Para terminar de acuerdo con tus previsiones, mi idea es que esta hoja sea la última. Ten en cuenta que cuando la termines todavía habrá trabajo que hacer para corregir las erratas que queden y dar a los diferentes capitúlos cierta conexión revisando las referencias entre ellos.

Lo que vamos a desarrollar a continuación es la relación entre algunas series de Dirichlet y la distribución de los primos. Primero introduzcamos un poco de notación. Consideremos la función contadora de los primos:

$$\pi(x) = \big|\{p \le x \,:\, p \text{ es primo}\}\big|.$$

Tradicionalmente se considera $x \in \mathbb{R}^+$ aunque toda la información está en $x \in \mathbb{Z}^+$. Gauss observó que $\pi(x)$ se parecía a $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$, la función llamada *logaritmo integral*. Por la regla de l'Hôpital se cumple $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$ y entonces si solo estamos interesados en fórmulas asintóticas, no en buenas aproximaciones numéricas, el resultado básico acerca de las distribución de los primos relacionado con la observación de Gauss es

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{cuando} \quad x \to +\infty. \tag{1}$$

Esto es lo que se llama *Teorema de los números primos*. Pasaron aproximadamente 100 años desde la conjetura de Gauss hasta que C. J. de la Vallée Poussin y J. Hadamard lo demostraron en 1896. La primera parte de esta hoja está dedicada a deducir este resultado del Teorema de Wiener-Ikehara combinado con alguna información acerca de la función ζ. Normalmente en esta línea se utiliza la función $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ introducida en la Hoja 2 y relacionada con la función ζ por medio de

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{y} \qquad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}\,dx \qquad \text{donde} \quad \Re(s) > 1. \tag{2}$$

Para abreviar escribiremos en esta hoja $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$. Recuerda que también sabías de hojas anteriores que aunque la serie de Dirichlet de $\zeta(s)$ tiene $\sigma_a = \sigma_c = 1$, esta función admite una extensión meromorfa a $\sigma > 0$ con un único polo en $s = 1$ que es simple y de residuo 1.

1) Deduce a partir de las propiedades recién mencionadas sobre la extensión meromorfa que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon F(1+\epsilon) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon F(1+\epsilon+it_0) = -\nu(t_0) \quad \text{para } t_0 \in \mathbb{R} - \{0\},$$

donde $\nu(t_0)$ es el orden de anulación de $\zeta(s)$ en $s = 1 + it_0$. Esto es, cero si no se anula y la multiplicidad del cero si se anula (esta multiplicidad es siempre un número natural). Indicación: El desarrollo en serie de $\zeta(s)$ alrededor de $s_0 = 1 + it_0$ es de la forma $\sum_{k=\nu(t_0)}^\infty a_k(s - s_0)^k$.

Con este resultado, siguiendo la simplificación de [8] de un argumento clásico, vamos a ver que siempre $\nu(t_0) = 0$, es decir, que $\zeta(1 + it)$ no se anula nunca.

2) Justifica la fórmula

$$\sum_{k=-2}^{2} \binom{4}{2+k} F(1+\epsilon+ikt_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon}} \big(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2}\big)^4 \geq 0$$

y multiplicando por ϵ y tomando límites, deduce $\nu(t_0)=0$. Indicación: Tras notar $\nu(t_0)=\nu(-t_0)$ (¿por qué?), todo lo que hay que utilizar para concluir $\nu(t_0)=0$ a partir de la fórmula anterior es $\binom{4}{2} < \binom{4}{1} + \binom{4}{3}$. Por otro lado, la fórmula se reduce a una sencilla manipulación con el binomio de Newton. Intenta sintetizar.

3) Explica por qué $-s^{-1}F(-s)+(s+1)^{-1}$ define una función continua en $\sigma \leq -1$.

4) Explica por qué la segunda fórmula de (2) dice que $-s^{-1}F(-s)$ es la transformada de Mellin de $\psi(x)$. Aplica el teorema de Wiener-Ikehara, comprobando sus hipótesis, y concluye la fórmula asintótica $\psi(x) \sim x$ que, como veremos a continuación, implica (1).

Para deducir el teorema de los números primos conviene pasar por una función intermedia.

5) Prueba que

$$\psi(x) \sim x \qquad \text{implica} \qquad \vartheta(x) \sim x \quad \text{donde} \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Indicación: Nota que hay menos de $x^{1/2}$ primos con $p^2 \leq x$ y para cada $k < 2$ hay menos de $x^{1/3}$ con $p^k \leq x$. Puedes utilizar esto para obtener $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}\log x + x^{1/3}\log^2 x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}\log x)$. Como curiosidad, se puede probar $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2})$, pero es más avanzado [6, Cor.2.5] e irrelevante para nuestros propósitos.

6) Finalmente, deduce el teorema de los números primos (1) a partir de $\vartheta(x) \sim x$ mostrando primero las siguientes desigualdades para cualquier $x > 1$ y $\epsilon > 0$

$$\pi(x) \geq \frac{\vartheta(x)}{\log x} \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \frac{\log p}{\log x} \geq (1-\epsilon) \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} 1 = (1-\epsilon)\big(\pi(x) + O(x^{1-\epsilon})\big).$$

En realidad, desde hace unos años se sabe que es posible reemplazar el teorema de Wiener-Ikehara por otro resultado mucho más sencillo cuya prueba requiere solo conceptos básicos de variable compleja. Con ello, D. J. Newman [7] consiguió una prueba bastante simple de (1), que D. Zagier simplificó todavía más en [8]. Este último artículo ganó un premio de divulgación matemática y te lo recomiendo si tienes interés en el tema.

