En esta hoja introduciremos la transformada de Mellin. Esta es una transformada integral esencialmente equivalente a la transformada de Fourier tras un cambio de variable, sin embargo es útil considerarla independientemente por su relación con las series de Dirichlet.

Dada una función definida en $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ se define su *transformada de Mellin* como

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

Como en las series de Dirichlet, es conveniente considerar que s es complejo en general. También en analogía con las series, al ser esta una integral impropia podría no converger (no existir) para ciertos s, incluso podría no converger nunca.

1) Comprueba que si $f(x) = x^\alpha$, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, la transformada de Mellin $\mathcal{M}f(s)$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$.

Quizá la trasformada de Mellin más importante sea la de e^{-x} a la que se llama *función* Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 0.$$

Es fácil que te haya aparecido en alguna asignatura del grado. Es una generalización del factorial en el sentido que indica el siguiente ejercicio.

2) Muestra que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y $\Gamma(1) = 1$. A partir de ello, deduce $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

A pesar de que la transformada de Mellin que define $\Gamma(s)$ solo converge en $\Re(s) > 0$, la relación $\Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1)$ del problema anterior permite extender la definición de manera meromorfa a $\Re(s) > -1$ e, iterando, a $\mathbb{C}$. Por ejemplo, uno puede definir $\Gamma(-2/3 + it)$ como $(-2/3 + it)^{-1}\Gamma(1/3 + it)$ a pesar de que la integral no converge para $s = -2/3 + it$.

Una pequeña variante es la transformada de Mellin de la función gaussiana.

3) Calcula $\mathcal{M}f(s)$ para $f(x) = e^{-x^2}$. Con lo que sabes del valor de $\int_0^\infty f$ (si no lo sabes, búscalo), deduce $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Otras transformadas de Mellin bastante frecuentes son las de logaritmos restringidos a $[1, \infty)$, a veces multiplicados por potencias.

4) Calcula $\mathcal{M}f(s)$ para $f(x) = \text{máx}\big(0, x^{2022}\log x\big)$ indicando cuándo converge.

A continuación veremos algunas propiedades de la transformada de Mellin. Para mayor simplicidad en los dos ejercicios siguientes supón que se tiene la convergencia que necesitas de las integrales impropias que aparecen.

5) La relación con las derivadas es bastante clara y aprovecharemos para practicar con la función Γ. Muestra

$$\mathcal{M}(f')(s) = (1-s)\mathcal{M}f(s-1) \quad \text{y, en general,} \quad \mathcal{M}(f^{(n)})(s) = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\mathcal{M}f(s-n).$$

6) Demuestra que para

$$h(x) = \int_0^\infty f(x/y)g(y)y^{-1}\,dy \qquad \text{se tiene} \qquad \mathcal{M}h(s) = \mathcal{M}f(s)\mathcal{M}g(s).$$

Indicación: Intercambia el orden de integración y haz un cambio de variable.

Quizá la propiedad más importante es lo que se llama *fórmula de inversión de Mellin*, que permite recuperar la función de partida a través de su transformada bajo ciertas condiciones de regularidad. Un enunciado habitual [3, Th. 11.1.1] es que si $F(s)$ es una función holomorfa en una banda $a < \Re(s) < b$ y satisface en ella $|F(s)| = O\big((1+|s|)^{-2}\big)$ entonces para $a < c < b$ la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)t^{-s}\,ds \tag{1}$$

verifica $\mathcal{M}f(s) = F(s)$.

Es importante notar que la integral es una integral de variable compleja a lo largo de la recta vertical $\Re(s) = c$. Al ser F holomorfa, por el teorema de Cauchy o el de los residuos [1], la función f no depende del c elegido.

La prueba de la fórmula de inversión de Mellin se basa en el teorema de inversión de Fourier que, con seguridad, habrás visto en alguna asignatura. Aquí daremos por conocida la siguiente variante: Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es C^∞ y cumple $g(x) = O\big((1+|x|)^{-2}\big)$ entonces la función

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi$$

satisface

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

En tu trabajo puedes citar como referencia [2] o [5]. No es que venga exactamente así en estas referencias, pero se deduce de lo que enuncian.

La prueba de la fórmula de inversión de Mellin es la combinación de los dos ejercicios siguientes:

7) Muestra que (1) para $t = e^{-x}$ se puede escribir como

$$f(e^{-x})e^{-cx} = \int_{-\infty}^{\infty} F(c+2\pi i\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi.$$

8) Utilizando el teorema de inversión de Fourier y deshaciendo el cambio anterior, muestra que $F(c+2\pi i\xi) = \mathcal{M}f(c+2\pi i\xi)$ y como todo s en la banda es de la forma $c+2\pi i\xi$, se deduce la fórmula de inversión de Mellin.

Vamos a estudiar ahora la relación con las series de Dirichlet. Una primera conexión, más bien superficial, está recogida en el siguiente ejercicio.

