Los resultados de esta hoja deben ir en un capítulo titulado “Unicidad”. Dependiendo de lo largo que te quede podemos parar aquí o te propongo una hoja más para completar el espacio. También depende un poco de ti, la longitud es flexible y nadie te va a decir nada porque entregues un par de páginas más o menos.

El problema de unicidad, en pocas palabras, consiste en estudiar si cualquier igualdad del tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(y_n) \tag{1}$$

o incluso del tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \widehat{f}(y_n) \tag{2}$$

se reduce a la fórmula de sumación de Poisson bajo hipótesis naturales. Para evitar problemas de regularidad supondremos, sin decirlo cada vez, que f está en la clase de Schwartz (funciones de decaimiento rápido).

Con (2) hay que tener cuidado al escribir enunciados rigurosos porque por ejemplo se verifica con

$$x_n = n, \qquad y_n = n/2, \qquad a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \mid n \\ 1 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b_n = \begin{cases} 3/2 & \text{si } 2 \mid n \\ 1/2 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases} \tag{3}$$

que no coincide con la fórmula de sumación de Poisson sin embargo no se considera un contraejemplo de la unicidad porque se deduce de esta fórmula de manera bastante directa:

1) Aplicando la fórmula de sumación de Poisson a $f(x)$ y a $g(x) = f(2x)$ y sumando los resultados, prueba (2) para los x_n, y_n, a_n, b_n en (3).

Tanto en (1) como en (2), una hipótesis natural (sobre todo si uno piensa en términos cristalográficos donde los x_n son posiciones de átomos) es que los x_n guarden entre ellos una distancia de separación mínima y lo mismo con los y_n. Matemáticamente

$$\inf_{n\neq m} |x_n - x_m| \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \inf_{n\neq m} |y_n - y_m| \neq 0. \tag{4}$$

Abreviando lo que puedes leer en [CR17], A. Córdoba [Cór88] probó que bajo (4) la única fórmula del tipo (1) es la habitual de Poisson e hizo avances hacia una prueba de algo similar para (2) pero este caso no se ha resuelto hasta recientemente, en [LO15], donde N. Lev y A. Olevskii probaron que una identidad del tipo (2) siempre se reduce a sumar unas pocas fórmulas de sumación de Poisson. Más concretamente, siempre se obtiene aplicando la fórmula de sumación de Poisson a un número finito de funciones de la forma $\lambda f(\mu x + \nu)$ y sumando los resultados, como en el ejercicio anterior. Por otro lado, se sabe que hay fórmulas (2) que no son de este tipo si uno cambia la condición (4) por la condición parecida de que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sean conjuntos discretos, es decir, sin puntos de acumulación.

2) Escribe una pequeña introducción al tema de la unicidad con lo que te acabo de contar combinado con lo que aparece en [CR17, §7]. Debe además incluir la solución del ejercicio anterior y un ejemplo sencillo, distinto del mencionado en [CR17], de un conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que no satisfaga (4) y que no tenga puntos de acumulación.

<u>Unicidad para (1)</u>. El resultado básico es el siguiente:

Teorema 1 (A. Córdoba)**.** *Si se cumple* (1) *con* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *verificando* (4) *entonces necesariamente* $\{x_n\} = \{y_n\} = \mathbb{Z}$ *y entonces la única fórmula de este tipo es la habitual de sumación de Poisson.*

La prueba original está en [Cór88] donde también se trata el caso de más dimensiones. Cuando escribimos [CR17] yo simplifique el caso unidimensional, el que tratamos aquí, y te recomiendo por tanto que utilices esta fuente en lugar del original (pero no menciones en tu trabajo que la prueba es una simplificación mía porque son solo reducciones formales de poca monta). Se utiliza que la función $\phi(x) = \text{máx}(1-|x|, 0)$ cumple $\widehat{\phi} \ge 0$, lo cual ya apareció en el Teorema de Minkowski del capítulo anterior. Si no estoy equivocado, el cálculo de $\widehat{\phi}$ no está en tu trabajo.

3) Demuestra que para $\phi(x) = \text{máx}(1 - |x|, 0)$ se tiene

$$\widehat{\phi}(\xi) = \Big(\frac{\text{sen}(\pi\xi)}{\pi\xi}\Big)^2. \tag{5}$$

Si logras explicar que la simetría implica $\widehat{\phi}(\xi) = 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi\xi x)\,dx$, el cálculo se reducirá a integrar por partes.

