Cambiando el orden del temario propuesto, esta entrega está dedicada a unas ilusiones ópticas debidas a K. Sugihara [Wik20], un matemático profesor de ingeniería que se ha hecho famoso por estas y otras ilusiones en tres dimensiones. Las que estudiaremos se pueden construir fácilmente incluso con papel y el resultado es ya impresionante cuando uno las ve y mucho más cuando uno las fotografía o las graba en vídeo. Para que te hagas una idea te recomiendo que antes de nada mires el vídeo viral de Sugihara que enlazo en la página de mi web en la que hablo de esto:

`http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/dark/d_sugi_ts.html`

En esta hoja no vamos a conseguir algo tan espectacular pero aún así muy sorprendente. Además veremos la explicación matemática, que resulta ser bastante sencilla.

Vamos primero con los experimentos.

1) Lee lo que he escrito en mi web en la dirección de más arriba. Imprime la plantilla o cálcala de la pantalla, construye el recortable y comprueba la ilusión frente a un espejo. Haz fotos al resultado. En teoría, como veremos después, para que el resultado sea óptimo deberías tomarlas con un ángulo de 45° con la horizontal y suficientemente lejos. En la práctica lo de estar lejos no es tan crítico y el ángulo basta ajustarlo por tanteos.

Ahora vamos con el círculo-cuadrado.

2) Usa `http://users.dickinson.edu/~richesod/papercirclesquare.pdf` para hacer una plantilla que dé el círculo-cuadrado del que habla [Ric16]. Te recomiendo que, como he hecho yo en la mía, pongas la base plana y le añadas una pestaña. Con lo primero conseguirás que se sostenga por sí sola y lo segundo te ayudará a pegarla.

En ambos casos como el resultado es flexible seguramente tengas que ajustar un poco la forma por prueba y error para obtener el mejor resultado. El triángulo debe parecer equilátero.

Ahora vamos con la explicación matemática la cual es sorprendentemente simple. Para ello debes buscar el artículo brevísimo [Ric16]. Si no lo encuentras o solo lo ves en algún sitio que te pide una contraseña institucional, hay un enlace en abierto en el *blog* del autor:

`https://divisbyzero.com/2016/10/02/two-more-impossible-cylinders/`

3) Lee [Ric16] y si hay detalles que no entiendes trata de completarlos. Para comprobar que lo has entendido halla la fórmula para $\mathbf{r}(t)$ si se quiere que el efecto se produzca en vez de mirando con un ángulo de 45° con un ángulo α arbitrario menor que 90°. ¿Dónde hemos usado que estamos observando lejos de la figura? Piensa qué cosas habría que cambiar si no estamos bajo esa hipótesis.

En principio el razonamiento de [Ric16] resuelve del todo del problema (siempre con ángulo de 45° y observación lejana) pero nota que a partir de la forma de una curva plana la f (o la g) no está totalmente determinadas porque podemos variar su orientación. Por ejemplo, una elipse con semiejes 1 y 1/2 corresponde a $f(x) = \pm\big((1-x^2)/2\big)^{1/2}$ o a $f(x) = \pm\big(1-2x^2\big)^{1/2}$ o a situaciones más extrañas se admitimos giros intermedios u homotecias. Esta libertad da lugar a diferentes $\mathbf{r}(t)$ y por tanto diferentes plantillas.

4) Averigua la fórmula de la curva $\mathbf{r}(t)$ que corresponde a una plantilla de solo cuatro "paredes" como la que pongo en mi página que transforma un cuadrado en un triángulo equilátero y viceversa al ser girada la figura 180°.

Te doy algunas pistas: Las cuatro paredes corresponden a definiciones de f y g diferentes dependiendo de las cuatro combinaciones de signos de x e y. Esto te va a forzar a que dos vértices del cuadrado y del rectángulo coincidan. El triángulo tiene menos simetrías que el cuadrado y no vale como en [Ric16] poner para y negativo lo mismo que para y positivo. Sobre todo si no llegas a entender bien lo anterior, nota que según las fotos el pie de la altura del triángulo se refleja en un vértice del cuadrado y el vértice del que parte dicha altura se refleja en el vértice opuesto del cuadrado.

Si has hecho bien el ejercicio anterior, el siguiente casi lo tendrás ya hecho. No te asustes con las fórmulas tan raras. Si ves que te atascas, dime qué has hecho en el anterior y te daré indicaciones para este.

5) Si L es el ancho (sin la pestaña) de una plantilla exacta del triángulo-cuadrado, considera la constante

$$\gamma = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{3}}{5}} = 1{,}5142\ldots$$

y las cantidades asociadas a L:

$$l_1 = \frac{L}{2(\gamma+1)}, \quad l_2 = \frac{\gamma L}{2(\gamma+1)}, \quad h_1 = \frac{\big(\sqrt{3}-1\big)L}{2\sqrt{5}(\gamma+1)}, \quad h_2 = \frac{L}{2\sqrt{5}(\gamma+1)}.$$

Prueba que el ancho de las dos "paredes" cortas es l_1 y el de las dos paredes largas l_2. Por otro lado, si H es la altura de los vértices más bajos de la línea quebrada superior entonces los de la siguiente altura, los de los extremos en mi plantilla, están a altura $H+h_1$ y el de más arriba a altura $H+h_2$.

6) [No es fácil, si no te sale intenta al menos el siguiente] Haz un programa de manera que dadas dos funciones f y g como en [Ric16], con $f(\pm 1) = g(\pm 1) = 0$ dibuje la plantilla en papel correspondiente que hay que recortar para que la curva cerrada $y = \pm f(x)$ se refleje en la curva $y = \pm g(x)$.

La prueba de fuego para saber que el programa es correcto es que dibuje la plantilla que has usado antes para el círculo-cuadrado.

7) [Si no te ha salido el anterior] Trata al menos de describir qué operaciones matemáticas habría que hacer para obtener la plantilla.

En ambos ejercicios, quizá te ayude recordar que las curvas se podían parametrizar por longitud de arco [dC16].

Tarea a entregar. Debes escribir un documento con el formato de esta hoja o el de la plantilla del TFG en el que aparezcan los contenidos de los ejercicios anteriores. Pon fotos, al menos cuatro correspondientes a las 4 posiciones de de las dos figuras: triángulo reflejado como cuadrado, cuadrado reflejado como triángulo, círculo reflejado como cuadrado y cuadrado reflejado como círculo. Lo mismo alguna posición intermedia es ilustrativa también. Por supuesto, si has conseguido hacer el programa, inclúyelo. Si no pon todos los detalles necesarios del último ejercicio. Añade algún comentario de lo que hayas pensado, aunque no sea muy sustancial, cuando la observación no es lejana.

La extensión la dejo a tu elección. No es recomendable que supere las 6 páginas y seguramente no hay material para llenarlas. Tómate el tiempo que necesites. Si me parece demasiado, ya te avisaré.

Referencias

[dC16] M. P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Ric16] D. Richeson. DO THE MATH!: Sugihara's impossible cylinder. *Math Horizons*, 24(1):18–19, 2016.

[Wik20] Wikipedia contributors. Kokichi Sugihara — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 2-November-2020].