Las órbitas elípticas de Kepler para los planetas son una buena aproximación pero si quisiéramos hacer cálculos con precisión, incluso suponiendo inexistentes las correcciones relativistas (recuerda lo visto para Mercurio), deberíamos considerar el *problema de n cuerpos*, asociado a n masas puntuales $m_1, m_2, \dots, m_n$ que evolucionan interactuando por la atracción gravitatoria mutua. El Lagrangiano asociado es

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \|\dot{\mathbf{r}}_k\|^2 + G \sum_{1\le i<j\le n}\sum \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

1) ¿Sabrías explicar por qué se requiere la ordenación de k y j en vez de simplemente $k \neq j$? Para ello, escribe la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a $\mathbf{r}_k$ y observa la fuerza $m_k\ddot{\mathbf{r}}_k$ sobre la masa m_k que se obtiene con cada una de las dos posibilidades mencionadas para los límites de la suma.

El problema de los n cuerpos es tremendamente difícil y lo que se sabe de él es muy poco y muy básico. A veces se le tilda de analíticamente insoluble por su relación por el caos. En realidad, aunque muchos matemáticos lo desconozcan, existe una solución en forma de serie lo que ocurre es que tiene escaso interés práctico [8], [4]. Esta hoja trata de algunas de los aspectos básicos. Posiblemente te parezca que es menos profunda que hojas anteriores.

En primer lugar, veamos la demostración matemática de algo que intuitivamente suena bastante obvio: es imposible disponer las n masas de forma que todas las fuerzas sobre cada una de ellas se cancelen, esto es lo que se llama una *solución de equilibrio*. Equivalentemente, es imposible que las masas queden estáticas o que avancen con la misma velocidad constante. La razón intuitiva que daría cualquiera es que, como la gravedad es atractiva, cualquier presunta solución de equilibrio tenderá a colapsar. Para la prueba matemática, necesitamos un resultado sobre funciones homogéneas que seguramente ha aparecido en alguno de tus cursos del grado.

2) Recuerda (o aprende) que una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *homogénea* de grado p si $f(t\mathbf{r}) = t^p f(\mathbf{r})$ para $\mathbf{r} \in \mathcal{U}$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que cualquier función de este tipo satisface $\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = pf(\mathbf{r})$, donde el punto indica producto escalar. Da ejemplos de una función homogénea de grado 2 y otra de grado 0, especificando el abierto $\mathcal{U}$, y comprueba la igualdad anterior para ellas.

3) Sea $\mathbf{F}_k$ la fuerza sobre m_k, que calculaste en el primer ejercicio. Empleando el resultado sobre funciones homogéneas, deduce que $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k < 0$ y por tanto no existen soluciones de equilibrio. *Indicación*: La energía potencial V es homogénea como función de $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$.

Estirando temerariamente nuestra intuición anterior, uno podría pensar que si las masas en el problema de n cuerpos no tienen velocidad suficiente, el sistema está genéricamente abocado a colapsar en un tiempo finito en un punto. Cómo débil apoyo a esta idea, usando el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede probar que cuando una solución no se puede extender más allá de $t < t_0$ necesariamente $\lim_{t\to t_0^-} d(t) = 0$ con $d(t)$ la distancia mínima entre las masas. No probaremos este resultado sobre extensibilidad porque requiere un desvío para recordar cómo se trataba la existencia y unicidad. Si tienes curiosidad o si quieres incluirlo en tu trabajo, está en [5, Prop.4.12].

Por otra parte, las órbitas de Kepler contradicen la idea anterior del colapso en tiempo finito cuando la velocidad no es suficiente. Imaginemos que por el choque frontal de un asteroide, la Tierra redujera apreciablemente su velocidad orbital. Eso sería catastrófico para la vida pero el sistema Sol-Tierra no dejaría de ser estable: la actual trayectoria, prácticamente circular, pasaría a ser elíptica pero la Tierra no caería al Sol. El siguiente ejercicio, alejado del grueso de esta hoja, es un buen repaso de lo que has aprendido de las leyes de Kepler. Si te resulta difícil, pídeme alguna pista.

