Mercurio es el planeta más cercano al Sol y por tanto el más afectado por la gravedad del Sol. En esta hoja vamos a ver dos de sus peculiaridades. La primera es que Mercurio es el único planeta en el que se podría presenciar un doble amanecer. Esto no es más que una curiosidad teórica, evidentemente nadie lo ha contemplado, pero nos servirá para profundizar y practicar con el problema de los dos cuerpos. La segunda peculiaridad es que Mercurio presenta algunas pequeñísimas irregularidades en su órbita, detectadas desde finales del siglo XIX, que no tienen explicación con la ley de gravitación de Newton (tomando en cuenta la acción del resto de los planetas). Suponiendo la ecuación que se deduce de la relatividad general, veremos cómo explicar esas irregularidades.

Comencemos recordando de la hoja anterior que la trayectoria, en polares, de un planeta venía dada por $r = r(\theta)$ donde

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{con} \quad \ell = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{y} \quad h = r^2\dot{\theta}.$$

Recuerda que h era constante, por la conservación del momento angular. Recuerda también que, de acuerdo con la primera ley de Kepler, el Sol está en el origen porque es un foco de la elipse descrita por $r = r(\theta)$. Habíamos elegido convencionalmente el foco que está a la derecha, lo que equivale a que $r_p = r(0)$ da un mínimo de la fórmula anterior, que indica la distancia al perihelio. También habíamos convenido que el origen de tiempos se elige en el perihelio, esto es, que θ como función del tiempo verifica $\theta(0) = 0$. Tomamos como sentido en el que se recorre la órbita elíptica el positivo (antihorario), que en los planetas corresponde a mirar el Sistema Solar desde el norte (arriba).

1) Sea v_p la velocidad de un planeta en su paso por el perihelio. Muestra que $v_p = r_p\dot{\theta}(0)$. Con ello y la relación entre h, ℓ, a y e, deduce la fórmula $v_p = br_p^{-1}\sqrt{\mu/a}$.

Ya vimos en la primera hoja que el Hamiltoniano es constante a lo largo de cada trayectoria, por tanto $\frac{1}{2}v^2 - \mu/r$ es constante. Es la suma de la energía cinética más la potencial, divididas por la masa.

2) Demuestra que la velocidad en cada posición de la órbita viene dada por la sencilla fórmula $v = \sqrt{2\mu(r^{-1} - d^{-1})}$ donde d es el diámetro de la elipse. Esto es, $d = 2a$.

3) Busca los valores de a y e para Mercurio, por ejemplo en [6], y calcula ℓ. Busca también el valor de la constante μ para obtener el de h para Mercurio. Todo ello en el Sistema Internacional de unidades (ℓ en metros y h en metros al cuadrado por segundo) y con 3 cifras significativas.

4) Comprueba que, con la precisión utilizada, $\ell/(1+e)$ coincide con el valor de r_p citado en [6], aproximadamente $4{,}6 \cdot 10^{10}m$. Explica por qué. Dependiendo de cómo hayas hecho el ejercicio anterior, quizá este lo tengas ya resuelto.

Hasta bien entrado el siglo XX, se creía que Mercurio presentaba siempre la misma cara al Sol, porque eso es lo natural cuando las masas están cerca y descompensadas (es lo que ocurre por ejemplo con la Luna). Sin embargo, cuando se lanzaron las primeras sondas se comprobó que presentaba un movimiento de rotación sobre sí mismo de $58,65$ días terrestres, en el mismo sentido que la Tierra y el resto de los planetas excepto Venus y en parte Urano (que tiene un eje casi horizontal).

5) Sabiendo que el radio de Mercurio es $R = 2{,}44 \cdot 10^6\, m$, halla la velocidad v_r en m/s de un punto del ecuador debido a la rotación del planeta sobre sí mismo. Da en general una fórmula para la velocidad en función de la latitud.

6) Comprueba que para Mercurio, en unos puntos de la órbita, incluyendo el perihelio se tiene $v/r > v_r/R$ y en otros (que son la mayoría), incluyendo el afelio, $v/r \le v_r/R$. Explica lo más matemáticamente que puedas por qué esto implica que a veces desde Mercurio se ve que el Sol se mueve en el cielo en sentido retrógrado, de oeste a este, en vez de como se ve desde la Tierra (y también en Mercurio la mayor parte del tiempo).

La solución del ejercicio anterior es geometría elemental pero dependiendo de tu intuición geométrica te puede costar. Por si te da alguna pista, en

`http://www.skymarvels.com/infopages/mercuryinfo.htm`

hay una animación del movimiento de Mercurio visto desde el Sol. Si te fijas, hay un instante en que se detiene y, se adivina un ligerísimo retroceso. Esa minucia es el movimiento retrógrado. El hecho de que sea tan pequeño tiene que ver con que el máximo valor de v/r a lo largo de la órbita es solo ligeramente superior a la constante v_r/R. Si estuviéramos en el momento adecuado en un punto de la superficie de Mercurio donde está amaneciendo, podríamos ver la transición sentido habitual-retrógrado-habitual como un doble amanecer.

Los días solares en Mercurio son tan sumamente largos, casi medio año terrestre, que ese instante de movimiento retrógrado casi inapreciable en la animación, en realidad dura muchas horas. No te tomes demasiado en serio el vídeo que hay en el sitio web anterior bajo el enlace (1.6.X). Es una exageración artística, con el tiempo muy acelerado y una separación del Sol sobre el horizonte mayor que la real.