9) Sea una serie de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$. Demuestra que para $\sigma > \text{máx}(0, \sigma_a)$ se cumple

$$D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\mathcal{M}f(s) \qquad \text{con} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}.$$

Utiliza esto para obtener fórmulas integrales sencillas para $\Gamma(s)\zeta(s)$ y $\Gamma(s)L(s)$ con L como en el primer capítulo.

El *teorema de Wiener-Ikehara* permite deducir un resultado profundo sobre series de Dirichlet empleando la transformada de Mellin. Mi idea inicial era que esta hoja contuviera una prueba del teorema, pero he cambiado de opinión porque no es sencilla y creo que te iba a costar. Sin embargo, dándolo por supuesto, sí estudiaremos cómo deducir el resultado sobre series de Dirichlet.

Uno de los enunciados del teorema de Wiener-Ikehara es que si $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es una función no decreciente que se anula en $[0,1]$ tal que $\mathcal{M}f(s)$ converge para $\Re(s) < -1$ y $\mathcal{M}f(s) + (s+1)^{-1}$ admite una extensión continua a $\Re(s) \le -1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

La expresión "no decreciente" significa, como es habitual, que $f(x_1) \le f(x_2)$ si $x_1 \le x_2$. Es decir, creciente aunque quizá no estrictamente.

Seguramente este enunciado te resulte muy raro (en [6] está el habitual). Se encuadra dentro de lo que se conoce como *teoremas tauberianos* que permiten saber, bajo ciertas condiciones, cómo crece una función a partir de cómo crecen sus promedios.

10) Enuncia el resultado anterior como un teorema en tu trabajo y como ilustración comprueba que $f(x) = \text{máx}(0, x-1)$ satisface las hipótesis y obviamente la conclusión.

Tras el enunciado, puedes aclarar que la prueba es un poco complicada e informar al lector mencionando que está en [4, §8.3]. Si miras esta referencia, verás que no ocupa tanto, pero tiene algunas sutilezas de análisis no tan fáciles de asimilar.

Ahora utilizaremos el teorema de Wiener-Ikehara para deducir un resultado importante sobre series de Dirichlet, que también debes escribir como teorema en tu trabajo. En [4] aparece sin explicaciones como una consecuencia directa del enunciado que se da allí. Nosotros lo haremos con más cuidado.

Partimos de una serie de Dirichlet

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{con} \quad a_n \geq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_a = 1.$$

Supongamos que para cierto $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple que $D(s) - K/(s-1)$ tiene una extensión continua a $\sigma \geq 1$. Entonces se cumple

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = K.$$

El resultado también es válido para $K = 0$ y $\sigma_a \leq 1$, de hecho es más fácil, pero no lo veremos aquí porque ese caso es de poco interés.

Comencemos con una pregunta medianamente trivial, para que te familiarices con esto.

11) ¿Que es lo que dice este resultado al aplicarlo a $D(s) = \zeta(s)$?

Ahora vamos con la deducción.

12) Explica por qué $\sigma_a = 1$ implica que $N^{-s} \sum_{n=1}^{N} a_n \to 0$ cuando $N \to \infty$ para $\sigma > 1$.

13) Aplicando el Lema de Abel, deduce la igualdad $D(s) = sK\mathcal{M}f(-s)$ para $\sigma > 1$ donde $f(x) = K^{-1} \sum_{n\leq x} a_n$.

Quizá en esta aplicación del Lema de Abel, puedas hacer referencia a otras partes de tu TFG para abreviar.

14) Utiliza el teorema de Wiener-Ikehara para deducir a partir de las hipótesis sobre $D(s)$ que $\lim_{x\to\infty} x^{-1} f(x) = 1$ y por tanto el resultado. Indicación: Quizá te sea útil comenzar viendo qeu $\mathcal{M}f(s) + (s+1)^{-1}$ es igual a $-s^{-1}K^{-1}\big(D(-s) + K(s+1)^{-1}\big) + s^{-1}$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine los ejercicios. Recuerda enunciar como teoremas la fórmula de inversión de Mellin, el teorema de Wiener-Ikehara y su consecuencia sobre las series de Dirichlet. Es conveniente que enuncies otros resultados como lemas auxiliares. Al final, esta hoja me ha quedado un poco larga. Te dejo libertad en la extensión, pero intenta sintetizar todo lo que puedas. El conjunto debe dar lugar a un tercer capítulo de tu TFG llamado *La transformada de Mellin*.

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.

[2] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[3] O. P. Misra and J. L. Lavoine. *Transform analysis of generalized functions*, volume 119 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 106.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[5] Wikipedia contributors. Fourier inversion theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fourier_inversion_theorem&oldid=1101683208`, 2022. [Online; accessed 11-December-2022].

[6] Wikipedia contributors. Wiener-Ikehara theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wiener%E2%80%93Ikehara_theorem&oldid=1081662894`, 2022. [Online; accessed 10-December-2022].