En esta hoja ya vas a tener que empezar a escribir cosas que conformen una primera versión de algunos fragmentos del trabajo. Ya que no te has quejado de ello, voy a intentar explicarte lo que nos queda de bases físicas y a mandarte leer un poco sobre ello. Yo creo que las aplicaciones a la física y la interpretación matemática de diferentes fenónmenos es lo que va a dar mayor originalidad a tu trabajo pero si en algún momento te parece que me estoy pasando, házmelo saber. En esta hoja sigo siendo bastante rollista, las próximas serán más breves.

Un poco de la física del espín. Voy a explicarte de manera física un poco más concreta que en la hoja anterior qué es el espín. Lo que harás fundamentalmente en tu trabajo es tratar la parte matemática pero creo que es importante que tengas una idea sobre la física. Con lo que has leído en §1.2 de mis notas [Cha15], sabes que con la imagen de la mecánica cuántica cosas que parecen continuas en realidad son discretas cuando se miran a pequeña escala, relacionada con el tamaño minúsculo de la constante de Planck. Una de esas cantidades cuantizadas, es el momento angular, que como seguramente sabrás, en el caso clásico de una partícula que gira (como un planeta alrededor del Sol), es un vector perpendicular al eje de rotación. Si no has mirado la §1.5 todavía, lee al menos la parte en la páginas 11–12. Lo que da allí el momento angular es l y m. Para cada energía en (1.15) hay un n y para cada n sólo hay un número finito de momentos angulares.

1) [Muy fácil] Mira la fórmula (1.14) y calcula razonadamente para cada valor n cuántos momentos angulares le corresponden, es decir, cuántos pares (l, m) hay.

Por cierto, la finitud de posibilidades para el momento angular una vez que se especifica de alguna manera su “módulo” está relacionada con que la esfera es compacta pero no creo que lo veamos en tu trabajo a no ser que nos sobre tiempo. El caso es que todo funciona como si clásicamente sólo hubiera un número discreto y finito de planos de giro (de hecho, esta visión hoy obsoleta es la que tenía Sommerfeld). Con ciertos experimentos electromagnéticos se puede hacer que las líneas espectrales de los átomos reflejen los momentos angulares y así se supo al principio del siglo XX que la teoría iba bien. En realidad no tan bien porque en algunos experimentos parecía como si hubiera algo con un $l = 1/2$ y $m = \pm 1/2$. La historia es bastante complicada y más abajo te sugeriré que te refieras a ella someramente en tu trabajo porque en la mayor parte de los textos aparece desvirtuada. El caso es que se concluyó que los electrones tienen un momento angular propio. Eso es muy extraño, sobre todo con la visión actual de la cuántica de campos en que se piensa que el electrón es puntual (¿cómo puede girar sobre sí mismo algo que no tiene dimensiones?) y también que tenga que corresponder a $l = 1/2$, $m = \pm 1/2$, lo que se llama espín 1/2, es decir, clásicamente es como si sólo hubiera dos direcciones posibles para el momento angular. Igualmente raro es que parece que todas las partículas verdaderamente elementales que componen (en cierto sentido) la materia tienen espín 1/2, las que sirven para pegar esas partículas con fuerzas eléctricas y nucleares tienen espín 1 (sin dar detalles sería $l = 0$, $m \in \{-1, 0, 1\}$) y una rara que se introdujo para hacer un apaño en la teoría y que se ha descubierto hace poco, el bosón de Higgs, no tiene momento angular. Si seguimos el plan esperado, tu trabajo terminará con la ecuación de Dirac, que da una "explicación" teórica muy matemática de por qué tiene lógica que las partículas como los electrones tengan espín 1/2.

