Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `MC22hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente, de todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Esta hoja está dedicada a estudiar las propiedades de convergencia de las series de Dirichlet y a aprender un poco de la función ζ de Riemann, que es un ejemplo destacado. Todo lo que vamos a ver está en [3] y la parte de ζ en [2], pero es más conveniente que te enfrentes a los ejercicios sin mirar estas referencias que, por otro lado, te pueden resultar complicadas.

La definición principal relativa a tu TFG es que a una serie de la forma

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

se le llama *serie de Dirichlet*. Por tradición, se usa el nombre s en lugar de z a pesar de que se considera a s un parámetro complejo. Además se suelen denotar σ y t, respectivamente, las partes real e imaginaria de s. Es decir, $s = \sigma + it$ con $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Dependiendo de la sucesión a_n, la serie puede converger o divergir para un valor de s. Te propongo que intentes localizar dos casos extremos:

1) Busca una sucesión a_n tal que $D(s)$ no converja para ningún $s \in \mathbb{C}$ y otra tal que converja para todo $s \in \mathbb{C}$.

Recuerda que una serie de números complejos $\sum c_n$ se dice que *converge absolutamente* si $\sum |c_n|$ converge. Se define la *abcisa de convergencia absoluta* de una serie de Dirichlet $D(s)$ como

$$\sigma_a = \text{ínf}\,\big\{\sigma \in \mathbb{R} \,:\, D(\sigma) \text{ converge absolutamente}\big\}.$$

En análisis el convenio es que $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$, por tanto se escribe $\sigma_a = \infty$ si $D(s)$ no converge absolutamente para ningún s real.

2) Halla σ_a para las siguientes series de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{n^s}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+e^n) + i\sqrt{n}}{n^s} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{n^s}.$$

Despreocupándonos de lo que ocurre en la frontera, la convergencia absoluta solo se puede dar en semiplanos (o en todo el plano complejo, si $\sigma_a = -\infty$). Te propongo en el siguiente ejercicio que lo demuestres. Debiera resultarte muy fácil. Recuerda que, debido a la notación

$s = \sigma + it$, la desigualdad $\sigma > K$ define un semiplano a la derecha y $\sigma < K$ un semiplano a la izquierda, ambos complementarios salvo la frontera.

3) Prueba que una serie de Dirichlet $D(s)$ converge absolutamente para los s con $\sigma > \sigma_a$ y no converge absolutamente para ningún s con $\sigma < \sigma_a$.

Por supuesto, desde el punto de vista del análisis es natural ocuparse de la convergencia a secas. El análogo de la definición anterior es la *abcisa de convergencia*, dada por

$$\sigma_c = \operatorname{ínf} \big\{ \sigma \in \mathbb{R} \,:\, D(\sigma) \text{ converge} \big\}.$$

Si $a_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, claramente $\sigma_a = \sigma_c$. En otro caso podrían ser diferentes.

4) Halla σ_a y σ_c para la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^s$.

Resulta que, como antes, la convergencia y la divergencia ocurre en semiplanos (olvidándonos de la frontera). Además en el semiplano de convergencia obtenemos una función holomorfa. Esto es más difícil que en el caso de la convergencia absoluta. Para abordar estas cuestiones y para el resto del trabajo, es conveniente que aprendas cierta notación (que quizá te hayan comentado en alguna asignatura) y una fórmula para expresar sumas con integrales.

Respecto a la notación, es la llamada *notación O de Landau*. Con ella, se escribe $f = O(g)$ para indicar que

$$\operatorname{lím\,sup} \Big| \frac{f(x)}{g(x)} \Big| < \infty.$$

Esto es como decir $|f| < K|g|$ para cierta constante K en la región en la que nos movemos. Por el contexto se suele sobrenteder a qué tiende la x en el límite anterior. Típicamente es a 0 o a ∞. Si hay dudas, se indica. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x - 2022} = O(x^{-1}), \quad \log x = O(x), \quad \frac{2x+1}{x+4} = O(1), \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

En el último caso cuando $x \to 0$ y en los otros cuando $x \to \infty$. Fíjate que en la última fórmula, la expresión $O(x^5)$ sustituye a una función que está acotada por $C|x|^5$. Teniendo en mente el Teorema de Taylor, muchas veces se sobrentiende que $x \to a$ cuando se escribe $O\big((x-a)^n\big)$. Por supuesto, si hay duda hay que especificarlo. Hay otras dos notaciones dentro del mismo contexto que son $f = o(g)$ y $f \sim g$ para indicar, respectivamente,

$$\operatorname{lím} \frac{f}{g} = 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{lím} \frac{f}{g} = 1.$$

Por supuesto, $f = o(g)$ implica $f = O(g)$, pero no al revés.