4) Escribe la prueba del Teorema 1 dada en [CR17, p.20] explicando cada uno de los pasos e incluyendo la prueba de (5). Ten en cuenta que en [CR17] la prueba del teorema está bastante condensada y seguramente te constará seguirla a la primera, así que no te importe introducir todas las explicaciones que tú consideres necesarias aunque el resultado sea mucho más largo que allí. Si quieres puedes suponer, como en [CR17], que el ínfimo en (4) se alcanza, es decir, que hay dos x_n a una distancia mínima. Después de (7.3), lo que quisimos poner es $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi} = \phi(0) = 1$ (aunque tal como está es correcto también).

<u>Contraejemplo a la unicidad para (2) sin (4)</u>. La unicidad para (2) es demasiado difícil para que la veamos aquí. A cambio vamos a probar un contraejemplo reciente cuando no se supone (4). Este contraejemplo se debe a Y. Meyer [Mey16] y aparte de corresponder a $\{x_n\}$

e $\{x_n\}$ discretos tiene otras propiedades especiales que no estudiaremos porque son un poco técnicas (si tienes interés y quieres mencionarlas en tu trabajo, están en la primera página de [Mey16]). El contraejemplo viene dado por la fórmula del siguiente resultado:

Teorema 2. *Si f es una función impar, para $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3 - \mathbb{Z}^3$ se cumple*

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i\vec{\beta}\cdot\vec{n}}}{\|\vec{n}+\vec{\alpha}\|} f\big(\|\vec{n}+\vec{\alpha}\|\big) = ie^{-2\pi i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \frac{e^{-2\pi i\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}}{\|\vec{n}+\vec{\beta}\|} \widehat{f}\big(\|\vec{n}+\vec{\beta}\|\big). \tag{6}$$

Por si lo miras, en [CR17, (7.4)] aparece con un signo menos de sobra, es una errata.

A primera vista esto no parece tener nada que ver con (2) porque la suma es tridimensional. Lo que hay que entender es que por ejemplo los x_n serían los resultados de hallar $\|\vec{n}+\vec{\alpha}\| = \sqrt{(n_1+\alpha_1)^2+(n_2+\alpha_2)^2+(n_3+\alpha_3)^2}$. Para cada $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ obtendríamos un valor de x_n. Se puede escoger $\vec{\alpha}$ para que todos estos x_n sean distintos y eso es importante en lo que busca Meyer pero nosotros simplemente pensamos que si dos $\vec{n}$ dieran el mismo x_n sumaríamos los coeficientes correspondientes.

5) Toma por ejemplo $\vec{\alpha} = \vec{0}$ y comprueba que $C = \{\|\vec{n}\| \ : \ \vec{n} \in \mathbb{Z}^3\}$, que serían los $\{x_n\}$ correspondientes en ese caso, no cumple (4), es decir, $\operatorname{ínf}\{|x-y| \ : \ x, y \in C, \ x \neq y\} = 0$, y que C es discreto (no tiene puntos de acumulación). Para lo primero nota que $\sqrt{k^2+1}$ y k están muy juntos para k grande y ambos pertenecen a C.

También suena raro que en el teorema se pida f impar porque estudiamos la unicidad para cualquier función de la clase de Schwartz. Eso es poco relevante porque una función f impar se puede escribir como $f(x) = g(x) - g(-x)$ con g arbitraria. Con este cambio tendremos una versión de (6) para funciones sin restricciones de simetría.

El resto de la hoja es la prueba del Teorema 2. Curiosamente, a pesar de que sirve de contraejemplo a la unicidad de la fórmula de sumación de Poisson la obtendremos de su versión tridimensional. Una pregunta que hasta donde yo sé no está resuelta es si todos los contraejemplos bajo las condiciones técnicas de [Mey16] vienen de fórmulas de sumación de Poisson en espacios de dimensión superior.