Sólo para tu curiosidad, el l correspondiente al espín sólo puede tomar valores enteros o semienteros (siempre no negativos) y una vez fijado, hay $2l+1$ posibles m. Así una partícula de espín 3/2, se puede pensar que tiene 4 posibles orientaciones. Nosotros sólo nos vamos a ocupar de espín 1/2 y por tanto habrá dos orientaciones. La función de ondas de una partícula de este tipo es superposición de los dos posibles *estados*, $\alpha\Psi_+ + \beta\Psi_-$, lo que se suele escribir, como te dije, $\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ y se suele suponer normalizado $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Si medimos el estado con una máquina, según la interpretación de Copenhague, obtendremos $|+\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$ y en ese momento la función de onda colapsará a $|+\rangle$. Como verás en breve, esto tiene que ver con las matrices que estudiaste en la hoja anterior.

Los postulados de la mecánica cuántica La física cuántica en sus comienzos era una serie de reglas no muy fundamentadas y dos científicos con amplia formación matemática, von Neumann y Dirac (el primero más matemático que físico y el segundo al revés) asumieron el reto de dar una base rigurosa a la teoría. De ellos proviene lo que se llaman los *postulados de la mecánica cuántica* que intentan hacer una traducción matemática de la teoría física. En diferentes sitios encontrarás listas distintas, a veces bastante largas. En algunos casos incluso se enuncian "postulados" que son consecuencias de otros.

Enuncio aquí brevemente las tres cosas fundamentales:

1. Cada *estado* de un sistema físico se puede expresar como elemento (no nulo) de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ módulo multiplicación por constantes no nulas.

2. Los *observables* son operadores hermíticos $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Sus autovalores son los posibles resultados de una medición. Si un estado $|\Psi\rangle$ es superposición de los autoestados normalizados correspondientes a diferentes autovalores λ_i, digamos $|\Psi\rangle = \sum_i c_i|\Psi_i\rangle$, entonces se medirá λ_i con probabilidad $|c_i|^2$ y, en ese caso, el estado colapsará a $|\Psi_i\rangle$.

3. La evolución de un sistema en el tiempo viene dada por la *ecuación de Schrödinger*
$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Psi\rangle$$
donde H es un observable llamado *Hamiltoniano* que representa la energía del sistema.

Recuerda que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial de dimensión quizá infinita con un producto escalar y completo. El ejemplo que uno tiene en mente es el espacio de funciones formado por las posibles funciones de onda y lo de descartar las constantes es para poder decir que siempre están normalizadas. Respecto a la notación, quizá te suene raro escribir $|\Psi\rangle$ en vez de Ψ, a fin de cuenta es la función de ondas. No es tan importante, algunas veces (pero no siempre) se reserva $|\Psi\rangle$ para indicar que es lo mismo multiplicar por constantes, y que lo suponemos normalizado o para hacer hincapié en que es un elemento del espacio de Hilbert.

Uno puede tomar estos postulados como llovidos del cielo y hacer matemáticas con ellos, en cierto modo es lo que intentaban von Neumann y Dirac para evitar todas las ambigüedades iniciales. Eso no quita para que tenga interés saber cómo a alguien en su sano juicio se le puede ocurrir enunciar estos postulados. No voy a insistir mucho sobre ello pero te voy a pedir que leas algunas cosas.

2) Lee §1.3, §1.8 y §1.9. Algo de esto quizá ya lo hayas leído porque lo mencioné en la hoja anterior. El postulado de la ecuación de Schrödinger no lo vamos a tratar todavía pero si quieres mira las páginas 46–47 de mis notas.

3) Mira los postulados de las primeras páginas de [GP78] (chay muchos ejemplares en la biblioteca de ciencias).

Máquinas de Stern-Gerlach y álgebra lineal Como ya sabes, el espín está relacionado con que los electrones y otras partículas se comporten como imanes. Entonces en principio hay un experimento sencillo para medir si el imán de un electrón apunta hacia arriba o hacia abajo, distinguiendo así los dos estados de espín, y es pasarlo por un campo magnético. Por razones técnicas eso parece que todavía no se ha conseguido hacer en la práctica con electrones sueltos (tienden fuertemente a curvar su trayectoria) pero sí se hizo con electrones dentro de átomos. Ése el el experimento de Stern-Gerlach. Aunque sea una idealización, es conveniente pensar en máquinas que realicen este experimento distinguiendo la orientación del imán de un electrón suelto. Por la interpretación de Copenhague, tenemos la rareza de que la orientación no está definida más que en términos probabilistas pero una vez que la medimos colapsa a una orientación definida.

