En lugar de los puntos 4 y 5 de la propuesta inicial me ha parecido más atractivo poner algunas aplicaciones variadas. Sugiero que titules esta sección "Tres aplicaciones breves" o "Miscelánea de aplicaciones" o cualquier otra cosa que se te ocurra. Estas aplicaciones son tres teoremas debidos a Gauss, Minkowski y Shannon. Sobre todo en los dos últimos las pruebas habituales no emplean Poisson. El primero es el más complicado pero creo que todo te será bastante asequible. La idea es practicar con las diferentes formas de la fórmula que has estudiado. En el primer teorema se usa un caso de la versión del libro de Zygmund [Zyg88], en el segundo la versión para retículos y en el tercero la usual.

Vamos a seguir una estrategia diferente a la de otras hojas que te será más cómoda porque la mayor parte de las fórmulas las podrás copiar del fichero que te envío. Yo te doy los teoremas enunciados y demostrados, tal como podrían aparecer en un libro para investigadores y tú tienes que añadir a las demostraciones todas las explicaciones que sean necesarias para que las pueda seguir cualquier estudiante.

Teorema 1 (Gauss)**.** *Dado* $N \in \mathbb{Z}^+$ *se tiene*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n^2/N} = \frac{1+i^{-N}}{1-i}\sqrt{N}. \tag{1}$$

Teorema 2 (Minkowski)**.** *Sea* A *una matriz real* $n\times n$ *con* $\det(A) \le 1$*, entonces existe* $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$ *tal que* $0 \ne \|A\vec{m}\|_\infty \le 1$.

Teorema 3 (Shannon)**.** *Sea* f *una función tal que* $\widehat{f} \in C^2$ *se anula fuera de* $[-B, B]$*, entonces para cualquier* $\nu \ge 2B$ *se cumple*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu)\,\mathrm{sinc}(\nu t - n) \qquad \textit{donde} \quad \mathrm{sinc}\, x := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

y por continuidad se define $\mathrm{sinc}\, 0 = 1$.

En la pruebas utilizo la notación $\chi_{[a,b]}$ para indicar la función característica de $[a, b]$ (uno dentro, cero fuera) y $\chi^*_{[a,b]}$ para lo mismo con el valor $1/2$ en los extremos. La primera prueba sigue muy de cerca [Dav00], en la otras dos he improvisado.

Demostración del Teorema 1. La función $f(x) = e^{2\pi i x^2/N}\chi^*_{[0,N]}(x)$ está bajo las hipótesis de [Zyg88, p.68] para aplicar la fórmula de sumación de Poisson, la cual prueba

$$G_N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^N e^{2\pi i(x^2/N+nx)}\, dx$$

donde G_N es la suma en (1). Con el cambio $x \mapsto x\sqrt{N} - nN/2$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{G_N}{\sqrt{N}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi i N n^2/2} \int_{n\sqrt{N}/2}^{(n+2)\sqrt{N}/2} e^{2\pi i x^2}\,dx = \sum_{2|n} + \sum_{2\nmid n} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k\sqrt{N}}^{(k+1)\sqrt{N}} e^{2\pi i x^2}\,dx + i^{-N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(k-1/2)\sqrt{N}}^{(k+1/2)\sqrt{N}} e^{2\pi i x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Esto es $1 + i^{-N}$ multiplicado por una constante C dada por una integral. Sabemos que $G_1 = 1$, por tanto dividiendo $G_N/\sqrt{N} = (1 + i^{-N})C$ entre $G_1/\sqrt{1} = (1 + i^{-1})C$, se obtiene el resultado. □

Demostración del Teorema 2. La función "tienda" $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ cumple $\widehat{f}(0) = 1$ y $\widehat{f}(\xi) \geq 0$, por tanto la función de n variables $F(\vec{x}) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ hereda esta propiedad. Por la fórmula de sumación de Poisson para retículos se tiene

$$\det A \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^n} F(A\vec{m}) \geq 1.$$

Si $\det A < 1$, esto da el resultado porque $F(\vec{0}) = 1$. Si $\det A = 1$, cambiando A por $A/(1+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$, se deduce que existe $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$ con $0 \neq \|A\vec{m}\|_\infty \leq 1 + \epsilon$ y permitiendo $\epsilon \to 0$ se obtiene el resultado por la compacidad de $\{\vec{x} : \|A\vec{x}\|_\infty \leq \delta\}$. □

Demostración del Teorema 3. Dado $u \in I = [-\nu/2, \nu/2]$, por la fórmula de sumación de Poisson aplicada a $g(x) = \nu^{-1} f(x/\nu) e^{-2\pi i u x/\nu}$

$$\widehat{f}(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\nu n + u) = \nu^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i n u/\nu}.$$

Multiplicando por $\chi_I(u) = \chi_{[-1/2,1/2]}(u/\nu)$ y calculando la transformada de Fourier inversas de ambos miembros se sigue el resultado ya que $\widehat{\chi}_{[-1/2,1/2]} = \text{sinc}$. □

1) Lee las pruebas anteriores y escríbelas con todas las explicaciones que creas que falten para que tú o cualquiera de tus compañeros pueda seguirlas. No temas alargarlas mucho introduciendo pasos intermedios, lo importante es que esté todo claro para cualquiera que esté al final del grado de matemáticas

Por si tienes curiosidad o te sirve para el siguiente ejercicio, la prueba original de Gauss del Teorema 1 utilizaba argumentos algebraicos y combinatorios [BE81], la habitual del Teorema 2 mezcla cuestiones geométricas y aritméticas [HW08] y la del Teorema 3 se suele hacer con desarrollos de Fourier [DM72, §2.9].

Ahora viene la parte que quizá te cueste más. En cada teorema indico en cursiva frases clave que puedes buscar y unas palabras sobre su utilidad.

Teorema 1: *evaluación de las sumas de Gauss*, *quadratic Gauss sums*. Está relacionado con la ley de reciprocidad cuadrática.

Teorema 2: *Minkowski's (first) theorem* (el teorema 2 es un caso particular), *geometry of numbers*. Se usa en un resultado básico de teoría algebraica de números sobre ideales.

Teorema 3: *Shannon sampling theorem*. Permite recuperar una señal a partir de una muestra discreta.

2) Con la ayuda anterior, busca en la red información sobre estos resultados y escribe unas pocas líneas (menos de diez en cada uno) para motivar cada uno de ellos o explicar su relevancia.

En cuanto a la extensión total del documento que me tienes que entregar, no te pongo ningún límite.

Referencias

[BE81] B. C. Berndt and R. J. Evans. The determination of Gauss sums. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(2):107–129, 1981.

[Dav00] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[DM72] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York-London, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

[Zyg88] A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I, II.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1979 edition.