4) Supongamos que la velocidad orbital de la Tierra (que es casi constante en toda su órbita y puedes tomar igual a $2{,}975 \cdot 10^4\, m/s$) se redujera de pronto a un $80\,\%$ de su valor actual. ¿Cuántos días duraría un año?

Un resultado bello, sencillo e ingenioso, llamado *teorema del colapso total de Sundman*, afirma que los colapsos totales (de todas las masas) en un punto solo pueden ocurrir en situaciones que no son astronómicamente realistas (si nos atenemos a los modelos vigentes sobre la formación de sistemas planetarios y galaxias a partir de nubes en rotación). Este resultado lo puedes encontrar en [5] o [7] y en otros textos. Lo que te propongo es que tomes como punto de partida algo que escribí hace tiempo a nivel divulgativo.

5) Lee [2] y escribe el resultado principal con tus palabras a un nivel adecuado para tu trabajo. Incorpora también algunas líneas sobre el contexto histórico, vengan o no en [2]. Por ejemplo, en [1] se habla de K.F. Sundman, cuya contribución al caso $n = 3$ ha quedado bastante olvidada.

Cuando digo "adecuado para tu trabajo" me refiero a que no reflejes las explicaciones que te parezcan innecesarias y que adaptes la notación y las referencias para que todo concuerde con lo que has escrito hasta ahora. Nota que en [2] se explican desde el principio cosas que tú ya sabes por hojas anteriores.

Ahora vamos a abordar un tipo especial de soluciones extremadamente sencillas en las que hay colapso total. Esto parece un poco absurdo a la vista de que el resultado de Sundman afirma que esta situación no es realista. Todavía más, supondremos que las trayectorias hacia el colapso son rectas, lo cual difícilmente tiene una realización astronómica. Sin embargo, el estudio de esta situación un primer paso para entender algunas soluciones exactas y aproximadas del problema de tres cuerpos que tienen relevancia teórica y práctica. Además, sabemos tan poco del problema de n cuerpos para $n > 2$ que las soluciones especiales ya son un logro. Por ejemplo, una solución periódica para $n = 3$ que había escapado a la intuición de los clásicos [3], causó un gran revuelo en el año 2000 cuando se descubrió.

Se dice que una colección ordenada de n vectores distintos en $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0n}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^n$, es una *configuración central* si existe una función $r(t)$ tal que $\mathbf{r}_k(t) = r(t)\mathbf{r}_{0k}$ es solución del problema de n cuerpos. En términos geométricos, la trayectoria de cada masa está contenida en una recta que pasa por el origen y las posiciones para diferentes tiempos solo difieren en homotecias. Si existe una solución de este tipo, también lo será imponiendo las ligaduras que corresponden a las trayectorias rectilíneas, por tanto tendremos asociado el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}I(\mathbf{r}_0)\dot{r}^2 - V(\mathbf{r}_0)r^{-1},$$

donde se ha empleado la notación de [2] con $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0n})$. Si no ves claro el Lagrangiano anterior, piensa sobre ello hasta que lo entiendas. Por si lees otras fuentes, habitualmente en mecánica celeste I se define con el factor $1/2$ incorporado pero a mí no me parece muy lógico cuando uno piensa en la definición habitual del momento de inercia de la mecánica básica [6].

6) Deduce de las ecuaciones de Euler-Lagrange que $r(t)$ cumple $r^2\ddot{r} = V(\mathbf{r}_0)/I(\mathbf{r}_0)$.

El segundo miembro es una constante y resolviendo la ecuación diferencial determinamos r salvo constantes de integración ¿Es la ecuación diferencial $y^2y'' =$ cte fácil de resolver? Definitivamente no, sería difícil como ejercicio para un curso de EDO pero en realidad nosotros ya la hemos visto en un contexto más general. Si tienes claro lo estudiado para el problema de Kepler, el siguiente ejercicio tiene una solución muy rápida.

