Ya sabemos la definición de representación, así como los conceptos básicos de equivalencia e irreducibilidad. En esta hoja vamos a ver los resultados principales acerca de las representaciones de grupos finitos y nos vamos a detener en un par de ejemplos. En física de partículas aparecen en su mayoría representaciones de grupos infinitos, como SU(2) y SU(3), sin embargo los grupos finitos son un primer paso para entender algunas ideas, por ejemplo el concepto de carácter. La bibliografía que vamos a usar es [Zee16], [Geo82] y [Sim96]. Los dos primeros creo que ya los conoces y tienen una pequeña parte dedicada al caso finito. El último es mucho más extenso y matemático en esta parte para bien y para mal: es riguroso pero comparativamente peca de ser bastante abstracto. En [Cha17] hay poco de esta parte pero lo mismo te sirve de algo darle un vistazo. Un libro excepcionalmente bien escrito es [Ter99]. Apenas haré referencia a él en esta hoja porque no lo tengo a mano pero te recomiendo que mires ahí las cuestiones sobre caracteres que no te queden claras.

En un grupo finito G cada una de representaciones vienen dadas por $|G|$ matrices, donde $|G|$ es el orden de G. Dependiendo de la dimensión de la representación, esto puede ser una cantidad de números muy grande. Por ejemplo, una representación de S_4 de dimensión 3 requiere $4!\times 3^2 = 216$ números. Empleando los llamados *caracteres*, es posible resumir cada una de las matrices en un número y agrupar varios de esos números. En el caso anterior, solo se necesitarían 5 números, uno por cada clase de conjugación de S_4. En cálculos prácticos a menudo los caracteres sustituyen a las matrices de las representaciones que tienen demasiada información redundante.

1) Busca la definición de carácter y trata de ponerte a ti mismo algún ejemplo sencillo como los que provienen de las representaciones irreducibles de S_3.

A pesar de que no haremos gran uso de ella, hay una definición suficientemente importante en la teoría como para que la mires.

2) Busca la definición de *representación regular* (a la derecha y a la izquierda). Para ver que lo has entendido, si π es la representación regular a la derecha de S_3, calcula la matriz 6×6 que corresponde a $\pi\big((1,2)\big)$.

Si tienes tiempo y ganas, mira cómo se extiende la idea de representación regular al caso de grupos infinitos, allí da una "representación" en un espacio de funciones de dimensión infinita. Por si no lo has leído ya, la importancia de la representación regular radica en que es la "madre" de todas las representaciones [Ter99], contiene una copia de cada una de las irreducibles.

Ahora pasamos a los resultados acerca de representaciones y caracteres.

3) Lee la demostración de cada uno de los siguientes resultados de teoría de representaciones de grupos finitos. Las referencias que indico son solo orientativas y siempre puedes buscar otras.

- Basta considerar representaciones unitarias [Geo82, §1.9], [Zee16, II.1].

- Se cumplen las relaciones de ortogonalidad tanto para caracteres como para elementos de matrices [Sim96, III.1,2], [Geo82, §1.12,13], [Zee16, II.2]. Fíjate que en los caracteres hay ortogonalidad "por filas" y "por columnas".
- El número de representaciones irreducibles, el número de caracteres y el número de clases de conjugación coinciden. En particular cada representación irreducible está determinada por su carácter. Además se cumple $|G| = \sum n_j^2$ donde n_j son las dimensiones de sus representaciones irreducibles. Todo esto es esencialmente consecuencia de las relaciones de ortogonalidad. Te dejo que lo busques.
- El carácter correspondiente al producto tensorial de representaciones es el producto de caracteres. Si no lo encuentras, trata de probarlo por ti mismo, es asequible.

A continuación nos ocuparemos de dos ejemplos. El primero tiene una base geométrica y el segundo es una aplicación física.

4) Considera el grupo T de todos los movimientos directos (rotaciones) que dejan invariante un tetraedro regular. Halla la tabla de caracteres y las matrices de las representaciones para un elemento (el que tú quieras) de cada clase de conjugación. Esta tarea está hecha esquemáticamente en [Zee16, pp.121–122], consúltalo sin ningún reparo. Simplemente explícatelo a ti mismo con tus palabras y completando los detalles que faltan. Más concretamente, te sugiero seguir el siguiente esquema:

- Demuestra $T \cong A_4$. Se dice en [Zee16] que es fácil pero no se explica.
- Calcula las clases de conjugación.
- Halla la dimensión de las representaciones irreducibles.
- Halla la tabla de caracteres. Se da en [Zee16] sin explicaciones.
- Calcula las matrices pedidas. Debes fijar una base para que no haya infinitas soluciones. No me parece muy convincente cómo se saca c de la manga en [Zee16, p.122] sin más explicaciones.

El siguiente ejemplo que vamos a ver es de naturaleza física (parece que el original es [Nus68]) e ilustra cómo las representaciones se pueden emplear en un problema mecánico para evitar cálculos. Depende de lo que sepas de física, quizá la parte introductoria que te cuento a continuación te la puedas saltar del todo. En todo caso no es tan relevante para el problema matemático en sí.