Si tienes dudas sobre estas tres notaciones mira el artículo de la wikipedia [5], que es bastante completo. Las iremos usando en el trabajo y es bueno que lo menciones en el primer capítulo.

Para practicar, te propongo que uses esta notación en la demostración de un resultado sencillo que relaciona σ_c y σ_a.

5) Prueba que $\sigma_c \le \sigma_a \le \sigma_c + 1$ con la restricción de que la demostración de $\sigma_a \le \sigma_c + 1$ debe empezar con la frase: "Por la definición de σ_c, $D(\sigma_c + \epsilon)$ converge para cualquier $\epsilon > 0$, por tanto $a_n = o\big(n^{\sigma_c+\epsilon}\big)$". Si no ves clara esta afirmación, debes explicarla.

La otra cosa que debes aprender es la transformación de sumas en integrales por medio de lo que se llama a veces *Lema de Abel* o, en un contexto más general, *sumación por partes*. Es la identidad:

$$\sum_{n\le x} c_n g(n) = C(x)g(x) - \int_1^x C(u)g'(u)\,du \tag{1}$$

donde x es real (mayor que 1 para que no sea trivial), c_n son números complejos, $g : [1, x] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con derivada continua y $C(u) = \sum_{n\le u} c_n$. Como es habitual, se supone que la n toma valores enteros positivos.

6) Busca en internet alguna prueba[1] de (1) y escríbela a tu gusto explicando los pasos que creas que merecen algún comentario. Si prefieres un libro, está en [1, p. 24] o en [3, (A.5)] (más avanzado).

La identidad anterior permite escribir cualquier serie de Dirichlet como una integral. El siguiente ejercicio también se cumpliría sin la hipótesis $\sigma_c < 0$ y para todo $\sigma > \text{máx}(0, \sigma_c)$, pero así te resultará más asequible.

7) Si $\sigma_c < 0$, demuestra que para todo s con $\sigma > 0$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s\int_1^{\infty} A(x)x^{-s-1}\,dx \qquad \text{donde} \quad A(x) = \sum_{n\le x} a_n.$$

Ahora vamos al resultado fundamental sobre la convergencia de series de Dirichlet. De nuevo usamos la notación $s = \sigma + it$ y también escribiremos $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Lo que vamos a demostrar es lo siguiente:

> Dados $s_0 \in \mathbb{C}$ y una constante arbitraria $K > 0$, si $D(s_0)$ converge entonces $D(s)$ converge uniformemente en el sector circular $\big\{s : \sigma \ge \sigma_0,\ |t - t_0| \le K(\sigma - \sigma_0)\big\}$.

Antes de probar este resultado quiero que hagas el siguiente ejercicio que muestra dos consecuencias importantes.

[1] En `https://www.math.ucdavis.edu/~tracy/courses/AbelSummation.pdf` he visto una. Seguramente buscando un poco encuentres otra mejor.

8) Suponiendo el resultado anterior, deduce: 1) La serie no converge para ningún s con $\sigma < \sigma_c$. 2) La serie converge para todo s con $\sigma > \sigma_c$ y en ese semiplano abierto, define una función holomorfa.

Como pista, antes de aplicar (1), en ambos casos tendrás que tomar K muy grande. Para la parte de ver que es holomorfa, lo más rápido es usar el teorema de Morera que se estudia en variable compleja. Mira por ejemplo el apartado de aplicaciones de [4].

Ahora vamos con la demostración del resultado. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^{s_0}$ converge. Llamemos $P(u)$ al trozo de la suma con $n \le u$ y $R(u)$ al resto de la suma. Por ejemplo, $P(N)$, con $N \in \mathbb{Z}^+$, es la N-ésima suma parcial y $P(\infty)$ es $D(s_0)$.

9) Usando (1) deduce, para $N, M \in \mathbb{Z}^+$, $N > M$, que

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{P(N)}{N^{s-s_0}} - \frac{P(M)}{M^{s-s_0}} + (s - s_0) \int_M^N P(u) u^{s_0-s-1}\, du.$$

Una pista es que la suma se puede escribir como diferencia de dos sumas que empiezan en $n = 1$.

