Esta hoja tiene ciertas conexiones con la primera porque requiere la solución numérica, con ordenador, de una ecuación diferencial ordinaria. Seguro que podrás aprovechar parte de lo que aprendiste allí. Ya te indiqué que tres herramientas posibles son `matlab`, `octave` y `sagemath`. Yo he utilizado esta última porque me siento con más soltura, sobre todo para representar gráficamente los resultados, pero posiblemente `matlab` resulte más cómodo para resolver ecuaciones diferenciales, aunque solo sea por la cantidad de documentación que hay. Esta hoja corresponde al punto del temario original que llamé "Péndulos y poleas". Ahora me suena más apropiado "Un péndulo de longitud variable" y lo he cambiado así en la web. Si se te ocurre un nombre más sugestivo, no dudes en elegirlo.

Lo que vamos a hacer es un experimento casero de lo que en principio parece prácticamente una caída libre y dar un modelo matemático cualitativo que explique el sorprendente resultado.

1) Haz el experimento descrito en [GM08]. Puedes descargar una copia del artículo en:

`http://venus.uca.es/eureka/revista/Volumen5/Numero_5_1/Garc%EDa_Molina_2008.pdf`

Por si fuera de utilidad, te cuento a grandes rasgos mi experiencia realizándolo: Utilicé una taza como objeto pesado y una llave pequeña, de archivador, como objeto ligero. En vez del "palillo chino" que menciona, usé un cilindro de cierto grosor. Según la teoría física lo relevante para la fuerza de frenado no es el grosor sino el rozamiento del material del que está hecho, aunque, como te explicaré al final, el grosor tiene importancia en situaciones extremas. La cuerda que empleé era más fina que la que se ve en las fotos de [GM08]. Nunca estuve cerca de romper la taza porque en mis experiencias el frenazo fue drástico y suficientemente rápido. No obstante, ampliando lo que menciona el autor al final de su artículo, en las primeras pruebas ponte encima de una cama o pon un cojín debajo para evitar desastres y asegurarte de que la cuerda es suficientemente resistente para que aguante el frenazo del objeto sin romperse.

2) Haz dos fotos, una con el estado inicial del experimento y otra con el estado final. No he pensado en un vídeo porque los experimentos de caída libre son tan rápidos que supongo que es difícil, pero ya me sorprendiste en la hoja 1 y me alegrará que me sorprendas también en esta. No te sientas obligada.

Según la *ecuación del cabestrante* [Wik20], con una fuerza F en un cabestrante (una polea en que la cuerda puede dar varias vueltas) se puede sostener una carga que pese $e^{\mu\varphi}F$ donde μ es coeficiente de rozamiento y φ es el ángulo de contacto de la cuerda con el cabestrante. Por ejemplo, para $\mu = 0{,}2$, que usaremos después, con un peso de 1 kg y media vuelta $\varphi = \pi$, podríamos sostener 1,87 kg, mientras que con 3 vueltas, $\varphi = 6\pi$, podríamos sostener 43,38 kg. Como el crecimiento es exponencial, en cuanto dé unas pocas vueltas, podemos sostener prácticamente cualquier cosa. Lee el ejemplo en [Wik20] sobre la posibilidad de que un recién nacido sostenga dos portaaviones. Más allá de la exageración, el caso es que una cuerda enrollada alrededor de un cilindro unas pocas vueltas, tiene un poder de sujeción bastante poco intuitivo para los que no somos marinos.

3) Busca donde prefieras de dónde sale la ecuación del cabestrante, *capstan equation* en inglés, y explícalo con tus palabras. Si no lo encuentras, o no tienes ganas de buscar una referencia mejor, aquí hay un vídeo donde lo explica con mucho detalle:

`https://www.youtube.com/watch?v=gQtkVYOl-mI`

Todo lo que tienes que saber es que el rozamiento es proporcional, con una constante llamada μ, el *coeficiente de fricción*, a la fuerza normal. Esto es intuitivo: si tienes algo en el suelo que pesa $10\,kg$ te va a costar 10 veces menos ponerlo en movimiento que algo que pese $100\,kg$, aunque la física sin rozamiento te diga que se pondrá en movimiento con cualquier fuerza.