Como sólo hay dos orientaciones medibles, las cosas resultan matemáticamente más sencillas que en otras situaciones en mecánica cuántica. Además los operadores de los postulados de la mecánica cuántica ahora sólo tiene que actuar sobre dos coordenadas, es decir, a fin de cuentas será aplicaciones lineales $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ y vendrán dadas por matrices. Las que estudiaste en la hoja anterior, llamadas *matrices de Pauli* son la base de todas ellas.

4) Lee las secciones §2.2 y §2.3 de mis notas.

Por si acaso miras otras fuentes, te aviso de que la §2.3 es bastante diferente de lo que puedas encontrar, porque normalmente se introducen las matrices de Pauli a través temas un poco avanzados de física (relaciones de conmutación del momento angular) o de matemáticas (representaciones de cierto grupo de Lie). Aquí uno sólo busca algo que respete los experimentos sin necesidad de saber nada más que los postulados básicos de la física cuántica y un poco de álgebra lineal.

Para entregar. Los siguientes ejercicios son los que me tienes que entregar. Tómate el tiempo que necesites, lo que quiero sobre todo es que estén bien escritos. La situación ideal es que se puedan copiar directamente en tu trabajo (usa LaTeX). Si lo prefieres, mándame poco a poco lo que escribas, aunque yo prefiero la versión final.

5) Escribe brevemente sobre la historia del espín. Ten cuidado porque esto viene mal contado en muchos sitios. En §2.1 de mis notas tienes algo pero no soy un experto. Te recomiendo que mires [SR05] o algún texto de historia de la ciencia. Basta con algún párrafo. Aunque que cueste encontrar fuentes buenas, intenta que eso no se traduzca en escribir demasiado.

6) Intenta escribir con tus palabras lo que has aprendido en las secciones §2.2 y §2.3 de mis notas. En el caso de las máquinas de Stern-Gerlach haz hincapié en cómo se pone de manifiesto la interpretación de Copenhague y después entra en lo de álgebra lineal sin dar tantas explicaciones como doy yo. Al final debes incluir como ejemplo la solución del siguiente problema: Tenemos una máquina SGz, conectamos la salida $+$ a una SGn con $\vec{n}$ correspondiente a $\phi = 0$, $\theta = \pi/3$ (inclinada 60° en la plano XZ) y la salida $+$ de esta última a una SGz. Si en la entrada de la primera máquina introducimos N (grande) electrones con espines al azar, explica cuántos cabe esperar que aparezcan en las salidas $+$ y $-$ de la última máquina.

Por favor intenta ponerte como límite 5 ó 6 páginas para todo lo que tienes que escribir en este ejercicio. Después quizá las reduzcamos.

7) La relación que a un vector de la esfera unidad $\vec{n}$ le da el estado de espín $|\vec{n}+\rangle$ es lo que se llama *representación de Bloch*. Es biyectiva (identificando los estados que difieren en multiplicar por constantes) y tiene algunas propiedades curiosas. Busca en la red o donde quieras algo sobre ella (quizá busca *esfera de Bloch*) y añade algún párrafo a lo que has escrito antes.

Referencias

[Cha15] F. Chamizo. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2015.

[GP78] A. Galindo and P. Pascual. *Mecánica cuántica.* Alhambra, Madrid, 1978.

[SR05] J. M. Sánchez-Ron. *Historia de la física cuántica. vol. 1: El periodo fundacional (1860-1926).* Drakontos. Crítica, D.L.2001, Barcelona, 2005.