = \frac{\sqrt{k'}\theta_3(z)}{\theta_4(z)}$$

donde k, k' y K son parámetros que aparecen en las integrales elípticas y que se expresan en términos de las θ_j de la siguiente forma:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}, \qquad K = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0).$$

1) Escribe fórmulas para $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$ que solo involucren $\theta(z)$ y q, salvo que puedes abreviar $z/(2K)$ con alguna otra letra, por ejemplo w. Esto es solo copiar pero te servirá para tener fórmulas con las que trabajar después.

Como su nombre indica sn y cn son los análogos de sen y cos antes mencionados.

2) Prueba que $\operatorname{sn} z$ es impar, que $\operatorname{cn} z$ es par, $\operatorname{sn} 0 = 0$ y $\operatorname{cn} 0 = 1$.

Ya sabes por el curso de Variable Compleja II que es posible expresar las funciones elípticas como cociente de funciones θ, con lo cual no es sorprendente que $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$ lo sean. Veámoslo con más detalle.

3) Comprueba las relaciones

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn} z, \qquad &&\operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn} z, \qquad &&\operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn} z, \\ &\operatorname{sn}(z+2K\tau) = \operatorname{sn} z, \qquad &&\operatorname{cn}(z+2K\tau) = -\operatorname{cn} z, \qquad &&\operatorname{dn}(z+2K\tau) = -\operatorname{dn} z. \end{aligned}$$

Los cálculos serán casi inmediatos si sabes que $\theta_j(z+\tau) = \epsilon_j q^{-1} e^{-2\pi i z}\theta_j(z)$ con $\epsilon_1 = \epsilon_4 = -1$ y $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$. Haz al menos el caso $j = 1$. Deduce de ello que las funciones de Jacobi sn, cn y dn son realmente funciones elípticas. Demuestra que $\{K\tau + 2mK + 2nK\tau \,:\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de polos de cualquiera de ellas y que todos son de orden 1.

El siguiente paso es hacer un análisis detallado de los residuos. Una vez calculados, será posible cancelar polos para probar todo tipo de identidades. Para estudiar los residuos, debes aprender una relación entre valores de θ que no vimos en el curso.

4) Lee [Cha18b]. Te podrás saltar algunas cosas porque ya las conocerás de [Cha18a].

5) Para ver que lo has entendido y porque te será útil, deduce $\lim_{z\to 0} z^{-1}\operatorname{sn} z = 1$ usando fórmulas que aparezcan allí.

Ahora ya estamos en situación de calcular los residuos.

6) Prueba que el residuo de $\operatorname{sn} z$ en el polo $z = K\tau$ es k^{-1}. Te sugiero que emplees la relación $k \operatorname{sn} z \operatorname{sn}(z+K\tau) = 1$, que debes comprobar, y el límite anterior. Si lo prefieres, puedes proceder también sin esta identidad.

Una manera de resolver el siguiente ejercicio pasa por las relaciones $\operatorname{dn} z \operatorname{cn}(z+K) = -k' \operatorname{sn} z$ y $\operatorname{cn} z = \operatorname{dn} z \operatorname{sn}(z + K)$. Se obtienen como la anterior y como no vas a aprender nada nuevo probándolas, las puedes dar por hechas.

7) Prueba que en el polo $z = K\tau$ los residuos de dn y cn son $-i$ y $-ik^{-1}$, respectivamente.

Con esto culminamos el objetivo planteado:

8) Halla los residuos de todos los polos de $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$. Esto debería resultarte fácil con lo anterior si tienes en cuenta las simetrías.

Para los dos ejercicios siguientes puedes proceder de varias maneras, una de ellas es lo indicado anteriormente de cancelar polos usando que una función elíptica sin polos es constante.

9) Prueba $\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1$ y $\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1$.

La primera identidad es la mayor analogía formal con seno y coseno. El papel que desempeña dn es dar el factor de corrección para que la derivada del nuevo seno sea la derivada del nuevo coseno.

10) Demuestra que la derivada de $\operatorname{sn} z$ es $\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$. Los cálculos se reducen bastante usando que ambos miembros son invariantes por $z \mapsto z + 4K$ y $z \mapsto z + 2K\tau$.

Con esto ya estamos preparados para llegar a nuestro objetivo.

11) Demuestra que $y = \operatorname{sn} x$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} (y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

y explica por qué eso se puede interpretar diciendo que $\operatorname{sn} x$ invierte la integral elíptica

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Fíjate que sería muy difícil con el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias probar que la solución a la ecuación planteada tiene propiedades tan destacadas como la doble periodicidad o ser meromorfa en $\mathbb{C}$. De la misma forma, deducirlas a partir de su inversa $I(x)$ es más complicado que lo que hemos hecho aquí.

Como cabe esperar, también cn y dn provienen de integrales elípticas.

12) Escribe ecuaciones diferenciales cuyas soluciones sean $\operatorname{cn} x$ y $\operatorname{dn} x$. Fíjate, que esto no es tan difícil expresando estas funciones en términos de $\operatorname{sn} x$ y usando (1). Escribe también las integrales $I(x)$ correspondientes.

Como recomendación bibliográfica general, te sugiero los libros ya mencionados [AE06] y [Cha85]. Ten cuidado con la notación en ambos. En el primero falta un π en los argumentos con respecto a la notación de Jacobi y en el segundo renumera como he indicado los índices de θ_j. Hay una introducción a las funciones θ en [Rad73] dirigida a su aplicación a teoría de números. También hay multitud de notas que puedes encontrar en internet.

Por si te interesa mirarlo, un verdadero clásico en el tema es [WW96]. Hoy en día tiene un aspecto feo pero se agradece el nivel de detalle de las pruebas de los capítulos XXI y XXII.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento en el que se definan la función θ (si no lo has hecho ya), las funciones $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$ de Jacobi y se llegue al objetivo de probar que invierten integrales elípticas. Para ello tendrás que incluir material de los ejercicios anteriores. Organízalo como prefieras. La limitación es de seis páginas y es preferible que ocupe menos, lo cual será seguramente el caso si has hablado ya antes de θ. Hay gran cantidad de cálculos. Redáctalos de manera económica y detalla solo aquellos que te parezcan relevantes. Intenta sustituir lo que no escribas por referencias concretas a la bibliografía. Si te parece adecuado, puedes incluir también alguna referencia al péndulo o a alguna otra aplicación. En los capítulos 4 y 5 de [Law89] hay una colección de ellas.

Un comentario de LaTeX es que quizá te convenga usar `\DeclareMathOperator` como en la cabecera de la fuente de este documento para definir los comandos `\sn`, `\cn` y `\dn` que producen el tipo de letra y espacios adecuados.

Referencias

[AE06] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Bae17] J. Baez. The pendulum, elliptic functions and imaginary time. `http://www.math.ucr.edu/home/baez/classical/pendulum.pdf`, 2017.

[Cha85] K. Chandrasekharan. *Elliptic functions*, volume 281 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Cha18a] F. Chamizo. Funciones elípticas. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/f_ell.pdf`, 2018.

[Cha18b] F. Chamizo. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosco/files/ell_th.pdf`, 2018.

[Law89] D. F. Lawden. *Elliptic functions and applications*, volume 80 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Rad73] H. Rademacher. *Topics in analytic number theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Edited by E. Grosswald, J. Lehner and M. Newman, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169.

[WW96] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.