Buscando al azar, he encontrado en una revista de arboricultura [Kan07] unas tablas con el coeficiente de fricción madera-cuerda. Seguramente esto es solo una aproximación un poco burda porque sus cuerdas seguro que son especiales y la madera de una rama es más rugosa que la usada en el experimento pero, basándonos en esas tablas, tomemos como aproximación $\mu = 0{,}2$ que es lo más bajo que aparece allí.

4) Estima aproximadamente la proporción del peso de los objetos grande y pequeño que has usado y, dando por bueno $\mu = 0{,}2$, calcula el número de veces n que debe estar enrollada la cuerda en el cilindro para que el segundo sea capaz de sostener al primero. A pesar de la notación, este n será con seguridad un número no entero (por ejemplo, 2,13 vueltas).

La conclusión es que si probamos que, en ausencia de rozamiento, antes de chocar contra el suelo la cuerda ha dado más de n vueltas, entonces el rozamiento habrá detenido el choque antes. Esto es más bien cualitativo, para hacer un cálculo preciso habría que tener en cuenta más cosas, porque la fuerza centrífuga hace que el objeto pequeño ejerza más fuerza que su peso cuando está en la parte inferior y, por otro parte, el rozamiento ralentiza la caída de una manera gradual complicada. A pesar de ello, el crecimiento exponencial hace que no sea una locura la idea de que el rozamiento para detener el objeto grande se aplique de pronto, cuando el número de vueltas ha excedido el umbral dado por n.

Lo que vamos a hacer en el resto de los ejercicios es, suponiendo que no hay rozamiento, mostrar que la cuerda se llega a enrollar más de n veces.

No sé si conoces algo de mecánica lagrangiana. No es que haya que saber mucho y en parte ya la has empleado en una hoja anterior. Por si acaso:

5) Lee §3.1 de [Cha12] hasta el ejemplo del péndulo. La deducción lagrangiana de la ecuación del péndulo (en la segunda línea de la página 39) es lo que debes entender.

El objeto pequeño actúa como un péndulo cuya longitud varía con el tiempo con la fórmula $L(t) = L_0 - \frac{1}{2}gt^2$, ya que cualquier objeto que cae desde el reposo (en este caso el grande), recorre un espacio de $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.

6) Tomando como muestra el ejemplo del péndulo de [Cha12, §3.1], deduce la fórmula para el lagrangiano $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$ correspondiente al problema del péndulo con longitud variable. Si la deducción es correcta, debes llegar a

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mL^2(t)\dot{\theta}^2 + mgL(t)\cos\theta.$$

Aquí m es la masa del objeto pequeño, pero es irrelevante para el cálculo sin rozamiento que vamos a hacer. Por supuesto, sí ha sido importante para el cálculo de n.

7) Utilizando las ecuaciones (en este caso, "la" ecuación) de Euler-Lagrange, deduce la ecuación diferencial que se enuncia en [GM08].

8) Las condiciones iniciales son $\theta(0) = \pi/2$, $\theta'(0) = 0$, ¿lo ves claro? Bajo estas condiciones (y tomando $L_0 = 1{,}5$, $g = 9{,}81$), escribe un programa para que tu paquete matemático favorito resuelva la ecuación diferencial en el intervalo $[0, t_f)$ donde $L(t_f) = 0$. Este t_f es el tiempo en el que no queda más cuerda para el péndulo determinado por el objeto pequeño.

Dependiendo del *software* que uses, quizá tengas que poner $t \in [0, 0{,}995t_f)$ o algo parecido para evitar la singularidad en $t = t_f$. Posiblemente tendrás que convertir la ecuación en un sistema de primer orden para que tu ordenador trabaje con ella. Definiendo las funciones $y = \dot{\theta}$ (θ' para los matemáticos) y $z = t$, dos posibilidades son:

$$\begin{cases} \theta' &= y \\ y' &= \dfrac{2gt\theta - g\,\mathrm{sen}\,\theta}{L(t)} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \theta' &= y \\ y' &= \dfrac{2gz\theta - g\,\mathrm{sen}\,\theta}{L(z)} \\ z' &= 1 \end{cases}$$

La gracia del segundo es que es autónomo, es decir, no involucra explícitamente a la variable independiente (al tiempo t). Depende de lo que uses, esto podría ser una necesidad.

Te recomiendo que pruebes tu programa primero con sistemas de EDO que tengan soluciones explícitas sencillas para asegurarte de que funciona bien. Yo por ejemplo he probado con $\theta' = y$, $y' = 0$, $z' = 1$ que tiene solución $\theta(t) = 3t - 2$ bajo $\theta(1) = 1$, $y(1) = 3$, $z(1) = 1$.