Comenzamos definiendo la función de tres variables:

$$g(x,y,z) = e^{2\pi i(\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z)} h(x+\alpha_1, y+\alpha_2, z+\alpha_3)$$

donde

$$h(x,y,z) = \frac{f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

6) Comprueba que el primer miembro de (6) es $\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} g(\vec{n})$ y que la fórmula de sumación de Poisson en tres dimensiones implica que basta probar

$$\widehat{g}(-\vec{n}) = -\frac{e^{-2\pi i\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{n})}}{i\|\vec{n}+\vec{\beta}\|}\widehat{f}\big(\|\vec{n}+\vec{\beta}\|\big) \tag{7}$$

donde, por supuesto, a la izquierda la transformada de Fourier es tridimensional y a la derecha unidimensional. Esto es muy sencillo, solo para familiarizarte con la notación y no debería requerirte ningún cálculo. Nota que $\sum \widehat{g}(\vec{n}) = \sum \widehat{g}(-\vec{n})$.

7) Demuestra que para obtener (7) basta demostrar

$$\widehat{h}(\vec{\xi}) = -\frac{\widehat{f}(\|\vec{\xi}\|)}{i\|\vec{\xi}\|} \qquad \text{para} \quad \vec{\xi}\in\mathbb{R}^3. \tag{8}$$

Para ello simplemente tienes que buscar la relación entre $\widehat{g}$ y $\widehat{h}$ haciendo un cambio de variable. Te saldrá que (7) equivale a (8) con $\vec{\xi} = -\vec{n}-\vec{\beta}$.

Para seguir vamos a ver un resultado auxiliar de análisis de Fourier.

8) Si $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ (que como siempre suponemos de la clase de Schwartz) y A es la matriz de un giro, entonces $G(\vec{x}) = F(A^t\vec{x})$ cumple $\widehat{G}(\vec{\xi}) = \widehat{F}(A\vec{\xi})$. En realidad esto ya lo hiciste en tu trabajo. Recuerda que $\vec{x}\cdot(B\vec{y}) = (B^t\vec{x})\cdot\vec{y}$ y que las matrices de los giros tiene determinante uno y satisfacen $A^{-1} = A^t$.

9) Nota que para cualquier giro de matriz A se tiene $h(A^t\vec{x}) = h(\vec{x})$ porque los giros no cambian la norma. Utilizando esto, el ejercicio anterior y tomando un giro de matriz A que pase $\vec{\xi}$ a $(0,0,\|\xi\|)$, lo cual es siempre posible, deduce que

$$\widehat{h}(\vec{\xi}) = \widehat{h}(0,0,\|\xi\|). \tag{9}$$

10) Comprueba que utilizando coordenadas esféricas se tiene

$$\widehat{h}(0,0,\|\xi\|) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi rf(r)e^{-2\pi i r\|\vec{\xi}\|\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta d\varphi dr.$$

11) Simplifica la expresión anterior integrando en φ y en θ hasta obtener

$$\widehat{h}(0,0,\|\xi\|) = \frac{2}{\|\vec{\xi}\|}\int_0^\infty f(r)\operatorname{sen}(2\pi r\|\vec{\xi}\|)\, dr.$$

12) A partir de esta fórmula y de (9) y recordando que f es impar, demuestra (8), que es lo que se necesitaba para terminar la prueba del Teorema 2.

Lo que me tienes que entregar, sin limitaciones respecto a la extensión, es el capítulo de unicidad con la estructura siguiente: una introducción (la del segundo ejercicio), el Teorema 1 y su demostración y el Teorema 2 y su demostración. Puedes tomar las decisiones que consideres convenientes acerca de la ordenación de los pasos en las demostraciones aunque no respeten [CR17] o los ejercicios anteriores. En el caso del Teorema 2, antes de la demostración escribe algo en la línea de lo que te explicado que aclare un poco por qué eso es un contraejemplo de la unicidad cuando se supone discreto en lugar de (4).

Una última cosa relativa al trabajo en general. Por favor, corrige el título del capítulo dos de tu trabajo a simplemente "Empaquetamiento de esferas" porque si no queda demasiado largo. Además en los otros apartados no hemos repetido cada vez lo de "fórmula de sumación de Poisson". Recuerda también poner las referencias por orden alfabético porque en matemáticas está mal visto no hacerlo.

Referencias

[Cór88] A. Córdoba. La formule sommatoire de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306(8):373–376, 1988.

[CR17] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017.

[LO15] N. Lev and A. Olevskii. Quasicrystals and Poisson's summation formula. *Invent. Math.*, 200(2):585–606, 2015.

[Mey16] Y. F. Meyer. Measures with locally finite support and spectrum. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 113(12):3152–3158, 2016.