Primero te recuerdo algunas cosas generales:

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. Imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente LaTeX, los ficheros `MM18hoja*.tex`, te serán muy útiles como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo cuando al principio tengas menos soltura con LaTeX. Mi recomendación es que, si no lo has hecho ya, lo instales cuanto antes en tu ordenador y pruebes a compilar esta hoja. Yo uso BibTeX para las referencias, que las toma de un fichero externo, pero te mandaré los ficheros para que lo puedas compilar sin ello (a no ser que sepas usarlo). Si alguna vez ves que faltan las referencias al compilar, házmelo saber porque será que se me ha olvidado cambiarlo.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. Al final te indicaré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en LaTeX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y te lo mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Pasando a generalidades sobre tu trabajo, te digo primero algunas cosas que puedes encontrar en mi web. Además de lo que ya conoces [Cha18], el capítulo 5 de mis apuntes [Cha07] se dedica a funciones funciones elípticas y formas modulares y el artículo en colaboración [CR10] creo que nos quedó bastante asequible (con la desaparición de mi página no sé si ahora lo podrás descargar, ya lo pondré de nuevo).

Mi idea es que más de la mitad del trabajo sea de formas modulares que es una teoría más amplia y con muchas ramificaciones. En esta línea, un artículo (muy largo) que a mí me parece magistral es [Zag08]. Lo puedes descargar de `https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/978-3-540-74119-0_1/fulltext.pdf`. En la propuesta inicial incluí también [AE06] y [Iwa97] que están en la biblioteca, como todas las referencias que te sugeriré y que no estén en la red.

En esta primera hoja vamos a empezar con cosas que seguramente no te lleven un gran esfuerzo matemático pero sí bastante tiempo. Además, incluso cuando tengas claro qué escribir, sin experiencia con LaTeX es de esperar que te lleve bastante teclearlo.

Lo primero que te pido es que indagues en el contexto histórico en el que aparecieron y se desarrollaron las funciones elípticas.

1) Busca datos sobre las contribuciones de Gauss, Abel, Jacobi y Eisenstein a la teoría de funciones elípticas antes de que Weierstrass le diera la forma más o menos moderna. Intenta con ello elaborar un esquema histórico.

Una posibilidad es que sigas [LRM96] (está en la biblioteca) y otra que busques en la red por tu cuenta. Si te interesa, en [Wei76] encontrarás más detalle sobre lo que hizo Eisenstein. En cualquier caso no te librarás de tener que adquirir unas pequeñas nociones sobre integrales elípticas. Quiero que te centres en la historia, los detalles matemáticos ya los veremos más adelante. Te anticipo que solo te pediré que escribas a lo más dos páginas sobre esto, con lo cual no es necesario que profundices en exceso.

Para el segundo punto que vamos a abordar, te recuerdo de [Cha18] que se define una *función elíptica* f como una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que tiene dos periodos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$,

$$f(z) = f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2).$$

La teoría de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ con un periodo es sencilla pero ya tiene cierta gracia porque está relacionada con las series de Fourier. La de funciones elípticas ya sabes que es muy amplia y nada sencilla. La pregunta natural es si tiene sentido considerar más periodos. La respuesta es que no con independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$ (sobre $\mathbb{R}$ ni siquiera hay dimensión suficiente). Si has mirado [LRM96] quizá hayas visto algo sobre funciones con cuatro periodos pero no te confundas, no son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$. Aunque la variable compleja no estaba todavía desarrollada entonces, se puede decir que el primero que probó que no es posible tener una función meromorfa no constante con tres periodos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, fue Jacobi. De hecho en [Cha85] se llama *Lema de Jacobi* al siguiente resultado que implica algo más fuerte:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C} - \{0\} \ \Rightarrow \inf_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3-\{\vec{0}\}} |n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3| = 0. \tag{1}$$

Aquí no se supone que ω_1, ω_2 y ω_3 sean periodos de nada, es un resultado sobre números complejos genéricos.

Ahora te propongo un pequeño reto:

2) Deduce de (1) que una función no constante meromorfa en $\mathbb{C}$ no puede tener tres periodos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Nota que (1) es trivial si ω_1, ω_2 y ω_3 son linealmente dependientes sobre $\mathbb{Q}$. En el resto de los casos, obtén una prueba de (1) siguiendo el siguiente esquema:

3) Si el ínfimo fuera $\Delta > 0$, los discos $\big|z - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3)\big| < \Delta/2$ serían disjuntos. Por la triangular, para $N \in \mathbb{Z}^+$ los discos con $|n_j| \le N$ están dentro del disco $|z| \le N(|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3|) + \Delta/2$. Llega a una contradicción si N es muy grande comparando las áreas.

Por si te suena, en Variable Compleja II vimos esto de otra forma en un ejercicio difícil con indicaciones pero prefiero que sigas este esquema, tomado de [Cha85], para practicar.

Lo último que quiero que hagas es:

4) Da un buen repaso a [Cha18], especialmente a las secciones 2 y 3.

Dependiendo de lo que recuerdes, esto puede llevarte poco tiempo.

Tarea a entregar. Compón un documento LaTeX que contenga los tres puntos que has visto en esta hoja: introducción histórica de las funciones elípticas, ausencia de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ no constantes con tres periodos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, resumen de la teoría de funciones elípticas. El máximo de páginas que te sugiero por punto es $2+1+4$ y te sugiero además 4 páginas como mínimo para el total. En el primer punto, como ya te he dicho, no pongas muchos detalles matemáticos, que sea algo que pueda leer cualquier con conocimientos básicos. en el segundo punto debes incluir el teorema y la demostración. En el tercer punto, el reto es hacer una selección. Elige solo los resultados que te parezcan más relevantes y pon solo las demostraciones que te parezcan más ilustrativas. Depende de tus gustos, pero a mí no me parece herético que reduzcas la sección de funciones θ a casi nada porque es algo sobre lo que volveremos más adelante.

Soy consciente de que escribir entre cuatro y siete páginas sin experiencia con LaTeX es muy duro. Tómate el tiempo que necesites, mientras sea razonable, y pídeme ayuda para cualquier duda de LaTeX. Incluye cualquier referencia de las que pongo u otra que hayas encontrado tú a la que hayas dado un mínimo vistazo.

Si no te aclaras acerca de cómo dar formato a enunciados y pruebas de teoremas en LaTeX, quizá te convenga dar un vistazo a `https://es.sharelatex.com/learn/Theorems_and_proofs`

Referencias

[AE06] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Cha85] K. Chandrasekharan. *Elliptic functions*, volume 281 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Cha07] F. Chamizo. Temas de teoría de números. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APsemavanz06.pdf`, 2007.

[Cha18] F. Chamizo. Funciones elípticas. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/f_ell.pdf`, 2018.

[CR10] F. Chamizo and D. Raboso. Formas modulares y números casi enteros. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 13(3):539–555, 2010.

[Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[LRM96] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel′d, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory, With a bibliography by F. A. Medvedev, Edited and with a preface by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Translated from the 1981 Russian original by Roger Cooke.

[Wei76] A. Weil. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 88.

[Zag08] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.