En la carpeta que te he dado está el plan sobre el trabajo. Por favor léetelo. También incluyo una pequeña cosa de divulgación muy simple (te ruego que no le des difusión porque todavía no lo he puesto en la red) y un artículo largo que también puedes encontrar en mi página [Cha15]. Mi motivación para escribirlo fue dar a conocer algunas cosas de física cuántica para gente que sabe matemáticas a un nivel universitario pero no necesariamente física. Por ello creo que es un buen punto de partida para tu trabajo y te pediré que leas algunas secciones, por eso te he dado una copia impresa. Por otro lado, ten en cuenta que no está revisado con cuidado y, sobre todo, no lo ha revisado ningún físico. Si algo te hace dudar o encuentras erratas, házmelo saber.

Ya que sois dos los que vais a hacer un trabajo de fin grado en temas relacionados con física cuántica, he dividido en temas que involucran el espín (tu trabajo) y los que no lo hacen. En la "propuesta de temario" puedes ver los epígrafes que he seleccionado pero los iremos modificando si es necesario o si tienes alguna opinión al respecto.

Posiblemente lo que más te va a costar es hacerte una idea de la llamada interpretación de Copenhague, que es la interpretación "oficial" de la mecánica cuántica. Desafortunadamente hay que empezar por esa parte más física para poder seguir con lo que es más matemático. Te intento explicar algunas cosas primero con palabras en los siguientes párrafos, a sabiendas de que es muy posible que no las entiendas bien (por si te sirve de consuelo, ni Einstein ni Schrödinger se creyeron la interpretación de Copenhague en toda su vida y ambos fallecieron unos 30 años después de su invención). Después te diré lo que puedes leer. Te llevará tiempo hacerlo y madurarlo. Para que no te parezca que todo en esta hoja es de leer y entender a largo plazo, te propondré también algunos ejercicios bien concretos de matemáticas que nos serán útiles.

Por diversas razones a principios del siglo XX se comenzó a pensar que las partículas en realidad eran ondas muy concentradas, pulsos que a nivel subatómico oscilaban mucho y era conveniente representar la onda con números complejos (esencialmente porque con $e^{ix}$ nos ahorramos distinguir cosenos y senos). Una partícula, por ejemplo podía venir representada por una *función de ondas*

$$\Psi(x,t) = e^{-2\pi i c_1 t}\phi_1(x) + e^{-2\pi i c_2 t}\phi_2(x) + e^{-2\pi i c_3 t}\phi_3(x)$$

que representa la superposición de tres "tonos puros" (en cierto sentido) de energías $c_1 h$, $c_2 h$, $c_3 h$, si uno se cree la fórmula $E = h\nu$ ($\nu =$ frecuencia $=$ lo que multiplica a $2\pi t$ en una onda). Schrödinger dio una ecuación que permitía calcular $\Psi$ para una partícula pero originalmente no sabía qué significaba $\Psi$ (curioso para los matemáticos: uno se inventa una ecuación pero no sabe lo que aparece en ella). Después se interpretó que $|\Psi|^2$ es proporcional a la probabilidad de encontrar una partícula en cada punto $x$ para un tiempo $t$ dado, lo cual suena bien: onda "más gorda" implica que hay "más partícula" allí. También la probabilidad se reparte entre los tonos puros, si se mide la energía para la partícula representada por $\Psi$, resulta que unas veces obtenemos $c_1 h$, otras $c_2 h$ y otras $c_3 h$, y la probabilidad con la que obtengamos estos valores tiene que ver con los tamaños relativos de de $|\phi_j|^2$. Lo que pasa con las partículas que vemos en nuestra vida ordinaria es que hay un rango muy estrecho de energías que son predominantes y por eso nos parece que hay sólo una energía bien definida sin probabilidades. La interpretación de Copenhague es una vuelta de tuerca más, afirmando que una vez que midas tu onda *colapsa* a lo que has medido. Por ejemplo, si en $\Psi$ has medido energía $c_1 h$, entonces $\Psi$ se convierte por arte de magia en $e^{-2\pi i c_1 t}\phi_1(x)$, sin posibilidad de vuelta atrás.

El espín es algo también raro pero más amigable matemáticamente porque lleva a consideraciones de álgebra lineal como las de los ejercicios que te propondré al final. Después de muchas idas y venidas se vio que algunas partículas necesitaban una especie de funciones de onda vectoriales con dos coordenadas que, como veremos, corresponden a un giro y se detectaban como propiedades magnéticas. Los físicos habitualmente dicen que el estado (la función de ondas) es $\alpha|z+\rangle + \beta|z-\rangle$ o simplemente $\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, para lo que los matemáticos escribiríamos simplemente $(\alpha, \beta)$, o más bien en columna. La propiedad espín es ver si este vector apunta en el eje $X$ o en el eje $Y$, aunque los físicos dicen "arriba" y "abajo" por buenas razones. Si tomamos el estado normalizado $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y medimos la propiedad espín, obtendremos "arriba" con probabilidad $|\alpha|^2$ y abajo con probabilidad $|\beta|^2$, tras lo cual, por la interpretación de Copenhague el estado pasará a ser $\alpha|z+\rangle$ y $\beta|z-\rangle$, respectivamente. Bueno, en la práctica se escribe $|z+\rangle$ y $|z-\rangle$ porque casi siempre se normaliza.