Para un sistema conservativo de N partículas en $\mathbb{R}^d$ la energía (el Hamiltoniano) viene dada en mecánica básica por

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \Big(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\Big)^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N).$$

Cerca de un punto de equilibro, V se aproxima por una forma cuadrática y diagonalizando simultáneamente esta forma cuadrática y la que corresponde a la energía cinética, se sigue (si quieres por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi) que el cambio de base que diagonaliza reduce todo a resolver Nd ecuaciones desacopladas del tipo $\ddot{q} = -\lambda q$. Si el punto de equilibrio es estable, entonces $\lambda > 0$ y se tiene $q(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ con $\omega = \sqrt{\lambda}$ y ϕ_0 y A_0 dependiendo de las condiciones iniciales. En conclusión, en primera aproximación alrededor de un punto de equilibrio estable las oscilaciones en coordenadas adecuadas son movimientos armónicos simples. En el caso de partículas unidas con muelles, la energía potencial es ya una forma cuadrática y por tanto el resultado es exacto. Hay dos cosas a determinar, las frecuencias de vibración y las direcciones de vibración, a veces llamadas en la jerga *modos normales de vibración*, que son los vectores del cambio de base.

Hayas seguido o no el párrafo anterior, la traducción matemática de todo esto es que calcular las frecuencias y los modos de vibración de un sistema de N partículas en un espacio d dimensional es lo mismo que hallar autovalores y autovectores de cierta matriz H real simétrica de dimensión Nd. Por si te suena de algo, en nuestro caso clásico H es una matriz asociada al Hamiltoniano pero en el contexto cuántico, de alguna forma el Hamiltoniano es la misma matriz o el operador asociado a ella.

Lo que vamos a ver es que para tres masas idénticas unidas por muelles en los vértices de un triángulo equilátero en $\mathbb{R}^2$, las representaciones son suficientes para hallar algunos modos de vibración sin siquiera escribir el Hamiltoniano[1].

El sistema considerado tiene seis grados de libertad, la x y la y de cada una de las tres masas. Podemos pensar que trabajamos en $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6, \qquad \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3.$$

Ciertamente esto es muy artificial (y no se hace ni en [Nus68] ni en [Zee16]) pero siguiendo [Geo82] prefiero que procedamos así para tener cierta analogía con el tratamiento de partículas en la física cuántica a la que es previsible que lleguemos más adelante.

Las simetrías inducidas por S_3, intercambiando las masas, o si se prefiere las simetrías del grupo diédrico de 6 elementos, deben dejar fijo el Hamiltoniano sea cual sea. Estas simetrías inducen una representación D de dimensión seis que, como en el caso de la ecuación de Schrödinger en la hoja anterior, cumplirá $D(g)^{-1}HD(g) = H$ y que por tanto dejará invariantes los autoespacios que corresponden a un mismo autovalor. De esta forma, los subespacios invariantes de dimensión 1 de D, es decir, los autovectores comunes a todas las matrices $D(g)$, darán modos de vibración. ¿Es razonable pensar que existen tales autovectores comunes? La representación D tendrá una descomposición en representaciones irreducibles de S_3. En términos

[1] De hecho permite hallar todos añadiendo algo de información mecánica (esencialmente la conservación del momento lineal) [Zee16] [Geo82] e incluso simplificar el cálculo de las frecuencias de vibración [O'C71], aunque nada de esto lo haremos aquí.

de matrices se tiene algo como en [Cha17, (7)] y de ahí por cada representación unidimensional que no aparezca repetida dará un solo modo de vibración.

Lo que hacen [Nus68] y [Zee16] es considerar la representación D que corresponde a S_3 como acabo de mencionar. En [Geo82] hace algo a mi juicio cuestionable pero es lo que vamos a seguir porque se acerca al caso cuántico. Lo que considera (sin explicarlo) es que como podemos permutar las partículas, en el $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ tenemos la *representación regular* D_3 dada por las matrices de permutación[2] y en el $\mathbb{R}^2$ debe actuar alguna representación de dimensión 2. La única irreducible es la que llamo π_3 en [Cha17] y así [Geo82] considera $D = \pi_3 \otimes D_3$. Aunque esto suena físicamente razonable no veo claro cómo se podría explicar matemáticamente que esta D deja fijo el Hamiltoniano (esta D no es equivalente a la representación natural del párrafo anterior considerada en [Nus68] y [Zee16]). Nosotros lo daremos por hecho como en [Geo82].

5) Comprueba que con la notación para las representaciones de S_3 como en [Cha17] y $D = \pi_3 \otimes D_3$ se tiene $\chi_D = \chi_{\pi_1} + \chi_{\pi_2} + 2\chi_{\pi_3}$. Explica por qué esto asegura que la descomposición de D como suma directa de representaciones irreducibles es $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3 \oplus \pi_3$.

6) Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^6$ los modos de vibración correspondientes a los sumandos π_1 y π_2 en la descomposición anterior. Explica por qué $P_1 = \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3} D(g)$ es un operador que cumple $P_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ y es nulo en el subespacio ortogonal a $\vec{v}_1$ y $P_2 = \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3} \operatorname{sgn}(g)D(g)$ tiene la misma propiedad con $\vec{v}_2$.

7) Deduce que para $\vec{v} \in \mathbb{R}^6$, $P_j\vec{v}$ es proporcional[3] a $\vec{v}_j$, $j = 1, 2$. Halla $\vec{v}_1$, normalizado a $\|\vec{v}_1\| = 1$, siguiendo esta estrategia por ejemplo con $\vec{v} = \vec{e}_1$. De esta manera solo necesitarás la primera columna de las matrices $D(g)$. Casi sin esfuerzo adicional se obtiene $\vec{v}_2$ pero no te pido que lo halles si no quieres.

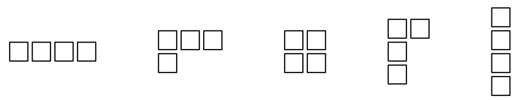
Por si tienes curiosidad, hay dos modos de vibración triviales correspondientes a la invariancia por traslaciones e introduciendo esa información mecánica que no tiene que ver con S_3 se puede eliminar la ambigüedad que introduce que π_3 aparezca dos veces en D y con ello determinar todos los modos de vibración.

Para terminar, quiero mencionar algo que no es en sí un ejemplo pero que aparece en física de partículas. Hay una forma visual de indicar las representaciones irreducibles del grupo de permutaciones S_n que reaparece de otra forma al estudiar $\mathrm{SU}(N)$. Son los *diagramas de Young*. Para S_n un diagrama de Young es un esquema de n celdas alineadas a la izquierda de manera que el número de celdas por fila sea no creciente al ir de arriba a abajo. Por ejemplo, para S_4

[2] Busca la definición si es preciso. La trasposición $(1,2)$, por ejemplo, correspondería a la matriz con $a_{12} = a_{21} = 1$ y $a_{33} = 1$, de esta forma el vector $(a,b,c)^t$ pasaría a ser $(b,c,a)^t$.

[3] Si uno tomase un vector en el ortogonal de $\vec{v}_j$ la constante de proporcionalidad sería nula pero eso es muy improbable eligiendo un vector al azar porque este es un subespacio propio de $\mathbb{R}^6$.

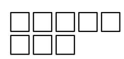
hay cinco posibles diagramas de Young:



Están en biyección con las representaciones irreducibles de S_n. La explicación de esto es mucho más fácil de lo que parece porque hay tantas representaciones irreducibles como clases de conjugación y estas últimas están dadas por la estructura de ciclos que es lo que indican las verticales de los diagramas. Así en el ejemplo anterior el primer diagrama significa 4 ciclos de orden 1 (la identidad), el segundo un ciclo de orden 2 y dos de orden 1 (una trasposición), etc.

Una de las ventajas, no la única, de los diagramas de Young es que es posible calcular fácilmente la dimensión de las representaciones irreducibles por medio de lo que se llama *hook length formula*.

8) Mira esta fórmula en [Wik18] y utilízala para calcular la dimensión de la representación de S_8 que corresponde al diagrama de Young:



Por si no te es suficiente lo que aparece en la wikipedia y lo miras en [Geo82], ten en cuenta que allí viene muy escueto y que solo debes fijarte por ahora en lo relativo al grupo de permutaciones (§1.21-§1.24), no en lo que hace después con SU(3).

Tarea a entregar. Elabora un documento LaTeX que contenga primero todas las definiciones y los resultados teóricos de los dos primeros ejercicios de esta hoja, especialmente el concepto de carácter y las relaciones de ortogonalidad. Si quieres ilustrarlos con algún ejemplo, te recomiendo que sea muy simple para no ocupar demasiado.

Después de esto escribe con más detalle el ejemplo del grupo T y el ejemplo físico de los modos de vibración. Dejo a tu elección poner o no algo de los diagramas de Young.

Intenta que el total no exceda de siete páginas. Esto te obligará a hacer alguna síntesis y quizá derivar pruebas o detalles a la bibliografía.

Referencias

[Cha17] F. Chamizo. Un poco de representaciones, grupos de Lie compactos y autovalores de Laplacianos. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/lie_eig.pdf`, 2017.

[Geo82] H. Georgi. *Lie algebras in particle physics*, volume 54 of *Frontiers in Physics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1982. From isospin to unified theories, With an introduction by Sheldon L. Glashow.

[Nus68] A. Nussbaum. Group theory and normal modes. *Amer. J. Phys.*, 36(01):529–539, 1968.

[O'C71] D. E. O'Connor. Comment on: "Group theory and normal modes". *Amer. J. Phys.*, 39(7):847–848, 1971.

[Sim96] B. Simon. *Representations of finite and compact groups*, volume 10 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Ter99] A. Terras. *Fourier analysis on finite groups and applications*, volume 43 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Wik18] Wikipedia contributors. Hook length formula — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 10-October-2018].

[Zee16] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.