7) Prueba que $r(t)$, supuesta acotada en un intervalo maximal de definición, es la función definida implícitamente por $r(t) = K_1 \sin^2 \frac{f(t)}{2}$ con f cumpliendo $f(t) - \operatorname{sen} f(t) = K_2(t + t_0)$ donde K_1, K_2 y t_0 son constantes que se ajustan en términos del valor de $V(\mathbf{r}_0)/I(\mathbf{r}_0)$ y de las condiciones iniciales $r(0)$ y $\dot{r}(0)$. *Indicación*: Si te sorprende el t_0 que no aparece en la ecuación de Kepler, nota que hicimos el convenio de que $t = 0$ correspondía al perihelio y eso no tiene sentido aquí.

Recapitulando, hemos probado que cualquier solución de las de tipo especificado, la r está determinada pero eso no significa que cualquier elección de los $\mathbf{r}_{0k}$ dé lugar a una solución del problema de los n cuerpos. Esto es falso, es decir, no todas las *configuraciones* $(\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0n})$ son centrales.

Trabajando con el Lagrangiano original del problema de los n cuerpos o con las fuerzas $\mathbf{F}_k$ de ejercicios anterior la condición necesaria y suficiente para que una configuración sea central es que

$$\ddot{r}\mathbf{r}_{0k} = Gr^{-2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{m_j(\mathbf{r}_{0j} - \mathbf{r}_{0k})}{\|\mathbf{r}_{0j} - \mathbf{r}_{0k}\|^3}.$$

8) Explica la afirmación anterior y deduce, usando el valor de $r^2\ddot{r}$, la siguiente caracterización: $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{r}_{01}, \dots, \mathbf{r}_{0n})$ es una configuración central si y solo si $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ es un punto crítico de la función $V^2(\mathbf{r})I(\mathbf{r})$.

Es bastante intuitivo que las configuraciones centrales no son invariantes por traslaciones, de hecho su centro de masas está siempre fijado.

9) Demuestra que en una configuración central el centro de masas es siempre el origen. Es decir, $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_{0k} = \mathbf{0}$. Este centro de masas es el punto de colapso total.

A ver si se te ocurre el siguiente problema sin indicaciones. No es fácil. Si te cuesta mucho, te daré una pista.

10) Dadas tres masas cualesquiera en un plano, no alineadas y con centro de masas en el origen, prueba que si determinan una configuración central entonces están en los vértices de un triángulo equilátero.

El recíproco también se cumple. Si tienes interés en incluirlo en tu trabajo lo podemos hacer. Nota que como el centro de masas es $\mathbf{0}$, a no ser que las masas sean iguales, el triángulo equilátero no estará centrado en el origen. Con un argumento similar se demuestra que cuatro masas no coplanares con centro de masas en el origen determinan una configuración central si y solo están en los vértices de un tetraedro regular. Estos resultados se aplican a masas cualesquiera, si especificamos valores de las masas podemos encontrar otras configuraciones. Por ejemplo, si $m_1 = \cdots = m_n$ suena bastante intuitivo, y se puede probar, que al distribuir las masas en los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen, se obtiene una configuración central.

Tarea a entregar. Los resultados que debes reflejar, con sus pruebas, son la ausencia de las soluciones de equilibrio, el teorema del colapso total de Sundman y la estructura de las configuraciones centrales. Para ello, como siempre, te sugiero que intentes conectar los ejercicios anteriores.

Creo que en cuatro o cinco páginas puedes incluir sobradamente todo el material relativo a esta hoja. De todas formas, si necesitas más, no tengas reparos.

Referencias

[1] J. Barrow-Green. The dramatic episode of Sundman. *Historia Math.*, 37(2):164–203, 2010.

[2] F. Chamizo. ¿Y si explota todo? `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819algII/titan/sundman.pdf`, 2019.

[3] A. Chenciner and R. Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. of Math. (2)*, 152(3):881–901, 2000.

[4] F. Diacu. The solution of the n-body problem. *Math. Intelligencer*, 18(3):66–70, 1996.

[5] H. Geiges. *The geometry of celestial mechanics*, volume 83 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[6] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980.

[7] H. Pollard. *Celestial mechanics*, volume 18 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.

[8] Q. D. Wang. The global solution of the n-body problem. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 50(1):73–88, 1991.