En esta hoja tratamos los puntos 3 y quizá 4 de la propuesta de temario los cuales contienen algunos de los aspectos más divulgados de la física cuántica.

Antes de que leas nada, te cuento un poco la base matemática. Cuando dábamos el estado de espín (en la dirección z) de una partícula, era en general $a|+\rangle + b|-\rangle$ que se identifica con $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Suponiendo el estado normalizado, esto indicaba que con probabilidad $|a|^2$ mediremos $|+\rangle$ y con probabilidad $|b|^2$ mediremos $|-\rangle$. Si ahora queremos medir el espín de tres partículas, aparte de los estados "puros", $|{+}{+}{+}\rangle$, $|{+}{+}{-}\rangle$, $|{+}{-}{+}\rangle, \dots, |{-}{-}{-}\rangle$, podríamos tener superposiciones de ellos. Se tiene entonces un espacio vectorial de dimensión 8 sobre $\mathbb{C}$, es decir, algo isomorfo a $\mathbb{C}^8$. Es natural pensar que viene del *producto tensorial* $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

1) Si nunca has oído hablar del producto tensorial de espacio vectoriales, lee acerca de ello. Un punto de partida básico es [Wik16b].

¿Por qué el producto tensorial? Imagina que tienes dos partículas independientes, cada una en estado $\frac{3}{5}|+\rangle + \frac{4}{5}|-\rangle$. La probabilidad de detectar ambas en $+$ debe ser $(3/5)^2(3/5)^2$, y de detectar la primera en $+$ y la segunda en $-$, $(3/5)^2(4/5)^2$, etc. Este álgebra de las probabilidades es coherente con multiplicar los estados tensorialmente

$$\big(\frac{3}{5}|+\rangle+\frac{4}{5}|-\rangle\big)\otimes\big(\frac{3}{5}|+\rangle+\frac{4}{5}|-\rangle\big) = \big(\frac{3}{5}\big)^2|+\rangle\otimes|+\rangle+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}|+\rangle\otimes|-\rangle+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}|-\rangle\otimes|+\rangle+\big(\frac{4}{5}\big)^2|-\rangle\otimes|-\rangle$$

y decir que el símbolo $|+\rangle \otimes |-\rangle$ representa a primera partícula con espín $+$ y segunda con espín $-$, y lo mismo con la otras combinaciones.

Por otro lado, uno puede inventarse estados que no vengan de productos tensoriales y que, por tanto, no correspondan a partículas independientes cuyas probabilidades se multiplican. Se dice que son estados *entrelazados*.

2) Lee §2.4 de [Cha15]. Prueba además que el estado

$$a_{11}|+\rangle \otimes |+\rangle + a_{12}|+\rangle \otimes |-\rangle + a_{21}|-\rangle \otimes |+\rangle + a_{22}|-\rangle \otimes |-\rangle$$

está entrelazado si y sólo si $\det(a_{ij}) \neq 0$. Para el caso de tres partículas, ya no existe una caracterización tan sencilla.

Ahora estás preparado para entender la famosa paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen, que ha hecho correr ríos de tinta. Soy bastante crítico con el valor científico del artículo original [EPR35] pero te recomiendo que no reflejes mi escepticismo en tu trabajo (a no ser que estés muy seguro) porque es una opinión muy heterodoxa. Lo que está claro es que la contribución posterior de Bell [Bel64], aunque sencilla, es muy sorprendente.

3) Lee §2.5 de [Cha15].

Lo que acabas de leer es un argumento moderno más sencillo que lo que hizo realmente Bell. Creo que es interesante que des también un vistazo al original. Primero te cuento un poco su notación. Considera, lo que llama el *singlet* que puedes pensar como el estado (igual que en §2.5)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\big).$$

Bell escribe $A(\vec{a}) = 1$ si al medir el espín de la primera partícula del singlet en la dirección unitaria $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ sale $+$ y $A(\vec{a}) = -1$ si sale $-$. De la misma forma, $B(\vec{b}) = \pm 1$ refleja el espín medido de la segunda partícula en la dirección unitaria $\vec{b}$. Si el siguiente ejercicio te resulta difícil (espero que no), pídeme ayuda. No es más que una generalización del cálculo de p_{kl} en mis notas.

4) Demuestra que la probabilidad de $A(\vec{a})B(\vec{b}) = 1$ es $(1 - \vec{a} \cdot \vec{b})/2$ y la probabilidad de $A(\vec{a})B(\vec{b}) = -1$ es $(1 + \vec{a} \cdot \vec{b})/2$. Indicación: Recuerda que para vectores unitarios $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\beta$ donde $\beta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ y que $(1 + \cos\beta)/2 = \cos^2 \frac{\beta}{2}$.

5) [muy fácil tras lo anterior] Supongamos que hacemos muchas veces el experimento de medir los espines indicados, entonces el promedio de los valores de $A(\vec{a})B(\vec{b})$ es $-\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Esto es (3) en [Bel64] con su notación para el promedio, que te puede resultar rara.

6) Lee[1] II de [Bel64] y IV hasta (15).

7) Si se cumpliera (15) y (3) coincidiera con (2), entonces $1 - \vec{b} \cdot \vec{c} \geq |\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})|$ para todo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ unitarios. Explica por qué esto es falso, dando un contraejemplo.

El resto de IV no hace falta que lo leas, lo que hace es ver que no hay manera de conciliar las fórmulas ni suponiendo que una aproxima a la otra ni restringiéndose a "ángulos pequeños". Entonces, en principio, haciendo el experimento de promediar $A(\vec{a})B(\vec{b})$ y viendo que da con suficiente aproximación $-\vec{a} \cdot \vec{b}$, es posible descartar que exista una teoría clásica determinista que explique la paradoja EPR. Cuando tal experimento se hizo (años después del artículo de Bell), estrictamente no se uso el espín sino otra propiedad con comportamiento cuántico, la polarización de los fotones. Si tienes curiosidad sobre la historia de los experimentos, está en [Wik16a].

Esta vez te doy bastante libertad sobre lo que me tienes que entregar:

8) Redacta con tus propias palabras lo que has aprendido de las lecturas de esta hoja, incluyendo en tu redacción las soluciones de la segunda parte de **2)**, enunciado como proposición, y las de **4)**, **5)** y **7)**. Utiliza el espacio que necesites, dentro de límites razonables.

[1] Es fácil encontrar una copia de [Bel64] en la red, si no la consigues, yo te la paso.

El punto 4 del temario, la teleportación cuántica, está relacionado con lo anterior. Yo te recomendaría incluirlo pero lo mismo te parece que vamos a tener demasiado material para el trabajo. Dejo a tu arbitrio que mires §2.6 de [Cha15] con la profundidad que te apetezca y añadas a la redacción anterior, lo que quieras de lo que saques en claro.

Referencias

[Bel64] J. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.

[Cha15] F. Chamizo. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2015.

[EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys.Rev.*, 47:777–780, 1935.

[Wik16a] Wikipedia. Bell test experiments — wikipedia, the free encyclopedia, 2016. [Online; accessed 1-November-2016].

[Wik16b] Wikipedia. Tensor product — wikipedia, the free encyclopedia, 2016. [Online; accessed 13-December-2016].