7) Usando la ecuación de Kepler y todo lo que has aprendido en esta hoja y la anterior, halla numéricamente el tiempo τ en horas tal que el movimiento retrógrado aparente del Sol se produce en $t \in [-\tau, \tau]$. Recuerda que por convenio, se considera que el tiempo $t = 0$ es el paso por el perihelio. Como ayuda, nota que con la notación usada en la ecuación de Kepler en la hoja anterior,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{sen} f}{\cos f - e}.$$

Parte de los resultados de los cálculos de los ejercicios anteriores, y algunos comentarios al respecto, están, a nivel divulgativo muy básico, en el capítulo 4 de mi libro [3]. No tengo los derechos y por tanto no te puedo pasar un PDF. Si quieres darle un vistazo rápido lo tienen en la Librería de la UAM. En algún momento donaré un ejemplar a la biblioteca.

Ahora cambiamos radicalmente de tema y vamos con las correcciones relativistas. La mayor parte consistirá en leer y entender algunas referencias.

Resulta que con las correcciones relativistas, Mercurio no sigue una elipse estática, siempre descontando la influencia de otros planetas, sino que la órbita gira ligeramente a lo largo del tiempo. Mira por ejemplo la figura (muy exagerada) en [2, p.27]. Eso es lo que se llama *rotación del perihelio* o *desplazamiento del perihelio* y es muy pequeño, unos 43 segundos de arco por cada 100 años terrestres, pero detectable con instrumentos precisos. Esta mínima rotación tuvo gran importancia en el desarrollo de la teoría general de la relatividad. Si quieres mencionar algo de ello en tu trabajo, seguro que puedes encontrar información en muchos sitios. Aunque no recuerde bien de memoria qué viene allí sobre los aspectos históricos, me atrevo a sugerir [5], que es una especie de enciclopedia en un solo volumen sobre gravitación.

Los argumentos relativistas también usan un Lagrangiano pero guardan solo una analogía lejana con lo visto en hojas anteriores pues tal Lagrangiano está asociado a la geometría de cierta variedad Riemanniana que procede de unas ecuaciones muy complejas. Tomaremos como punto de partida la ecuación diferencial que se deduce para $r = r(\theta)$, que es una perturbación de la que se obtiene con la gravitación de Newton. Para lo que viene después, es más conveniente escribir esta ecuación relativista para $u = u(\theta)$ donde $u = 1/r$. Resulta ser:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = r_0u^3 - u^2 + Bu + A \qquad \text{con} \quad r_0 = 2\frac{\mu}{c^2}.$$

Aquí c es la velocidad de la luz y $\mu = GM$, con M la masa del Sol como en la hoja anterior. Las constantes A y B en principio no son muy explícitas a partir del razonamiento teórico.

8) Explica por qué por definición de afelio (el punto más lejano al Sol de la órbita) y perihelio, el polinomio cúbico P en el segundo miembro de la ecuación anterior debe cumplir $P(u_a) = P(u_p) = 0$ donde u_a y u_p son los valores de $u = 1/r$ en el afelio y el perihelio. Utiliza este resultado (o mira [1]) para concluir que la ecuación equivale a

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = P(u) \qquad \text{con} \quad P(u) = (u-u_a)(u_p-u)\big(1 - r_0(u+u_a+u_p)\big).$$

9) Lee en [1, p.74] por qué la variación del ángulo en radianes entre dos perihelios consecutivos viene dada por

$$\Delta = 2\int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} - 2\pi.$$

Escríbelo introduciendo las explicaciones adicionales que consideres necesarias.

La integral no se puede calcular de forma explícita. La idea es que como $r_0(u + u_a + u_p)$ es muy pequeño, P es casi de segundo grado, lo que daría una integral computable. Cómo justificar esto de una manera que suene mínimamente creíble desde el punto de vista matemático es algo que pocos libros de física hacen (una excepción es [4]) y Einstein en el original tampoco dio mucho detalle. Muchos autores suponen que $r_a = 1/u_a$ y $r_p = 1/u_p$ son aproximadamente iguales, pero en el caso límite en que lo son, la órbita es circular y no tiene sentido hablar del perihelio y su desplazamiento. Cuanto más cerca estemos de esta situación límite, más difícil será localizarlo y, desde mi punto de vista, menos creíble es cualquier argumento basado en esta hipótesis sin más explicaciones.

10) Lee en la primera mitad de la página 28 de [2] cómo llevar a cabo la aproximación de una integral algo más general que la anterior. Después aplica el resultado para concluir la fórmula

$$\Delta \approx \frac{3}{2}\pi r_0 \Big(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p}\Big)$$

con r_a y r_p las distancias del Sol al afelio y al perihelio.

11) Con los datos orbitales de Mercurio, deduce que Δ es aproximadamente $5{,}02 \cdot 10^{-7}\, rad$ y sigue el razonamiento de [1] para ver que esto corresponde a unos $43''$ por siglo.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios para explicar el doble amanecer de Mercurio y la rotación del perihelio debida a la relatividad general.

Esta hoja debería ser más breve que las dos anteriores y te sugiero una extensión de a lo más 5 páginas con el formato de esta hoja.

Referencias

[1] F. Chamizo. Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf`, 2009.

[2] F. Chamizo. Post-Newtonian approximations. [Homework for a Master course.] `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/ppn_chamizo.pdf`, 2016.

[3] F. Chamizo. *La Matemática y la Ciencia oculta.* UAM Ediciones, 2020.

[4] J. Foster and J. D. Nightingale. *A short course in general relativity.* Springer, New York, third edition, 2006.

[5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.

[6] Wikipedia contributors. Mercury (planet) — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mercury_(planet)&oldid=1047143858`, 2021. [Online; accessed 29-September-2021].