Una desventaja de esta prueba del teorema de los números primos es que no habla del término de error. No da ninguna pista acerca de la observación de Gauss sobre el parecido numérico entre $\mathrm{Li}(x)$ y $\pi(x)$, en el sentido de que el error relativo tiende a cero con cierta rapidez. Riemann encontró en su famosa memoria (hay una traducción en [3]), una forma de relacionar $\pi(x)-\mathrm{Li}(x)$ con los zeros de la función ζ y en esa relación aparece una curiosa simetría de ζ llamada la *ecuación funcional* y la famosa *hipótesis de Riemann*, todavía sin probar. En el resto de la hoja trataremos estos dos temas.

La relación entre el error y los ceros nos llevaría a temas de convergencia y de variable compleja alejados de tu trabajo, incluso sin llegar a la fórmula “explícita” de Riemann para $\pi(x)-\mathrm{Li}(x)$. Daremos por supuesto lo siguiente que condensa una parte de las investigaciones de Riemann:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\big(x^r \log x\big) \qquad \text{donde} \quad r = \sup\big\{\Re(\rho)\ :\ \zeta(\rho)=0\big\}. \tag{3}$$

En los capítulos 12, 13 y 15 de [6] se estudia la relación en los ceros de la función ζ y $\pi(x)$ o $\psi(x)$. Desafortunadamente (3) se deja como ejercicio (el primero de 13.1.1). Si quieres dar una referencia en tu trabajo, puedes mencionar ese ejercicio o decir que se sigue de [6, Th.12.5] tomando $T = x^{1-r}$. Lo siento, entre las referencias que tengo a mano, no veo nada mejor.

A Riemann y a nosotros, nos gustaría tener un cota para el error $\pi(x)-\mathrm{Li}(x)$ lo menor posible, lo que lleva a preguntarnos qué tamaño mínimo podría tener r y, como veremos, eso conduce a la hipótesis de Riemann.

7) Procediendo como en el ejercicio 9 de la hoja anterior, demuestra para $\sigma > 1$

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \mathcal{M}f(s/2) \qquad \text{donde} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Seguramente sabes de algún curso de análisis que con desarrollos de Fourier se obtiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = x^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/x} \qquad \text{para} \quad x>0.$$

Esto es bien conocido y en tu trabajo puedes dar §1.7.5 o §2.7.5 de [2] (o §9.4 [4]) como referencia.

8) Traduce esta relación en $f(x) = \frac{1}{2}(x^{-1/2}-1) + x^{-1/2} f(1/x)$ y justifica con ella la igualdad

$$\mathcal{M}f(s/2) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^{-1/2}-1)x^{s/2-1}\,dx + \int_0^1 f(1/x)x^{s/2-3/2}\,dx + \int_1^\infty f(x)x^{s/2-1}\,dx.$$

Calcula la primera integral y realiza un cambio de variable $x\mapsto 1/x$ en la segunda para obtener

$$\mathcal{M}f(s/2) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty f(x)\big(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\big)\,dx.$$

9) A partir de la fórmula anterior, muestra que $s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ se extiende a una función entera que es invariante por $s \mapsto 1-s$. En particular, se cumple la *ecuación funcional*

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

Esta es una fórmula sorprendente. En principio nada hacía sospechar que existiera una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$ cuando introdujimos su serie de Dirichlet.

Por la definición de $\Gamma(s)$ sabemos que no tiene polos en $\sigma > 0$ y es conocido que no se anula en esa región [1, §5.2.4].

10) Utilizando esta información deduce que si ρ en el semiplano derecho cumple $\zeta(\rho) = 0$ entonces $\zeta(1-\rho) = 0$. Sabiendo que hay ceros en $\sigma > 0$, concluye que el menor error posible en (3) requiere $r = 1/2$. Es decir, que todos los ceros ρ de $\zeta(s)$ en $\sigma > 0$ cumplen $\Re(\rho) = 1/2$. A esto se le llama *hipótesis de Riemann*. Según algunos es el problema abierto más importante de las matemáticas. Una de sus consecuencias más conocidas es $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2}\log x)$, debido a (3), pero tiene otras muchas.

En principio no hay nada que sugiera que los ceros de una función compleja como $\zeta(s)$ en $\sigma > 0$ estén "en fila india" ocupando la línea $\Re(s) = 1/2$, llamada la *línea crítica*, y uno tendería a pensar que esto es falso porque la única motivación es nuestra esperanza de que el error $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ sea lo menor posible. Sin embargo, combinando resultados teóricos con extensos cálculos con ordenadores, se ha corroborado que si ordenamos los ceros por el valor absoluto de su parte imaginaria, los primeros 10^{13} están en dicha línea. También se conoce que hay infinitos ceros en la línea crítica e incluso, en cierto sentido, que una proporción positiva de los ceros está allí [5].

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine los ejercicios anteriores dando una demostración del teorema de los números primos a través del teorema de Wiener-Ikehara y, además, incluyendo la ecuación funcional para la función ζ así como su relación con la hipótesis de Riemann.

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.

[2] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[3] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[4] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[5] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[6] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[7] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[8] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.