9) Como prueba de fuego, reproduce con tu programa el gráfico de [GM08] que muestra la curva $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big) = \big(L(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t), -L(t)\cos\theta(t)\big)$. Céntrate en la curva, olvídate de las letras que indican el tiempo. Haz la gráfica análoga para $L_0 = 0{,}75$, la mitad de la longitud sugerida. La gráfica debe ser similar.

Por si te sirve de ayuda y tienes que ponerla, yo tomé para ambas una discretización en el tiempo de 10^{-4}, es decir, $10^4 t_f$ divisiones en el intervalo. Te recomiendo que en la primera gráfica fijes un tamaño y límites de los ejes similar al de [GM08] para poder comparar mejor tu gráfica y la suya.

Según la gráfica y la experiencia, θ decrece llegando a tomar valores cada vez más negativos. En la posición inicial la cuerda tiene un contacto de $1/4$ de vuelta, $\pi/2$ radianes, y además

$\theta(0) = \pi/2$. Por tanto para tiempo t el número de vueltas será

$$\mathcal{N}(t) = -\frac{\theta(t) - (\pi/2 + \pi/2)}{2\pi} = \frac{\pi - \theta(t)}{2\pi}.$$

10) Explica la fórmula anterior y estima con tu programa el tiempo t_r para el cual el número de vueltas es n, esto es, $\mathcal{N}(t_r) = n$ y comprueba que $t_r < t_f$, lo que da una justificación cualitativa de que el objeto no llega a caer.

En realidad, la solución de la ecuación diferencial cumple $\theta(t) \to -\infty$ cuando $t \to t_f$, por tanto sean cuales sean tus datos, la teoría dice que $t_f < t_r$ y no se va a chocar contra el suelo (dando por hecho que la distancia entre el suelo y el cilindro es al menos L_0). Sin embargo, no es difícil imaginar, e incluso recrear, casos en que el experimento salga mal con un peso grande excesivo. Parte de la explicación de esta paradoja, es que en nuestro modelo el cilindro no tiene grosor, es una varilla infinitamente fina, y por tanto se puede enrollar la cuerda indefinidamente, pero en un experimento real su grosor impone limitaciones al número de vueltas posibles sin que se acabe la longitud de la cuerda.

Como apunte final, añado una razón más por la que el modelo es más bien cualitativo y no serviría para hacer predicciones. Por mucho que los textos de física básica den por buena la fórmula $\frac{1}{2}gt^2$ para la caída libre, a menudo está lejos de aplicarse en nuestra experiencia diaria porque el rozamiento del aire es casi siempre muy relevante. Si tomáramos a pie juntillas esta fórmula, las gotas de lluvia nos llegarían a nosotros con mayor velocidad que la de un avión comercial y, en algunos casos, rompiendo la barrera del sonido. Este rozamiento ayuda en nuestro experimento porque en el vacío la taza caería más rápido.

Tarea a entregar. Como en hojas anteriores, describe el experimento con palabras, incluye las dos fotos y, si quieres, figuras adicionales. Tras ello, siguiendo lo que has hecho en los ejercicios, en particular, describe la teoría que lleva a la ecuación del cabestrante y, con más detalle, a la ecuación diferencial. Incluye las gráficas de las soluciones numéricas así como el listado del programa que hayas usado (usando el paquete `listings`).

Una vez más, la extensión la dejo a tu elección. Si yo tuviera que hacerlo, seguramente ocuparía unas 5 o 6 páginas. Ten en cuenta que las figuras y el programa quitan bastante espacio. Si te ocupa demasiado poco, extiéndete lo que quieras con la formulación lagrangiana de la mecánica. Posiblemente lo que te dé más lata es la solución numérica de la EDO. Si lo consideras conveniente, da indicaciones de cómo usar el ordenador con este fin a la luz de las dificultades que te hayan surgido.

Referencias

[Cha12] F. Chamizo. Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster). `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf` , 2012.

[GM08] R. Garcia-Molina. La taza que sobrevivió una caída libre. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 5:114–117, 2008.

[Kan07] B. C. Kane. Friction coefficients for arborist ropes passing through cambium saver rings. *Arboriculture and Urban Forestry*, 33:31–42, 2007.

[Wik20] Wikipedia contributors. Capstan equation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 14-December-2020].