10) Utilizando $P(\infty) = P(u) + R(u)$, obtén

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{R(M)}{M^{s-s_0}} - \frac{R(N)}{N^{s-s_0}} + (s_0 - s) \int_M^N R(u) u^{s_0-s-1}\, du.$$

11) Por la convergencia, dado $\epsilon > 0$, tomando M grande, conseguimos $|R(u)| < \epsilon$ para $u \ge M$. Justifica que si $s \ne s_0$ está en el sector del enunciado,

$$\Big| \sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \Big| < \epsilon \Big(2 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \Big) \le (3 + K)\epsilon$$

para cualquier N. Explica por qué esto termina la demostración.

En el resto de la hoja vamos a introducir la serie de Dirichlet más famosa. Es la *función ζ de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

El interés que tiene es que está íntimamente ligada a la distribución de los números primos. En principio eso suena muy misterioso. Lo estudiaremos más adelante en tu trabajo.

Comenzamos con algo extremadamente sencillo.

12) Muestra que para $\zeta(s)$ se tiene $\sigma_c = \sigma_a = 1$.

Con ello, estamos seguros de que $\zeta(s)$ define una función holomorfa para $\sigma > 1$ y que no converge para ningún valor con $\sigma < 1$. Ahora viene una pequeña sorpresa. Introduzcamos la serie de Dirichlet auxiliar

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Por un ejercicio anterior sabemos que $\sigma_c = 0$, por tanto define una función holomorfa en $\sigma > 0$. Por otro lado,

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = L(s) \qquad \text{si } \sigma > 1.$$

13) Explica esta fórmula.

Entonces, aunque $\zeta(s)$ no converge en todo el semiplano $\sigma > 0$, excluyendo $s = 1$ donde el factor $1 - 2^{1-s}$ se anula, podríamos redefinirla allí como $L(s)/(1 - 2^{1-s})$ y sería holomorfa. Esto es lo que se llama una *extensión holomorfa* o *analítica*. Es algo similar a lo que ocurre con la suma infinita de una progresión geométrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

La parte de la izquierda existe solo para $|x| < 1$ mientras que la parte de la derecha extiende su significado de manera coherente (holomorfa) para todo $x \neq 1$.

Se llama $\zeta(s)$ no solo a la serie de Dirichlet anterior sino también a su extensión.

Vamos a estudiar con más cuidado qué ocurre en $s = 1$, el punto que hemos tenido que excluir.

14) Demuestra para $\sigma > 1$ las fórmulas

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{x^{s+1}}.$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa la parte entera.

La última integral claramente converge para $\sigma > 0$ porque $x - \lfloor x \rfloor - 1/2$ está acotado. Así que esta fórmula permite extender $\zeta(s)$ al menos a $\sigma > 0$ y deducir que en esa región tiene un único polo en $s = 1$ con residuo igual a 1. Si se te da muy bien el análisis quizá sepas demostrar que la integral incluso converge para $\sigma > -1$ (no hace falta que lo hagas).

15) Explica lo del polo y lo del residuo.

Es decir, $\zeta(s) - 1/(s-1) = O(1)$ para $s \to 1$. Se puede apurar un poco más. Seguramente alguna vez en el grado te han mencionado la constante de Euler

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \log N \Big) = 0{,}57721\ldots$$

16) Demuestra que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \qquad \text{para } s \to 1$$

justificando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) &= \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{x - \lfloor x\rfloor - 1/2}{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\Big(\log N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\Big) = \gamma.\end{aligned}$$

Para terminar, una curiosidad que puedes reflejar o no en tu trabajo. Fíjate que si uno sabe lo que he dicho antes de que la integral impropia en realidad converge para $\sigma > -1$, tomando $s = 0$ se obtiene $\zeta(0) = -1/2$, lo cual suena increíble si solo se tiene en mente la serie de Dirichlet de $\zeta(s)$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Esta hoja debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Resultados básicos de convergencia* o algo parecido. Mi estimacion es que esta parte es aproximadamente un quinto de tu TFG.

Referencias

[1] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números.* Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[2] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] Wikipedia contributors. Morera's theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Morera%27s_theorem&oldid=1067540057, 2022. [Online; accessed 7-September-2022].

[5] Wikipedia contributors. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1104857404, 2022. [Online; accessed 6-September-2022].