A última hora he considerado que era mejor cambiar el apartado correspondiente del temario al que se refiere esta hoja a *Una curva óptica y otra mecánica* porque si incorporaba lo que tenía en mente iba a quedar muy largo.

Primero vamos con los experimentos porque lo mismo te dan cierta motivación.

1) Usando fuente de luz más o menos puntual y lejana (una bombilla o un foco, los tubos fluorescentes no sirven) intenta situar una taza o un cazo hasta observar una curva como la que se muestra en esta foto que hice hace tiempo:

`http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/dark/d_caustt.html`

Como ves usé una taza vacía pero seguramente obtengas mejores resultados con un líquido opaco a ser posible un poco oscuro, como café con leche. No requiere nada de pericia obtener el resultado. Mientras no uses iluminación con tubos fluorescentes o muchas fuentes de luz cercanas, lo conseguirás a la primera. Después de experimentar un poco, cuando tengas un resultado que consideres bueno, hazle una foto.

Lo que se ve es media nefroide, una curva que a cierta escala viene parametrizada por:

$$x(t) = \frac{1}{4}\big(3\sin(t) + \sin(3t)\big), \qquad y(t) = \frac{1}{4}\big(3\cos(t) + \cos(3t)\big) \tag{1}$$

El nombre proviene de su forma de riñón.

2) Dibuja la curva (1) con el ordenador y observa que tiene cierto parecido con lo que se ve en tu foto.

La explicación es que, como veremos después, los rayos de luz paralelos que se reflejan en un círculo (los bordes del recipiente que has usado) son tangentes a la curva (1) creando en ella una especie de frontera luminosa, lo que se llama normalmente un *cáustica* o *catacáustica* [Wik20a] [Wik20b]. Es el fenómeno que produce los reflejos que se ve en los fondos de las piscinas. Para entender su geometría te propongo lo siguiente:

3) Copia el código del siguiente programa de la fuente `.tex` de este documento y ejecútalo en tu `sagemath`, si lo tienes instalado, o en `https://sagecell.sagemath.org/`. Si quieres juega con los parámetros y los colores para que el estilo quede a tu gusto. Por si prefieres cambiarlo, el parámetro `N` redondeado a un múltiplo de 4 da el número de puntos de reflexión menos uno. Con el programa modificado a tu voluntad genera una imagen que ilustre el fenómeno en tu trabajo al lado de la foto real.

```
N = 28

# Fuerza a que sea múltiplo de 4
N = 4*round(N/4)

def nephr():
```

```
    L = [((3*sin(t)+sin(3*t))/4,(3*cos(t)+cos(3*t))/4) for t in srange(0,2*pi,0.03)]
    P = list_plot(L, plotjoined=True, color='green', thickness=2, zorder=120, linestyle='--')
    return P

def pcir(k):
    k -= 3*N/4
    return ( cos(2*pi*k/N/3).n(), sin(2*pi*k/N/3).n() )

def rline(k):
    # Línea reflejada de longitud l = 0.9
    l = 0.9
    v = vector(pcir(3*k)) - vector(pcir(k))
    v = l*v/v.norm() + vector(pcir(k))
    return line([pcir(k), v], thickness=2)

P = arc((0,0),1,1,0,(pi/2,3*pi/2), linestyle='--', thickness=3)
P += arc((0,0),1,1,0,(-pi/2,pi/2), thickness=3)
P += nephr()

for k in srange(N/4, 5*N/4+1):
    P += line([(-1.1,pcir(k)[1]), pcir(k)], thickness=2, color='red', zorder=100)
    P += rline(k) + point([pcir(k)], size=40, zorder=110)

P.set_aspect_ratio(1)
P.axes(False)
P.show()
```

El segundo y último experimento tiene que ver con la curva llamada *catenaria* que tiene como ecuación

$$y(x) = a\cosh\frac{x}{a} - a \tag{2}$$

donde a es una constante. Si has visto esta curva en algún curso del grado, quizá te la hayan contado con otra normalización, por ejemplo sumando a para trasladarla.

