En esta hoja vamos a ver cómo utilizar la fórmula de sumación de Poisson en un problema geométrico relacionado con *empaquetamiento de esferas.*

Mira el vídeo `https://www.youtube.com/watch?v=ciM6wigZK0w` al menos en el intervalo 2:12–4:00, que es donde se habla de empaquetamiento de esferas (si tienes dificultades con el inglés hablado, pulsa `cc` para subtítulos). Está hecho para público no matemático y te resultará muy sencillo.

Consigue el artículo [Coh17] (lo puedes descargar en `http://www.ams.org/publications/journals/notices/201702/rnoti-p102.pdf`). Lee la introducción, las dos secciones siguientes llamadas "Sphere packings" y "Lattices and Periodic Packing" y lo que puedas de "Linear Programming Bounds", que empieza en la página 108. Si hay algo más que llame tu atención de este artículo y que quieras o puedas leer, adelante con ello. Ten en cuenta que está escrito en plan divulgativo pero dirigido a matemáticos profesionales, por tanto algunas partes te resultarán seguramente incomprensibles porque involucran cosas familiares para los profesores de Matemáticas pero no necesariamente para los estudiantes de grado, en particular, olvídate si quieres de E_8. Lo más importante es que te hagas una idea de las tres secciones señaladas, no te preocupe no entender algunos detalles y frases.

1) Con todo lo que has aprendido con el vídeo y el artículo, describe el problema del empaquetamiento de esferas y su historia. Termina enunciando el Teorema 3 de [Coh17], sin prueba, y mencionando que tiene que ver con la fórmula de sumación de Poisson.

Se dice que Λ es un *retículo* en $\mathbb{R}^d$ si es un conjunto de la forma

$$\Lambda = \{A\vec{n} \ : \ \vec{n} \in \mathbb{Z}^d\} \qquad \text{con } A \text{ una matriz real } d \times d \text{ no singular.}$$

Las columnas de A son vectores que generan un paralelepípedo que se dice que es *paralelepípedo fundamental* o la *celda fundamental.* Si pensamos en $d = 2$, el paralelepípedo, en este caso paralelogramo, fundamental da una baldosa que cuando la usamos para embaldosar todo $\mathbb{R}^2$ resulta que los vértices son los elementos de Λ.

Las matrices A asociadas a un retículos no son únicas y por tanto tampoco lo son los paralelepípedos fundamentales asociados a ellos.

2) Prueba que las dos primeras matrices dan lugar al mismo retículo que es $\mathbb{Z}^2$, mientras que la última da lugar a un retículo diferente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se llama *retículo dual* de Λ al retículo Λ^* que tiene como matriz la inversa traspuesta $(A^{-1})^t$.

3) Explica por qué los volúmenes de los paralelepípedos fundamentales de un retículo y su dual son siempre uno inverso del otro.

La fórmula de sumación de Poisson se cumple con más de una variable en la forma:

$$(*) \qquad \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{n}) \qquad \text{con} \quad \widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi}\cdot\vec{x}} d\vec{x}.$$

Aquí $\vec{\xi}\cdot\vec{x}$ es el producto escalar de $\vec{\xi}$ y $\vec{x}$ (en [Coh17] se usa la notación $\langle\vec{\xi},\vec{x}\rangle$). Esta fórmula se obtiene aplicando la fórmula de sumación de Poisson original sucesivamente en cada una de las variables. Por supuesto se necesitan las condiciones de regularidad correspondientes pero aquí no incidiremos en ello porque solo necesitamos un ejemplo donde están aseguradas porque es de la clase de Schwartz (el espacio de funciones tales que ellas y sus derivadas decaen más rápido que cualqueir potencia negativa).

4) Si $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$, demuestra que $\widehat{g}(\vec{\xi}) = |A|^{-1}\widehat{f}\big((A^{-1})^t\vec{\xi}\big)$.

5) Utiliza el problema anterior para dar una prueba de (3.2) en [CR17] a partir de (*).

6) Explica cómo calcular la transformada de Fourier d-dimensional de $e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}$ a partir de la transformada de Fourier 1-dimensional que conoces de $e^{-2\pi\alpha x^2}$ y utilízala para probar (3.3) de [CR17].

Dado un retículo Λ, llamaremos r_Λ al máximo radio tal que bolas con dicho radio y centros en los elementos de Λ no se solapan. Llamaremos también ℓ_Λ al número de estas bolas que tocan (son tangentes) a la bola en el origen.

7) Calcula r_Λ y ℓ_Λ para los retículos que tienen las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

De esta forma hemos considerado un empaquetamiento de esferas con centros en un retículo. Se llama *lattice kissing number* (tradúcelo como quieras, sugiero *número osculador reticular*) la número $\ell(d)$ que da la cantidad máxima de esferas que pueden ser tangentes a la del origen cuando consideramos todas los posibles retículos de dimensión d.

8) Lee lo que viene en las páginas 6–7 de [CR17] tras (3.3). Enuncia la desigualdad (3.6) como un teorema y reproduce la prueba indicada allí. Para ver que lo entiendes, escribe las "cosas negativas" que allí no se muestran.

9) Anuncia que ideas similares sirven para tratar problemas de empaquetamiento de esferas y escribe la prueba del Teorema 3 de [Coh17] (que tú has enunciado antes) siguiendo las líneas allí señaladas. Tendrás que ajustar la notación y por tanto entenderla un poco. Por ejemplo, nota que $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$ es lo que nosotros hemos llamado simplemente $|\Lambda|$.

10) Trata de redactar lo que has aprendido en los ejercicios anterior de una manera hilada. El objetivo es probar la cota para $\ell(d)$ y el Teorema 3 de [Coh17] pero es muy importante que describas y motives el tema incluyendo todo lo de los ejercicios anteriores. La extensión no está limitada, utiliza cuanto prefieras.

Quizá sea conveniente que incluyas entre las referencias [Sko02] porque es de ahí de donde viene la cota para $\ell(d)$.

Referencias

[Coh17] H. Cohn. A conceptual breakthrough in sphere packing. *Notices Amer. Math. Soc.*, 64(2):102–115, 2017.

[CR17] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017.

[Sko02] N.-P. Skoruppa. Quick asymptotic upper bounds for lattice kissing numbers. *Mathematika*, 49(1-2):51–57 (2004), 2002.