Después de este rollo, vamos con algo muy ligero.

**1)** Lee "Esos pequeños y maravillosos imanes". Fíjate en la figura de la p.3, aparecen unas fórmulas misteriosas que ya veremos. Por ahora piensa por qué no sería lógico que aparecieran $\cos^2\alpha$ y $\sin^2\alpha$ que también suman probabilidad 1.

**2)** Lee los apartados §1.1, §1.2 y §1.6 de mis notas [Cha15] (de las que te he pasado una copia).

Si estás totalmente perdido, pídeme ayuda. Espero que no. Lo mismo te ayuda a entender las cosas mejor pasar también por las secciones §1.3, §1.4 y §1.5.

**3)** Da un vistazo por encima al artículo de la wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Copenhagen_interpretation` hasta el apartado "Principles" incluido. Lo puedes completar con `https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_function_collapse`.

Como contrapunto de esta saturación que quizá tendrás del tema, vamos con unos cuantos ejercicios de cálculos matemáticos que te resultarán menos extraños y nos serán útiles más adelante. Están relacionados con las siguientes matrices $2\times 2$ que actúan sobre vectores complejos de dos coordenadas, esto es, $\mathbb{C}^2$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Escribo $\imath$ en lugar de $i$ con el significado $\sqrt{-1}$ para que no se confunda con los subíndices que aparecen después (a los físicos cuánticos habitualmente no les importa que aparezca una $i$ con dos significados en la misma fórmula porque está claro por el contexto y sería lioso añadir letras). En física, dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ se suele escribir $\vec{v}\cdot\vec{\sigma}$ o también $\vec{\sigma}\cdot\vec{v}$, para indicar la matriz $v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$. Usaremos nosotros también esa notación.

Intenta resolver los siguientes ejercicios sobre las matrices anteriores, buscando pruebas elegantes y breves.

**4)** Calcula los autovalores de estas matrices. Deduce de ello, sin hacer más cálculos que $\sigma_j^2 = I$ con $I$ la matriz identidad.

**5)** Prueba que el espacio vectorial generado por $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ sobre $\mathbb{R}$ es el espacio de matrices matrices hermíticas $2\times 2$ (si no te suena eso eso de "hermítico", mira [HZ12]).

Vamos a repasar dos cosas de matemáticas que no sé si te habrán contado. Una de ellas es el *símbolo de Levi-Civita* $\epsilon_{ijk}$ con $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ que vale 1 si $i, j, k$ es una permutación par de $1, 2, 3$, vale $-1$ si es impar y cero si no es permutación. Por ejemplo, $\epsilon_{213} = -1$ (el 2 y el 1 están intercambiados), $\epsilon_{231} = 1$ (hay que hacer dos intercambios para ordenarlos) y $\epsilon_{131} = 0$ (por mucho que reordenemos no sale 123). Una de las utilidades de esta notación es trabajar con productos vectoriales y sus generalizaciones:

**6)** Comprueba que si $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$, entonces $w_i = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}u_j v_k$ donde los subíndices indican las coordenadas de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

La otra cosa matemática que debes aprender o recordar, es la exponencial de una matriz que se define mediante la fórmula $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$. La serie de matrices siempre converge bien, no te preocupes por ello. Cómo hacer el cálculo para matrices diagonalizables generales te debería quedar claro con este ejercicio.

**7)** Explica por qué $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$. ¿Cuánto da la exponencial de una matriz diagonal?

Volvamos a las matrices:

**8)** Demuestra la fórmula $(\vec{\sigma}\cdot\vec{u})(\vec{\sigma}\cdot\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})I + \imath\vec{\sigma}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$. Indicación: Si no quieres aburrirte haciendo cálculos, te sugiero que la deduzcas de $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I + \imath\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$ con $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. A ver si se te ocurre cómo reducir las cuentas para probar esta fórmula auxiliar, ¿recuerdas que $(AB)^t = B^t A^t$?

**9)** Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, intenta explicar con palabras o con una fórmula, cuál es el resultado de $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$.

**10)** Con lo que has aprendido, deduce con poco esfuerzo que si $\|\vec{u}\| = 1$ entonces $\vec{\sigma}\cdot\vec{u}$ tiene autovalores 1 y $-1$. Indicación: Si ves que su traza es cero y su cuadrado es $I$, ya está hecho.

**11)** Si $A$ cumple $A^2 = I$ prueba que para $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple $e^{\imath\theta A} = I\cos\theta + \imath A\sin\theta$. ¿Cuál sería la fórmula para $e^{\theta A}$

**12)** ¿Se cumple $e^{\imath\sigma_1+\imath\sigma_3} = e^{\imath\sigma_1}e^{\imath\sigma_3}$?

Por ahora no hace falta que me entregues nada escrito, sólo mándame las cosas sobre las que tengas dudas (si las hay). Un poco más adelante tendrás que redactar un apartado para el trabajo de fin de grado que incluya algunas de las propiedades que has probado y eso sí que me lo tendrás que mandar, por tanto no tires los papeles.

## Referencias

[Cha15] F. Chamizo. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2015.

[HZ12] M.J. Hernández, E.; Vázquez and M.A. Zurro. *Álgebra lineal y Geometría.* Pearson/Addison Wesley, tercera edition, 2012.