4) Realiza el experimento descrito en [Cha02, pp.71-72] (esto son pp.77–78 del PDF). Lo ideal es que la cadena sea suficientemente densa. Con una cuerda es muy probable que te salga mal y con una cadena metálica en las que se ponen medallas o colgantes te saldrá mejor que con una de plástico.

Ahora vamos con la parte teórica que consiste en la justificación matemática de las fórmulas (1) y (2) de la nefroide y la catenaria. La primera te puede resultar un poco dura, si es necesario pide ayuda. En ambos casos es bienvenido que busques bibliografía por tu cuenta sobre todo si lo que menciono no te es suficiente.

5) Lee en [Wik20c] el apartado "Nephroid as caustic of one half of a circle" que te dirigirá al anterior "Nephroid as envelope of a pencil of lines" y tradúcelo en una demostración de que en la situación de la figura que genera el programa (rayos viniendo de la izquierda y circunferencia de radio uno) la ecuación paramétrica de la nefroide es (1) porque los rayos reflejados son tangentes a ella.

Seguramente adaptar la demostración te requiera entenderla bien porque en [Wik20c] se consideran los rayos viniendo desde abajo y la circunferencia de radio 4, lo que se traduce en unos cuantos cambios. Por supuesto, si lo prefieres puedes usar otras fuentes. Por ejemplo, puedes adaptar lo que se hace en [Cha02, p.51] (p.57 del PDF) para la cardiode.

Ya conoces, por el problema de la braquistocrona que si un funcional de la forma

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$$

alcanza un mínimo entonces F debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Lo que quizá no sepas es que si tenemos un mínimo de $\mathcal{F}$ bajo la condición de que el valor de la integral $\int_a^b G\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$ sea constante, entonces lo que debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange no es F sino $F - \lambda G$ donde λ es un parámetro (una constante sin identificar).

6) Dando esto por sabido reescribe a tu manera y abreviadamente la demostración de la ecuación de la catenaria de [Cha02, pp.73-74] (esto son pp.79–80 del PDF) olvidándote de lo de la discretización y usando directamente la ecuación de Euler-Lagrange en la forma explicada antes. Da alguna indicación de cómo se resuelve la EDO. Quizá prefieras seguir [Cri16, §3.7] donde los pasos están detallados, la desventaja es que allí hace un cambio de variable de la x a la longitud de arco que te puede despistar un poco. En [May20, §7] hay una deducción muy rápida auxiliándose de la *identidad de Beltrami* [May20, Th.3.2].

Tarea a entregar. Debes escribir un documento de a lo más 6 páginas con el formato de esta hoja en el que aparezcan los contenidos de los ejercicios anteriores. A saber, la deducción de la ecuación de las dos curvas, una tabla de datos reales y aproximados de la catenaria (acompañados de una foto o de un esquema hecho con el ordenador) y una foto de media nefroide como cáustica junto con la salida del programa que adjunto. Ordénalo de la forma que prefieras si la ordenación usada en esta hoja no te convence.

Yo creo que esto te llevará menos que la anterior entrega porque parte del trabajo lo tienes localizado y los experimentos son fáciles. Tómate no obstante el tiempo que necesites. Si me parece demasiado, ya te avisaré.

Referencias

[Cha02] F. Chamizo. Cálculo III (el cálculo de segundo es muy fácil). http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/libreria.html, 2002.

[Cri16] R. Cristoferi. Calculus of Variations Lecture Notes. http://www.macs.hw.ac.uk/~rc207/teaching/spring16.html, 2016.

[May20] J. Maynard. Calculus of variations. https://courses.maths.ox.ac.uk/node/view_material/50790, 2020.

[Wik20a] Wikipedia contributors. Caustic (mathematics) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 9-October-2020].

[Wik20b] Wikipedia contributors. Caustic (optics) — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 9-October-2020].

[Wik20c] Wikipedia contributors. Nephroid — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 9-October-2020].